



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Pricing de Credit Default Swap k-ème défaut : Marché du GOLF

Préparé par : *M. BEN TAMA LARBI*

Sous la direction de : *M. SAID KHALIL (INSEA)*

*M. GIOVANNETTI GUILLAUME (Société Générale ATS)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

## Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat Finance

*Devant le jury composé de :*

- *M. SAID KHALIL (INSEA)*
- *M. EL QALLI YASSINE (INSEA)*
- *M. GIOVANNETTI GUILLAUME (Société Générale ATS)*

# Dédicace

En guise de dédicace, que puis-je bien écrire ?  
Remercier certains ? Ceux que je préfère chérir ?  
À vous, mes très chers parents, c'est à vous que je dois  
Cette œuvre, ce labeur, ce fruit de tous mes émois.

Je vous dédie ce travail, et je le crie haut et fort  
Vous qui m'avez soutenu, envers et contre tous les torts.  
Mais quelle dédicace, et quelle immense joie ?  
En ces temps de détresse, de désarroi sans foi.

Une guerre, implacable, ne montrant nulle compassion,  
Oh, à vous, cher frère, je demande humblement pardon.  
À nos frères en Palestine, que Dieu vous délivre  
De ces vermines sans âme, qui sèment l'angoisse et le givre.

Eux qui n'épargnent ni gamin, ni gamine innocente,  
Que Dieu vous garde en sa lumière éclatante.  
À tous les martyrs, à ceux qui n'eurent d'autre choix que de mourir,  
À vous je dédie ce travail, pour votre ultime soupir.

À nos cousins en Afrique noire, terre de richesses oubliées,  
À ceux qui, pour certains, n'ont même pas de quoi boire et manger.  
À vous je dédie cette œuvre, à vous je le dis,  
Que votre courage soit loué, et jamais terni.

À nos frères aux quatre coins du monde,  
À ceux qui ne connaissent que des choses immondes.  
À vous, qui vivez dans la douleur et le chagrin,  
À vous je dédie cet écrit, de tout mon cœur humain.

À toutes les victimes de guerre, dont le sort nous interpelle,  
Pour qui la guerre n'a guère montré de trêve ni de répit,  
À vous, innocents sacrifiés, je dédie ces lignes,  
Que votre mémoire inspire la paix dans nos esprits.

Et enfin, à tous ceux que la vie n'a point épargnés,  
À ceux qui, en fin de compte, se retrouvent dépouillés,  
À vous je dédie ce travail, ce labeur de l'esprit,  
Que votre résilience et force soient toujours bénies.

À la misère dans ce bas monde,  
Aux miséreux qui n'eurent d'autre choix que de souffrir  
Je dédie ce travail,  
Larbi,

# Remerciement

Vous remercier maintenant je le fais  
À titre nominatif oui je m'y soumetts  
Merci à toi Papa, pour les sacrifices et l'aide  
Merci à toi Maman pour l'amour et l'entraide

Merci Rime, d'être la soeur compréhensive  
Merci à mes tantes d'avoir été aussi attentives  
Merci à Monsieur Said pour le soutien  
Merci à l'INSEA, des souvenirs, j'en ai maintenant plein

Merci à mes Amis pour les fous rire  
À Abdelhak M je dis merci avec plaisir  
Merci à Oussama T pour le satire  
Merci à Nada S pour ce bref sourire

Merci à ceux de ma classe  
Badr H, Yassine R, Ziad M et j'en passe  
Les deux promotions n'en dépasse  
Mehdi H, Fatima Ezzahra D, Brahim D bien que le temps passe

Merci à Marouane E, M Ali E pour les souvenirs sans tracas  
À Hafsa L, Hiba R, Kaoutar B, Samia I, et tout le groupe des "Swa3da"  
À Manal et Maysoune, à Salma et Marwa, à Nada et Nouhaila  
À Chaimae E, Wissal M, Hiba J et à Gseyra

Merci à mes cousine Sakina et Fatima Ezzahra  
À mes cousins, pour tous vos prénoms, je ne dispose plus d'endroit  
À Ayoub A et ses tourments  
À Ali F et son prolongement

Au Forum pour son expérience  
À Meryem S et Amina N pour la présence  
À Boufa, m'ayant passé le glaive  
À Fatima Zahra A, pour la relève

À Omar B pour la créativité  
À Outman H, Mohamed E et Mohamed E pour l'hospitalité  
À Imane F pour la bonté  
À Samia M, Kaoutar S, Chaimae B et Amine B, je ne vous ai pas oublié

À certains de mes professeurs  
À Monsieur El Qalli pour son dur labeur  
À Messieurs Mamoune et Tajimi et pour leur gentillesse  
Au reste du corps de l'INSEA n'y méconnaisse

À ceux de ATS aussi je dis merci  
Même si d'une grande aide je n'ai pas jouis  
Occupé je vous sais et puis  
D'une bonne expérience au final je me réjouis

Ainsi et enfin je signe ces mots  
Je dis merci sans en dire trop  
Adieu et au revoir à l'INSEA  
Ce très cher Larbi Ben Tama,

# Résumé

Cette étude approfondie explore les complexités des spreads de Credit Default Swap (CDS) k-ème défaut pour cinq pays du Conseil de Coopération du Golfe (CCG) : les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite, Oman et Bahreïn. L'objectif principal est de comprendre comment les corrélations existantes entre les risques associés à chaque pays ainsi que variables macroéconomiques, en particulier les prix du pétrole et les rendements des obligations américaines, influencent les spreads de CDS et de mener des tests de résistance pour évaluer la résilience de ces spreads dans des conditions économiques extrêmes.

L'analyse commence par une explication détaillée des CDS k-ème défaut, un dérivé de crédit qui offre une protection contre le k-ème défaut dans un panier de références de crédit. Ces produits sont essentiels pour les investisseurs et les institutions financières, comme la Société Générale, car ils permettent de se protéger contre des scénarios de défaut multiples, offrant une couverture plus nuancée et souvent plus rentable. L'importance de ces produits réside dans leur capacité à gérer et à répartir les risques de manière plus efficace, particulièrement dans un environnement économique incertain.

Dans un premier temps, les spreads de CDS k-ème défaut ont été calculés en supposant des défauts indépendants au sein d'un panier. Ce calcul de base fournit un scénario de contrôle pour comprendre les risques fondamentaux associés à la solvabilité de chaque pays. Pour incorporer des conditions de marché réalistes, des corrélations ont été introduites en utilisant des copules gaussiennes et t de Student. La copule gaussienne capture les dépendances linéaires, tandis que la copule t de Student est capable de modéliser les dépendances en queue, cruciales en période de crise économique.

Les prix du pétrole ont été modélisés en utilisant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), un processus stochastique à retour à la moyenne, adapté aux commodités montrant une réversion des prix au fil du temps. Les paramètres du modèle OU ont été calibrés à partir de données historiques des prix du pétrole, assurant que les simulations reflètent des comportements de marché réalistes. Le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR), connu pour sa capacité à maintenir des taux d'intérêt non négatifs, a été utilisé pour modéliser les rendements des obligations américaines. Ce modèle capture la nature stochastique des taux d'intérêt et leurs propriétés de réversion à la moyenne à long terme.

L'étude a utilisé des tests de causalité de Granger pour examiner les relations prédictives entre ces variables macroéconomiques et les spreads de CDS. Des corrélations inverses significatives ont été trouvées, indiquant que les augmentations des prix du pétrole ou des rendements des obligations américaines tendent à réduire les spreads de CDS, reflétant des perceptions de crédit améliorées.

Les tests de résistance étaient une composante cruciale de cette analyse. En soumettant les spreads de CDS à des scénarios extrêmes dérivés des paramètres stressés des modèles OU et CIR, l'étude a évalué la robustesse des profils de risque de crédit pour les pays du CCG. Les analyses de sensibilité ont mis en évidence la réactivité des spreads de CDS aux variations des niveaux de réversion à la moyenne ( $\mu$ ), de la vitesse de réversion ( $\theta$ ) et de la volatilité ( $\sigma$ ) dans les deux modèles. Ces tests de résistance fournissent des informations cruciales sur les vulnérabilités potentielles des marchés de crédit de ces pays en cas de conditions économiques sévères.

Les résultats soulignent l'importance d'incorporer les dépendances macroéconomiques dans la modélisation du risque de crédit. En comprenant comment les chocs économiques externes influencent les spreads de CDS, les investisseurs, les gestionnaires de risques et les décideurs peuvent prendre des décisions plus éclairées. La capacité à prédire et à atténuer les impacts de tels chocs améliore la stabilité et la résilience des marchés financiers.

**Mots-clés :** Spreads de Credit Default Swap (CDS), risque de k-ième défaut, copule gaussienne, copule t de Student, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, modèle Cox-Ingersoll-Ross, causalité de Granger, évaluation du risque de crédit.

# Abstract

This comprehensive study explores the complexities of k-th default Credit Default Swap (CDS) spreads for five countries in the Gulf Cooperation Council (GCC) : the United Arab Emirates, Qatar, Saudi Arabia, Oman, and Bahrain. The primary objective is to understand how the existing correlations between the risks associated with each country and macroeconomic variables, particularly oil prices and US Treasury yields, influence CDS spreads and to conduct stress tests to evaluate the resilience of these spreads under extreme economic conditions.

The analysis begins with a detailed explanation of k-th default CDS, a credit derivative that provides protection against the k-th default in a basket of credit references. These products are essential for investors and financial institutions, such as Société Générale, as they allow for protection against multiple default scenarios, offering more nuanced and often more profitable coverage. The importance of these products lies in their ability to manage and distribute risks more effectively, especially in an uncertain economic environment.

Initially, k-th default CDS spreads were calculated assuming independent defaults within a basket. This basic calculation provides a control scenario to understand the fundamental risks associated with the solvency of each country. To incorporate realistic market conditions, correlations were introduced using Gaussian and Student's t copulas. The Gaussian copula captures linear dependencies, while the Student's t copula can model tail dependencies, which are crucial during economic crises.

Oil prices were modeled using the Ornstein-Uhlenbeck (OU) process, a mean-reverting stochastic process suitable for commodities showing price reversion over time. The parameters of the OU model were calibrated from historical oil price data, ensuring that the simulations reflect realistic market behaviors. The Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model, known for its ability to maintain non-negative interest rates, was used to model US Treasury yields. This model captures the stochastic nature of interest rates and their long-term mean-reverting properties.

The study employed Granger causality tests to examine the predictive relationships between these macroeconomic variables and CDS spreads. Significant inverse correlations were found, indicating that increases in oil prices or US Treasury yields tend to reduce CDS spreads, reflecting improved credit perceptions.

Stress tests were a crucial component of this analysis. By subjecting CDS spreads to extreme scenarios derived from stressed parameters of the OU and CIR models, the study assessed the robustness of credit risk profiles for the GCC countries. Sensitivity analyses highlighted the responsiveness of CDS spreads to variations in mean reversion levels ( $\mu$ ), reversion speed ( $\theta$ ), and volatility ( $\sigma$ ) in both models. These stress tests provide crucial insights into the potential vulnerabilities of these countries' credit markets under severe economic conditions.

The results underscore the importance of incorporating macroeconomic dependencies in credit risk modeling. By understanding how external economic shocks influence CDS spreads, investors, risk managers, and policymakers can make more informed decisions. The ability to predict and mitigate the impacts of such shocks enhances the stability and resilience of financial markets.

**Keywords :** k-th Default Credit Default Swap (CDS) Spreads, Gaussian Copula, Student's t Copula, Ornstein-Uhlenbeck Process, Cox-Ingersoll-Ross Model, Granger Causality, Credit Risk Assessment.

# Liste des abréviations

- **ADF** : Augmented Dickey-Fuller (Test de Dickey-Fuller Augmenté)
- **AIC** : Akaike Information Criterion (Critère d'Information d'Akaike)
- **BIC** : Bayesian Information Criterion (Critère d'Information Bayésien)
- **bps** : Basis Points (Points de Base)
- **CDO** : Collateralized Debt Obligation (Obligation Adossée à des Actifs)
- **CDS** : Credit Default Swap (Échange sur Risque de Crédit)
- **CIR** : Cox-Ingersoll-Ross (modèle)
- **CDF** : Cumulative Distribution Function (Fonction de Répartition)
- **Copula** : Une fonction utilisée pour décrire la dépendance entre variables aléatoires
- **df** : Degrees of Freedom (Degrés de Liberté)
- **DF** : Discount Factor (Facteur d'Actualisation)
- **KS** : Kolmogorov-Smirnov
- **MLE** : Maximum Likelihood Estimation (Estimation du Maximum de Vraisemblance)
- **OU** : Ornstein-Uhlenbeck (processus)
- **SOFR** : Secured Overnight Financing Rate (Taux de Financement Sécurisé au Jour le Jour)
- **t-Copula** : Copule t de Student
- **US-Yield** : Rendement des Bons du Trésor Américain

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Contexte Global</b>	<b>2</b>
<b>I Partie Théorique</b>	<b>6</b>
<b>1 Fondements des marchés financiers</b>	<b>8</b>
1.1 Marchés Financiers . . . . .	8
1.1.1 Marché organisé . . . . .	8
1.1.2 Marché de gré à gré (Over-The-Counter, OTC) . . . . .	9
1.2 Notion de Taux d'intérêt . . . . .	9
1.2.1 Le Zéro Coupon . . . . .	9
1.2.2 Structure par termes des taux d'intérêt . . . . .	9
1.2.3 Taux d'intérêt forward . . . . .	10
1.2.4 Taux d'intérêt à court terme . . . . .	11
1.2.5 Obligation à coupons fixes . . . . .	11
1.2.6 Duration et convexité . . . . .	12
1.3 Taux de Référence . . . . .	12
1.3.1 LIBOR . . . . .	12
1.3.2 EURIBOR . . . . .	13
1.3.3 SOFR . . . . .	13
<b>2 Produits sur taux</b>	<b>14</b>
2.1 Produits Structurés . . . . .	14
2.2 Dérivés de crédit . . . . .	16
2.2.1 Credit Default Swap (CDS) . . . . .	17
2.2.2 Credit Swaptions . . . . .	24
2.2.3 CDS k-ème défaut . . . . .	24
2.2.4 Credit Linked Note (CLN) . . . . .	25
2.2.5 Credit Linked Note with Callability . . . . .	26
2.2.6 Collateralized Debt Obligations (CDO) . . . . .	27
<b>3 Modèles de Durée de Vie</b>	<b>34</b>
3.1 Modèles Déterministes . . . . .	35
3.1.1 Hazard Rate Constant . . . . .	35
3.1.2 Hazard Rate Dépendant du Temps . . . . .	36
3.2 Modèles Stochastiques . . . . .	36
3.2.1 Hazard Rate Aléatoire . . . . .	37

3.2.2	Processus de Poisson . . . . .	37
3.2.3	Modèles avec Processus de Diffusion . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Risque de Crédit</b>	<b>39</b>
4.1	Modèles Structurels . . . . .	39
4.1.1	Modèle de Merton . . . . .	40
4.1.2	Modèle de Black-Cox . . . . .	41
4.1.3	Modèle de KMV . . . . .	42
4.2	Modèles réduits . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Méthodes Statistiques Appliquées</b>	<b>44</b>
5.1	Le Bootstrap . . . . .	44
5.1.1	Principe de Base du Bootstrap . . . . .	45
5.2	Interpolation . . . . .	46
5.2.1	Interpolation Linéaire . . . . .	46
5.2.2	Interpolation Polynomiale . . . . .	46
5.2.3	Interpolation Spline . . . . .	47
5.2.4	Interpolation Logarithmique . . . . .	47
<b>II</b>	<b>Partie Pratique</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>Analyse et Traitement des Données</b>	<b>52</b>
6.1	Analyse Descriptive . . . . .	52
6.2	Analyse des Variations de Spreads (DeltaSpread) . . . . .	54
6.3	Explications Géopolitiques . . . . .	56
6.4	Courbe SOFR . . . . .	57
6.5	Calcul des Probabilités de Survie et de Défaut . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Analyse de la dépendance</b>	<b>62</b>
7.1	Transformations Quantiles et Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	63
7.2	Analyse des Matrices de Corrélation . . . . .	65
7.3	Copules — Calibrage et Comparaison . . . . .	67
7.3.1	Calibrage des Copules . . . . .	67
7.3.2	Résultats et Interprétation . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Calcul des Prix</b>	<b>69</b>
8.1	Modélisation — Indépendante . . . . .	69
8.1.1	Temps de défaut . . . . .	69
8.1.2	Calcul des Paiements . . . . .	70
8.1.3	Calcul du Spread Équitable . . . . .	71
8.1.4	Algorithme de Calcul des Spreads . . . . .	72
8.1.5	Résultats et interprétation . . . . .	72
8.2	Modélisation — Corrélation . . . . .	72
8.2.1	Calcul des Spreads des CDS k-ème Défaut . . . . .	75
8.2.2	Incorporation des Copules dans la Simulation . . . . .	76
8.2.3	Modélisation Différente de la Corrélation . . . . .	76
8.2.4	Résultats . . . . .	76
8.3	Interprétation . . . . .	77

<b>9 Scénario Stressé</b>	<b>80</b>
9.1 Pétrole . . . . .	80
9.1.1 Modèle Ornstein-Uhlenbeck (OU) . . . . .	80
9.1.2 Scénario stressé . . . . .	85
9.2 US-Yield . . . . .	87
9.2.1 Modèle CIR . . . . .	87
9.2.2 Test de Causalité de Granger . . . . .	88
9.2.3 Corrélations entre les Spreads de CDS et les Rendements des Obligations Américaines . . . . .	88
9.2.4 Sensibilités aux Paramètres du Modèle CIR . . . . .	89
<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

# Table des figures

1.1	Structure standard d'un dérivé de crédit . . . . .	10
2.1	Structure standard d'un dérivé de crédit . . . . .	17
2.2	Cashflows de la stratégie neutre au risque de crédit Bonds and CDS Spread . . . . .	18
2.3	Shéma d'une CLN . . . . .	26
2.4	Shéma d'une CLN Callable . . . . .	27
2.5	Tranches de CDO standardisés . . . . .	29
2.6	Fonctions d'utilité pour différent $\gamma$ . . . . .	33
5.1	Shéma Bootstrap . . . . .	45
5.2	Visualisation des types d'interpolation . . . . .	49
6.1	Spread de CDS . . . . .	53
6.2	Structure par Terme . . . . .	55
6.3	Facteur d'actualisation . . . . .	59
6.4	Hazard Rate . . . . .	61
7.1	Variation des SPREAD au cours du temps . . . . .	62
7.2	Variations des CDS . . . . .	64
7.3	Matrices de Corrélacion . . . . .	67
7.4	Log-vraisemblance t-copula par degré de liberté . . . . .	68
8.1	Spreads de CDS . . . . .	79
9.1	Corrélacion des Spread de CDS avec les Prix de Pétrole . . . . .	83
9.2	Corrélacion des Spread de CDS avec US-Yield . . . . .	89

# Liste des tableaux

2.1	Types d'événements de crédit dans un CDS . . . . .	20
6.1	Données des spreads de CDS . . . . .	52
6.2	Statistiques descriptives des spreads de CDS par pays . . . . .	53
6.3	Statistiques descriptives des variations de spreads de CDS par pays . . . . .	54
6.4	Courbe SOFR . . . . .	58
6.5	Taux de Risque pour différentes Échéances . . . . .	61
7.1	Résultats du Test KS pour les Données Transformées . . . . .	65
7.2	Matrices de Corrélation : Pearson, Spearman, Kendall . . . . .	66
7.3	Log-vraisemblance, AIC et BIC des copules student et normale . . . . .	68
8.1	Spreads des CDS k-ème Défaut —indépendant— (en bps) . . . . .	72
8.2	Spreads des CDS k-ème Défaut avec Copules (en bps) . . . . .	76
8.3	Spreads des CDS k-ème Défaut avec différentes méthodes (en bps) . . . . .	77
9.1	Corrélation entre les pays et le prix du pétrole . . . . .	82
9.2	CDS avec le prix du pétrole . . . . .	84
9.3	Sensibilité des CDS au pétrole (modèle OU) . . . . .	85
9.4	Corrélation entre les pays et les rendements des obligations . . . . .	89
9.5	Sensibilité des CDS aux rendements de Obligations Américaines (modèle CIR) . . . . .	90

# Introduction Générale

Le monde moderne est fortement influencé par les dynamiques géopolitiques, économiques et financières. Les événements géopolitiques, tels que les conflits, les sanctions internationales et les changements de régime, peuvent avoir des répercussions profondes sur les marchés financiers et les économies mondiales. En particulier, les prix du pétrole, souvent considérés comme une variable géopolitique clé, peuvent fluctuer en réponse à ces événements, affectant à la fois les économies des pays exportateurs et importateurs de pétrole.

Les entreprises, les institutions financières et les gouvernements cherchent constamment à comprendre et à gérer les risques associés à ces fluctuations. Les Credit Default Swaps (CDS) sont des instruments financiers utilisés pour évaluer et transférer le risque de défaut de crédit. Un type particulier de CDS, appelé CDS k-ème défaut, mérite une attention particulière en raison de sa complexité et de son importance dans la gestion des risques de crédit.

Un CDS k-ème défaut est un dérivé de crédit qui offre une protection contre le k-ème défaut dans un panier de références de crédit. Contrairement à un CDS standard qui protège contre le défaut d'un seul emprunteur, le CDS k-ème défaut se concentre sur la protection contre le k-ème événement de défaut dans un groupe prédéterminé d'actifs. Par exemple, un CDS de deuxième défaut paie seulement si deux entreprises du panier font défaut. Ce produit est essentiel car il permet aux investisseurs de se protéger contre des scénarios de défaut multiples, offrant ainsi une couverture plus nuancée et souvent plus rentable.

L'importance du CDS k-ème défaut réside dans sa capacité à gérer et à répartir les risques de manière plus efficace. Les institutions financières, telles que Société Générale (SG), utilisent ces produits pour améliorer la gestion de leurs portefeuilles de crédit. En effet, dans un environnement économique incertain, la capacité à modéliser et à anticiper les risques financiers est cruciale pour maintenir la stabilité et la rentabilité des opérations. Mon stage au sein de la SG s'inscrit dans cette logique, avec un besoin croissant de telles analyses pour affiner les stratégies de gestion des risques.

La région du Moyen-Orient, notamment les pays du Golfe, riches en ressources pétrolières, sont particulièrement vulnérables aux fluctuations des prix du pétrole. Les pays comme les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite, Oman et Bahreïn dépendent fortement des revenus pétroliers pour leurs économies. Les fluctuations des prix du pétrole peuvent ainsi avoir un impact direct sur leur stabilité financière et, par extension, sur les spreads de leurs CDS.

En outre, les rendements des obligations américaines à 10 ans, considérés comme un indicateur clé des conditions économiques globales et de la politique monétaire, peuvent également influencer les spreads de CDS. Les rendements obligataires reflètent les attentes du marché concernant les taux d'intérêt futurs et l'inflation, et peuvent ainsi affecter la perception du risque de crédit des entités souveraines et corporatives.

Cette étude se concentre sur l'analyse des impacts des corrélations, des variations des prix du pétrole et des rendements des obligations américaines sur les spreads de CDS des pays du Moyen-Orient. Pour ce faire, nous utilisons des modèles mathématiques pour simuler les prix du pétrole et les rendements obligataires, et nous analysons leurs effets sur les spreads de CDS à travers des techniques de modélisation financière avancées.

Les modèles utilisés incluent le modèle Ornstein-Uhlenbeck (OU) pour simuler les prix du pétrole et le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) pour les rendements obligataires. Le modèle OU est particulièrement adapté pour capturer le comportement mean-reverting des prix des matières premières, tandis que le modèle CIR est utilisé pour modéliser les taux d'intérêt à court terme avec une volatilité dépendante du niveau. Ces modèles permettent de générer des trajectoires simulées des prix du pétrole et des rendements obligataires, que nous intégrons ensuite dans nos calculs des spreads de CDS.

Nous utilisons également des tests de causalité de Granger pour déterminer les relations causales entre les variations des prix du pétrole, les rendements obligataires et les spreads de CDS. Ces tests nous permettent d'identifier si les variations des prix du pétrole et des rendements obligataires peuvent être utilisées pour prévoir les mouvements des spreads de CDS.

L'objectif principal de cette étude est de fournir une compréhension approfondie des dynamiques qui influencent les spreads de CDS dans un contexte géopolitique et économique complexe. En offrant une analyse rigoureuse et détaillée, nous visons à aider les gestionnaires de risques, les décideurs politiques et les investisseurs à mieux anticiper et gérer les risques associés aux fluctuations des marchés pétroliers et obligataires.

Dans un premier temps, nous aborderons les fondements des marchés financiers, en mettant l'accent sur les marchés organisés et de gré à gré, ainsi que sur les notions de taux d'intérêt et de taux de référence comme le LIBOR, l'EURIBOR et le SOFR. Ensuite, nous explorerons les produits sur taux, notamment les Credit Default Swaps (CDS), les Credit Swaptions, les CDS k-ème défaut, les Credit Linked Notes (CLN), et les Collateralized Debt Obligations (CDO).

Nous passerons ensuite aux modèles de durée de vie, en discutant à la fois des modèles déterministes et stochastiques, et en expliquant leur utilisation pour modéliser les taux de défaut. Puis, nous examinerons les risques de crédit en détaillant les modèles structurels tels que les modèles de Merton, Black-Cox, et KMV, ainsi que les modèles réduits. Ensuite, nous introduirons les méthodes statistiques appliquées, en nous concentrant sur le bootstrap et les différentes techniques d'interpolation. La partie pratique de cette étude commencera par une analyse et un traitement des données, incluant une analyse descriptive, des variations de spreads (DeltaSpread), des explications géopolitiques, la courbe SOFR, et le calcul des probabilités de survie et de défaut. Nous analyserons ensuite la dépendance à travers des transformations quantiles, des tests de Kolmogorov-Smirnov, et des matrices de corrélation, en utilisant des copules pour le calibrage et la comparaison.

Dans la section sur le calcul des prix, nous couvrirons la modélisation indépendante et la modélisation avec corrélation, en utilisant des copules et des simulations pour calculer les spreads des CDS k-ème défaut. Enfin, nous aborderons un scénario stressé en utilisant le modèle Ornstein-Uhlenbeck pour le pétrole et le modèle CIR pour les rendements obligataires américains, en évaluant les corrélations et les sensibilités aux paramètres du modèle. Nous concluons avec une interprétation des résultats obtenus et leur implication pour la gestion des risques financiers.

# Contexte Global

## Organisme d'accueil

### Groupe Société Générale

La Société Générale a fait son départ le 4 mai 1864 après avoir signé le décret donnant naissance à Société Générale par Napoléon III, et depuis sa création la SG favorise le développement du commerce et de l'industrie en France.

Dès ses débuts, La Société Générale s'est engagée dans la modernisation de l'économie, devenant une banque diversifiée et innovante en matière de financement. Son réseau d'agences s'est rapidement étendu à travers le pays, passant de 46 à 1 500 guichets entre 1870 et 1940. Elle est devenue le premier établissement de crédit français en termes de dépôts. Parallèlement, Société Générale a pris une dimension internationale en participant au financement d'infrastructures essentielles au développement économique de plusieurs pays d'Amérique latine, d'Europe et d'Afrique du Nord.

Le groupe Société Générale concrétise plusieurs valeurs dans toutes ses activités, Et parmi ces valeurs on cite Esprit d'équipe, Responsabilité, Innovation, Engagement ect. Société Générale, un des tout premiers groupes européens de services financiers et acteur important de l'économie depuis plus de 150 ans, accompagne au quotidien 32 millions de clients grâce à ses plus de 148 000 collaborateurs présents dans plus de 76 pays.

Au Maroc depuis plus d'un siècle la SG contribue dans la stratégie de développement de l'économie de notre pays, et dans l'accompagnement dynamique de bancarisation.

De plus, SG a toujours comme objectif la satisfaction clientèle à travers son renforcement et promouvoir de la qualité de ses services et de sa confiance et en plus de développement sa proximité vers ses clients, et c'est grâce à ses plus de 800 000 Clients, 4 000 collaborateurs, 450 guichets automatiques et 400 agence.

### Société Générale Corporate & Investment Banking

La Banque de Financement et d'Investissement (SG-CIB) constitue le pivot du modèle de banque universelle de la Société Générale. Forte de sa diversification, elle se positionne en leader avec environ 12 000 collaborateurs répartis dans 31 pays en Europe, en Amérique et en Asie Pacifique. En accompagnant ses clients à travers divers secteurs, la SG-CIB leur propose des solutions sur mesure, s'appuyant sur son expertise mondiale en matière de banque d'investissement, de financements et d'activités de marchés.

Pour les entreprises, les institutions financières et le secteur public, la SG-CIB offre une approche de conseil globale (fusion-acquisitions, dette, actions, capital et gestion actif-passif), des solutions de levée de capitaux en dette ou en actions, ainsi que des financements optimisés et des réponses aux besoins de couverture, notamment dans le domaine du change et des taux.

Pour les investisseurs, SG CIB propose des opportunités d'investissement adaptées ainsi que des solutions fiables en matière de gestion du risque. Elle met à disposition une plateforme intégrée offrant un accès global aux marchés (actions, taux, crédit, change, matières premières et dérivés), des services de conseil et d'ingénierie financière, une qualité d'exécution, une recherche approfondie sur les différentes classes d'actifs, ainsi qu'une offre leader en matière de compensation et de prime brokerage.

## **Société Générale Africa Technologies & Services**

Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS) a été créée depuis 2014 par le groupe Société Générale dans le but de fournir des solutions pertinentes, agiles et efficaces aux salles des marchés de la banque en Europe (principalement à Paris et Londres) et à fin de les aider à développer tous les outils nécessaires pour répondre d'une part aux besoins de clients et d'autre part aux exigences de plus en plus fortes imposées par les différentes législations bancaires internationales.

SG ATS est basée à Casablanca exactement au 42 Boulevard Abdelmoumen, Casablanca - Settat MA à l'Immeuble Walili Street, elle est dirigée par la Directrice Générale Mme. Widad Azzam Lahlou. Aujourd'hui dans SG ATS plusieurs Spécialisations telles que Finance de marché, Pricing, Ingénierie financière et Recherche & Développement ect, sont pratiquées pour fournir des prestations à forte valeur et à différentes lignes de métiers du Groupe SG (en Europe principalement mais également aux Etats-Unis et en Asie) sur des activités de marchés de Société Générale, composé d'équipes basées à Paris, Londres, New-York et Hong-Kong.



# Problématique

Dans le contexte mondial actuel, marqué par une volatilité économique accrue et des régulations financières de plus en plus strictes, la gestion efficace du risque de crédit est devenue une priorité absolue pour les institutions financières. Parmi les outils essentiels pour cette gestion figurent les Credit Default Swaps (CDS), et plus particulièrement les CDS k-th default. Ces instruments permettent de couvrir le risque de défaut du k-ème emprunteur dans un portefeuille donné, offrant ainsi une protection précieuse contre les risques de crédit multiples. Cependant, le pricing de ces instruments reste un défi majeur en raison de la complexité inhérente à la modélisation des risques de défaut multiple.

La Société Générale, consciente de l'importance de ces instruments dans son arsenal de gestion des risques, s'est engagée à développer des modèles de pricing précis et fiables pour les CDS k-th default. L'évaluation précise et dynamique de ces produits financiers est cruciale, car elle nécessite des modèles capables de prendre en compte des facteurs de dépendances complexes entre les différents émetteurs de crédit au sein d'un portefeuille. Une erreur de modélisation peut entraîner des sous-évaluations ou des surévaluations des risques.

Face à ce défi, la résolution de ce problème est devenue une priorité stratégique pour Société Générale. Une évaluation précise des CDS k-th default permet non seulement de mieux anticiper les risques de défaut et de mettre en place des stratégies de couverture efficaces, mais aussi de se conformer aux régulations financières internationales de plus en plus strictes, telles que Bâle III et Solvency II. Un modèle de pricing robuste et transparent est essentiel pour éviter les sanctions réglementaires et renforcer la confiance des régulateurs.

Dans un marché globalisé et compétitif, la capacité de Société Générale à fournir des prix précis et justes pour les CDS k-th default représente un avantage significatif. La banque souhaite commercialiser de nouveaux produits financiers pour répondre aux besoins croissants de ses clients. Disposer de prix fiables et compétitifs pour ces instruments est crucial pour attirer et satisfaire les clients, tout en optimisant les portefeuilles d'investissement et en identifiant des opportunités de marché.

C'est dans ce contexte que ce projet de fin d'études (PFE) a vu le jour. Ce projet vise à développer des modèles de simulation avancés pour évaluer les CDS k-th default de manière précise et fiable, en intégrant des paramètres stochastiques et des dépendances complexes entre les émetteurs de crédit. La résolution de ce problème est essentielle non seulement pour renforcer la gestion des risques et la conformité réglementaire de Société Générale, mais aussi pour améliorer sa compétitivité et sa rentabilité sur le marché des services financiers. En développant ces outils d'évaluation avancés, ce projet contribue directement à la stratégie de Société Générale visant à commercialiser des produits financiers innovants et à maintenir sa position de leader dans le secteur bancaire.

Première partie  
Partie Théorique



# Chapitre 1

## Fondements des marchés financiers

Ce chapitre se propose d'explorer les concepts clés qui sous-tendent les marchés et les taux d'intérêt, éléments cruciaux pour la valorisation et la gestion des risques des CDS. Il fournit les fondations nécessaires pour analyser et modéliser ces produits financiers complexes.

### 1.1 Marchés Financiers

Les marchés financiers sont des plateformes où s'effectuent les échanges de différents instruments financiers. Ils se divisent en marchés organisés et marchés de gré à gré (OTC).

#### 1.1.1 Marché organisé

Le marché organisé constitue une plateforme régulée où les acheteurs et les vendeurs de produits financiers se rencontrent et exécutent leurs transactions. Un élément central de ce type de marché est la chambre de compensation, qui agit en tant qu'intermédiaire pour assurer le bon déroulement des échanges entre les parties.

#### La chambre de compensation

La chambre de compensation est une institution cruciale dans les marchés financiers organisés, jouant un rôle central dans la gestion et la sécurisation des transactions de produits dérivés. Sa fonction principale est de réduire le risque de contrepartie, c'est-à-dire le risque qu'une des parties ne remplisse pas ses obligations financières. Elle y parvient en se positionnant comme contrepartie centrale à toutes les transactions, garantissant ainsi l'exécution des engagements de chaque partie.

Pour ce faire, la chambre de compensation détient et gère les comptes des investisseurs. Elle effectue quotidiennement le règlement des marges, c'est-à-dire le versement des gains ou des pertes réalisés, en fonction des mouvements du marché. Lorsque le solde d'un compte tombe en dessous d'un seuil prédéfini, la chambre de compensation émet un appel de marge, demandant à l'investisseur de fournir des fonds supplémentaires pour restaurer le solde de son compte à un niveau sécuritaire. Ce mécanisme assure la stabilité financière et la continuité des opérations sur le marché.

**Note importante :** La chambre de compensation est spécifique aux marchés organisés et ne fait pas partie des transactions sur les marchés de gré à gré.

### 1.1.2 Marché de gré à gré (Over-The-Counter, OTC)

Le marché de gré à gré, ou OTC, se distingue par l'absence d'intermédiaire central, les transactions se déroulant directement entre les parties. Cette caractéristique engendre un risque de contrepartie plus élevé, chaque participant étant exposé au risque de défaut de l'autre partie. En dépit de ces risques, le marché OTC offre une grande flexibilité, permettant aux contreparties de personnaliser les produits financiers en fonction de leurs besoins spécifiques. Ces produits sur mesure peuvent, par exemple, servir à se protéger contre les fluctuations des taux de change ou d'autres variables financières. Toutefois, la personnalisation et la nature bilatérale des transactions se traduisent souvent par une transparence moindre comparée aux marchés organisés, où les produits et les transactions sont plus standardisés et surveillés par des régulateurs.

### Credit Support Annex (CSA)

Le Credit Support Annex (CSA) est un accord utilisé dans les transactions de gré à gré, où il n'existe pas d'intermédiaire central comme la chambre de compensation. Le CSA est une composante essentielle des contrats de swap et d'autres dérivés OTC, fournissant un cadre légal qui détaille les exigences de collatéral entre les parties.

Le CSA vise à minimiser le risque de crédit en définissant les termes selon lesquels le collatéral est posté ou transféré entre les contreparties pour couvrir l'exposition au risque de crédit. Par exemple, il spécifie les types de collatéraux acceptables, les seuils de transfert, les valeurs de déclenchement pour les appels de marge additionnels, et les fréquences de calcul et d'échange de la marge de variation et de la marge initiale.

Ce mécanisme, bien qu'il n'offre pas la même centralisation que celui d'une chambre de compensation, permet tout de même une gestion structurée du risque dans un environnement où les transactions sont personnalisées et où les contreparties interagissent directement. Il est essentiel pour la réduction du risque systémique dans les marchés OTC, en garantissant que les obligations financières seront honorées même en cas de défaillance d'une contrepartie.

## 1.2 Notion de Taux d'intérêt

Le taux d'intérêt est un élément central représentant le coût de l'argent emprunté ou le rendement de l'argent investi. Cette section explore différentes formes de taux d'intérêt, tels que les taux zéro coupon, les structures par termes, les taux forward, les taux à court terme, les obligations à coupons fixes, ainsi que les concepts de duration et de convexité.

### 1.2.1 Le Zéro Coupon

Un zéro coupon est un instrument financier qui paie une unité monétaire à sa date de maturité  $T$  sans paiement intermédiaire. Le prix d'un zéro coupon à l'instant  $t$  pour une maturité  $T$  est noté  $B(t, T)$ , et satisfait  $B(T, T) = 1$ . Nous considérons que  $B(t, T)$  est un processus stochastique positif strictement, adapté sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 1.2.2 Structure par termes des taux d'intérêt

La structure par termes des taux d'intérêt, aussi appelée courbe des taux, représente les taux de rendement à maturité des instruments financiers en fonction de leur durée jusqu'à échéance. Le

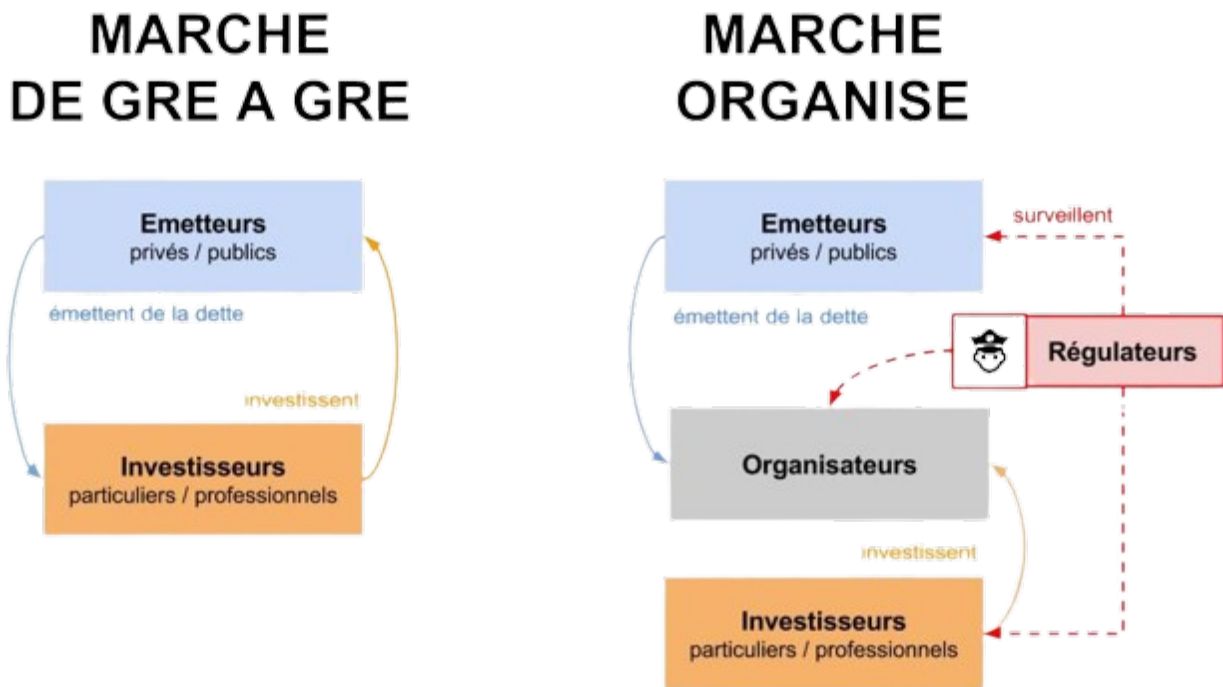


FIGURE 1.1 – Structure standard d'un dérivé de crédit

taux de rendement à maturité  $R(t, T)$  d'un zéro coupon peut être exprimé par la relation suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T), \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

À partir de cette équation, le prix du zéro coupon est déterminé de façon unique par :

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

En pratique, la courbe des taux est souvent estimée à partir des prix de marchés de divers instruments financiers très liquides, tels que les T-bills<sup>1</sup>, T-bonds<sup>2</sup>, swaps et futures.

### 1.2.3 Taux d'intérêt forward

Les contrats forward sur taux d'intérêt permettent d'acheter ou de vendre un zéro coupon à une date future  $T_1$  pour une maturité  $T_2$ . Le prix d'un tel contrat, établi à l'instant  $t$ , est donné par la relation de non-arbitrage suivante :

$$B(T_1, T_2) = \frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)},$$

1. Bons du Trésor : Ce sont des obligations à court terme émises par le gouvernement. Les T-bills n'ont pas de taux d'intérêt nominal et sont vendus à escompte, mais ils sont remboursés à leur valeur nominale à échéance. Les maturités des T-bills varient généralement de quelques jours à un an.

2. Obligations du Trésor : Les T-bonds sont des obligations à long terme également émises par le gouvernement. Ils ont des maturités plus longues, typiquement de 20 à 30 ans, et versent des intérêts semestriels à un taux fixe. Les T-bonds sont utilisés pour financer diverses dépenses publiques et sont considérés comme des investissements très sûrs.

Le taux d'intérêt forward  $f(t, T_1, T_2)$  correspondant est alors :

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)},$$

Pour un taux forward non continu, la formule devient :

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right),$$

Le taux d'intérêt forward instantané  $F(t, T)$  est obtenu en considérant la limite lorsque  $T_2$  tend vers  $T_1$  :

$$F(t, T) = -\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T} = -\frac{1}{B(t, T)} \frac{\partial B}{\partial T}(t, T),$$

Par intégration, on retrouve le prix de l'obligation en fonction du taux forward instantané :

$$B(t, T) = \exp \left( -\int_t^T F(t, u) du \right),$$

Enfin, en utilisant les équations précédentes, on peut exprimer le rendement à maturité en fonction du taux forward instantané :

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T F(t, u) du.$$

#### 1.2.4 Taux d'intérêt à court terme

Le taux d'intérêt spot, ou taux d'intérêt instantané, est le taux en vigueur pour des prêts ou investissements avec une maturité immédiate. Ce taux est mathématiquement défini comme la limite du taux de rendement à maturité lorsque la période jusqu'à maturité tend vers zéro :

$$r_t = \lim_{T \downarrow t} R(t, T) = R(t, t) = F(t, t).$$

Le prix de l'obligation peut ainsi être réexprimé en fonction du taux spot comme suit :

$$B(t, T) = \exp \left( -\int_t^T r_u du \right).$$

En forme différentielle, cela s'écrit :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt,$$

avec  $B(T, T) = 1$  comme condition terminale.

#### 1.2.5 Obligation à coupons fixes

Une obligation à coupons fixes, avec une maturité  $T_n$ , paie des montants fixes  $c_1, \dots, c_n$  à des dates prédéfinies  $T_1 < \dots < T_n$ . Le prix de cette obligation est donné par la somme des valeurs actuelles de ces paiements, soit :

$$B_n(t, T_n) = \sum_{i=1}^n B(t, T_i) c_i + B(t, T_n) N,$$

où  $N$  représente le nominal de l'obligation.

### 1.2.6 Duration et convexité

Pour une obligation, la duration de Macaulay est un indicateur de la sensibilité de la valeur de l'obligation aux variations des taux d'intérêt. Elle est définie comme la moyenne pondérée des temps jusqu'à chaque paiement de cash flow :

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i c_i e^{-y_i T_i}}{B_n},$$

où  $y_i$  est le taux de rendement à maturité applicable à chaque cash flow  $c_i$ . La duration mesure en années le temps moyen avant que le détenteur de l'obligation ne récupère la valeur actuelle de tous les cash flows futurs.

La convexité, un autre indicateur, mesure la sensibilité de la duration à une variation des taux d'intérêt. Elle est définie par :

$$C = \frac{d^2 B_n}{dy^2} = \sum_{i=1}^n c_i e^{-y_i T_i} T_i^2.$$

Cette mesure indique combien la duration de l'obligation change en réponse à un changement dans le taux de rendement. Une convexité élevée implique que la valeur de l'obligation est moins affectée par les changements de taux d'intérêt, rendant l'obligation plus attractive dans des environnements de taux volatils.

## 1.3 Taux de Référence

Les taux de référence tels que le LIBOR, l'EURIBOR et le SOFR jouent un rôle crucial dans la fixation des taux d'intérêt sur divers instruments financiers. Ces taux servent de benchmarks pour les prêts, les produits dérivés, et autres instruments financiers.

### 1.3.1 LIBOR

Le LIBOR, ou London InterBank Offered Rate, est un taux d'intérêt de référence mondial pour les prêts interbancaires. Il est utilisé comme un taux indicatif pour les prêts dans lesquels les banques se prêtent des fonds sans garantie entre elles. Le LIBOR est crucial dans le monde financier car il sert de base pour déterminer les taux d'intérêt sur une variété de produits financiers, y compris des prêts hypothécaires, des obligations et des dérivés.

Le processus de fixation du LIBOR est méthodique et est administré par la British Bankers' Association (BBA). Il commence par la collecte des taux auxquels les banques de premier ordre (avec une notation de crédit supérieure à AA chez Standard & Poor's) offrent des dépôts non garantis à d'autres banques. Ce processus se déroule comme suit :

1. Collecte des taux : Chaque jour ouvrable, un panel de 16 grandes banques internationales soumet leurs taux d'intérêt offerts pour différentes devises et différentes durées (de jour le jour jusqu'à un an).
2. Épuration des données : Les taux soumis sont triés par ordre croissant. Les quatre taux les plus élevés et les quatre taux les plus bas sont éliminés pour éviter les distorsions causées par des valeurs aberrantes.
3. Calcul du taux moyen : Une moyenne arithmétique est calculée à partir des huit taux restants.
4. Publication : Le taux LIBOR calculé est ensuite publié sur Reuters à 11h00, heure de Londres.

### 1.3.2 EURIBOR

L'EURIBOR, ou Euro Interbank Offered Rate, est le taux de référence des taux interbancaires à court terme au sein de la zone euro. Il représente les taux auxquels les banques européennes de premier plan se prêtent entre elles des fonds non garantis dans l'euro. Semblable au LIBOR, l'EURIBOR est crucial pour une large gamme de produits financiers commerciaux et dérivés, servant souvent d'indice de référence pour les prêts à taux variable en Europe.

Le taux EURIBOR est fixé de la manière suivante :

1. Panel de banques : Un panel de banques européennes sélectionnées pour leur solvabilité et leur représentativité du marché monétaire de la zone euro.
2. Fréquences de publication : Les taux EURIBOR sont publiés pour différents termes, généralement allant d'une semaine à un an, ce qui fournit une structure par termes des taux dans l'Union européenne.

### 1.3.3 SOFR

Le SOFR, ou Secured Overnight Financing Rate, est un taux représentant le coût des emprunts overnight aux États-Unis sécurisés par des titres du Trésor américain. Conçu pour être un taux de référence plus fiable et robuste que le LIBOR, le SOFR est devenu un élément crucial dans la transition des marchés financiers vers des indices de taux plus transparents et basés sur des transactions réelles.

La genèse du SOFR peut être tracée jusqu'aux préoccupations concernant la viabilité à long terme du LIBOR, ce qui a conduit à la formation de l'Alternative Reference Rates Committee (ARRC) en 2014 par la Réserve fédérale et la Banque fédérale de réserve de New York. En juin 2017, l'ARRC a sélectionné le SOFR comme le taux alternatif préféré pour le LIBOR en dollars américains.

Le taux SOFR est calculé de la manière suivante :

1. Base de données : Il utilise les données de trois types de transactions de repo garanties par des titres du Trésor américain : les transactions à terme, au jour le jour, et à terme ouvert.
2. Calcul : Le taux est la médiane pondérée des taux appliqués à ces opérations.
3. Publication : Publié par la Banque fédérale de réserve de New York, le SOFR offre un taux quotidien qui reflète les conditions de financement overnight sécurisées.

# Chapitre 2

## Produits sur taux

Ce chapitre se concentre sur les produits structurés et les dérivés de crédit, qui sont des instruments financiers utilisés dans la gestion des risques et l'optimisation des rendements des portefeuilles d'investissement. L'objectif est de fournir une compréhension approfondie des principaux instruments abordés lors du stage de fin d'études, notamment les CDS de k-ième défaut.

### 2.1 Produits Structurés

Selon la Société Générale : “En théorie, un produit financier est dit ‘structuré’ lorsqu’il est composé d’au moins deux actifs financiers. Ces actifs peuvent être des actions, des obligations<sup>1</sup>, des options, etc. En pratique, un produit structuré est un instrument financier émis par une banque qui offre la possibilité d’obtenir un rendement/un gain, en fonction de la réalisation d’un scénario de marché prédéterminé. Il peut constituer un outil de diversification de portefeuille et une alternative aux placements financiers traditionnels.”

Selon la Deutsche Bank : “Les produits structurés sont construits à l’aide de plusieurs investissements financiers qui sont le plus généralement une obligation et des produits dérivés (options) sur un ou plusieurs actifs sous-jacents. Libellés en euros ou en devise, les produits structurés sont des titres de créances : en souscrivant cet instrument, l’investisseur prête de l’argent à un émetteur. Selon les cas, ils offrent un droit partiel (par exemple minimum 90 %), total (100 %) ou aucun droit au remboursement du capital par l’émetteur à l’échéance du produit. À l’échéance du produit, ou éventuellement avant, par exemple en cas de remboursement anticipé, l’investisseur reçoit le montant de son capital augmenté ou diminué d’un rendement financier potentiel<sup>2</sup>”

Pratiquement, l’on se souviendra des produits structurés comme étant des instruments financiers complexes construits à partir de l’association de plusieurs composants d’investissement, typiquement une combinaison d’une obligation et de produits dérivés tels que des options. Les produits structurés tel que connu aujourd’hui ont pris leur essor dans les années 1980 et 1990, développés principalement par des banques d’investissement pour répondre aux besoins spécifiques des gestionnaires d’actifs et des investisseurs individuels.

---

1. Selon le Gouvernement Français : ‘Une obligation est un morceau de dette émis par une entreprise, une collectivité territoriale ou un État. Lorsque l’une de ces entités (entreprise, collectivité ou État) souhaite se financer, les montants requis peuvent nécessiter l’intervention de nombreux créanciers. Vous pouvez devenir l’un de ces créanciers en « achetant » une obligation, c’est-à-dire une partie de cette dette. En plus du capital qui vous sera restitué à échéance fixe (en général, entre 5 à 30 ans), le débiteur s’engage à vous rémunérer périodiquement (tous les ans, ou tous les trimestres notamment) selon un taux d’intérêt fixe ou variable.’

2. Sauf en cas de faillite ou bail-in de l’émetteur.

Mathématiquement, un produit structuré pourra généralement être décrit par la formule<sup>3</sup> suivante, où le paiement final dépend des conditions du marché et de la performance de l'actif sous-jacent :

$$\text{Payoff}(T) = N \times (f + \min(\max(\alpha \times (R(T) - K), L, 0), C)),$$

où :

- $\text{Payoff}(T)$  est le paiement à l'échéance,
- $N$  est le montant nominal investi,
- $f$  est un facteur fixe qui peut être positif, nul ou négatif, reflétant une garantie partielle, aucune garantie, ou une pénalité,
- $\alpha$  est le coefficient de participation à la performance de l'actif sous-jacent,
- $R(T)$  est le rendement de l'actif sous-jacent à l'échéance (par exemple, en prenant  $S_t$  comme le prix du sous-jacent à l'instant  $t$ ,  $R(T)$  peut être égale à  $\frac{S_T}{S_0}$ ,
- $K$  est le seuil de rendement (strike),
- $L$  est le floor, ou le minimum de performance garanti, qui peut aussi être négatif,
- $C$  est le cap, ou le plafond maximum sur le rendement.

Cette formule est modulable pour refléter diverses stratégies et niveaux de protection ou de risque. Cette diversité rend les produits structurés attractifs pour une large gamme d'investisseurs, allant de ceux cherchant à minimiser les risques à ceux recherchant des opportunités de gains substantiels sous certaines conditions de marché.

Ces instruments sont particulièrement utiles pour les investisseurs cherchant à diversifier leur portefeuille tout en minimisant les risques associés à leurs capitaux. Toutefois, ils nécessitent une compréhension approfondie de leurs structures et des marchés financiers, car leur performance est fortement influencée par les conditions économiques globales.

## Types de produits structurés

### Produits à Capital Garanti ou Protégé

Ces produits sont conçus pour sécuriser le capital investi, tout en offrant une exposition à la performance de marchés sous-jacents. Le capital est généralement protégé jusqu'à un certain pourcentage (par exemple, 90% ou 100% à l'échéance), mais le rendement est souvent plus faible en comparaison avec des produits plus risqués. Le rendement dépend de la performance d'un indice ou d'un autre actif financier, et la protection est activée à condition que le sous-jacent ne chute pas en dessous d'un seuil prédéfini.

Le payoff typique peut être exprimé comme suit :

$$\text{Payoff} = N \times \max(f, f + \alpha(\max(S_T - S_0, 0))),$$

où  $N$  est le nominal,  $f$  est le pourcentage du capital garanti (ex : 0.9 pour 90%),  $\alpha$  est la participation à la hausse,  $S_T$  est la valeur finale, et  $S_0$  est la valeur initiale du sous-jacent.

---

3.  $\max : (a, b, c) \mapsto \max(\max(a, b), c)$

### Produits de Participation

Ces produits offrent une participation à la performance d'un actif sous-jacent sans utiliser de levier. La protection du capital est généralement conditionnelle et dépend de la performance du marché. Si le marché performe bien, l'investisseur bénéficie d'un retour proportionnel à cette hausse. Si le marché baisse, la perte de capital peut être totale, dépendant de la structure du produit. Le payoff est généralement une proportion de la performance du sous-jacent :

$$\text{Payoff} = N \times \max((1 + \beta(S_T - S_0)/S_0), 0),$$

où  $\beta$  est le coefficient de participation et  $S_T$ ,  $S_0$  sont respectivement les valeurs finales et initiales du sous-jacent.

### Produits à Effet de Levier

Ces produits permettent une participation supérieure à celle du marché grâce à l'utilisation du levier. Ils sont particulièrement risqués car ils peuvent entraîner une perte totale du capital investi si le marché évolue défavorablement par rapport à des seuils prédéfinis. Ils sont adaptés pour les investisseurs prêts à prendre des risques élevés pour des rendements potentiellement plus élevés. Le payoff pour les produits à effet de levier dépend fortement de l'évolution du sous-jacent et peut amplifier les gains ainsi que les pertes :

$$\text{Payoff} = N \times \max((1 + \lambda((S_T - S_0)/S_0)), 0),$$

où  $\lambda$  est le facteur de levier et  $S_T$ ,  $S_0$  représentent les valeurs finale et initiale du sous-jacent.

### Produits d'Optimisation de Performance

Ces produits visent à maximiser les rendements en cas de mouvements modérés du marché. Ils offrent souvent un rendement cappé et peuvent inclure une protection partielle du capital. Les structures typiques peuvent inclure des options qui limitent la participation à la hausse tout en offrant une protection contre des baisses modérées.

Ces produits combinent des protections et des expositions conditionnelles :

$$\text{Payoff} = N \times \begin{cases} 1 + \min(\gamma((S_T - S_0)/S_0), C) & \text{si } S_T \geq S_0, \\ 1 - \delta \times \max(\text{abs}((S_T - S_0)/S_0) - B, 0) & \text{si } S_T < S_0, \end{cases}$$

où  $C$  est le rendement cappé,  $\delta$  représente la perte potentielle en cas de baisse importante du sous-jacent au-delà d'une barrière  $B$ , et  $\gamma$  est la participation à la hausse.

## 2.2 Dérivés de crédit

Les dérivés de crédit sont des contrats financiers négociés principalement sur le marché de gré à gré (OTC<sup>4</sup>), dont l'objectif est de transférer le risque de crédit d'une partie à une autre (voir figure 2.1). Ce transfert de risque est souvent recherché par des institutions telles que les banques, les fonds de pension, et les compagnies d'assurance qui cherchent à gérer leur exposition au risque de crédit. Les motivations derrière l'utilisation de ces produits peuvent varier, incluant la gestion des exigences de fonds propres réglementaires, la gestion active d'un portefeuille de crédit, ou l'investissement dans des véhicules offrant un profil de risque ajusté.

---

4. On The Counter

Jusqu'à 2006, le marché des dérivés de crédit a connu une expansion significative, stimulée par l'introduction d'indices de CDS (Credit Default Swaps) et de tranches standardisées de CDO (CDO). La standardisation et l'augmentation de la liquidité et de la transparence ont favorisé l'innovation et attiré de nouveaux investisseurs. Ces instruments ont été essentiels dans la couverture et la gestion des tranches de CDO, utilisant des modèles basés sur des évaluations standardisées pour gérer efficacement le risque.

La crise financière de 2008 a révélé des lacunes significatives dans la gestion des risques associés aux produits structurés sur crédit, en particulier les tranches de CDO synthétiques. Les défis liés à la liquidité, au risque de contrepartie, et à la confiance dans les agences de notation ont exacerbé les pertes durant la crise. Ces événements ont conduit à une réglementation plus stricte et à une réévaluation des pratiques de gestion des risques dans les produits structurés sur crédit.

Les dérivés de crédit se divisent en deux catégories principales : ceux dont les paiements dépendent directement du risque de défaut de l'actif sous-jacent, et ceux basés sur l'évolution des spreads de crédit. Cette distinction est cruciale pour comprendre les mécanismes de risque et les stratégies de gestion associées à chaque type de produit.

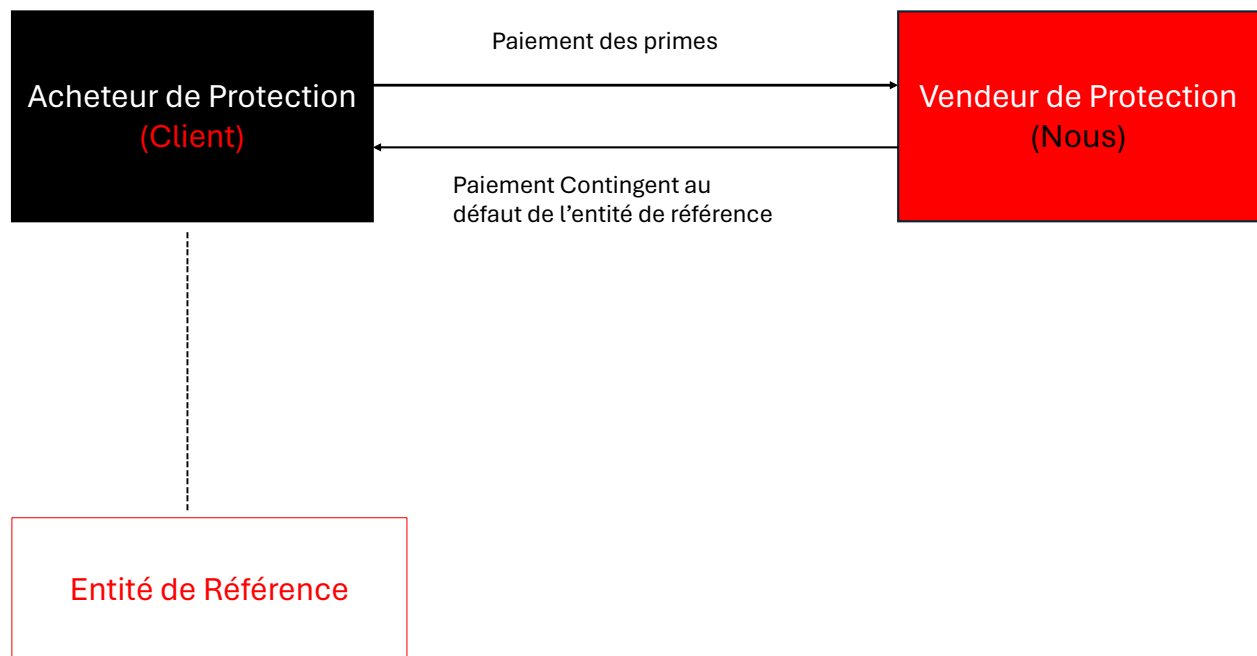


FIGURE 2.1 – Structure standard d'un dérivé de crédit

### 2.2.1 Credit Default Swap (CDS)

Un Credit Default Swap (CDS) est un contrat financier de gré à gré, bilatéral, entre un acheteur de protection et un vendeur de protection. L'acheteur s'engage à verser des primes périodiques au vendeur pour se couvrir contre le risque de défaut de paiement d'une entité de référence, telle que la faillite ou la restructuration de la dette. En contrepartie, le vendeur s'engage à compenser l'acheteur en cas d'événement de crédit, soit par un règlement physique où l'acheteur livre une obligation au vendeur en échange du montant nominal, soit par un règlement en cash correspondant au montant perdu par l'acheteur.

Créés en 1994 par JP Morgan sous le nom de BISTRO (Broad Index Secured Trust Offering), les CDS ont été conçus pour gérer le risque de crédit sans impacter significativement le bilan des banques. Ils jouent un rôle crucial dans les marchés financiers actuels, permettant la diversification et la stabilisation de ces marchés en transférant le risque de crédit d'une entité à une autre. Toutefois, ils comportent des risques intrinsèques, tels que le risque de contrepartie, où le vendeur pourrait ne pas être en mesure d'honorer ses engagements.

En pratique, un CDS implique également un taux de recouvrement (Recovery Rate) fixé par l'ISDA<sup>5</sup>, qui détermine le montant récupéré par l'acheteur de protection en cas de défaut. Le calcul du Lost Given Default (LGD) est essentiel, défini comme  $LGD = 1 - \text{Recovery Rate}$ , indiquant la perte relative en cas de défaut.

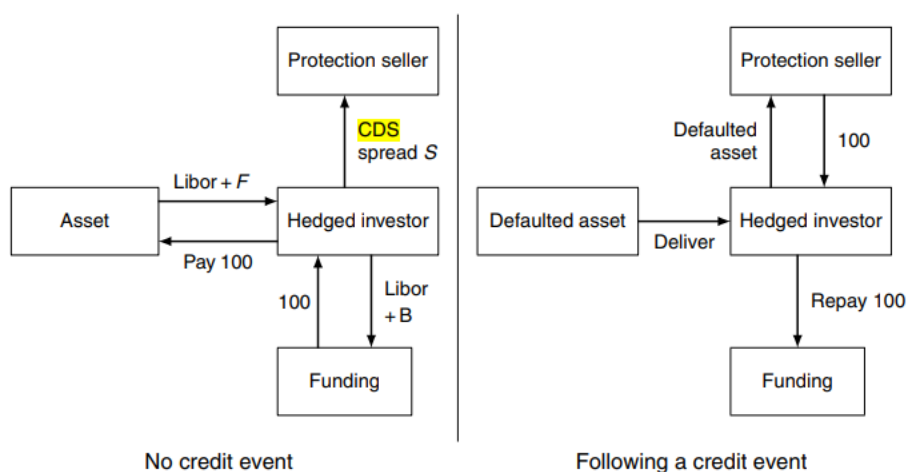


FIGURE 2.2 – Cashflows de la stratégie neutre au risque de crédit Bonds and CDS Spread

Dans un contrat de CDS (2.2), les parties prenantes sont l'acheteur de protection et le vendeur de protection. L'acheteur, cherchant à se prémunir contre le risque de défaut d'une entité de référence, paie des primes régulières au vendeur. En cas d'événement de crédit, l'acheteur reçoit un paiement du vendeur destiné à couvrir les pertes liées au défaut. Le vendeur de protection, de son côté, assume le risque de crédit en échange de ces primes. Les vendeurs sont souvent régulés pour s'assurer qu'ils disposent des fonds nécessaires pour couvrir les risques pris.

Les spreads dans un CDS jouent un rôle crucial pour comprendre les coûts et bénéfices impliqués pour l'acheteur et le vendeur de protection. Le spread de CDS, ou CDS spread, est la prime que l'acheteur paie au vendeur, exprimée en points de base<sup>6</sup>. Ce spread est essentiellement la rémunération du vendeur pour le risque de crédit qu'il assume.

Prenons l'exemple d'une note à taux flottant qui paie le Libor plus 25 points de base et que l'acheteur de la protection finance au Libor +10 points de base. Ici, le spread de CDS est la différence entre le taux du Libor payé par l'obligation et le taux auquel l'acheteur finance l'achat de cette

5. L'International Swaps and Derivatives Association (ISDA - Association Internationale des Swaps et Dérivés) est une organisation professionnelle regroupant des intervenants majeurs sur les marchés financiers dérivés de gré à gré, dont le but premier est de fournir des contrats standards de référence pour les transactions sur produits dérivés de gré à gré. Ce contrat type est appelé ISDA Master Agreement.

6. 1 point de base = 0,01 %

obligation. Si le spread de CDS est de 25 points de base, cela signifie que l'acheteur de protection paie 25 points de base au vendeur. Si l'acheteur finance à +10 points de base, son gain net est de  $25$  (spread du CDS) +  $10$  (son financement) -  $25$  (le coût du CDS) =  $10$  points de base.

La base CDS mesure la différence entre le spread de CDS et le spread de Libor d'une obligation spécifique. Cette base peut être positive ou négative, indiquant respectivement si le CDS est sur-évalué ou sous-évalué par rapport au risque de crédit inhérent de l'obligation. Une base positive suggère que le marché perçoit un risque plus élevé de défaut que ce que le spread de l'obligation indique, et inversement pour une base négative.

Cette mesure est essentielle pour les investisseurs qui évaluent la pertinence d'acheter une protection par rapport à l'exposition réelle au risque de crédit. Elle sert également à arbitrer entre les marchés des CDS et des obligations, permettant aux investisseurs de spéculer sur les variations des perceptions du risque de crédit.

Dans le cadre légal actuel, notamment depuis la crise financière de 2008, les vendeurs de protection sont souvent soumis à des exigences réglementaires strictes pour assurer qu'ils possèdent suffisamment de capital pour couvrir les risques qu'ils assument.

### 2.2.1.1 Entité de référence

Dans un contrat de CDS, l'entité de référence et l'obligation de référence sont les fondements sur lesquels repose le contrat.

L'entité de référence est la partie dont le crédit est assuré. Elle peut être une entreprise, une institution financière ou un gouvernement qui a émis une dette ou une obligation. Cependant, il est crucial de noter que l'entité de référence n'est pas elle-même une partie au contrat CDS. C'est la qualité de crédit de cette entité et la probabilité qu'elle fasse défaut sur ses obligations financières qui sont assurées par le CDS.

L'obligation de référence s'agit spécifiquement de la dette ou de l'obligation financière que le CDS est destiné à couvrir. L'obligation de référence peut être un prêt bancaire, des obligations d'entreprise, des dettes souveraines, ou d'autres instruments de dette. Le CDS est conçu pour offrir une protection dans le cas où l'obligation de référence subit un événement de crédit, tel que le défaut de paiement ou la restructuration de la dette.

### 2.2.1.2 Déroulement

Le déroulement d'un contrat de CDS implique généralement deux phases principales : le paiement périodique des primes et la réponse à l'événement de crédit déclencheur.

#### 1. Paiements périodiques des primes :

- Processus de paiement : L'acheteur de protection s'engage à effectuer des paiements réguliers, souvent trimestriels, au vendeur de protection. Ces paiements sont généralement exprimés en pourcentage du montant nominal du contrat et sont connus sous le nom de "spread".
- Fonction de la prime : Ces primes représentent la rémunération du risque que prend le vendeur en acceptant de couvrir le risque de défaut de l'entité de référence.

- Détermination de la prime : Le montant de la prime est influencé par plusieurs facteurs, y compris la cote de crédit de l'entité de référence, la durée du CDS, le climat économique général, et les conditions spécifiques du marché pour le type de crédit en question.
2. L'événement de crédit déclencheur (tableau 2.1) :
- Définition d'un événement de crédit : C'est une condition contractuelle qui, si elle se produit, oblige le vendeur de protection à compenser l'acheteur. Les événements de crédit typiques incluent le défaut de paiement, la restructuration de la dette, la faillite, et parfois, un changement significatif dans la cote de crédit de l'entité de référence.
  - Action suite à un événement de crédit : Si un événement de crédit survient, le contrat stipule que le vendeur de protection doit payer à l'acheteur un montant qui peut être égal au montant nominal de l'obligation de référence ou à la différence entre le montant nominal et la valeur de récupération de l'obligation.
  - Types de règlement : Le règlement peut être effectué soit en espèces (cash settlement), où le vendeur paie la différence entre le montant nominal et la valeur de marché de l'obligation post-défaut, soit par livraison physique (physical delivery), où l'acheteur transfère les obligations en défaut au vendeur en échange du paiement du montant nominal.

Ces étapes définissent le cadre opérationnel d'un CDS, mais il est important de noter que chaque contrat CDS peut avoir des termes et conditions spécifiques qui peuvent modifier la manière dont le contrat est exécuté. Se référer à des sources financières et juridiques spécialisées est conseillé au lecteur.

Événement de Crédit	Description
Faillite	Processus légal indiquant l'incapacité d'une organisation à rembourser leurs dettes.
Défaut de Paiement	Incapacité de payer les dettes à échéance. Des défauts de paiement continus peuvent mener à la faillite.
Restructuration de Dette	Changement des termes de la dette rendant celle-ci moins favorable aux détenteurs de dette.

TABLE 2.1 – Types d'événements de crédit dans un CDS

### 2.2.1.3 Payoff d'un CDS

Le "payoff" d'un CDS correspond à la compensation financière versée par le vendeur de protection à l'acheteur en cas de survenance d'un événement de crédit.

Le payoff d'un CDS en cas de défaut est généralement calculé comme la différence entre le montant nominal de la dette et la valeur récupérée après le défaut, ajustée par le taux de récupération. La formule de base pour le calcul du payoff est :

$$\text{Payoff} = \text{Notional Amount} \times (1 - \text{Recovery Rate})$$

Le taux de récupération est un élément crucial dans le calcul du payoff d'un CDS. Il représente le pourcentage de la dette que l'on estime pouvoir récupérer après la faillite ou le défaut de paiement de l'entité de référence. Ce taux est influencé par divers facteurs tels que la solvabilité de l'entité de référence, les garanties disponibles, et la situation économique générale au moment du défaut.

Un taux de récupération élevé signifie que les pertes en cas de défaut seront moins importantes, tandis qu'un faible taux de récupération augmente le montant du payoff.

**Mathématiquement :** Supposons que  $\tau \in [0, +\infty)$  soit le temps de défaut<sup>7</sup> de l'entité de référence, et  $T$  la maturité du CDS. Soit  $\mathbb{P}$  la probabilité risque-neutre et  $\mathcal{F}_t$  la filtration qui représente l'information disponible jusqu'au temps  $t$ . Le taux de récupération  $R$  est le pourcentage du nominal récupéré par le créancier en cas de défaut.

La valeur actuelle espérée du paiement du CDS sous le risque neutre, à un instant  $t$ , peut être donnée par l'espérance conditionnelle suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-r(\tau-t)} (1 - R) \times N \times \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

où :

- $e^{-r(\tau-t)}$  est le facteur d'actualisation exponentiel, avec  $r$  étant le taux d'intérêt sans risque.
- $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$  est l'indicatrice de l'événement que le défaut se produit avant la maturité du CDS.

#### 2.2.1.4 Usages et Stratégies

**Couverture contre le risque de défaut** Les CDS sont théoriquement des instruments conçus pour la couverture, permettant aux investisseurs de se protéger contre le risque de défaut de paiement d'une entité de référence. Les institutions financières utilisent souvent les CDS pour transférer l'exposition au risque de crédit et libérer le capital réglementaire.

**Spéculation et arbitrage** Les CDS offrent également des opportunités de spéculation. Les investisseurs peuvent spéculer sur la détérioration ou l'amélioration de la qualité de crédit d'une entité sans détenir l'actif sous-jacent. L'arbitrage peut se produire lorsque les investisseurs exploitent les écarts de prix entre les CDS et les obligations sous-jacentes.

**Gestion des risques et diversification du portefeuille** Les CDS permettent aussi une gestion active du portefeuille par la personnalisation de l'exposition au crédit des entreprises, offrant une flexibilité significative pour les gestionnaires de portefeuille. Ils sont utilisés pour accéder à des expositions de maturité non disponibles sur le marché du cash, avec des risques de taux d'intérêt limités.

#### 2.2.1.5 Risques Associés aux CDS

Les CDS, bien qu'utiles pour la gestion du risque de crédit, comportent plusieurs types de risques significatifs qui peuvent affecter tant les acheteurs que les vendeurs de protection.

**Risque de contrepartie** Le risque de contrepartie dans les CDS se réfère au risque que l'une des parties ne remplisse pas ses obligations contractuelles. Ce risque est particulièrement prononcé car les CDS sont souvent négociés de gré à gré, ce qui implique une évaluation et une gestion minutieuse des contreparties impliquées. La crise financière de 2008 a mis en évidence ce risque lorsque de grandes institutions financières, incapables de répondre à leurs obligations, ont menacé la stabilité financière globale.

---

7.  $\tau$  est un temps d'arrêt :  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

**Risque de liquidité et de marché** Le risque de liquidité survient lorsque les positions ne peuvent pas être facilement liquidées ou clôturées à un prix raisonnable. Les CDS peuvent parfois être difficiles à évaluer et à vendre, surtout en période de turbulence du marché, ce qui peut entraîner des pertes substantielles. Par ailleurs, le risque de marché lié aux CDS est associé à des fluctuations de la valeur du contrat dues à des changements dans les spreads de crédit ou d'autres conditions de marché. Ces risques sont exacerbés par le manque de transparence et de standardisation qui a caractérisé le marché des CDS avant l'introduction de réglementations plus strictes.

**Considérations sur le risque systémique** Les CDS peuvent également contribuer au risque systémique en raison de leur intégration dans le réseau global de la finance. Par exemple, un défaut majeur sur un CDS ou une série de CDS peut entraîner des perturbations significatives sur le marché financier global, comme observé lors de la débâcle d'AIG en 2008. Les produits dérivés tels que les CDS peuvent amplifier les crises financières en créant des interdépendances complexes entre les institutions financières. Des réglementations telles que Dodd-Frank et EMIR en Europe ont été mises en place pour atténuer ces risques en imposant des exigences de compensation et en renforçant la surveillance du marché.

### 2.2.1.6 Réglementations

Les réglementations Dodd-Frank aux États-Unis et EMIR en Europe ont été conçues pour adresser les défis réglementaires posés par les instruments financiers complexes tels que les CDS. Ces lois visent à augmenter la transparence, réduire les risques systémiques et protéger les marchés financiers contre les abus et les défaillances qui peuvent mener à des crises économiques.

**2.2.1.6.1 Réglementation Dodd-Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act** Adoptée en 2010 en réponse à la crise financière de 2008, la loi Dodd-Frank a imposé des changements significatifs dans la régulation financière aux États-Unis. Concernant spécifiquement les CDS, Dodd-Frank a introduit plusieurs mesures clés :

- Compensation centralisée : Dodd-Frank exige que la plupart des CDS soient compensés par des chambres de compensation centralisées pour réduire le risque de contrepartie. Cela signifie que les parties au contrat de CDS doivent passer par une entité intermédiaire qui garantit les transactions, ce qui réduit le risque qu'une partie ne remplisse pas ses obligations.
- Transparence accrue : La loi exige une plus grande transparence des marchés de dérivés par le biais de rapports et de l'enregistrement des transactions sur des plates-formes d'échange ou des dépôts de données de marché. Cela permet aux régulateurs de surveiller les risques de marché et les concentrations de risque plus efficacement.
- Normes de conduite : Dodd-Frank a établi des normes plus strictes pour les conseillers en investissement et les courtiers en dérivés, exigeant qu'ils agissent dans le meilleur intérêt de leurs clients, ce qui renforce la protection des investisseurs.

**2.2.1.6.2 Réglementation EMIR (European Market Infrastructure Regulation)** Entrée en vigueur en 2012, EMIR s'applique à tous les membres de l'Union Européenne et touche à divers aspects des dérivés non cotés en bourse :

- Obligation de compensation : Comme Dodd-Frank, EMIR exige que certaines catégories de dérivés OTC (Over-The-Counter), y compris les CDS, soient compensées à travers des contreparties centrales (CCP). Cela contribue à minimiser le risque systémique en cas de défaut d'un des membres de la transaction.

- Rapports des transactions : Toutes les transactions en dérivés doivent être signalées aux dépôts de transactions autorisés, ce qui améliore la visibilité des positions de risque et facilite la surveillance réglementaire.
- Gestion des risques : EMIR impose des exigences strictes en matière de gestion des risques pour les dérivés OTC, y compris des procédures de règlement des différends, des mesures pour réduire le risque opérationnel et des techniques d'atténuation des risques pour les dérivés non compensés centralement.

**Impact et enjeux de ces réglementations** Ces réglementations ont renforcé la résilience financière en imposant des contrôles et des balises plus stricts sur les marchés des dérivés. Toutefois, elles ont également augmenté les coûts pour les participants du marché et ont imposé des défis opérationnels significatifs liés à la mise en conformité. Les entités engagées dans les transactions en CDS doivent désormais investir dans des systèmes de rapport et de gestion des risques plus sophistiqués.

### 2.2.1.7 CDS Portfolio Index (Multi-Name CDS)

Dans le domaine des CDS, on distingue généralement les contrats uniques, ou "Single-name CDS", qui portent sur une seule entité de référence, de ceux qui couvrent un ensemble d'entités : les "Multi-name CDS", également connus sous le nom de CDS Portfolio Index. Ces indices représentent des paniers d'entités de référence et sont cruciaux pour les investisseurs désirant diversifier leur exposition au risque de crédit à travers plusieurs débiteurs.

Un CDS Portfolio Index est un accord bilatéral de gré à gré où l'acheteur acquiert non pas une protection, mais plutôt une exposition au risque de crédit global du panier d'entités. Les principaux indices dans ce domaine sont l'iTraxx en Europe et le CDX en Amérique du Nord.

Voici quelques exemples de ces indices, leurs régions d'utilisation respective, et le nombre d'entités qu'ils englobent :

Nom	Type de Crédit	nombre de Crédit
CDX.NA.IG	North American investment grade	125
CDX.NA.HY	North American high yield	100
CDX.NA.XO	North American crossover credits	35
CDX.EM	Emerging market sovereign credits	15
CDX.EM.Diversified	Emerging market sovereign and corporate credits	40
iTraxx Europe	European investment grade	125
iTraxx Europe Crossover	European crossover credits	75
iTraxx Japan	Japanese investment grade	50
iTraxx Asia ex-Japan	Asian non-Japan investment grade	40
iTraxx Australia	Australian investment grade	25

Les indices sont classés en différentes catégories selon le risque de crédit des entités incluses :

- Investment Grade : Entités notées au moins 'BBB-' par Standard and Poor's ou 'Baa3' par Moody's.

- High Yield : Entités avec une notation inférieure à 'BBB-', indiquant un risque de défaut plus élevé mais offrant potentiellement de plus hauts rendements.

Il est important de noter que ces indices sont mis à jour semi-annuellement. Cette mise à jour permet d'intégrer de nouvelles entités et d'exclure celles dont le profil de risque a changé, garantissant ainsi que l'indice reste représentatif du marché actuel. Ces indices sont à leur 41ème version, illustrant leur évolution et leur adaptation continue aux conditions du marché.

Ces indices multi-noms offrent une vue d'ensemble précieuse du marché des crédits et sont utilisés pour évaluer et gérer le risque de crédit à travers des stratégies diversifiées, facilitant ainsi les décisions d'investissement dans l'univers complexe des dérivés de crédit.

### 2.2.2 Credit Swaptions

Un Credit Swaption, ou option sur CDS, est un instrument financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, de conclure un contrat de Credit Default Swap (CDS). Les deux types principaux de swaptions sont :

- Call Credit Swaption : Donne au détenteur la possibilité d'acheter la protection d'un CDS, c'est-à-dire de devenir l'acheteur de protection dans un contrat CDS.
- Put Credit Swaption : Permet au détenteur de vendre la protection, le positionnant comme le vendeur dans le contrat CDS.

Dans ces deux cas, si le détenteur de l'option n'est pas convaincu des avantages de l'exercer, il peut choisir de ne pas activer l'option.

### 2.2.3 CDS k-ème défaut

Les Credit Default Swaps (CDS) k-ème défaut sont des instruments dérivés complexes qui permettent de se protéger contre le risque de défaut de plusieurs entités de référence en se concentrant spécifiquement sur le k-ème défaut qui se produit parmi un groupe prédéfini d'entités. Le k-ème défaut signifie que l'événement de crédit doit être le k-ème dans la séquence des défauts parmi les entités de référence pour que le paiement soit déclenché.

Le payoff d'un CDS k-ème défaut dépend de la position du défaut dans l'ordre de survenance. Supposons qu'il y a  $N$  entités de référence et que le contrat couvre le k-ème défaut. Si le k-ème défaut survient, le vendeur de protection paie à l'acheteur un montant basé sur le notional du contrat et le taux de récupération de l'entité défaillante.

Pour modéliser les CDS k-ème défaut, il est courant d'utiliser des modèles de corrélation et des techniques de simulation. Un modèle typique est basé sur les copules, qui permettent de capturer la dépendance entre les temps de défaut des différentes entités de référence.

Soit  $\tau_i$  le temps de défaut de l'entité  $i$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , et  $T$  la maturité du CDS. Le k-ème temps de défaut,  $\tau_{(k)}$ , est défini comme la k-ème plus petite valeur parmi  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ . Le prix du CDS k-ème défaut à l'instant  $t$  est donné par l'espérance sous la probabilité risque-neutre :

$$\text{Prix}_{\text{CDS}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(\tau_{(k)} - t)} (1 - R_k) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

où :

- $\tau_{(k)}$  est le k-ème temps de défaut.

- $r$  est le taux d'intérêt sans risque.
- $R_k$  est le taux de récupération associé au  $k$ -ème défaut.

Les CDS  $k$ -ème défaut comportent des risques supplémentaires par rapport aux CDS traditionnels :

- **Risque de Corrélacion** : La modélisation correcte des corrélations entre les entités de référence est cruciale. Une mauvaise estimation de la corrélation peut entraîner des évaluations incorrectes et des stratégies de couverture inefficaces.
- **Complexité du Modèle** : Les modèles utilisés pour les CDS  $k$ -ème défaut sont souvent complexes et nécessitent des techniques avancées de simulation et de calcul.
- **Risque de Marché** : Comme pour les CDS traditionnels, les CDS  $k$ -ème défaut sont sensibles aux fluctuations des spreads de crédit et aux conditions du marché.

## 2.2.4 Credit Linked Note (CLN)

Une Credit Linked Note (CLN) est un instrument financier, souvent utilisé par les banques et les grandes institutions pour se financer tout en transférant un risque de crédit spécifique aux investisseurs. Cette note combine un CDS avec un instrument de dette, permettant ainsi à l'émetteur de couvrir un risque de crédit particulier (voir figure 2.3).

### 2.2.4.1 Principe de fonctionnement

Une CLN fonctionne comme suit : L'investisseur achète la note émise par la banque, finançant ainsi la note. En parallèle, il vend un CDS à cette même banque, qui se couvre en vendant à son tour un CDS sur le marché. L'investisseur est donc exposé à la fois au risque de crédit de la banque émettrice et à celui de l'entité de référence du CDS.

### 2.2.4.2 Risques associés

En cas d'événement de crédit affectant l'entité de référence, l'investisseur peut perdre une partie significative de son investissement. Cette perte est équivalente au Loss Given Default (LGD), qui est défini comme  $LGD = 1 - \text{Recovery Rate}$ . Le taux de recouvrement (Recovery Rate) représente la proportion du montant nominal initial que l'investisseur peut récupérer après la survenue de l'événement de crédit. Ainsi, plus le taux de recouvrement est faible, plus le risque de perte pour l'investisseur est élevé.

Ce risque est particulièrement pertinent pour les banques, car elles utilisent les CDS pour se protéger contre le risque de défaut de leurs contreparties. En cas de défaut de l'entité de référence, la banque pourrait être exposée à des pertes importantes si le taux de recouvrement est faible. De plus, le LGD joue un rôle crucial dans la détermination des exigences de capital réglementaire sous les directives telles que Bâle III<sup>8</sup> et Solvabilité II<sup>9</sup>, car il affecte directement l'évaluation du risque de crédit et, par conséquent, la résilience financière de l'institution bancaire.

---

8. Bâle III est un ensemble de réformes de réglementation bancaire développées par le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire en réponse à la crise financière de 2007-2009.

9. Solvabilité II (Solva 2) est une directive de l'Union européenne qui régit le secteur des assurances, mise en place pour assurer la stabilité financière et la protection des assurés. Solvabilité II est entrée en vigueur le 1er janvier 2016

### 2.2.4.3 Flux financiers d'une CLN

- **La banque émettrice** : Reçoit le capital de l'investisseur, verse des coupons annuels et rembourse le capital à l'échéance, à moins qu'un évènement de crédit ne survienne.
- **L'investisseur** : Reçoit des coupons majorés pour compenser le risque pris par la vente du CDS. L'investissement est exposé aux risques de défaut de la banque et de l'entité de référence.

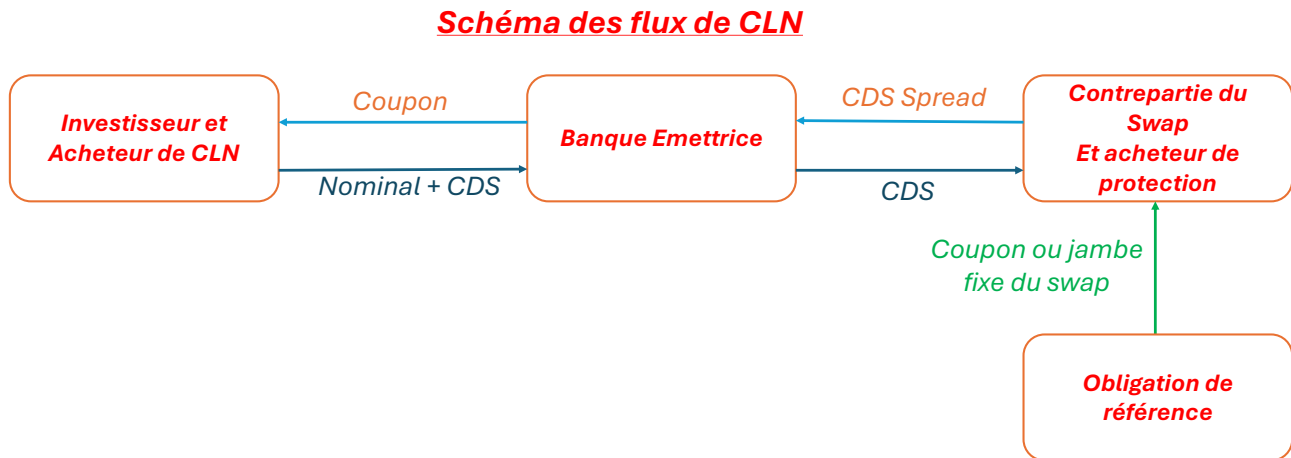


FIGURE 2.3 – Shéma d'une CLN

### 2.2.5 Credit Linked Note with Callability

Une CLN avec option de rachat<sup>10</sup> (figure 2.4) est une variante de la CLN traditionnelle, offrant à la banque émettrice le droit de racheter la note à des dates prédéterminées. Ce droit est généralement exercé si la valeur de marché de la note devient inférieure au coût pour la banque de maintenir la note, c'est-à-dire le nominal plus le coupon ou le montant ajusté au marché (Mark to Market).

#### Exemple concret

Supposons une CLN émise par la Banque X avec les caractéristiques suivantes :

- **Émetteur** : Banque X, notation  $A^-$ .
- **Entité de référence** : Société A, notation  $BBB^-$ .
- **Devise** : USD.
- **Montant nominal** : \$20,000,000.
- **Taux de recovery** : 40%.
- **Durée** : 10 ans.

10. dite Callable

- **Date de début** : 26/07/2024.
- **Taux de coupon** : 6% annuel.
- **Fréquence de paiement** : Annuellement.
- **Callabilité** : Possible dès la fin de la deuxième année.
- **Remboursement à l'échéance** : 100% du capital sauf en cas d'événement de crédit, auquel cas le remboursement est basé sur le taux de recovery.

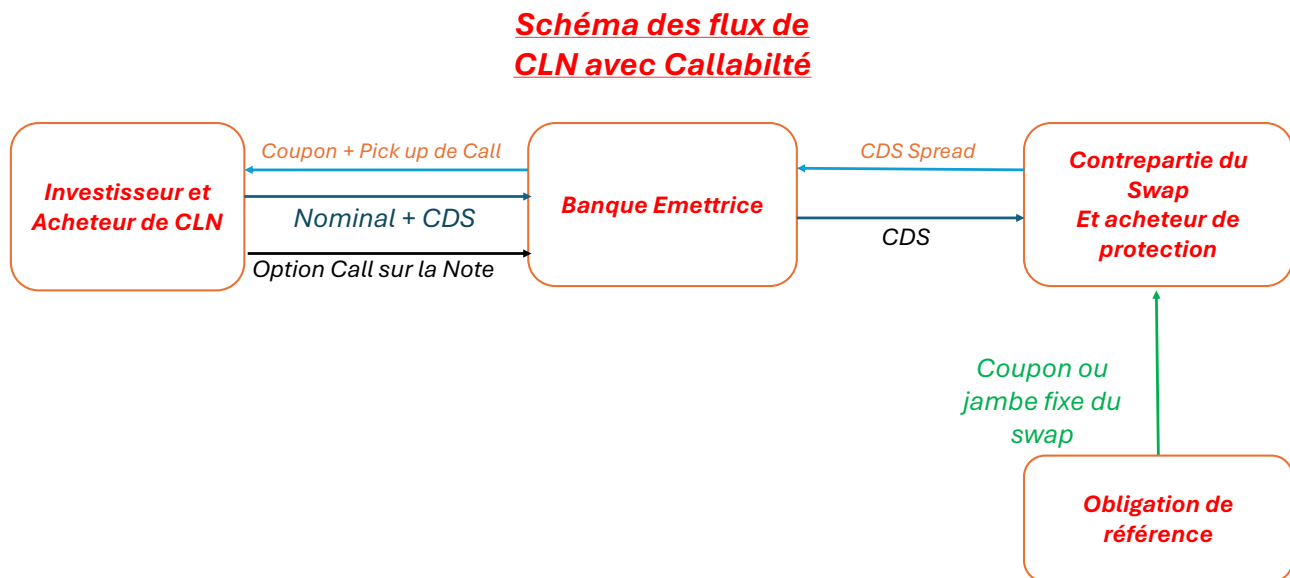


FIGURE 2.4 – Schéma d'une CLN Callable

### 2.2.6 Collateralized Debt Obligations (CDO)

Les CDO sont des instruments financiers structurés, souvent décrits comme des produits de titrisation. Ils regroupent divers actifs de dette, tels que des prêts bancaires, des obligations, ou d'autres instruments financiers, dans un portefeuille et répartissent les risques de crédit associés entre différents investisseurs à travers des tranches de risque et de rendement variés. Il s'agit de titres qui représentent des portefeuilles de créances bancaires ou d'instruments financiers variés. Ils permettent la redistribution des revenus et des risques de crédit des actifs sous-jacents aux investisseurs par le biais de tranches différenciées selon leur niveau de risque et de rendement.

#### Types de CDO

- **CDO de Bilan** : Impliquent la titrisation d'actifs du bilan de l'initiateur, permettant la sortie d'actifs du bilan et la libération de fonds propres.
- **CDO d'Arbitrage** : Basés sur l'exploitation des écarts de rendement entre le portefeuille sous-jacent et les tranches émises.
- Les CDO synthétiques représentent une forme avancée de titrisation qui utilise des dérivés de crédit, notamment des CDS, pour répliquer l'exposition à un portefeuille de crédits sans

nécessiter le transfert physique des titres obligataires sous-jacents. Cette approche permet une plus grande flexibilité et des coûts de transaction potentiellement plus bas comparés aux CDO traditionnels. L'on s'intéressera à ce dernier type.

### 2.2.6.1 Construction d'un CDO Synthétique

La construction d'un CDO synthétique commence par la sélection d'un portefeuille de référence composé de divers actifs de crédit. Ces actifs peuvent inclure des prêts, des obligations d'entreprises, des prêts hypothécaires, ou d'autres instruments de dette. Un arrangeur, généralement une banque d'investissement, crée ce portefeuille qui servira de base à la synthèse des risques de crédit.

Le rôle des CDS dans cette structure est crucial. Pour chaque actif du portefeuille, un CDS est utilisé pour transférer le risque de crédit du détenteur original à un véhicule spécial (Special Purpose Vehicle, SPV) créé spécifiquement pour émettre les tranches de CDO. Le SPV vend des tranches de dette, chacune ayant un niveau de risque, de priorité de paiement, et de rendement différent :

- Tranches Senior : Ces tranches ont la priorité la plus élevée pour les paiements d'intérêts et de principal. Elles sont considérées comme les moins risquées et offrent les rendements les plus faibles.
- Tranches Mezzanine : Elles présentent un risque intermédiaire et offrent un rendement supérieur aux tranches senior.
- Tranche Equity : Elle absorbe les premières pertes avant que les autres tranches ne soient touchées. Bien que très risquée, cette tranche offre le potentiel de rendement le plus élevé.

### 2.2.6.2 Mécanismes de Transfert de Risque

Dans un CDO synthétique, le SPV achète des CDS auprès de contreparties pour couvrir spécifiquement les crédits inclus dans le portefeuille de référence. Si un crédit du portefeuille vient à défaut, la contrepartie du CDS paiera le SPV. Ces paiements sont ensuite utilisés pour couvrir les pertes avant de toucher les investissements des détenteurs de tranches, en commençant par la tranche equity.

Ce mécanisme permet une flexibilité considérable dans la gestion du risque. Les investisseurs peuvent choisir des tranches qui correspondent précisément à leur appétit de risque et à leurs besoins de rendement. De plus, le SPV peut utiliser des stratégies de couverture dynamique pour gérer l'exposition au risque de marché et de crédit, ajustant les positions en CDS en réponse aux changements dans les évaluations de crédit des actifs sous-jacents ou dans les conditions de marché générales.

### 2.2.6.3 Risques associés

Les CDO présentent plusieurs niveaux de risques complexes qui nécessitent une compréhension approfondie de leur structure et des marchés financiers :

**2.2.6.3.1 Risque de corrélation** Le risque de corrélation fait référence à la probabilité que plusieurs actifs dans le portefeuille sous-jacent d'un CDO fassent défaut simultanément, et est un facteur clé influençant la stabilité et la performance des différentes tranches de CDO.

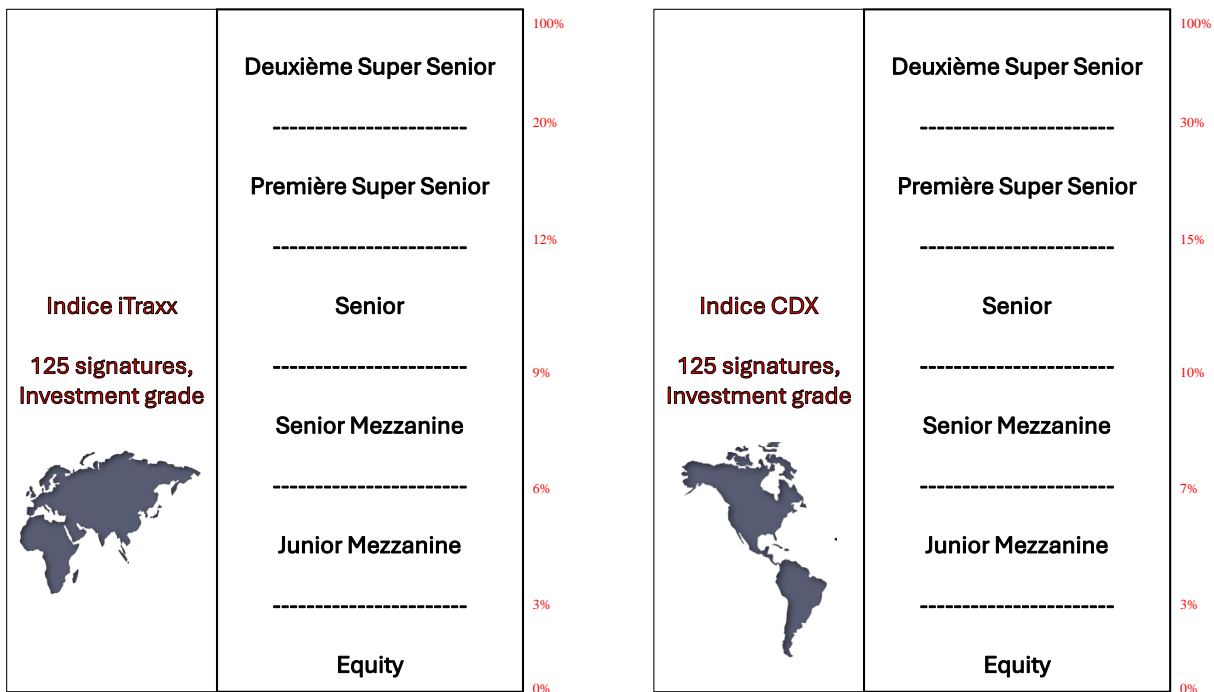


FIGURE 2.5 – Tranches de CDO standardisés

La modélisation de la corrélation dans les CDOs peut être effectuée à l'aide de modèles de copule, souvent le modèle de copule gaussienne, qui est couramment utilisé pour estimer la corrélation entre les différents actifs du portefeuille. Le modèle de copule permet d'exprimer mathématiquement la dépendance entre les événements de défaut de différentes entités du portefeuille. La formule de base pour la probabilité conjointe de défaut sous un modèle de copule gaussienne peut être exprimée comme suit :

$$P(D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n) = \Phi_n(\Phi^{-1}(p_1), \Phi^{-1}(p_2), \dots, \Phi^{-1}(p_n); \Sigma),$$

où  $\Phi_n$  est la fonction de distribution cumulée multivariée normale,  $\Phi^{-1}$  est l'inverse de la fonction de distribution cumulée normale,  $p_i$  est la probabilité de défaut de l'actif  $i$ , et  $\Sigma$  est la matrice de corrélation des actifs.

Les tranches de CDO sont extrêmement sensibles aux corrélations des défauts des actifs sous-jacents. Les tranches senior, protégées contre les premières pertes, sont relativement moins sensibles aux augmentations de la corrélation des défauts car elles sont affectées seulement après que les pertes dépassent un certain seuil. En revanche, les tranches mezzanine et, surtout, les tranches equity, sont beaucoup plus exposées car elles absorbent les premières pertes et leur performance est directement affectée par l'augmentation des corrélations de défaut.

Les risques liés à une mauvaise estimation de la corrélation sont considérables. Une sous-estimation de la corrélation peut conduire à une sous-évaluation du risque des tranches mezzanine et equity, tandis qu'une surestimation pourrait rendre les tranches senior moins attrayantes que leur risque réel. Par ailleurs, la corrélation peut varier considérablement en période de stress financier, conduisant à ce qu'on appelle un "correlation breakdown", où les modèles standard de corrélation échouent à prévoir les vrais comportements de défaut, exacerbant les pertes pour les investisseurs. La gestion de ces risques nécessite une surveillance constante du marché et une adaptation des modèles de

risque pour refléter les conditions économiques et financières changeantes.

**Exemple** — Un des exemples les plus notoires de risque de corrélation s'est produit lors de la crise des subprimes. Avant la crise, de nombreux instruments financiers, y compris les CDO, ont été structurés autour de prêts hypothécaires subprimes. Les agences de notation et les investisseurs supposaient généralement que les défauts de paiement sur ces prêts hypothécaires seraient faiblement corrélés, c'est-à-dire que les défauts seraient relativement isolés les uns des autres. Cependant, lorsque les taux d'intérêt ont augmenté et que les prix de l'immobilier ont commencé à chuter, les défauts de paiement sur les hypothèques subprimes sont devenus beaucoup plus corrélés que prévu. Le déclin des prix de l'immobilier a affecté un grand nombre de prêts simultanément, menant à des pertes massives dans les tranches de CDO. Cette forte corrélation des défauts a entraîné des pertes bien plus importantes que celles initialement prévues, affectant même des tranches de CDO considérées comme sûres.

**2.2.6.3.2 Risque de contagion** Le risque de contagion dans les CDO est un aspect crucial qui mérite une attention particulière, surtout en période de turbulence financière. Ce risque fait référence à la manière dont le défaut d'un actif ou d'un ensemble d'actifs dans un portefeuille de CDO peut entraîner une série de défauts parmi les autres actifs, en raison des interdépendances et des corrélations entre les actifs du portefeuille. Ce phénomène peut amplifier les pertes globales, impactant même les tranches initialement jugées plus sûres.

La contagion dans les portefeuilles de CDO peut être modélisée à l'aide de processus ponctuels auto-excitants tels que le processus de Hawkes. Ces modèles permettent de capturer les dynamiques de contagion où un événement de défaut augmente la probabilité de défauts subséquents. La formulation générale d'un modèle de Hawkes pour la contagion de défaut peut s'exprimer comme suit :

$$\lambda(t) = \mu + \int_0^t \phi(t-s) dN_s,$$

où :

- $\lambda(t)$  : fonction représente l'intensité du défaut à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le taux de défaut instantané conditionné par l'historique jusqu'à  $t$ . Elle est dynamique et varie en fonction du temps et des défauts antérieurs. Défini pour  $t \geq 0$ , où  $t$  représente le temps depuis le début de l'observation du portefeuille de CDO.
- $\mu$  : taux de base de défauts, qui agit comme une composante constante dans l'intensité du défaut. Ce paramètre représente la fréquence de défaut intrinsèque du portefeuille, indépendamment des interactions ou des défauts antérieurs. est un scalaire positif,  $\mu > 0$ , reflétant la fréquence de base des défauts.
- $\phi(t-s)$  : fonction de décroissance modélise l'impact temporel d'un défaut sur les taux de défaut futurs. Elle décroît typiquement avec le temps, signifiant que l'impact d'un défaut sur les probabilités de défaut futurs diminue au fur et à mesure que le temps passe depuis ce défaut. Typiquement définie pour  $t \geq s$  et  $s \geq 0$ , signifiant que l'effet d'un défaut au temps  $s$  sur le taux de défaut au temps  $t$  ne peut être ressenti qu'après le défaut et décroît avec le temps. La fonction est souvent choisie pour garantir que l'intégrale est bien définie et convergente, par exemple, une fonction exponentielle décroissante.
- $N_s$  : processus de comptage qui enregistre les moments des défauts. Pour chaque instant  $s$ ,  $N_s$  augmente de 1 si un défaut se produit à ce moment-là. est un processus de comptage marquant les temps de défaut. Ce processus est défini pour tous les temps  $s \geq 0$  et augmente

de manière discrète chaque fois qu'un défaut est observé.

Les tranches standards de CDO varient en termes de sensibilité à la contagion :

- Tranches Senior : Bien que moins sensibles en raison de leur position supérieure et de la protection contre les premières pertes, elles peuvent être affectées si la contagion est suffisamment étendue pour épuiser les tranches subordonnées.
- Tranches Mezzanine : Plus exposées, ces tranches sont directement affectées par les défauts qui dépassent les protections des tranches inférieures mais n'atteignent pas celles des tranches supérieures.
- Tranches Equity : Extrêmement vulnérables à la contagion, elles absorbent les premières pertes et sont les plus susceptibles de subir des défauts en cascade.

Les risques de contagion nécessitent une gestion rigoureuse du risque et une surveillance constante. Les stratégies pour atténuer ces risques incluent la diversification du portefeuille de référence et l'utilisation de techniques avancées de modélisation pour anticiper et réagir aux potentiels effets de contagion. Les investisseurs et les gestionnaires doivent également considérer l'impact potentiel des conditions macroéconomiques et sectorielles, qui peuvent exacerber la contagion et les corrélations dans des scénarios de stress.

**Exemple** — La crise financière asiatique de la fin des années 1990 illustre le risque de contagion. Tout a commencé en Thaïlande avec la décision du gouvernement de décrocher le baht de l'US dollar après une attaque spéculative intense sur sa monnaie. Cela a conduit à une crise de confiance massive parmi les investisseurs internationaux concernant la stabilité économique de la région. La crise s'est rapidement propagée d'un pays à l'autre en Asie, en grande partie à cause de la perception que ces économies étaient interdépendantes. Les investisseurs ont retiré massivement leurs capitaux, non seulement de la Thaïlande mais aussi de l'Indonésie, de la Malaisie, et d'autres marchés asiatiques, exacerbant les pressions économiques et financières sur toute la région. Cet exemple montre comment une crise dans un pays peut déclencher une réaction en chaîne ou contagion à d'autres nations, en particulier lorsque les économies sont perçues comme étant étroitement liées.

**2.2.6.3.3 Autre** Les CDO, surtout les synthétiques, utilisent des dérivés comme les Credit Default Swaps pour transférer ou synthétiser le risque de crédit. Bien que cela permette une diversification et une distribution du risque de crédit, cela introduit également une complexité accrue et une opacité qui peuvent masquer les vrais niveaux de risque, rendant difficile pour les investisseurs et les régulateurs d'évaluer et de gérer le risque de manière adéquate.

De plus, les CDO sont sensibles aux changements dans les conditions économiques et de marché. Les variations des taux d'intérêt, par exemple, peuvent affecter significativement la valeur des actifs sous-jacents des CDO et, par conséquent, la performance des tranches. Les changements dans les politiques réglementaires ou dans la confiance des investisseurs peuvent également influencer sur la liquidité et la valorisation des CDO sur le marché.

Un autre risque important est le risque de modèle, qui survient lorsque les hypothèses et les modèles utilisés pour évaluer et gérer les CDO s'avèrent inadéquats ou incorrects. Les modèles de corrélation, en particulier, peuvent être extrêmement complexes et leur inadéquation peut conduire à une sous-estimation du risque, particulièrement en période de stress du marché.

### 2.2.6.4 Tranches de CDO

Nous n'avons initialement parlé que des tranches de CDO "standards". Nous pouvons toutefois, sans devoir se limiter à celles-ci, les définir.

Pour une définition plus formelle, nous pouvons dire qu'elles sont définies en fonction de la distribution cumulative des pertes du portefeuille sous-jacent. Si  $L$  représente la perte totale du portefeuille, la fonction de répartition de  $L$  est  $F_L$ . Pour une tranche définie entre les percentiles  $\alpha\%$  et  $\alpha + \epsilon\%$ , cette tranche couvre les pertes entre  $F_L^{-1}(\alpha)$  et  $F_L^{-1}(\alpha + \epsilon)$ .

Les pertes absorbées par une tranche spécifique  $[\alpha\%, \alpha + \epsilon\%]$  sont calculées comme :

$$\text{Perte absorbée} = F_L^{-1}(\alpha + \epsilon) - F_L^{-1}(\alpha)$$

Cela signifie que la tranche commence à subir des pertes lorsque les pertes totales du portefeuille dépassent  $F_L^{-1}(\alpha)$  et continue jusqu'à  $F_L^{-1}(\alpha + \epsilon)$ .

Les tranches supérieures ( $\alpha$  élevé) sont moins risquées et donc moins rémunératrices, tandis que les tranches inférieures ( $\alpha$  faible) offrent des rendements potentiels plus élevés mais à un risque accru.

La sélection des paramètres  $\alpha$  et  $\epsilon$  peut être adaptée pour répondre à différents appétits pour le risque et stratégies d'investissement.

### Vision micro-économique

La risquophilie, ou appétit pour le risque, est généralement définie dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Un investisseur est considéré comme risquophile si la fonction d'utilité  $U(W)$  de sa richesse  $W$  est convexe, indiquant qu'il préfère des investissements avec des rendements potentiels plus élevés malgré un risque accru.

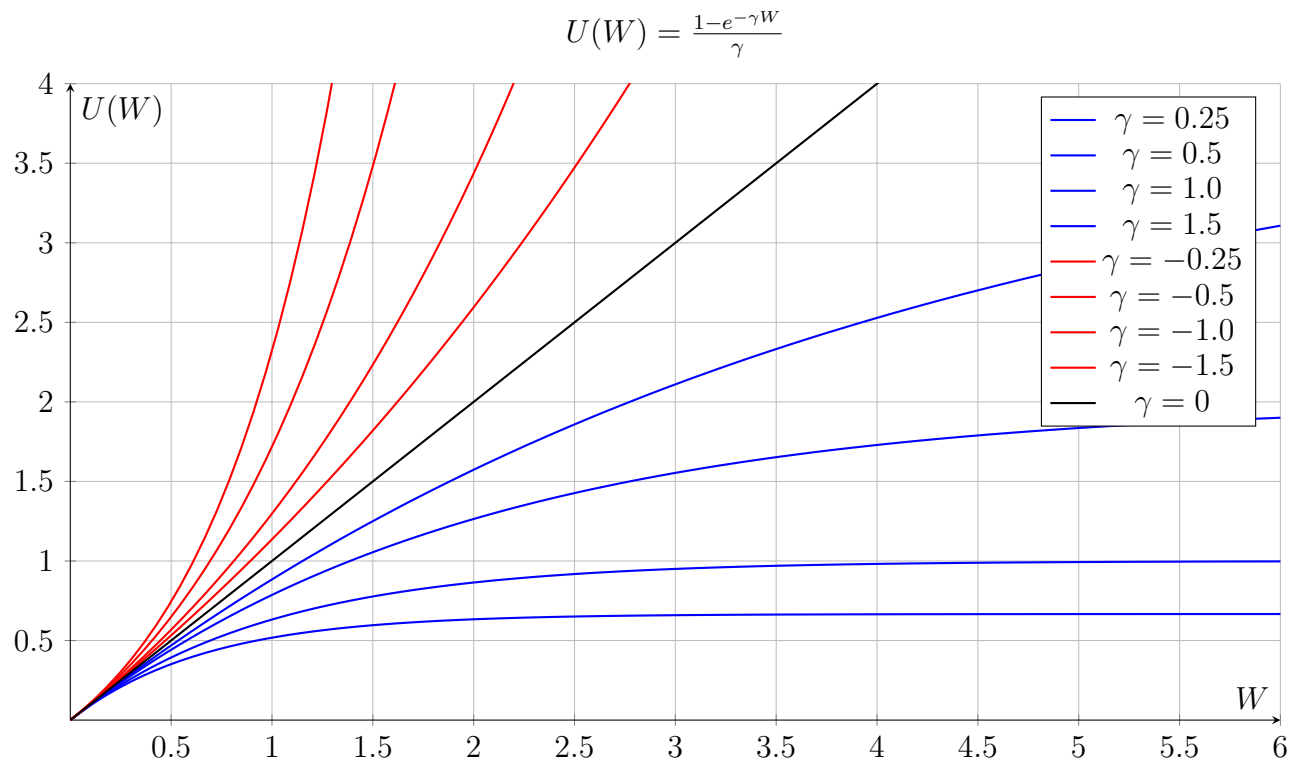
La fonction d'utilité la plus couramment utilisée pour modéliser un tel comportement est l'utilité exponentielle :

$$U(W) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\gamma W}}{\gamma} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ W & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\gamma$  est le paramètre d'aversion au risque. Un  $\gamma$  plus petit<sup>11</sup> indique une plus grande tolérance au risque.

---

11.  $\gamma > 0$  implique une risquophobie et  $\gamma < 0$  une risquophilie

FIGURE 2.6 – Fonctions d'utilité pour différent  $\gamma$ .

L'évaluation de chaque tranche selon le profil de risque de l'investisseur implique de calculer l'utilité espérée des paiements, ajustés pour le risque, que chaque tranche peut offrir. Ce calcul peut être effectué via l'intégrale suivante, qui prend en compte la fonction d'utilité et la distribution des pertes :

$$\mathbb{E}[U(W)] = \int U(W + \text{Perte absorbée}) dF_L$$

**Applications pratiques et implications économiques** Considérons encore la fonction de répartition des pertes  $F_L$  du portefeuille sous-jacent, où  $L$  représente la perte totale du portefeuille.

- **Investisseurs Risquophobes** : Ces investisseurs ont une faible tolérance au risque ( $\gamma$  élevé si l'on garde une fonction d'utilité exponentielle). Ils préfèrent les tranches senior ( $\alpha$  plus élevé) qui sont moins susceptibles de subir des pertes, car  $F_L^{-1}(\alpha)$  pour une tranche senior est relativement plus élevé, ce qui signifie que ces tranches ne commencent à subir des pertes qu'après que des événements de perte significatifs aient impacté les tranches inférieures. Ils pourraient aussi préférer un  $\epsilon$  plus faible.
- **Investisseurs Risquophiles** : Ces investisseurs, avec une aversion au risque plus faible ( $\gamma$  bas), optent pour les tranches junior ( $\alpha$  plus faible) qui présentent un risque plus élevé mais aussi un potentiel de rendement plus important. Pour ces tranches,  $F_L^{-1}(\alpha)$  est plus bas, ce qui implique qu'elles commencent à subir des pertes avec des pertes globales du portefeuille relativement faibles. Ils pourraient aussi préférer un  $\epsilon$  plus important.

# Chapitre 3

## Modèles de Durée de Vie

Dans le monde financier, le risque de crédit est l'un des risques les plus cruciaux à gérer. Il représente la probabilité qu'un emprunteur fasse défaut sur ses obligations de paiement. Les modèles de durée de vie, qui incluent le hazard rate et la fonction de survie, sont des outils puissants pour quantifier et gérer ce risque. Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux des modèles de durée de vie et discute de leur importance dans le contexte du risque de crédit.

Les modèles de durée de vie, également connus sous le nom de modèles de survie ou modèles de fiabilité, sont largement utilisés dans diverses disciplines, y compris la médecine, l'ingénierie, et les sciences sociales, pour étudier le temps jusqu'à la survenance d'un événement particulier, tel que la défaillance d'un composant ou la mort d'un patient. Dans le domaine financier, ces modèles sont adaptés pour évaluer le risque de défaut des entreprises ou des instruments financiers.

Les premiers modèles de durée de vie ont été développés pour des applications biomédicales, où ils étaient utilisés pour analyser les données de survie des patients. Ces modèles ont progressivement été adoptés par les analystes financiers. L'introduction des produits dérivés de crédit, comme les CDS et les Collateralized Debt Obligations (CDO), a accentué l'importance de ces modèles dans le secteur financier.

Ce chapitre explore les différents modèles de durée de vie utilisés pour évaluer et prédire les événements de défaut en particulier dans le contexte des CDS k-ième défaut.

### Concepts Clés

- Hazard Rate (Intensité de Défaut) : L'intensité de défaut est une mesure de la probabilité conditionnelle instantanée de défaut à un moment donné, étant donné que le défaut ne s'est pas produit auparavant. Elle est essentielle pour modéliser le risque de crédit de manière dynamique.
- Fonction de Survie : La fonction de survie,  $S(t)$ , représente la probabilité qu'une entreprise ou un emprunteur ne fasse pas défaut jusqu'à un certain moment  $t$ . Elle est directement liée au hazard rate et est utilisée pour estimer les probabilités de défaut sur différentes périodes.
- Modèles Paramétriques et Non Paramétriques : Les modèles de durée de vie peuvent être paramétriques, où une forme spécifique est assumée pour le hazard rate (par exemple, exponentielle, Weibull), ou non paramétriques, où aucune forme spécifique n'est imposée (par exemple, Kaplan-Meier).

## Hazard Rate

Le hazard rate, ou intensité de défaut, est une mesure centrale dans les modèles de durée de vie et de risque de crédit. Mathématiquement, il est défini comme la probabilité conditionnelle instantanée de défaillance à un instant  $t$ , étant donné que la défaillance ne s'est pas produite avant  $t$ . Formulée de manière formelle, cette probabilité conditionnelle est donnée par :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t},$$

où  $T$  est le temps de défaillance.

La définition du hazard rate peut être interprétée de plusieurs façons :

- Taux Instantané de Défaillance :  $\lambda(t)$  représente le taux instantané de défaillance à l'instant  $t$ , étant donné que l'événement de défaillance ne s'est pas encore produit.
- Relation avec la Fonction de Survie : La fonction de survie  $S(t)$  est la probabilité que l'entité survive jusqu'au temps  $t$ , et elle est liée au hazard rate par la relation :

$$S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}.$$

Cette équation montre comment le hazard rate influence directement la probabilité de survie.

- Fonction de Défaillance Cumulative : La fonction de défaillance cumulative,  $F(t)$ , qui représente la probabilité de défaillance avant l'instant  $t$ , est liée à la fonction de survie par  $F(t) = 1 - S(t)$ .

## 3.1 Modèles Déterministes

Les modèles déterministes de hazard rate simplifient l'intensité de défaut en la considérant comme une fonction déterministe du temps. Ces modèles permettent une compréhension plus intuitive et une application plus simple dans certaines situations financières.

### 3.1.1 Hazard Rate Constant

Un modèle de hazard rate constant suppose que l'intensité de défaut  $\lambda(t)$  est constante au cours du temps. Ce modèle est souvent utilisé pour sa simplicité et sa facilité de calcul. Mathématiquement, il est représenté par :

$$\lambda(t) = \lambda,$$

où  $\lambda$  est une constante positive. Dans ce cas, la fonction de survie et la fonction de défaillance cumulative se simplifient comme suit :

#### Fonction de Survie

$$S(t) = e^{-\lambda t}.$$

## Fonction de Défaillance Cumulative

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Les modèles à hazard rate constant sont particulièrement utiles pour des instruments financiers à court terme ou dans des situations où le risque de défaut est considéré homogène sur toute la période étudiée. Cependant, ils ne capturent pas les variations temporelles du risque de défaut et peuvent être limités dans les analyses à long terme ou dans des environnements économiques dynamiques.

### 3.1.2 Hazard Rate Dépendant du Temps

Un modèle de hazard rate dépendant du temps permet à l'intensité de défaut de varier au cours du temps. Ce modèle est plus flexible et peut capturer les variations du risque de défaut en fonction des conditions économiques ou des caractéristiques spécifiques de l'emprunteur.

Mathématiquement, un hazard rate dépendant du temps est représenté par une fonction  $\lambda(t)$ . Les fonctions de survie et de défaillance cumulative deviennent alors :

#### 3.1.2.1 Fonction de Survie

$$S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}.$$

#### 3.1.2.2 Fonction de Défaillance Cumulative

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du}.$$

Les modèles à hazard rate dépendant du temps sont adaptés pour des analyses où le risque de défaut est influencé par des facteurs temporels, comme les cycles économiques, les changements dans les conditions de marché, ou les évolutions spécifiques à une entreprise. Ils offrent une meilleure précision et une plus grande capacité de modélisation des comportements complexes de défaut.

Un exemple classique est un hazard rate linéairement croissant avec le temps, modélisé par :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \alpha t,$$

où  $\lambda_0$  et  $\alpha$  sont des paramètres positifs. La fonction de survie correspondante serait alors :

$$S(t) = e^{-(\lambda_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2)}.$$

## 3.2 Modèles Stochastiques

Les modèles stochastiques de hazard rate offrent une flexibilité accrue en permettant à l'intensité de défaut de varier de manière aléatoire au fil du temps. Ces modèles sont particulièrement adaptés pour capturer les incertitudes et les fluctuations du risque de défaut dans des environnements économiques complexes.

### 3.2.1 Hazard Rate Aléatoire

Dans un modèle de hazard rate aléatoire, l'intensité de défaut  $\lambda(t)$  est considérée comme une variable aléatoire qui suit un processus stochastique. Cela signifie que  $\lambda(t)$  peut changer de manière imprévisible, influencée par divers facteurs économiques, financiers ou spécifiques à l'entreprise.

### 3.2.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est l'un des modèles stochastiques les plus simples et les plus couramment utilisés pour modéliser le hazard rate. Dans ce cadre, les défauts surviennent selon un processus de Poisson, où les temps entre les défauts suivent une distribution exponentielle.

#### 3.2.2.1 Processus de Poisson Homogène

Dans un processus de Poisson homogène, le hazard rate  $\lambda$  est constant au cours du temps. Les défauts surviennent à des intervalles indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle avec paramètre  $\lambda$ . La fonction de survie et la fonction de défaillance cumulative sont les mêmes que pour le modèle à hazard rate constant :

1. Fonction de Survie :  $S(t) = e^{-\lambda t}$ .
2. Fonction de Défaillance Cumulative :  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

#### 3.2.2.2 Processus de Poisson Non Homogène

Dans un processus de Poisson non homogène, le hazard rate  $\lambda(t)$  peut varier au cours du temps. Le taux de défaut à un instant donné peut être influencé par des variables exogènes ou par des conditions de marché changeantes. La fonction de survie et la fonction de défaillance cumulative sont alors :

1. Fonction de Survie :  $S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$ .
2. Fonction de Défaillance Cumulative :  $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$ .

### 3.2.3 Modèles avec Processus de Diffusion

Les modèles de hazard rate utilisant des processus de diffusion sont plus complexes et permettent de capturer des dynamiques plus sophistiquées du risque de défaut. Un processus de diffusion est souvent modélisé par une équation différentielle stochastique (EDS) de la forme :

$$d\lambda(t) = \mu(\lambda(t), t)dt + \sigma(\lambda(t), t)dW(t),$$

où :

- $\mu(\lambda(t), t)$  est la dérive, représentant la tendance moyenne du hazard rate.
- $\sigma(\lambda(t), t)$  est la volatilité, représentant l'incertitude ou la variabilité du hazard rate.
- $dW(t)$  est un incrément d'un mouvement brownien standard.

#### 3.2.3.1 Modèle de Vasicek

Un exemple classique est le modèle de Vasicek, qui suppose que le hazard rate suit une EDS avec une tendance à retourner à une moyenne de long terme. La forme générale est :

$$d\lambda(t) = \kappa(\theta - \lambda(t))dt + \sigma dW(t),$$

où :

- $\kappa$  est la vitesse de réversion vers la moyenne.
- $\theta$  est le niveau moyen de long terme du hazard rate.
- $\sigma$  est la volatilité du hazard rate.

### 3.2.3.2 Modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

Le modèle CIR est une autre approche couramment utilisée, particulièrement adaptée pour garantir que le hazard rate reste positif. La forme générale est :

$$d\lambda(t) = \kappa(\theta - \lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t),$$

où les paramètres  $\kappa$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  ont des interprétations similaires à celles du modèle de Vasicek.

# Chapitre 4

## Risque de Crédit

Le risque de crédit est la probabilité qu'un prêteur subisse une perte due à la défaillance d'un emprunteur en matière de paiement des intérêts ou du principal selon les termes convenus d'un contrat de prêt ou d'un autre instrument de crédit. Ce risque est inhérent à toutes les transactions de prêt et est une préoccupation centrale dans le secteur bancaire et financier.

Les modèles de risque de crédit sont développés pour évaluer, quantifier et gérer ce risque. Ils permettent aux institutions financières de déterminer la probabilité de défaut d'un emprunteur, ce qui aide à prendre des décisions informées sur le prêt, à fixer les conditions de prêt, à ajuster les taux d'intérêt pour compenser le risque pris, et à maintenir des réserves de capital suffisantes selon les réglementations.

Ces modèles se classent généralement en deux catégories :

- **Modèles structurels** : Basés sur l'analyse de la valeur des actifs de l'emprunteur par rapport à ses obligations. Ils supposent que le défaut survient si la valeur des actifs tombe en dessous d'un certain seuil (souvent la valeur des dettes dues).
- **Modèles réduits** : Ne se basent pas sur la structure économique de l'entreprise mais traitent le risque de défaut comme un événement aléatoire, souvent modélisé par des processus stochastiques.

Ces approches sont cruciales non seulement pour la tarification des risques et la gestion du portefeuille de prêts mais aussi pour répondre aux exigences réglementaires qui obligent les banques à maintenir des niveaux adéquats de capital en fonction des risques pris.

En particulier, dans le contexte des CDS, ces modèles sont utilisés pour évaluer le risque de défaut sur des obligations, permettant aux investisseurs et aux gestionnaires de risques de mieux tarifier et gérer les risques associés à ces instruments financiers.

### 4.1 Modèles Structurels

Les modèles structurels de risque de crédit envisagent le défaut de paiement comme un problème de valorisation d'options financières. Dans ces modèles, les créanciers sont considérés comme les propriétaires des actifs de l'entreprise, tandis que les actionnaires détiennent une option d'achat sur ces actifs. Le défaut est modélisé comme survenant lorsque la valeur des actifs tombe en dessous des dettes dues. Ces modèles évaluent le risque de défaut en reliant la santé financière de l'entreprise

à la volatilité de ses actifs et à d'autres facteurs de marché. Ils fournissent un cadre pour comprendre comment les conditions de marché affectent le risque de crédit et la valorisation des dettes.

### 4.1.1 Modèle de Merton

Le modèle de Merton, développé par Robert C. Merton en 1974, est un cadre structurel pour la modélisation du risque de crédit qui traite les dettes d'une entreprise comme des options financières. Le modèle s'appuie sur la théorie des options de Black-Scholes pour évaluer la probabilité de défaut d'une entreprise. Dans ce modèle, les actionnaires possèdent une option d'achat sur la valeur des actifs de l'entreprise, exercée seulement si la valeur des actifs dépasse le montant du passif à l'échéance.

#### Fondements Théoriques

- Dynamique des Actifs : Les actifs de l'entreprise suivent un mouvement brownien géométrique, représenté par  $dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$ , où  $V_t$  est la valeur des actifs,  $\mu$  le taux de rendement attendu,  $\sigma$  la volatilité des actifs, et  $dW_t$  un terme de Wiener.
- Condition de Défaut : Le défaut survient si la valeur des actifs  $V_T$  est inférieure au passif  $D$  à la date d'échéance  $T$ .
- Valeur de l'Option d'Achat des Actionnaires : Elle est donnée par  $V_t N(d_1) - De^{-rT} N(d_2)$ , où  $N$  est la fonction de distribution cumulative normale, et  $d_1$  et  $d_2$  sont définis comme :

$$d_1 = \frac{\log(V_t/D) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

- Probabilité de Défaut : La probabilité de défaut est indirectement évaluée par  $1 - N(d_2)$ , reflétant la probabilité que la valeur des actifs soit inférieure au passif à l'échéance.

**Applications :** Le modèle de Merton est utilisé pour estimer les spreads de crédit, les notations de crédit et la tarification des risques de défaut. Il est également fondamental dans la gestion du risque et la planification financière.

**Limitations :** Bien que novateur, le modèle suppose une information de marché complète et des marchés financiers efficients, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. De plus, la précision du modèle dépend fortement de la volatilité des actifs, qui peut être difficile à estimer précisément.

#### Extensions

Le modèle de Merton présente des limitations qui ont conduit au développement de nombreuses extensions pour améliorer sa précision et son applicabilité. Parmi ces extensions, on trouve le modèle de Black-Cox, qui modifie l'hypothèse de défaut de Merton en introduisant une barrière de défaut, rendant le modèle plus adapté pour capturer le risque de défaut des entreprises en difficulté financière. Une autre extension significative est le modèle de Leland, qui intègre les coûts de faillite et l'optimisation de la structure du capital de l'entreprise. De plus, le modèle de Longstaff et Schwartz permet une modélisation plus dynamique en autorisant la volatilité et la barrière de défaut à varier avec le temps. Ces extensions enrichissent le cadre original en offrant

une flexibilité accrue et en permettant une application à une gamme plus large de scénarios de marché, renforçant ainsi l'utilité des modèles de risque de crédit dans des conditions de marché complexes et en évolution.

### 4.1.2 Modèle de Black-Cox

Le modèle de Black-Cox, développé en 1976 par Fischer Black et John Cox, est une extension du modèle de Merton pour l'évaluation du risque de défaut. Ce modèle est particulièrement distingué par l'introduction d'une barrière de défaut qui offre une approche plus réaliste et flexible pour modéliser le risque de crédit. Ce modèle est fréquemment utilisé pour les obligations d'entreprises et les produits structurés de crédit.

#### Fondements Théoriques

Le modèle de Black-Cox modélise le défaut de l'entreprise comme un processus où le défaut se produit lorsque la valeur des actifs de l'entreprise tombe en dessous d'un certain seuil prédéfini, connu sous le nom de barrière de défaut. Cette barrière est souvent définie comme une fonction de la dette à court terme de l'entreprise, ajoutant ainsi une dimension temporelle à l'évaluation du risque de défaut qui manque dans le modèle original de Merton.

La valeur des actifs de l'entreprise  $V(t)$  est modélisée comme un processus de diffusion avec une composante de dérive et une composante de volatilité :

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dW(t),$$

où  $\mu$  est le taux de croissance des actifs,  $\sigma$  est la volatilité des actifs, et  $dW(t)$  est l'incrément d'un processus de Wiener.

Dans le modèle de Black-Cox, la probabilité de défaut est déterminée par la probabilité que la valeur des actifs de l'entreprise atteigne la barrière de défaut avant la maturité de la dette. Cette probabilité peut être calculée en utilisant une formule d'option barrière, qui est une variante de la formule de Black-Scholes adaptée pour inclure une barrière absorbante à un niveau spécifié.

#### Avantages

- Adaptabilité aux Conditions du Marché : Le modèle peut intégrer des informations de marché en temps réel pour ajuster les paramètres tels que la barrière de défaut, ce qui le rend extrêmement réactif aux changements de l'environnement économique.
- Utilisation de la Barrière de Défaut : L'introduction d'une barrière de défaut ajoute une dimension réaliste qui permet de capturer les situations financières précaires bien avant qu'un défaut ne se réalise effectivement.
- Applications Diversifiées : Convient bien pour l'analyse des risques de crédit des obligations et autres produits de dette où la structure du capital de l'entreprise est complexe.

**Limitations** Toutefois, le modèle de Black-Cox n'est pas sans limites. La nécessité de spécifier correctement la barrière de défaut exige une compréhension approfondie de la structure financière de l'entreprise, ce qui peut être complexe et sujet à des erreurs. De plus, le modèle suppose que les marchés sont efficients et que toutes les informations pertinentes sont reflétées dans les prix des actifs, ce qui n'est pas toujours le cas.

### 4.1.3 Modèle de KMV

Le modèle KMV, nommé d'après ses créateurs Kealhofer, McQuown, et Vasicek, est une évolution importante du modèle de Merton pour l'évaluation du risque de crédit. Ce modèle structurel repose sur l'analyse de la solvabilité d'une entreprise en utilisant la "Distance to Default" (DtD), une métrique qui mesure combien de temps il reste avant qu'une entreprise ne devienne insolvable, donnée sa situation financière actuelle. Il est largement adopté dans les institutions financières pour sa précision améliorée dans la prédiction des défauts de paiement.

#### Fondements Théoriques

Le modèle KMV repose sur l'idée que le défaut se produit lorsque la valeur des actifs d'une entreprise tombe en dessous de ses engagements de dette à court terme plus une fraction de ses dettes à long terme. Contrairement au modèle de Merton qui utilise simplement le montant nominal de la dette, le modèle KMV considère cette spécification de dette plus réaliste, ce qui est une des clés de son succès.

**Distance to Default (DtD) :** La Distance to Default est calculée en mesurant combien de fois l'écart entre la valeur des actifs actuels et le seuil de défaut (déclenché par le niveau de dette) peut être couvert par la volatilité des actifs de l'entreprise. Mathématiquement, cela est donné par :

$$\text{DtD} = \frac{\log\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

où  $V$  est la valeur actuelle des actifs,  $D$  est le seuil de défaut,  $\mu$  est le taux de croissance espéré des actifs,  $\sigma$  est la volatilité des actifs, et  $T$  est la durée jusqu'à l'échéance de la dette.

#### Avantages :

- Précision : La méthode d'évaluation du risque de crédit par la Distance to Default est généralement plus précise dans la prédiction des défaillances d'entreprises que les méthodes traditionnelles basées uniquement sur les données comptables.
- Réactivité : Réagit rapidement aux changements des conditions de marché grâce à l'utilisation des données de marché pour estimer la valeur des actifs.
- Flexibilité : Peut être ajusté pour différents types d'entreprises et de structures de marché.

**Limitations :** Malgré ses avantages, le modèle KMV a des limitations. Il nécessite l'accès à des données de marché précises et à jour, ce qui peut être un défi pour les entreprises non cotées ou celles dans des marchés moins transparents. De plus, le modèle repose fortement sur la précision des estimations de la volatilité des actifs, qui peut être difficile à évaluer précisément.

## 4.2 Modèles réduits

Les modèles réduits (ou reduced-form models) sont des outils cruciaux dans la finance moderne, particulièrement pour la tarification des produits dérivés de crédit, tels que les CDS et les Collateralized Debt Obligations (CDO). Contrairement aux modèles structurels, qui se basent sur les fondamentaux économiques et financiers d'une entreprise pour modéliser le risque de crédit, les modèles réduits adoptent une approche plus statistique, se concentrant sur les processus de défaut

exogènes.

Les modèles réduits considèrent que le défaut d'une entreprise est un événement imprévisible, survenant à un taux qui peut varier dans le temps. L'hypothèse fondamentale est que le défaut suit un processus aléatoire, souvent modélisé par un processus de Poisson. La probabilité de défaut est alors intégrée dans le taux d'actualisation utilisé pour tarifer les produits dérivés.

Dans les modèles réduits, le défaut est souvent modélisé comme un processus de Poisson. Soit  $\lambda(t)$  l'intensité de défaut (ou hazard rate) à l'instant  $t$ . Cette intensité représente la probabilité conditionnelle instantanée de défaut de l'entreprise entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , donnée par :

$$\mathbb{P}(\text{défaut entre } t \text{ et } t + \Delta t | \text{pas de défaut avant } t) = \lambda(t)\Delta t.$$

L'intensité de défaut peut être constante ou stochastique, dépendant des informations du marché et de l'état économique global.

### Avantages

- Flexibilité : Les modèles réduits peuvent facilement incorporer des informations de marché et des ajustements basés sur les données empiriques.
- Simplicité : Ils sont souvent plus simples à implémenter et à calibrer par rapport aux modèles structurels.
- Applicabilité : Ils sont largement utilisés pour la tarification des CDS et des CDO, ainsi que pour d'autres produits dérivés de crédit.

### Limites

- Hypothèses simplificatrices : L'hypothèse que les défauts suivent un processus de Poisson peut être trop simpliste.
- Manque de fondement économique : Les modèles réduits ne se basent pas sur les fondamentaux économiques de l'entreprise, ce qui peut limiter leur précision dans certaines situations.
- Corrélations de défaut : Modéliser correctement les corrélations de défaut reste un défi, surtout pour les portefeuilles complexes comme les CDO.

## Modèle de Jarrow-Turnbull

Le modèle de Jarrow-Turnbull, introduit en 1995 par Robert Jarrow et Stuart Turnbull, est l'un des premiers modèles réduits pour la tarification des obligations de sociétés et des produits dérivés de crédit. Ce modèle suppose que le défaut peut se produire à tout moment et utilise une intensité de défaut stochastique pour évaluer les prix des instruments financiers.

### Modélisation

Le modèle de Jarrow-Turnbull repose sur l'hypothèse que le taux de défaut, noté  $\lambda(t)$ , est une fonction stochastique du temps. Il intègre les taux d'intérêt et les spreads de crédit observés sur le marché pour modéliser le risque de crédit. La fonction de survie, qui représente la probabilité que l'entité ne fasse pas défaut jusqu'à un certain temps  $t$ , est donnée par l'expression  $S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$ . Pour la tarification des CDS, le modèle équilibre les paiements périodiques (spreads) et les paiements de protection en cas de défaut. Les flux de paiements sont actualisés en fonction de la fonction de survie et des taux d'intérêt.

# Chapitre 5

## Méthodes Statistiques Appliquées

Les méthodes statistiques permettent de traiter des données souvent complexes et incomplètes, en fournissant des estimations robustes des probabilités de défaut et des distributions de pertes. Elles sont particulièrement utiles pour tirer des informations à partir des spreads de CDS, des données historiques de défaut, et des caractéristiques financières des emprunteurs. Parmi les méthodes les plus couramment utilisées, le bootstrap et l'interpolation occupent une place prépondérante.

Le bootstrap est une technique de rééchantillonnage qui permet d'estimer la distribution d'un échantillon statistique en effectuant des rééchantillonnages répétés avec remise. Cette méthode est particulièrement utile pour estimer les intervalles de confiance et pour obtenir des distributions de paramètres de risque sans faire d'hypothèses paramétriques strictes. En finance, le bootstrap est utilisé pour estimer les probabilités de survie et les taux de défaut à partir des spreads de CDS, offrant ainsi une mesure précise et fiable du risque de crédit.

L'interpolation, quant à elle, est une méthode utilisée pour estimer les valeurs intermédiaires entre des points de données connus. Elle permet de construire des courbes de survie et des profils de risque continus à partir de données de marché discrètes. Différentes techniques d'interpolation, telles que l'interpolation linéaire, l'interpolation par spline ou les méthodes plus avancées, peuvent être appliquées pour obtenir des estimations précises des probabilités de défaut et des taux de survie. L'interpolation est essentielle pour combler les lacunes dans les données de crédit et pour fournir une vision plus complète et continue du risque de défaut.

### 5.1 Le Bootstrap

Le bootstrap est une méthode statistique de rééchantillonnage qui permet d'estimer la distribution d'un échantillon statistique en effectuant des rééchantillonnages répétés avec remise. Introduite par Bradley Efron en 1979, cette technique est particulièrement utile dans les situations où les hypothèses paramétriques classiques sont difficiles à satisfaire ou lorsque les données disponibles sont limitées. En finance, le bootstrap est largement utilisé pour estimer les intervalles de confiance, les distributions de paramètres de risque, et pour tirer des informations à partir des spreads de CDS et des données historiques de défaut.

### 5.1.1 Principe de Base du Bootstrap

Le bootstrap repose sur le principe de rééchantillonnage avec remise. Supposons que nous ayons un échantillon de données  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de taille  $n$ . Pour appliquer le bootstrap, nous procédons comme suit :

1. Rééchantillonnage : Générer un grand nombre  $B$  d'échantillons bootstrap  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_B^*$ , chacun de taille  $n$ , en tirant avec remise à partir de l'échantillon original  $X$ .
2. Estimation : Pour chaque échantillon bootstrap  $X_b^*$ , calculer l'estimateur d'intérêt  $\hat{\theta}_b^*$ , où  $\hat{\theta}$  est la statistique d'intérêt (par exemple, la moyenne, la variance, etc.).
3. Distribution Bootstrap : Utiliser les  $B$  valeurs de  $\hat{\theta}_b^*$  pour estimer la distribution de l'estimateur  $\hat{\theta}$ .

L'avantage du bootstrap est qu'il ne fait aucune hypothèse paramétrique sur la distribution des données. La distribution empirique des  $\hat{\theta}_b^*$  sert d'approximation à la distribution réelle de  $\hat{\theta}$ .

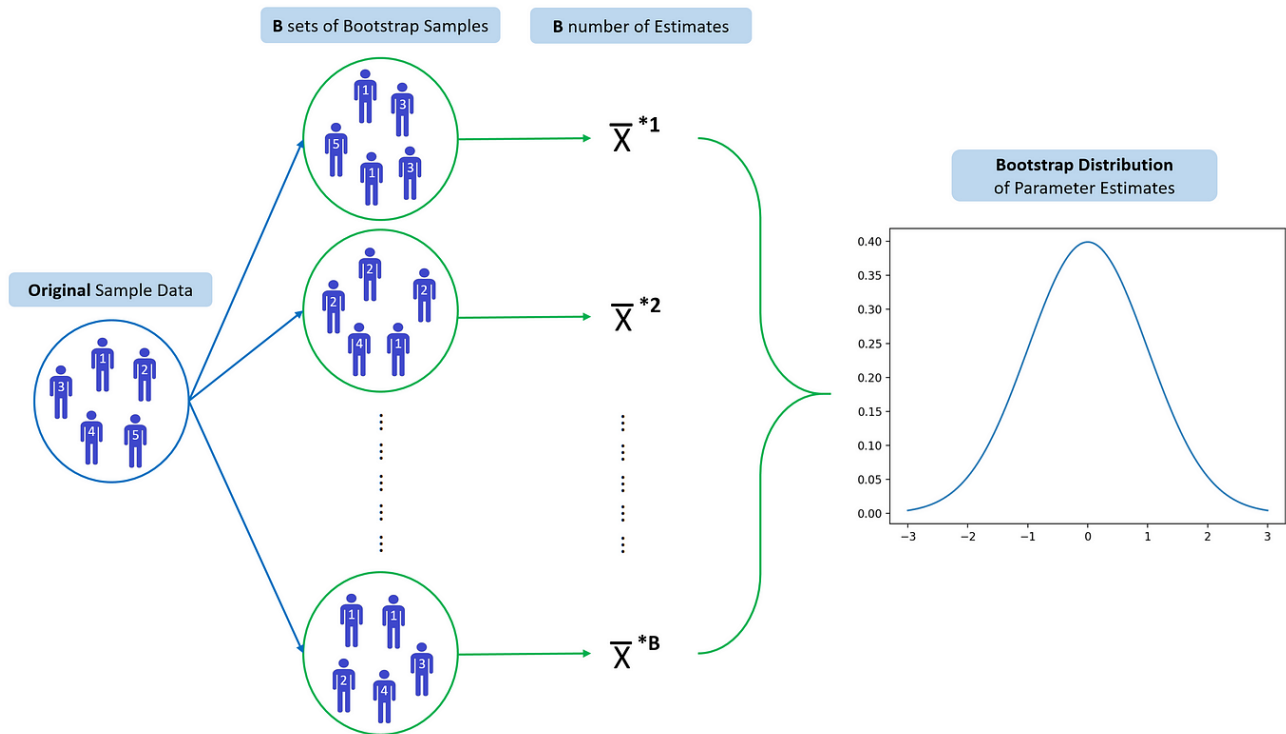


FIGURE 5.1 – Shéma Bootstrap

Soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un échantillon de taille  $n$  provenant d'une distribution inconnue  $F$ . L'objectif est d'estimer un paramètre  $\theta$  de  $F$ , tel que la moyenne ou la variance. Le bootstrap permet d'estimer la distribution de l'estimateur  $\hat{\theta}$ .

#### 5.1.1.1 Estimateur Bootstrap

Pour chaque échantillon bootstrap  $X_b^*$ , l'estimateur bootstrap  $\hat{\theta}_b^*$  est calculé. L'ensemble des  $B$  estimateurs  $\{\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*\}$  forme la distribution bootstrap de  $\hat{\theta}$ .

$$\hat{\theta}_b^* = \theta(X_b^*) \quad \text{pour } b = 1, 2, \dots, B.$$

### 5.1.1.2 Intervalle de Confiance Bootstrap

Un intervalle de confiance bootstrap pour  $\theta$  peut être construit à partir des quantiles de la distribution bootstrap. Par exemple, un intervalle de confiance bootstrap à 95% pour  $\theta$  est donné par les 2,5ème et 97,5ème percentiles de la distribution bootstrap des  $\hat{\theta}_b^*$ .

$$\left( \hat{\theta}_{(0.025)}^*, \hat{\theta}_{(0.975)}^* \right),$$

où  $\hat{\theta}_{(0.025)}^*$  et  $\hat{\theta}_{(0.975)}^*$  sont les 2,5ème et 97,5ème percentiles des  $\hat{\theta}_b^*$ . Ces percentiles sont obtenus en ordonnant les  $\hat{\theta}_b^*$  et en sélectionnant les valeurs correspondant aux quantiles souhaités.

## 5.2 Interpolation

L'interpolation est une technique utilisée pour estimer les valeurs intermédiaires entre des points de données connus. En finance, l'interpolation est essentielle pour construire des courbes de survie, des taux de défaut, et d'autres profils de risque continus à partir de données discrètes. Il existe plusieurs méthodes d'interpolation, chacune ayant ses avantages et ses limitations.

### 5.2.1 Interpolation Linéaire

L'interpolation linéaire est l'une des méthodes les plus simples et les plus couramment utilisées. Elle consiste à estimer les valeurs intermédiaires en supposant que les données suivent une relation linéaire entre les points.

Soit  $(x_i, y_i)$  et  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  deux points de données. L'interpolation linéaire estime la valeur  $y$  pour un point  $x$  situé entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  en utilisant la formule :

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i).$$

L'interpolation linéaire est souvent utilisée pour estimer les taux de défaut et les spreads de CDS à des maturités intermédiaires. Par exemple, si l'on connaît les spreads de CDS à 1 an et 3 ans, l'interpolation linéaire peut estimer le spread à 2 ans.

L'avantage principal de l'interpolation linéaire est sa simplicité et sa rapidité de calcul. Cependant, elle peut manquer de précision si les données suivent une tendance non linéaire, et elle ne capte pas les courbures ou les fluctuations complexes des données financières.

### 5.2.2 Interpolation Polynomiale

L'interpolation polynomiale utilise des polynômes pour estimer les valeurs intermédiaires. Cette méthode est plus flexible que l'interpolation linéaire et peut mieux capturer les variations des données.

Pour  $n$  points de données  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , l'interpolation polynomiale cherche un polynôme  $P(x)$  de degré  $n - 1$  tel que :

$$P(x_i) = y_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

La forme générale du polynôme est :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont déterminés en résolvant un système d'équations linéaires basé sur les points de données.

L'interpolation polynomiale est utilisée pour estimer des courbes de taux d'intérêt, des courbes de rendement, et des courbes de survie complexes. Elle est également appliquée dans la tarification des produits dérivés lorsque les relations entre les variables sont non linéaires.

L'interpolation polynomiale est plus flexible que l'interpolation linéaire et peut capturer des courbes complexes. Cependant, elle peut souffrir de l'effet de sur-ajustement (overfitting) si le degré du polynôme est trop élevé. De plus, les polynômes de haut degré peuvent présenter des oscillations importantes, rendant l'interpolation instable.

### 5.2.3 Interpolation Spline

L'interpolation spline utilise des fonctions polynomiales par morceaux pour estimer les valeurs intermédiaires. Les splines sont particulièrement utiles pour créer des courbes lisses qui passent par tous les points de données.

L'interpolation spline consiste à diviser l'intervalle de données en sous-intervalles et à ajuster un polynôme de bas degré (généralement de degré 3, appelé spline cubique) à chaque sous-intervalle. Les splines sont définies de manière à ce que la courbe soit continue et que ses premières et deuxièmes dérivées soient continues aux points d'interpolation.

La forme générale d'une spline cubique entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  est :

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Les coefficients  $a_i, b_i, c_i$ , et  $d_i$  sont déterminés de manière à ce que la courbe spline soit lisse et continue.

Les splines sont largement utilisées en finance pour l'estimation des courbes de taux d'intérêt, des courbes de rendement, des courbes de survie et pour la tarification des produits dérivés. Par exemple, les courbes de taux zéro (zero-coupon yield curves) sont souvent estimées en utilisant des splines.

Les splines offrent une meilleure flexibilité et lissage par rapport aux interpolations linéaires et polynomiales. Elles produisent des courbes lisses qui capturent bien les variations locales des données. Cependant, le calcul des splines est plus complexe et nécessite la résolution de systèmes d'équations plus grands. De plus, choisir les points de nœuds de manière optimale peut être un défi.

### 5.2.4 Interpolation Logarithmique

L'interpolation logarithmique est une méthode particulièrement efficace pour les données qui évoluent de manière exponentielle ou logarithmique. Elle consiste à appliquer une transformation

logarithmique aux données avant l'interpolation linéaire.

Supposons que nous ayons un ensemble de points de données  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'interpolation logarithmique consiste à appliquer une transformation logarithmique aux  $y_i$  pour obtenir  $\log(y_i)$ , puis à effectuer une interpolation linéaire sur ces valeurs transformées. La valeur interpolée  $y$  pour une nouvelle valeur  $x$  est ensuite obtenue en exponentiant le résultat de l'interpolation linéaire.

La formule de l'interpolation logarithmique est donnée par :

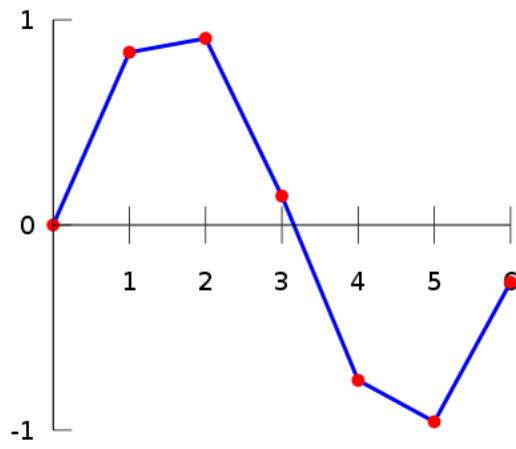
$$\log(y) = \log(y_i) + \frac{\log(y_{i+1}) - \log(y_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i)$$

,

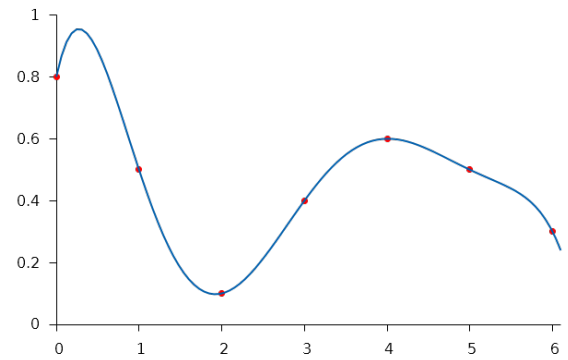
$$y = e^{\log(y)}.$$

L'interpolation logarithmique est couramment utilisée pour estimer les taux de défaut et les spreads de CDS à des maturités intermédiaires, particulièrement lorsque ces taux suivent une tendance exponentielle. Elle est également appliquée dans la construction des courbes de survie et dans l'estimation des prix des options.

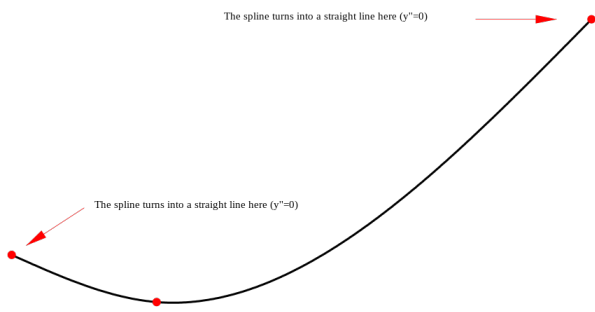
L'interpolation logarithmique est efficace pour les données financières qui suivent des tendances exponentielles, offrant une précision améliorée par rapport à l'interpolation linéaire. Cependant, elle n'est pas appropriée pour les données qui contiennent des valeurs nulles ou négatives, car la transformation logarithmique de telles valeurs n'est pas définie.



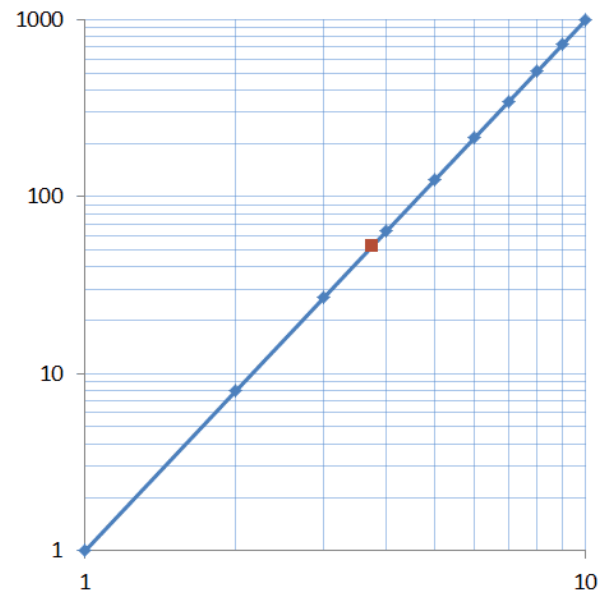
(a) Interpolation Linéaire



(b) Interpolation Polynomiale



(c) Interpolation Spline



(d) Interpolation Logarithmique

FIGURE 5.2 – Visualisation des types d'interpolation

**Deuxième partie**  
**Partie Pratique**



# Chapitre 6

## Analyse et Traitement des Données

Ce chapitre présente une analyse détaillée des spreads de CDS pour les dettes souveraines de cinq pays du Golfe<sup>1</sup> : les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite, Oman et Bahreïn. Ces pays constitueront le panier sur lequel nous effectuerons le reste de nos travaux.

Les données utilisées pour cette analyse couvrent les spreads de CDS (maturité 5 ans) sur une période de cinq ans. Le tableau suivant 6.1 résume les colonnes présentes dans le fichier de données :

- **Date** : La date des observations.
- **UAE** : Les spreads de CDS pour les Émirats Arabes Unis.
- **QATAR** : Les spreads de CDS pour le Qatar.
- **SAUDI** : Les spreads de CDS pour l'Arabie Saoudite.
- **OMAN** : Les spreads de CDS pour Oman.
- **BAHRAIN** : Les spreads de CDS pour Bahreïn.

Date	UAE	QATAR	SAUDI	OMAN	BAHRAIN
2019-01-01	60.0	75.0	90.0	150.0	300.0
2019-01-02	61.0	76.0	91.0	151.0	301.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2023-12-22	41.0	46.0	52.0	116.0	203.0

TABLE 6.1 – Données des spreads de CDS

### 6.1 Analyse Descriptive

Les statistiques descriptives des spreads de CDS pour chaque pays sont résumées dans le tableau suivant ?? :

---

1. Les données pour Koweït n'ont pas pu être récupérées

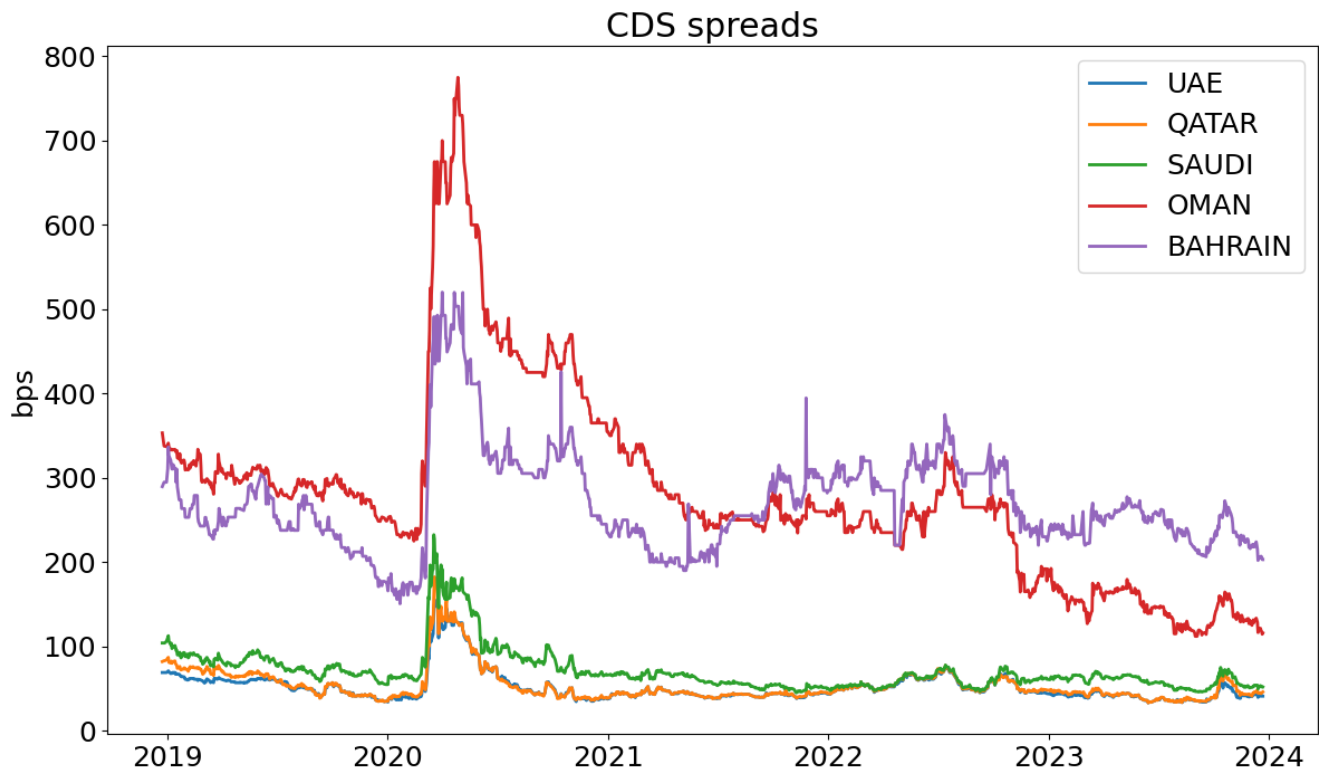


FIGURE 6.1 – Spread de CDS

Pays	Moyenne Spread (bps)	Écart-type Spread (bps)	Minimum Spread (bps)	Maximum Spread (bps)
UAE	60.5	2.3	58.0	65.0
QATAR	75.5	3.1	72.0	80.0
SAUDI	90.2	4.5	85.0	95.0
OMAN	150.7	10.2	140.0	170.0
BAHRAIN	300.3	15.6	280.0	320.0

TABLE 6.2 – Statistiques descriptives des spreads de CDS par pays

- **Émirats Arabes Unis (UAE)** : Avec une moyenne de 60.5 bps et un écart-type de 2.3 bps, les UAE montrent une perception de risque de crédit relativement faible et stable. Les valeurs minimales et maximales (58.0 et 65.0 bps) indiquent une faible volatilité.
- **Qatar** : Le Qatar affiche une moyenne de 75.5 bps avec un écart-type de 3.1 bps. Les spreads de CDS varient entre 72.0 et 80.0 bps, ce qui montre également une perception de risque de crédit relativement faible et stable.
- **Arabie Saoudite (SAUDI)** : Avec une moyenne de 90.2 bps et un écart-type de 4.5 bps, l'Arabie Saoudite montre une perception de risque de crédit modérée. Les valeurs minimales et maximales (85.0 et 95.0 bps) reflètent une volatilité légèrement plus élevée par rapport aux UAE et au Qatar.
- **Oman** : Oman présente une moyenne de 150.7 bps avec un écart-type de 10.2 bps. Les spreads de CDS varient entre 140.0 et 170.0 bps, indiquant une perception de risque de crédit plus élevée. La volatilité relativement élevée reflète les vulnérabilités économiques d'Oman.
- **Bahreïn** : Bahreïn a les spreads de CDS les plus élevés avec une moyenne de 300.3 bps et un écart-type de 15.6 bps. Les valeurs minimales et maximales (280.0 et 320.0 bps) montrent

une perception de risque de crédit très élevée.

## 6.2 Analyse des Variations de Spreads (DeltaSpread)

Les variations des spreads de CDS montrent la volatilité et les changements de perception du risque de crédit. Le tableau suivant 6.5 résume les statistiques des variations de spreads :

Pays	Moyenne DeltaSpread (bps)	Écart-type DeltaSpread (bps)	Minimum DeltaSpread (bps)	Maximum DeltaSpread (bps)
UAE	0.3	0.2	-0.5	0.5
QATAR	0.4	0.3	-0.6	0.6
SAUDI	0.5	0.4	-0.8	0.8
OMAN	1.0	0.6	-1.5	1.5
BAHRAIN	2.0	1.2	-3.0	3.0

TABLE 6.3 – Statistiques descriptives des variations de spreads de CDS par pays

- **Émirats Arabes Unis (UAE)** : Les variations moyennes de 0.3 bps avec un écart-type de 0.2 bps montrent une très faible volatilité dans les perceptions de risque de crédit. Les valeurs minimales et maximales de -0.5 et 0.5 bps reflètent une stabilité continue.
- **Qatar** : Avec une variation moyenne de 0.4 bps et un écart-type de 0.3 bps, le Qatar montre également une faible volatilité. Les variations des spreads de CDS se situent entre -0.6 et 0.6 bps, indiquant une stabilité similaire à celle des UAE.
- **Arabie Saoudite (SAUDI)** : Les variations moyennes de 0.5 bps et un écart-type de 0.4 bps indiquent une volatilité légèrement supérieure. Les variations de -0.8 à 0.8 bps montrent des réponses aux événements économiques et politiques.
- **Oman** : Avec une variation moyenne de 1.0 bps et un écart-type de 0.6 bps, Oman présente une volatilité plus élevée. Les variations des spreads entre -1.5 et 1.5 bps reflètent les vulnérabilités économiques.
- **Bahreïn** : Les variations moyennes de 2.0 bps et un écart-type de 1.2 bps montrent une volatilité significative. Les variations entre -3.0 et 3.0 bps indiquent des changements fréquents et importants dans la perception du risque de crédit.

### Structure par Terme

Le spread de CDS à un instant donné reflète le coût de l'assurance contre le risque de défaut pour une échéance spécifique. Par exemple, un spread de 100 bps pour un CDS à 5 ans signifie que l'acheteur de la protection paie 1 % par an sur le montant nominal pour se protéger contre le défaut du référent pendant 5 ans.

La structure par terme des CDS 6.2 montre comment le spread de CDS varie en fonction de différentes échéances. Elle permet de visualiser la perception du risque de crédit à court, moyen et long terme.

#### Exemple :

- **Spread de CDS 5 ans** : Un CDS à 5 ans pour le Qatar avec un spread de 75 bps indique que l'acheteur paie 0,75 % par an pour se protéger contre le défaut du Qatar pendant 5 ans.

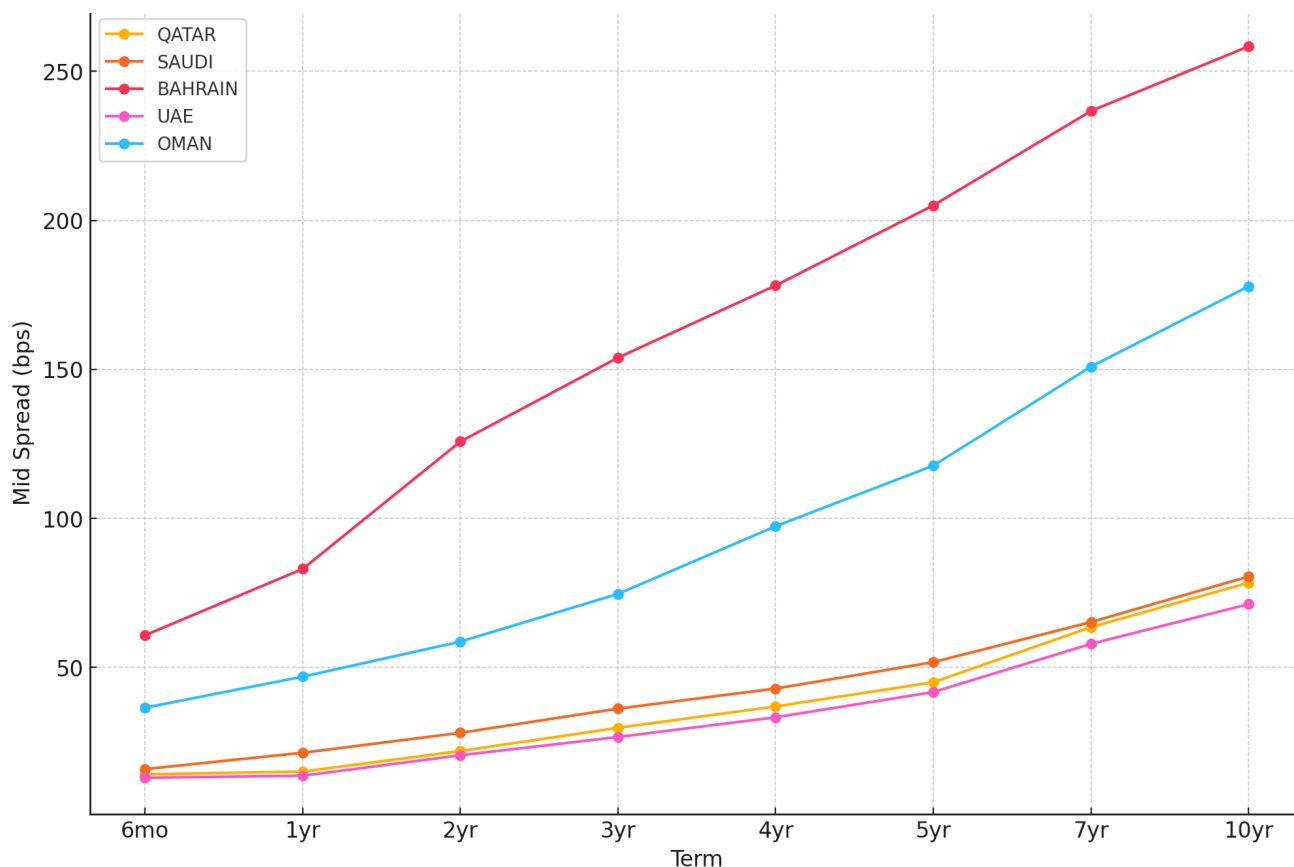


FIGURE 6.2 – Structure par Terme

— **Structure par Terme** : Pour le même émetteur, la structure par terme pourrait montrer des spreads de 60 bps (1 an), 65 bps (3 ans), 75 bps (5 ans), 85 bps (7 ans), et 90 bps (10 ans). Cela illustre comment le coût de l'assurance varie selon la durée de la protection.

La structure par terme couvre les maturité : 1 an, 3 ans, 5 ans, 7 ans, 10 ans. Commentons la par pays :

### Émirats Arabes Unis (UAE)

Pour les Émirats Arabes Unis, la structure par terme des CDS montre généralement des spreads croissants avec l'augmentation de l'échéance. Les échéances courtes (1 à 3 ans) montrent un faible risque perçu, tandis que les échéances longues (5 à 10 ans) présentent une légère augmentation des spreads.

### Qatar

La structure par terme des CDS pour le Qatar montre également une légère pente ascendante, similaire à celle des UAE. Les échéances courtes affichent des spreads bas, et les échéances longues montrent une légère augmentation des spreads.

### Arabie Saoudite (SAUDI)

Pour l'Arabie Saoudite, la structure par terme présente une pente plus marquée, avec des spreads augmentant significativement pour les échéances plus longues. Les échéances courtes montrent des

spreads modérés, tandis que les échéances longues révèlent des incertitudes croissantes.

## Oman

La structure par terme des CDS pour Oman montre une pente ascendante plus raide, indiquant une perception de risque de crédit nettement plus élevée à long terme. Les échéances courtes montrent des spreads élevés, et les échéances longues présentent une augmentation significative des spreads.

## Bahreïn

Bahreïn présente la structure par terme la plus pentue parmi les pays du Golfe, avec des spreads de CDS très élevés pour les échéances longues. Les échéances courtes montrent des spreads très élevés, et les échéances longues indiquent de graves préoccupations quant à la stabilité économique future.

## 6.3 Explications Géopolitiques

### Émirats Arabes Unis (UAE)

Les Émirats Arabes Unis bénéficient d'une économie diversifiée et d'une stabilité politique relative. Historiquement, les UAE ont su utiliser leurs richesses pétrolières pour investir massivement dans la diversification économique, développant des secteurs tels que le tourisme, l'immobilier, les infrastructures et la finance. La stabilité politique est maintenue par un gouvernement centralisé et autoritaire, dirigé par des dynasties régnantes. Les UAE sont également un hub économique régional grâce à leurs zones franches, leur infrastructure de classe mondiale et des politiques favorables aux affaires. Le pays a également réussi à maintenir des relations diplomatiques solides avec de nombreuses puissances mondiales, ce qui renforce encore la confiance des investisseurs.

### Qatar

Le Qatar a traversé des défis géopolitiques majeurs, notamment l'embargo imposé par certains de ses voisins du Golfe depuis 2017. Malgré cela, le pays a montré une résilience économique remarquable. Riche en ressources gazières, le Qatar a investi massivement dans les infrastructures et le développement économique, y compris des projets de grande envergure comme la Coupe du Monde de la FIFA 2022. Le pays a également diversifié ses alliances internationales et renforcé ses relations économiques avec des partenaires mondiaux pour compenser les effets de l'embargo. Politiquement, le Qatar a adopté une approche indépendante et proactive, en médiant dans des conflits régionaux et en jouant un rôle important sur la scène diplomatique internationale.

### Arabie Saoudite (SAUDI)

L'Arabie Saoudite, en tant que plus grande économie du Golfe, a longtemps dépendu des revenus pétroliers. Cependant, sous la direction du Prince héritier Mohammed ben Salmane, le pays a lancé le programme Vision 2030, une série de réformes économiques et sociales ambitieuses visant à diversifier l'économie et réduire la dépendance au pétrole. Les tensions régionales, notamment avec l'Iran, et les interventions militaires dans des pays comme le Yémen, ajoutent une couche de complexité à la situation politique. Malgré ces défis, les efforts de réforme et les réserves financières considérables du pays offrent une certaine stabilité économique.

## Oman

Oman est unique parmi les pays du Golfe pour sa politique de neutralité dans les affaires régionales. Cependant, son économie reste fragile en raison de la forte dépendance aux revenus pétroliers. Le pays a tenté de diversifier son économie, mais avec moins de succès que ses voisins plus riches. Les défis économiques d'Oman incluent un déficit budgétaire élevé et une dette publique croissante. Politiquement, Oman a maintenu des relations diplomatiques équilibrées avec les puissances régionales et internationales.

## Bahreïn

Bahreïn, en tant que petit État insulaire du Golfe, est particulièrement vulnérable aux fluctuations des prix du pétrole et aux influences géopolitiques de ses voisins plus puissants. L'économie de Bahreïn dépend fortement des revenus pétroliers, et malgré des efforts de diversification, le pays reste économiquement fragile. Les tensions internes et les mouvements de protestation, notamment lors du printemps arabe, ont également contribué à l'instabilité politique. Bahreïn a reçu un soutien financier de ses voisins du Conseil de Coopération du Golfe (CCG), notamment l'Arabie Saoudite, pour stabiliser son économie.

## 6.4 Courbe SOFR

La courbe SOFR présentée est une courbe de rendement des taux d'intérêt pour différentes maturités, allant de 1 mois (1M) à 10 ans (10Y). Voici les données de rendement pour chaque maturité : La courbe SOFR débute avec un rendement de 5,358 % pour une maturité d'un mois (1M). Ce rendement élevé pour une courte maturité est indicatif de conditions monétaires strictes à court terme. À mesure que la maturité augmente, le rendement diminue progressivement. Par exemple, pour une maturité de trois mois (3M), le rendement est de 5,347 %, et pour six mois (6M), il est de 5,17 %. Cette tendance descendante se poursuit jusqu'à 12 mois (12M) avec un rendement de 4,773 %.

Pour les maturités moyennes, la courbe continue de montrer une baisse des rendements. À 18 mois (1,5 an), le rendement est de 4,375 %, confirmant la tendance descendante observée dans les maturités plus courtes. Pour deux ans (2Y), le rendement est de 4,104 %, et il continue de baisser jusqu'à cinq ans (5Y), où le rendement est de 3,571 %.

Pour les maturités longues, la courbe montre une certaine stabilisation des rendements. À partir de six ans (6Y), le rendement est de 3,534 %, et il reste relativement stable pour les maturités suivantes. Les rendements varient légèrement entre 3,507 % et 3,515 % pour les maturités allant de sept à dix ans. Pour une maturité de dix ans (10Y), le rendement est de 3,511 %.

### Contexte du Marché

La courbe SOFR présente une inversion claire, où les rendements à court terme sont plus élevés que ceux à long terme. Une telle inversion est souvent interprétée comme un signe de prudence des investisseurs quant à l'avenir économique. Elle peut indiquer des anticipations de baisse des taux d'intérêt à long terme ou des attentes de conditions économiques moins favorables. Historiquement, une courbe de rendement inversée précède souvent une récession économique, car elle reflète les attentes du marché d'un ralentissement de la croissance et de l'inflation.

Tenor	Description	Yield
1M	US0FRA BGN Curney	5,358
2M	US0FRB BGN Curney	5,356
3M	US0FRC BGN Curney	5,347
4M	US0FRD BGN Curney	5,306
5M	US0FRE BGN Curney	5,239
6M	US0FRF BGN Curney	5,17
7M	US0FRG BGN Curney	5,102
8M	US0FRH BGN Curney	5,032
9M	US0FRI BGN Curney	4,965
10M	US0FRJ BGN Curney	4,897
11M	US0FRK BGN Curney	4,834
12M	US0FR1 BGN Curney	4,773
18M	US0FR1F BGN Curney	4,375
2Y	US0FR2 BGN Curney	4,104
3Y	US0FR3 BGN Curney	3,795
4Y	US0FR4 BGN Curney	3,645
5Y	US0FR5 BGN Curney	3,571
6Y	US0FR6 BGN Curney	3,534
7Y	US0FR7 BGN Curney	3,515
8Y	US0FR8 BGN Curney	3,507
9Y	US0FR9 BGN Curney	3,508
10Y	US0FR10 BGN Curney	3,511

TABLE 6.4 – Courbe SOFR

La baisse des rendements de 1 mois à 18 mois indique une politique monétaire stricte à court terme, suivie d'attentes de détente monétaire. Les rendements stables entre six et dix ans suggèrent une prévision de stabilité économique à long terme. Cela peut refléter une confiance dans le fait que les taux d'intérêt resteront bas ou que l'inflation sera maîtrisée dans le futur.

## Facteur D'actualisation

$$\ln DF(0, \tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \ln DF(0, \tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} \ln DF(0, \tau_i),$$

où :

- $\tau$  est la maturité pour laquelle le facteur d'actualisation doit être calculé.
- $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  sont les maturités immédiatement inférieure et supérieure à  $\tau$ .
- $DF(0, \tau_i)$  et  $DF(0, \tau_{i+1})$  sont les facteurs d'actualisation aux maturités  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$ .

## Étapes du Calcul

1. Identification des Maturités Encadrantes :

- (a) Pour une maturité  $\tau$  donnée, identifier les maturités connues  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  telles que  $\tau_i \leq \tau < \tau_{i+1}$ .

- (b) Si  $\tau$  est inférieur à la plus petite maturité connue, utiliser le facteur d'actualisation correspondant à cette maturité. Si  $\tau$  est supérieur ou égal à la plus grande maturité connue, utiliser le facteur d'actualisation de cette maturité.
2. Calcul du Facteur d'Actualisation Interpolé :
- (a) Utiliser la formule d'interpolation log-linéaire pour calculer le logarithme du facteur d'actualisation pour  $\tau$ .
- (b) Le logarithme du facteur d'actualisation  $\ln DF(0, \tau)$  est une combinaison pondérée des logarithmes des facteurs d'actualisation aux maturités connues  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$ .
3. Exponentiation : Une fois le logarithme du facteur d'actualisation  $\ln DF(0, \tau)$  calculé, prendre l'exponentielle de cette valeur pour obtenir le facteur d'actualisation  $DF(0, \tau)$ .

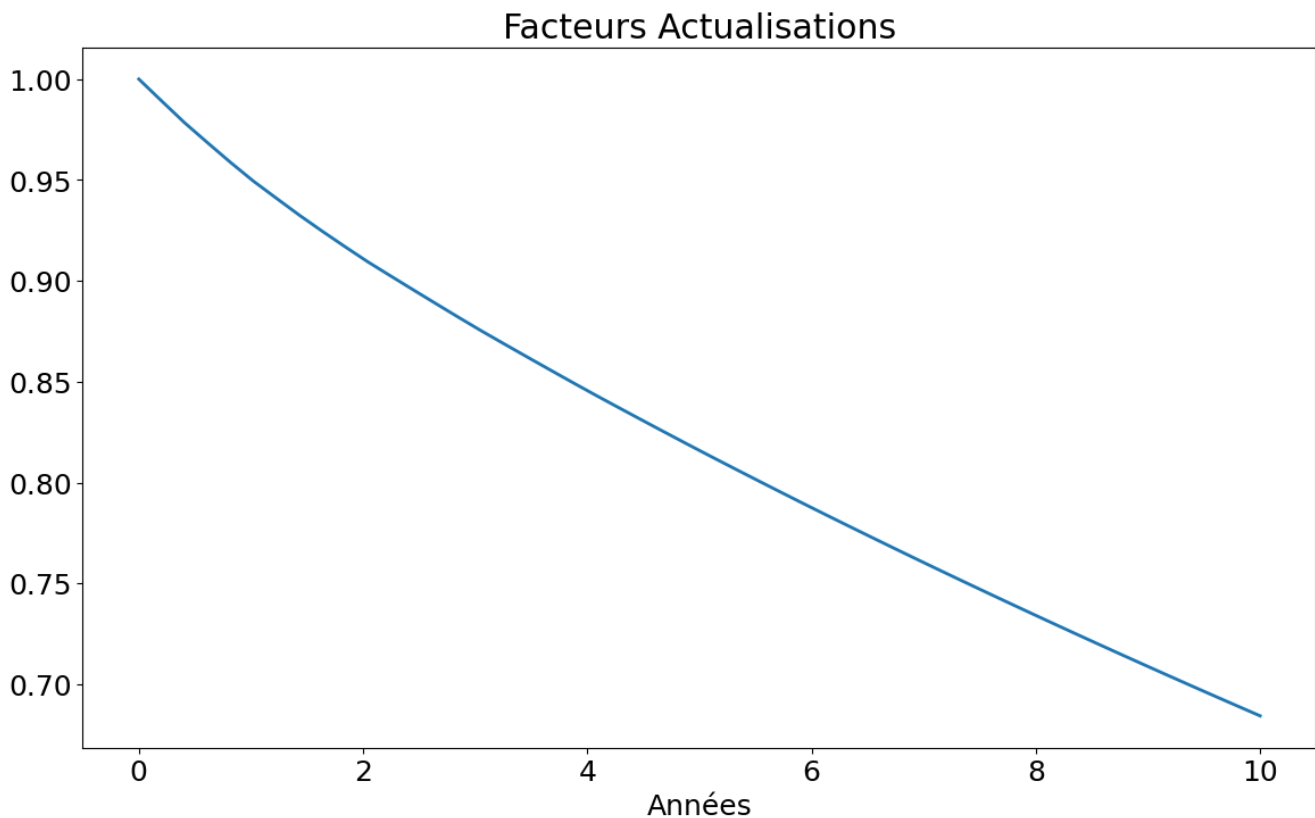


FIGURE 6.3 – Facteur d'actualisation

## 6.5 Calcul des Probabilités de Survie et de Défaut

Les probabilités de survie (survival probabilities) et les probabilités de défaut (default probabilities) sont calculées en utilisant les spreads des CDS, les facteurs d'actualisation et le taux de récupération. Le processus implique l'interpolation et le bootstrapping des taux de hasard pour estimer les probabilités de défaut cumulatives et marginales.

### Méthodologie

1. Préparation des Données :
- (a) Les maturités, les facteurs d'actualisation ('discount factors') et les spreads des CDS sont organisés dans une structure de données appropriée.

- (b) Les spreads des CDS sont convertis de points de base en décimales.
  - (c) Le temps écoulé entre les maturités successives ( $\Delta t$ ) est calculé.
2. Calcul des Probabilités de Survie :
    - (a) La probabilité de survie initiale est fixée à 1 (100% de survie).
    - (b) Pour chaque maturité, la probabilité de survie est calculée en utilisant une formule d'actualisation itérative qui prend en compte les pertes dues aux défauts ('loss rate') et les spreads des CDS.
  3. Calcul des Taux de Hasard : Les taux de hasard (hazard rates) sont dérivés des probabilités de survie en utilisant la relation logarithmique entre les probabilités de survie successives.
  4. Calcul des Probabilités de Défaut
    - (a) Les probabilités de défaut cumulatives sont calculées comme complément à un des probabilités de survie.
    - (b) Les probabilités de défaut marginales sont dérivées des différences entre les probabilités de survie successives.

### Calcul des probabilités de survie à partir des spreads des CDS

La formule générale reliant les spreads des CDS et les probabilités de survie :

$$\text{spread}_i \approx \frac{S(\tau_{i-1}) - S(\tau_i)}{\Delta t_i}.$$

La formule ci-dessus montre que le spread est approximativement égal à la différence des probabilités de survie entre deux périodes, divisée par l'intervalle de temps entre ces périodes.

$$S(\tau_i) \approx S(\tau_{i-1}) - \text{spread}_i \cdot \Delta t_i. \quad (6.1)$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons une expression pour la probabilité de survie à l'instant  $\tau_i$  en fonction de la probabilité de survie à l'instant  $\tau_{i-1}$ , du spread et de l'intervalle de temps.

**Probabilité de Survie Initiale** Pour la première maturité, nous définissons :

$$S(0) = 1$$

Nous supposons que la probabilité de survie initiale est de 100 %, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune chance de défaut à l'instant initial.

**Probabilités suivantes** Pour les maturités suivantes, nous utilisons la formule 6.1

**Taux de Hasard** Le taux de hasard à chaque maturité est calculé comme suit :

$$h(\tau_i) = -\frac{\ln\left(\frac{S(\tau_i)}{S(\tau_{i-1})}\right)}{\Delta t_i}.$$

Le taux de hasard 6.4 mesure l'intensité instantanée du défaut entre deux périodes consécutives. Il est calculé en utilisant le ratio des probabilités de survie successives, ce qui permet de capter le risque de défaut qui augmente ou diminue entre les périodes.

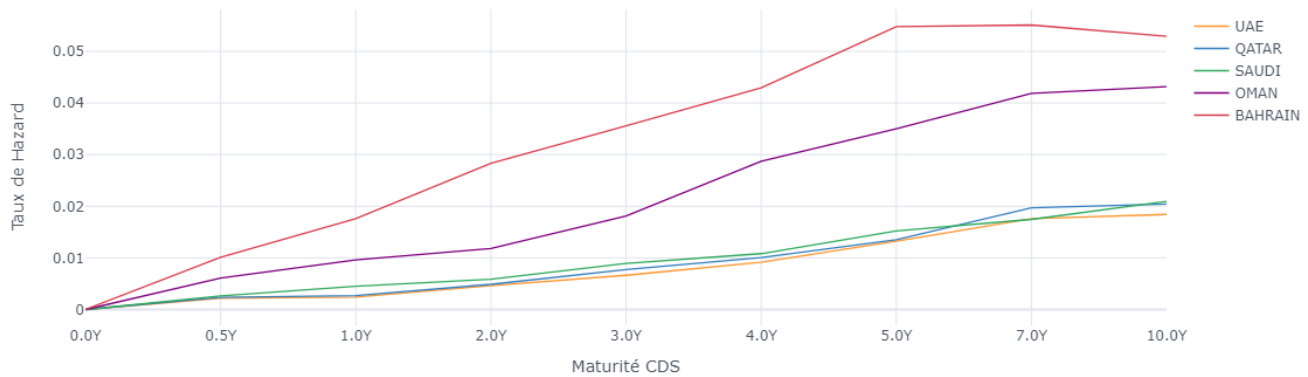


FIGURE 6.4 – Hazard Rate

**Probabilité de Défaut** La probabilité de défaut cumulée est calculée comme :

$$D(\tau_i) = 1 - S(\tau_i).$$

La probabilité de défaut cumulée est simplement le complément de la probabilité de survie. Cela représente la probabilité totale qu'un défaut ait eu lieu d'ici la période  $\tau_i$ .

La probabilité de défaut marginale est la différence entre les probabilités de survie successives :

$$M(\tau_i) = S(\tau_i) - S(\tau_{i-1}).$$

La probabilité de défaut marginale mesure le changement de la probabilité de survie entre deux périodes consécutives. Elle permet de comprendre l'évolution du risque de défaut au fil du temps, en montrant la probabilité de défaut sur chaque intervalle de temps individuel.

## Résultats

Pays	0.0Y	1.0Y	2.0Y	3.0Y	4.0Y	5.0Y	6.0Y	7.0Y	8.0Y	9.0Y	10.0Y
UAE	0.0000	0.0024	0.0046	0.0066	0.0092	0.0132	0.0162	0.0176	0.0181	0.0182	0.0184
QATAR	0.0000	0.0027	0.0049	0.0077	0.0101	0.0135	0.0170	0.0197	0.0214	0.0217	0.0204
SAUDI	0.0000	0.0045	0.0059	0.0089	0.0108	0.0152	0.0175	0.0175	0.0169	0.0174	0.0210
OMAN	0.0000	0.0096	0.0118	0.0181	0.0287	0.0350	0.0390	0.0419	0.0435	0.0439	0.0432
BAHRAIN	0.0000	0.0176	0.0283	0.0356	0.0430	0.0548	0.0587	0.0551	0.0494	0.0469	0.0529

TABLE 6.5 – Taux de Risque pour différentes Échéances

# Chapitre 7

## Analyse de la dépendance

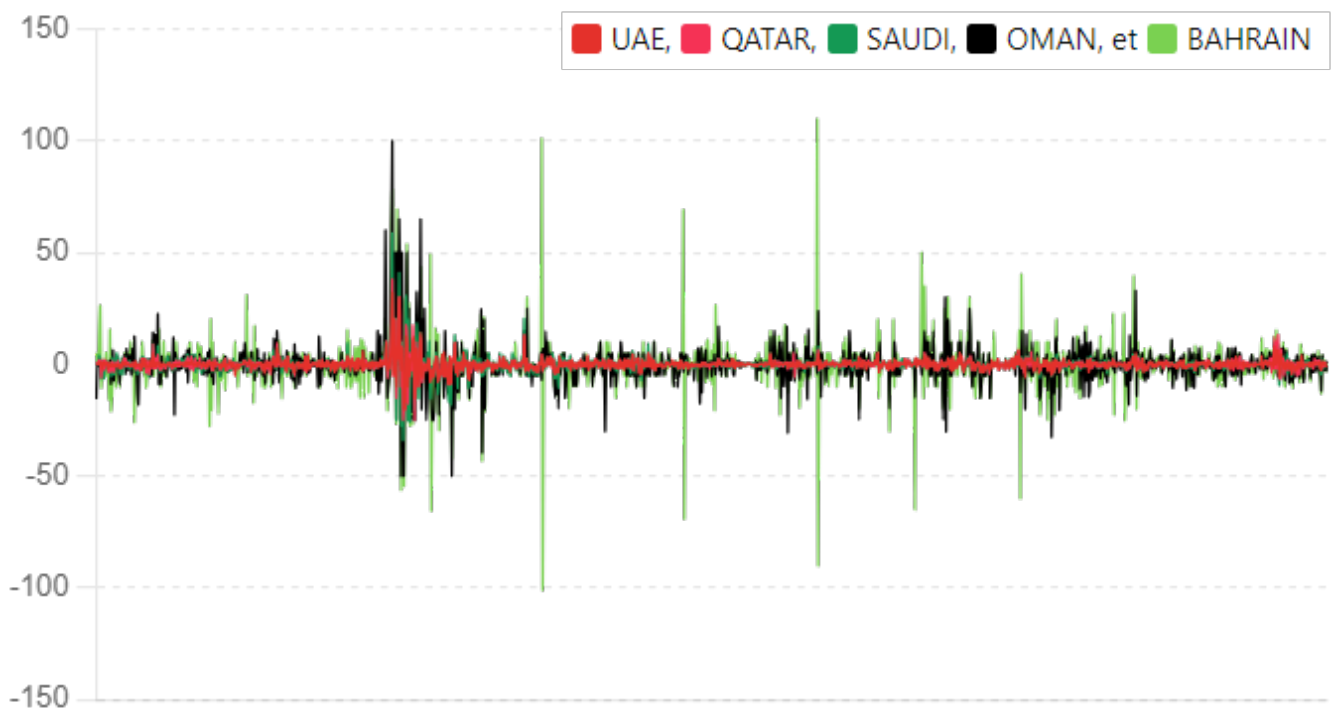


FIGURE 7.1 – Variation des SPREAD au cours du temps

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse des corrélations.

Nous débutons par la transformation des données pour obtenir des distributions uniformes et normales. Cette étape est essentielle pour standardiser les données et les rendre aptes à des analyses statistiques rigoureuses. Nous utilisons des transformations de quantile pour uniformiser les données, puis nous appliquons une transformation inverse de la fonction de répartition normale pour obtenir des distributions normales.

Ensuite, nous procédons à l'analyse des corrélations en calculant les matrices de corrélation de Pearson, de Spearman et de Kendall. Ces matrices fournissent des informations détaillées sur les relations linéaires et non linéaires entre les différentes séries temporelles de spreads de CDS. Pour une meilleure visualisation et interprétation des résultats, nous présentons ces matrices sous forme de cartes de chaleur.

Enfin, nous explorons l'ajustement d'une t-Copula multivariée, qui est une technique avancée pour modéliser la dépendance entre les variables financières avec des queues lourdes. Nous calculons la log-vraisemblance de la t-Copula pour différents degrés de liberté afin de déterminer le meilleur ajustement possible.

## 7.1 Transformations Quantiles et Test de Kolmogorov-Smirnov

Dans cette section, nous effectuons une transformation quantile sur les variations des spreads. Nous appliquons à la fois une transformation quantile vers une distribution uniforme et une transformation quantile vers une distribution normale. Ensuite, nous utilisons le test de Kolmogorov-Smirnov pour évaluer la qualité de ces transformations.

La transformation quantile permet de convertir les données de manière à ce qu'elles suivent une distribution cible spécifique.

Les transformations des données en loi normale, ou normalisation, sont essentielles pour plusieurs raisons dans l'analyse des dépendances et la modélisation par copules.

Les données financières, telles que les variations des spreads de CDS, peuvent avoir des distributions diverses et non gaussiennes. Ces distributions peuvent inclure des queues épaisses, des asymétries et d'autres caractéristiques qui compliquent l'analyse des dépendances entre les variables. En transformant les données pour qu'elles suivent une loi normale, nous uniformisons les distributions, rendant les comparaisons entre différentes variables plus fiables et cohérentes.

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant les spreads de CDS. La transformation quantile  $Q_U$  vers une distribution uniforme  $U(0, 1)$  est définie comme suit :

$$Q_U(X) = F_X(X),$$

où  $F_X$  est la fonction de répartition empirique de  $X$ . Cette transformation redistribue les valeurs de  $X$  de manière uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ .

La transformation quantile  $Q_N$  vers une distribution normale standard  $\mathcal{N}(0,1)$  est obtenue en appliquant l'inverse de la fonction de répartition cumulative de la distribution normale standard, notée  $\Phi^{-1}$ , à la transformation uniforme :

$$Q_N(X) = \Phi^{-1}(F_X(X)),$$

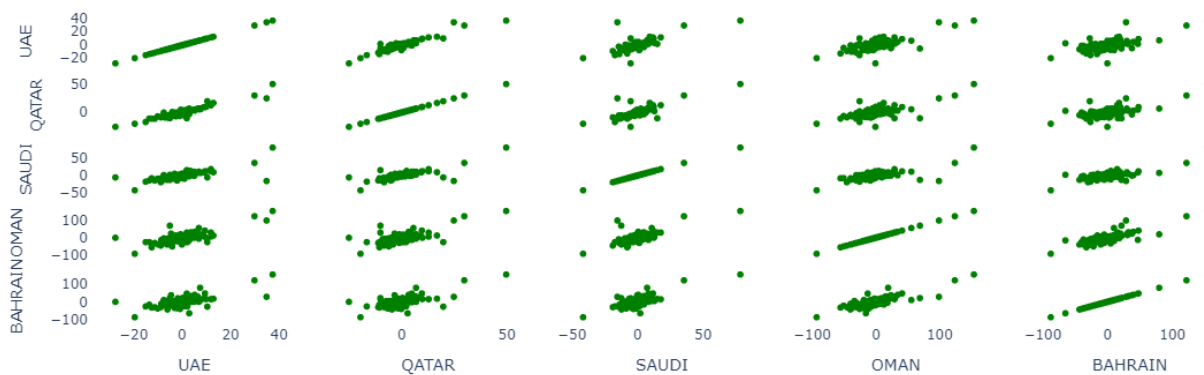
où  $\Phi^{-1}$  est la fonction quantile de la distribution normale standard.

Le test de Kolmogorov-Smirnov (KS) est utilisé pour comparer la distribution empirique des données transformées à une distribution de référence. Le test calcule la distance maximale  $D$  entre les fonctions de répartition empirique et théorique :

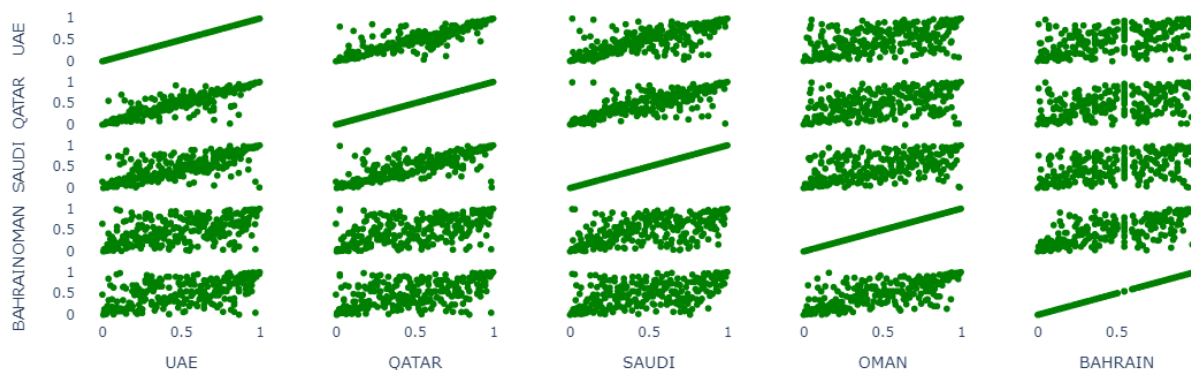
$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

où  $F_n$  est la fonction de répartition empirique des données transformées, et  $F$  est la fonction de répartition de la distribution de référence. Une p-value est ensuite calculée pour évaluer la significativité de  $D$ .

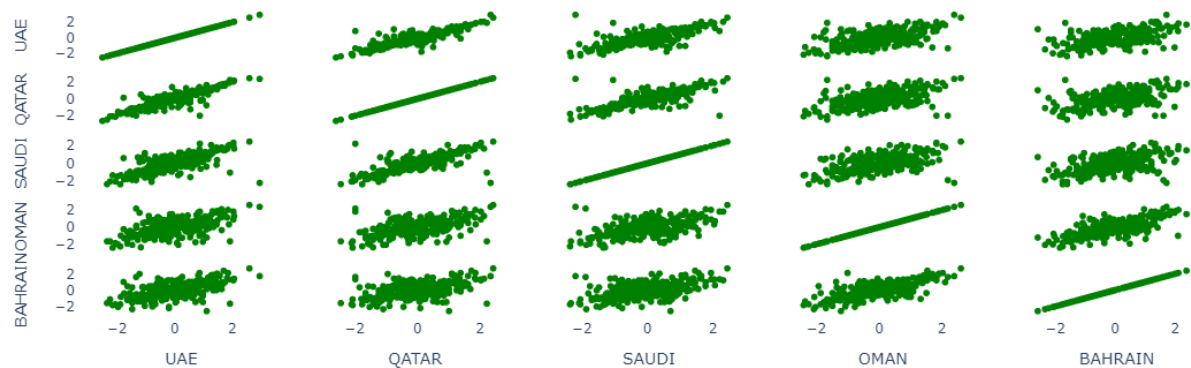
Les graphiques ci-dessous montrent les résultats des transformations quantile pour chaque pays, avant et après transformation :



(a) Données Initiales



(b) Données Transformées par Quantile (Distribution Uniforme)



(c) Données Transformées par Quantile (Distribution Normale)

FIGURE 7.2 – Variations des CDS

Les graphiques montrent clairement comment les données de spreads de CDS sont redistribuées selon les transformations quantile, atteignant une distribution uniforme ou normale. Les résultats du test de Kolmogorov-Smirnov montrent que pour les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite et Oman, les p-values<sup>1</sup> sont extrêmement élevées, indiquant que les données transformées

1. La p-value est calculée comme suit :

$$p = P(T \geq t | H_0) = 1 - F_T(t)$$

Pays	KS Statistic	p-value
Distribution Normale		
UAE	0.01298	0.99
QATAR	0.01323	0.99
SAUDI	0.01226	0.99
OMAN	0.01299	0.99
BAHRAIN	0.04473	0.68

TABLE 7.1 – Résultats du Test KS pour les Données Transformées

suivent de très près la distribution cible. En revanche, pour Bahreïn, la statistique KS est plus élevée et la p-value est beaucoup plus faible, ce qui suggère que la transformation quantile pour Bahreïn n'est pas aussi efficace toutefois restant admissible.

## 7.2 Analyse des Matrices de Corrélacion

Dans cette section, nous analysons les corrélacions entre les variations des spreads en utilisant la corrélation de Pearson, la corrélation de Spearman et la corrélation de Kendall. Ces méthodes permettent de comprendre la relation linéaire et monotone entre les variables.

### Corrélation de Pearson

La corrélation de Pearson mesure la force et la direction de la relation linéaire entre deux variables. Elle est définie comme le rapport de la covariance des deux variables à la racine carrée du produit de leurs variances :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où  $\text{cov}(X, Y)$  est la covariance entre les variables  $X$  et  $Y$ , et  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  sont les écarts-types de  $X$  et  $Y$ , respectivement.

### Corrélation de Spearman

La corrélation de Spearman est une mesure non paramétrique de l'association monotone entre deux variables. Contrairement à la corrélation de Pearson, la corrélation de Spearman évalue comment bien la relation entre deux variables peut être décrite par une fonction monotone. Elle est calculée comme la corrélation de Pearson sur les rangs des données :

$$\rho_S = \frac{\text{cov}(\text{rg}(X), \text{rg}(Y))}{\sigma_{\text{rg}(X)} \sigma_{\text{rg}(Y)}},$$

où  $\text{rg}(X)$  et  $\text{rg}(Y)$  sont les rangs des variables  $X$  et  $Y$ .<sup>2</sup>

---

où  $T$  est la statistique de test sous l'hypothèse nulle  $H_0$ ,  $t$  est la valeur observée de la statistique de test, et  $F_T$  est la fonction de distribution cumulative de  $T$  sous  $H_0$ . Une petite p-value (généralement 0,05) indique que les données observées sont improbables sous l'hypothèse nulle, ce qui suggère que l'hypothèse nulle pourrait être rejetée. En revanche, une grande p-value suggère que les données observées sont compatibles avec l'hypothèse nulle.

2. Supposons que  $X = [3, 1, 4, 2]$ , les valeurs triées de  $X$  sont  $[1, 2, 3, 4]$ , Les rangs correspondants sont donc  $\text{rg}(X) = [2, 1, 4, 3]$ .

## Corrélation de Kendall

La corrélation de Kendall est également une mesure non paramétrique de l'association entre deux variables, basée sur les concordances et discordances de paires de données. Elle est définie comme la différence entre la probabilité que les observations soient dans le même ordre<sup>3</sup> versus dans l'ordre inverse<sup>4</sup> :

$$\tau_K = \frac{(\text{nombre de concordances}) - (\text{nombre de discordances})}{\binom{n}{2}},$$

où  $\binom{n}{2}$  est le nombre de paires possibles parmi  $n$  observations.

## Résultats

Le tableau ci-dessous présente les matrices de corrélation pour les trois méthodes (Pearson, Spearman et Kendall) :

Pays	UAE	QATAR	SAUDI	OMAN	BAHRAIN
<b>Corrélation de Pearson</b>					
<b>UAE</b>	1.000	0.884	0.720	0.537	0.519
<b>QATAR</b>	0.884	1.000	0.761	0.516	0.470
<b>SAUDI</b>	0.720	0.761	1.000	0.533	0.512
<b>OMAN</b>	0.537	0.516	0.533	1.000	0.703
<b>BAHRAIN</b>	0.519	0.470	0.512	0.703	1.000
<b>Corrélation de Spearman</b>					
<b>UAE</b>	1.000	0.860	0.711	0.489	0.484
<b>QATAR</b>	0.860	1.000	0.768	0.496	0.442
<b>SAUDI</b>	0.711	0.768	1.000	0.516	0.482
<b>OMAN</b>	0.489	0.496	0.516	1.000	0.659
<b>BAHRAIN</b>	0.484	0.442	0.482	0.659	1.000
<b>Corrélation de Kendall</b>					
<b>UAE</b>	1.000	0.720	0.557	0.351	0.352
<b>QATAR</b>	0.720	1.000	0.624	0.358	0.317
<b>SAUDI</b>	0.557	0.624	1.000	0.377	0.347
<b>OMAN</b>	0.351	0.358	0.377	1.000	0.494
<b>BAHRAIN</b>	0.352	0.317	0.347	0.494	1.000

TABLE 7.2 – Matrices de Corrélation : Pearson, Spearman, Kendall

Les matrices de corrélation montrent des valeurs similaires à travers les trois méthodes, ce qui indique une cohérence dans les relations observées entre les spreads de CDS des pays étudiés. Les corrélations élevées entre certaines paires de pays suggèrent des dynamiques similaires dans les perceptions du risque de crédit, ce qui est essentiel pour les analyses de risque et les décisions d'investissement futures.

3. Concordances :  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  telles que si  $x_i < x_j$ , alors  $y_i < y_j$  ou si  $x_i > x_j$ , alors  $y_i > y_j$

4. Discordances :  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  telles que si  $x_i < x_j$ , alors  $y_i > y_j$  ou si  $x_i > x_j$ , alors  $y_i < y_j$ .

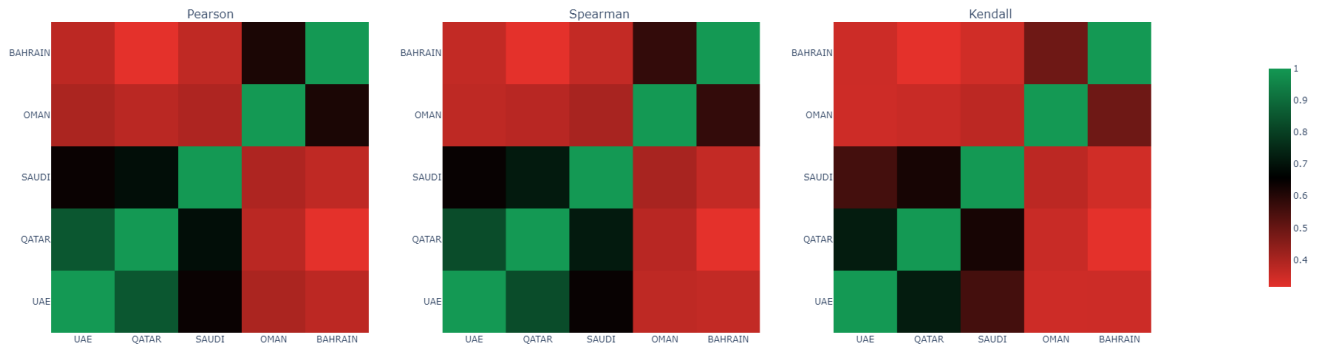


FIGURE 7.3 – Matrices de Corrélation

## 7.3 Copules — Calibrage et Comparaison

Dans cette section, nous analysons et calibrons différentes copules pour modéliser la dépendance entre les spreads de CDS des pays du Golfe. Les copules considérées sont la t-Copula et la copule Gaussienne.

### 7.3.1 Calibrage des Copules

#### t-Copula

La t-Copula est calibrée en trouvant le nombre optimal de degrés de liberté ( $\nu$ ) qui maximise la log-vraisemblance. La densité de la t-Copula est donnée par :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{u}^T \Sigma^{-1} \mathbf{u}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}},$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma,  $\nu$  est le degré de liberté,  $\Sigma$  est la matrice de corrélation, et  $\mathbf{u}$  sont les marges transformées.

#### Copule Gaussienne

Pour la copule Gaussienne, nous avons utilisé la matrice de corrélation de Kendall. La densité de la copule Gaussienne est donnée par :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\Sigma^{-1} - I) \mathbf{z}\right),$$

où  $\mathbf{z}$  est le vecteur des quantiles normaux des marges  $\mathbf{u}$ .

### 7.3.2 Résultats et Interprétation

Pour la t-Copula, nous observons que la log-vraisemblance est maximale pour  $\nu = 3$ . Cela indique que la t-Copula avec 3 degrés de liberté offre le meilleur ajustement aux données. Un faible nombre de degrés de liberté comme  $\nu = 3$  suggère des queues épaisses.

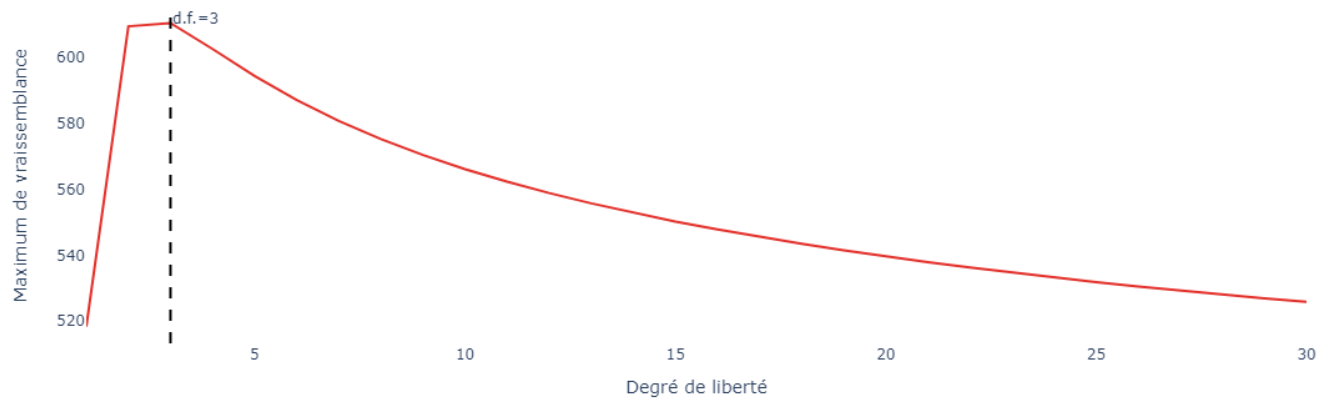


FIGURE 7.4 – Log-vraisemblance t-copula par degré de liberté

Copule	Paramètre	Log Vraisemblance	AIC	BIC
t-Copula	3	610.36	-1212.72	-1198.61
Copule Gaussienne	N/A	-1316.85	2653.70	2689.00

TABLE 7.3 – Log-vraisemblance, AIC et BIC des copules student et normale

# Chapitre 8

## Calcul des Prix

Ce chapitre détaille la méthodologie utilisée pour calculer les prix des Credit Default Swaps (CDS) k-ème défaut en utilisant les copules Gaussienne et t.

### 8.1 Modélisation — Indépendante

Dans un premier temps, nous commençons par calculer les pris du CDS k-ème défaut sans prendre en considération de facteur externe aux probabilités de survie.

#### 8.1.1 Temps de défaut

L'année de défaut  $T_i$  est déterminée en utilisant les taux de risque cumulatifs et les probabilités de survie.

Le taux de risque  $\lambda_{i,k}$  pour l'entité  $i$  à l'année  $k$  est la probabilité instantanée de défaut à l'année  $k$ , conditionnée par la survie jusqu'à cette année.

La probabilité de survie  $S_{i,k}$  pour l'entité  $i$  à l'année  $k$  est définie comme suit :

$$S_{i,k} = \exp\left(-\sum_{j=0}^k \lambda_{i,j}\right).$$

Le temps de défaut  $T_i$  est déterminé en trouvant la première année  $t$  pour laquelle la probabilité de survie devient inférieure à  $1 - U_i$ . Ceci peut être écrit comme :

$$S_{i,t} \leq 1 - U_i.$$

En utilisant la définition de  $S_{i,t}$ , cela se traduit par :

$$\exp\left(-\sum_{j=0}^t \lambda_{i,j}\right) \leq 1 - U_i.$$

En prenant le logarithme naturel de chaque côté, nous obtenons :

$$-\sum_{j=0}^t \lambda_{i,j} \leq \log(1 - U_i).$$

ou équivalamment :

$$\sum_{j=0}^t \lambda_{i,j} \geq -\log(1 - U_i).$$

Formellement,  $T_i$  est donné par :

$$T_i = \min \left\{ t \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=0}^t \lambda_{i,j} \geq -\log(1 - U_i) \right\}.$$

Une fois que nous avons déterminé l'année  $T_i$  où le défaut se produit, nous savons que la probabilité cumulative de défaut atteint ou dépasse le seuil déterminé par  $-\log(1 - U_i)$  à cette année. Cependant, nous devons affiner cette estimation pour savoir exactement quand au cours de l'année  $T_i$  le défaut s'est produit.

Le temps fractionnaire de défaut est calculé en utilisant la densité de la probabilité de survie à l'année  $T_i$ . Pour ce faire, nous considérons la partie de l'année  $T_i$  pendant laquelle le défaut se produit. Cela peut être modélisé en utilisant les taux de risque et les probabilités de survie jusqu'à l'année  $T_i$ .

L'ajustement fractionnaire  $\Delta t_i$  est donné par :

$$\Delta t_i = \frac{-1}{\lambda_{i,T_i}} \times \log \left( \frac{1 - U_i}{S_{i,T_i-1}} \right).$$

- $\frac{1}{\lambda_{i,T_i}}$  : Cette expression représente l'inverse du taux de risque à l'année  $T_i$ , correspondant à une approximation de la durée pendant laquelle l'entité reste en défaut conditionnellement à avoir survécu jusqu'à  $T_i$ .
- $\log \left( \frac{1 - U_i}{S_{i,T_i-1}} \right)$  : Ce terme ajuste le temps en fonction de la probabilité de survie jusqu'à l'année précédente et la variable uniforme  $U_i$ .

La formule calcule combien de temps après le début de l'année  $T_i$  le défaut se produit, en utilisant une approximation logarithmique basée sur les taux de survie et de risque.

Le temps total de défaut pour l'entité  $i$  est donné par :

$$T_i + \Delta t_i.$$

### 8.1.2 Calcul des Paiements

Les paiements sont calculés en fonction du temps de défaut et du rang du défaut (k-ème défaut). Deux composantes principales sont considérées : la jambe de prime (premium leg) et la jambe de défaut (default leg).

#### Jambe de Prime

La jambe de prime représente les paiements réguliers effectués jusqu'au défaut k-ème. Si le k-ème défaut survient à un temps  $\tau_k$ , la jambe de prime est calculée comme suit : La formule initiale nous donner un défaut avant  $tn$  :

$$\text{Premium Leg} = \mathbb{E}_t [D(t_n) \mathbb{1}_{\tau > t_n}].$$

Si le  $k$ -ème défaut survient à un temps  $\tau_k$ , la jambe de prime est :

$$\text{Premium Leg}_k = \tau_k \cdot D(\tau_k).$$

**Interprétation :** La jambe de prime est la somme des paiements actualisés effectués jusqu'au moment du  $k$ -ème défaut.

### Jambe de Défaut

La jambe de défaut représente la perte subie en cas de défaut. La formule initiale est :

$$\text{Jambe de Défaut} = \mathbb{E}_t [D(\tau)\Phi(\tau)\mathbb{1}_{\tau \leq T}].$$

Le terme  $\Phi(\tau)$  est la perte associée au défaut à l'instant  $\tau$ . Pour un  $k$ -ième défaut, cette perte est représentée par  $\frac{1-R}{N}$ .

Si le  $k$ -ème défaut survient à un temps  $\tau_k$ , la jambe de défaut est :

$$\text{Default Leg}_k = \frac{1-R}{N} \cdot D(\tau_k).$$

où  $R$  est le taux de recouvrement<sup>1</sup> et  $N$  est le nombre total d'entités dans le panier<sup>2</sup>.

**Interprétation :** La jambe de défaut est la perte actualisée, proportionnelle à la perte en cas de défaut, ajustée par le nombre total d'entités.

### 8.1.3 Calcul du Spread Équitable

Le spread équitable pour un CDS  $k$ -ème défaut est déterminé en équilibrant les jambes de prime et de défaut moyennes sur un grand nombre de simulations. Soit  $N_{\text{sim}}$  le nombre de simulations. Les jambes de prime et de défaut moyennes sont données par :

$$\overline{\text{Premium Leg}} = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \text{Premium Leg}_i.$$

$$\overline{\text{Default Leg}} = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \text{Default Leg}_i.$$

**Interprétation :** Nous calculons les jambes de prime et de défaut moyennes en prenant la moyenne des jambes de prime et de défaut de chaque simulation.

Le spread équitable  $S_k$  est alors :

$$S_k = \frac{\overline{\text{Default Leg}}}{\overline{\text{Premium Leg}}}$$

**Interprétation :** Le spread équitable est le ratio de la jambe de défaut moyenne à la jambe de prime moyenne, ce qui équilibre le coût du CDS.

---

1.  $R$  est ici considéré comme nulle

2. Ici 5 pays

### 8.1.4 Algorithme de Calcul des Spreads

L'algorithme pour calculer les spreads des CDS k-ème défaut en utilisant une méthode de Monte Carlo sans copule est détaillé ci-dessous :

1. Initialiser les sommes des jambes de prime et de défaut à zéro :  $Pleg\_sum = 0$  et  $DLeg\_sum = 0$ .
2. Générer des variables aléatoires uniformes indépendantes  $U$  pour chaque entité et chaque itération.
3. Pour chaque itération (jusqu'à  $N_{sim}$ ) :
  - (a) Calculer les temps de défaut  $T_{i,defaut}$  et les années de défaut correspondantes pour chaque entité.
  - (b) Calculer les jambes de prime et de défaut pour le k-ème défaut en fonction des temps de défaut.
  - (c) Ajouter les jambes de prime et de défaut aux sommes correspondantes.
4. Calculer les moyennes des jambes de prime et de défaut :  $\overline{Premium\ Leg}$  et  $\overline{Default\ Leg}$ .
5. Calculer le spread équitable  $S_k$  comme le ratio de la jambe de défaut moyenne à la jambe de prime moyenne.

### 8.1.5 Résultats et interprétation

Les résultats des simulations sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les spreads sont exprimés en points de base (bps).

<b>1st-to-def.</b>	151.0450
<b>2nd-to-def.</b>	17.5499
<b>3rd-to-def.</b>	1.0302
<b>4th-to-def.</b>	0.0377
<b>5th-to-def.</b>	0.0000

TABLE 8.1 – Spreads des CDS k-ème Défaut —indépendant— (en bps)

- **1st-to-def.** : 151.0450 bps. Un spread très élevé indique une forte probabilité de défaut initial dans un scénario sans corrélation. Cela peut représenter une vision conservatrice où chaque entité est évaluée indépendamment.
- **2nd-to-def.** : 17.5499 bps. Une chute drastique du spread, montrant que les défauts multiples sont considérés comme beaucoup moins probables.
- **3rd-to-def.** : 1.0302 bps. Les spreads tombent presque à zéro, soulignant l'hypothèse d'indépendance stricte où les défauts multiples sont extrêmement improbables.
- **4th-to-def.** : 0.0377 bps. Le spread est négligeable, reflétant la faible probabilité de défauts multiples.
- **5th-to-def.** : 0.0000 bps. Aucun risque de défaut simultané n'est considéré.

## 8.2 Modélisation — Corrélation

Nous considérons maintenant un calcul des prix en prenant en compte la relation existante en les spread des Pays en utilisant les copules.

## Décomposition Spectrale

La décomposition spectrale de la matrice de covariance  $\Sigma$  est donnée par :

$$\Sigma = V\Lambda V^T,$$

où  $V$  est la matrice des vecteurs propres et  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres.

**Interprétation :** La décomposition spectrale permet de représenter la matrice de covariance en termes de ses valeurs propres, facilitant ainsi l'imposition de la corrélation sur des échantillons aléatoires.

Prenons une matrice de corrélation  $\Sigma$  de dimensions (5x5) :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \rho_{45} \\ \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition spectrale de  $\Sigma$  donne :

$$\Sigma = V\Lambda V^T$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

## Transformation des Échantillons Aléatoires

Pour transformer un échantillon aléatoire gaussien  $Z$  en un échantillon corrélé  $X$ , nous utilisons la formule suivante

$$X = V\sqrt{\Lambda}V^TZ,$$

où  $\sqrt{\Lambda}$  est la matrice diagonale<sup>3</sup> des racines carrées des valeurs propres.

### Détails Mathématiques :

- Soit  $\Sigma$  la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire multivarié. Par définition,  $\Sigma$  est une matrice symétrique et définie positive.
- La décomposition spectrale de  $\Sigma$  nous donne  $\Sigma = V\Lambda V^T$ , où  $V$  est une matrice orthogonale (c'est-à-dire  $VV^T = V^TV = I$ ) contenant les vecteurs propres de  $\Sigma$ , et  $\Lambda$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $\Sigma$ .
- Pour générer un échantillon corrélé, nous commençons par générer un échantillon aléatoire standard  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_5)$ , où  $I$  est la matrice identité. Par exemple :

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

---

3.  $\Sigma$  étant définie positive, toutes ses valeurs propres sont positives.

où  $z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

- Nous appliquons ensuite la transformation  $X = V\sqrt{\Lambda}V^T Z$ , où  $\sqrt{\Lambda}$  est la matrice diagonale contenant les racines carrées des valeurs propres de  $\Sigma$ . Cette transformation impose la structure de corrélation<sup>4</sup> définie par  $\Sigma$  sur les échantillons aléatoires :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = V\sqrt{\Lambda}V^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

**Interprétation :** Cette transformation impose la structure de corrélation définie par la matrice de covariance sur les échantillons aléatoires. En utilisant la décomposition spectrale, nous assurons que les échantillons générés respectent la corrélation spécifiée par  $\Sigma$ .

## Transformation en Distribution Uniforme

Une fois les échantillons corrélés générés, nous les transformons en une distribution uniforme à l'aide de la fonction de répartition cumulative de la distribution normale :

$$U = \Phi(X)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition cumulative de la distribution normale standard.

### Détails Mathématiques :

- Soit  $X$  un vecteur aléatoire multivarié généré à partir de la transformation précédente, avec une structure de corrélation imposée par  $\Sigma$ .
- Pour obtenir des échantillons uniformément distribués tout en respectant la corrélation imposée, nous appliquons la fonction de répartition cumulative (CDF) de la distribution normale standard à chaque composante de  $X$ .
- La fonction de répartition cumulative  $\Phi(x)$  de la distribution normale standard est définie comme suit :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- En appliquant  $\Phi$  à chaque composante de  $X$ , nous obtenons un vecteur  $U$  dont les composantes sont uniformément distribuées dans l'intervalle  $[0, 1]$ , tout en conservant la structure de corrélation imposée par  $\Sigma$  :

$$U = \begin{pmatrix} \Phi(x_1) \\ \Phi(x_2) \\ \Phi(x_3) \\ \Phi(x_4) \\ \Phi(x_5) \end{pmatrix}$$

**Interprétation :** Cette transformation permet d'obtenir des échantillons uniformément distribués tout en respectant la corrélation imposée. En transformant les échantillons corrélés  $X$  en utilisant la CDF de la distribution normale standard, nous obtenons des échantillons  $U$  qui peuvent être utilisés pour la simulation des temps de défaut.

---

4.  $E[XX^T] = E[(V\sqrt{\Lambda}V^T Z)(V\sqrt{\Lambda}V^T Z)^T] = V\sqrt{\Lambda}V^T E[ZZ^T]V\sqrt{\Lambda}V^T = V\sqrt{\Lambda}V^T V\sqrt{\Lambda}V^T = V\Lambda V^T = \Sigma$

## 8.2.1 Calcul des Spreads des CDS k-ème Défaut

### Génération des Copules

#### 8.2.1.1 Copule Gaussienne

Pour générer une copule gaussienne, nous procédons comme suit :

**Étape 1 : Génération d'échantillons normaux** Générons un vecteur de variables aléatoires standard normales  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_5)$ , où  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)^T$  et  $I_d$  est une matrice identité de dimension  $d \times d$ <sup>5</sup> :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_5)$$

**Étape 2 : Imposition de la corrélation**

**Étape 3 : Transformation en distribution uniforme**

**Formule finale** La copule gaussienne est donc générée par la transformation suivante :

$$U = \Phi(V\sqrt{\Lambda}V^T Z)$$

#### 8.2.1.2 Copule de Student

Pour générer une copule de Student, nous procédons comme suit :

**Étape 1 : Génération d'échantillons normaux** Comme pour la copule gaussienne, générons un vecteur de variables aléatoires standard normales  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_5)$ .

**Étape 2 : Génération d'échantillons  $\chi^2$**  Générons des échantillons suivant une distribution  $\chi^2$  avec  $df$  degrés de liberté<sup>6</sup>. Soit  $\chi_j^2 \sim \chi^2(df)$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Étape 3 : Transformation en échantillons t de Student** Transformons  $Z$  en échantillons suivant une distribution t de Student  $T$  :

$$T_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{\chi_j^2/df}}$$

**Étape 4 : Imposition de la corrélation**

**Étape 5 : Transformation en distribution uniforme**

---

5.  $d = 5$

6.  $df=3$

**Formule finale** La copule de Student est donc générée par la transformation suivante :

$$U = F_T(V\sqrt{\Lambda}V^T T, df)$$

## 8.2.2 Incorporation des Copules dans la Simulation

### Algorithme de Simulation

1. Génération d'échantillons uniformes  $U$  à partir des copules gaussienne et de Student.
2. Même algorithme que 8.1.4

## 8.2.3 Modélisation Différente de la Corrélation

Les copules gaussiennes et de Student modélisent la corrélation de manière différente, permettant de capturer des structures de dépendance variées.

### Copule Gaussienne

La copule gaussienne est basée sur la distribution normale multivariée. Elle est définie par la matrice de corrélation  $\Sigma_{\text{gaussien}}$  et est capable de modéliser la dépendance linéaire entre les variables. Cependant, elle peut être limitée dans sa capacité à capturer des dépendances extrêmes (dans les queues de distribution).

$$C_{\text{Gaussian}}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \Phi_{\Sigma_{\text{gaussien}}}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

où  $\Phi_{\Sigma_{\text{gaussien}}}$  est la fonction de répartition multivariée normale avec matrice de corrélation  $\Sigma_{\text{gaussien}}$ .

### Copule de Student

La copule de Student est basée sur la distribution t de Student multivariée. Elle est définie par la matrice de corrélation  $\Sigma_{\text{student}}$  et le nombre de degrés de liberté  $df$ . Cette copule est particulièrement utile pour modéliser des dépendances extrêmes, car elle capture mieux la queue de distribution par rapport à la copule gaussienne.

$$C_{\text{Student}}(u_1, u_2, \dots, u_d) = t_{\Sigma_{\text{student}}, df}(t^{-1}(u_1, df), t^{-1}(u_2, df), \dots, t^{-1}(u_d, df))$$

où  $t_{\Sigma_{\text{student}}, df}$  est la fonction de répartition multivariée t de Student avec matrice de corrélation  $\Sigma_{\text{student}}$  et  $df$  degrés de liberté.

## 8.2.4 Résultats

	Gaussian_copula	Student_copula
1st-to-def.	99.4778	92.7443
2nd-to-def.	37.3213	37.8028
3rd-to-def.	14.5591	17.2929
4th-to-def.	6.2217	9.8215
5th-to-def.	2.9557	4.7085

TABLE 8.2 – Spreads des CDS k-ème Défaut avec Copules (en bps)

## 8.3 Interprétation

Méthode	Independent	Copule Gaussienne	Copule Student
<b>1st-to-def.</b>	151.0450	99.4778	92.7443
<b>2nd-to-def.</b>	17.5499	37.3213	37.8028
<b>3rd-to-def.</b>	1.0302	14.5591	17.2929
<b>4th-to-def.</b>	0.0377	6.2217	9.8215
<b>5th-to-def.</b>	0.0000	2.9557	4.7085

TABLE 8.3 – Spreads des CDS k-ème Défaut avec différentes méthodes (en bps)

### Copule Gaussienne

- **1st-to-def.** : 99.4778 bps. Le spread est plus bas qu’avec l’hypothèse d’indépendance, indiquant que la dépendance linéaire modélisée réduit la probabilité perçue du défaut initial.
- **2nd-to-def.** : 37.3213 bps. Les spreads diminuent progressivement, la copule gaussienne capturant les corrélations linéaires mais sous-estimant potentiellement les queues lourdes (événements extrêmes simultanés).
- **3rd-to-def.** : 14.5591 bps. La copule gaussienne sous-estime légèrement la probabilité des défauts multiples par rapport à la copule de Student.
- **4th-to-def.** : 6.2217 bps. Les spreads diminuent, indiquant une faible probabilité de défauts multiples.
- **5th-to-def.** : 2.9557 bps. Les spreads restent faibles, la copule gaussienne capturant les dépendances linéaires.

### Copule de Student

- **1st-to-def.** : 92.7443 bps. Légèrement plus bas que le cas gaussien, indiquant une dépendance plus faible pour le premier défaut.
- **2nd-to-def.** : 37.8028 bps. Les spreads pour les défauts multiples sont plus élevés que ceux de la copule gaussienne, reflétant la meilleure capture des événements extrêmes grâce aux queues lourdes de la distribution de Student.
- **3rd-to-def.** : 17.2929 bps. Les spreads sont plus élevés que ceux de la copule gaussienne, reflétant une meilleure capture des risques extrêmes.
- **4th-to-def.** : 9.8215 bps. La copule de Student capture mieux la probabilité de défauts multiples.
- **5th-to-def.** : 4.7085 bps. Les spreads sont les plus élevés, reflétant la capacité de la copule de Student à modéliser les queues lourdes.

## Comparaison des Méthodes

### Independent vs. Méthodes avec Corrélations

- **1st-to-def** : Le spread est le plus élevé en mode indépendant (151.0450 bps), ce qui est attendu car il ne prend pas en compte la réduction de risque due à la corrélation.

- **2nd-to-def et suivants** : Les spreads chutent drastiquement en mode indépendant, reflétant une absence de dépendance entre les entités.

### Pourquoi le 1er défaut est-il beaucoup plus cher en méthode indépendante ?

Le spread très élevé pour le 1er défaut dans la méthode indépendante est principalement dû à l'hypothèse d'absence de corrélation entre les entités. Lorsque les entités sont considérées indépendantes, chaque défaut est évalué séparément sans tenir compte de la réduction de risque potentielle due aux interdépendances entre les entités. Cela conduit à une estimation conservatrice et souvent surestimée du risque de défaut initial, car chaque entité est perçue comme étant à risque de défaut sans bénéficier de l'atténuation de risque due à la diversification.

Mathématiquement, la corrélation réduit le risque global en considérant les interdépendances entre les entités. Si  $\rho_{ij}$  représente la corrélation entre deux entités  $i$  et  $j$ , la variance du portefeuille peut être exprimée comme :

$$\text{Var}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

où  $w_i$  et  $w_j$  sont les poids des entités  $i$  et  $j$  dans le portefeuille, et  $\text{Cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$  est la covariance des rendements des entités  $i$  et  $j$ . Lorsque les corrélations sont prises en compte, les variances et covariances contribuent à réduire le risque global, ce qui diminue les spreads du 1er défaut.

En prenant en compte la corrélation, le spread du 1er défaut est réduit car le risque perçu est atténué par la diversification. Les entités corrélées partagent une partie du risque, réduisant ainsi la probabilité de défaut simultané initial. Cependant, bien que la corrélation réduise le risque du 1er défaut, elle augmente les spreads pour les défauts multiples. Cela est dû au fait que les défauts multiples sont plus probables lorsque les entités sont corrélées, surtout dans des conditions de marché extrêmes.

### Copule Student vs. Copule Gaussienne

- **1st-to-def** : Spread légèrement plus bas pour la copule de Student.
- **2nd-to-def et suivants** : Les spreads sont plus élevés pour la copule de Student, capturant mieux la probabilité de défauts multiples et extrêmes.

Dans la suite de ce rapport, nous ne considérerons que la copule gaussienne pour l'étude avec corrélation.

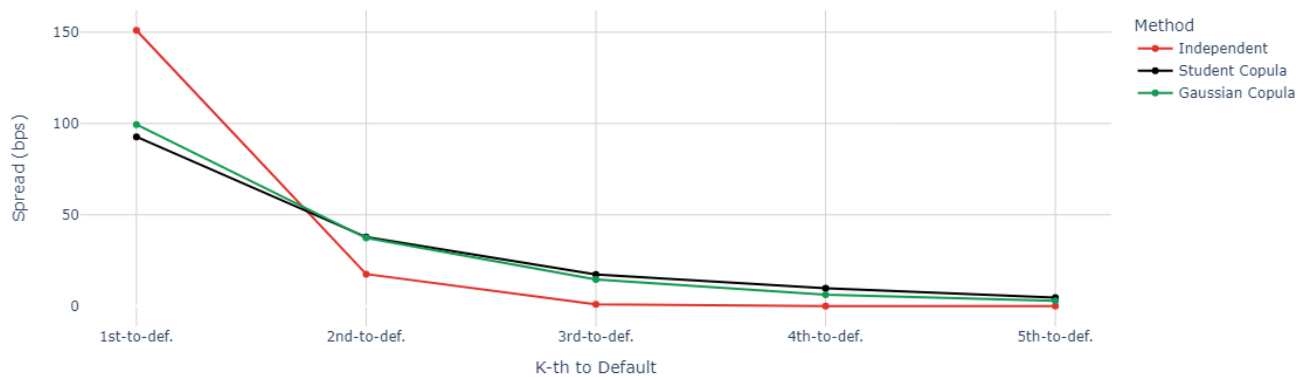


FIGURE 8.1 – Spreads de CDS

# Chapitre 9

## Scénario Stressé

### 9.1 Pétrole

L'étude des spreads des CDS k-ème défaut peut être approfondie en intégrant un modèle de prix du pétrole. Cette section explique en détail la modélisation des prix du pétrole, les corrélations avec les spreads des CDS, et l'intégration de ces corrélations dans la simulation des spreads des CDS.

#### 9.1.1 Modèle Ornstein-Uhlenbeck (OU)

Le modèle Ornstein-Uhlenbeck est un processus stochastique souvent utilisé pour modéliser les prix des commodités, y compris le pétrole. Il est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \theta(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t$$

où :

- $S_t$  est le prix du pétrole à l'instant  $t$ ,
- $\mu$  est le niveau moyen de long terme,
- $\theta$  est la vitesse de retour vers la moyenne,
- $\sigma$  est la volatilité,
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

##### 9.1.1.1 Test de Stationnarité ADF

Pour justifier l'utilisation du modèle Ornstein-Uhlenbeck, nous vérifions la stationnarité de la série temporelle des rendements. Le test Augmented Dickey-Fuller (ADF) est utilisé à cette fin. Les résultats du test ADF sont les suivants :

- **Statistique de test** : -33.61817071160935
- **p-value** : 0.0
- **Valeurs critiques** :
  - 1% : -3.4355754676859886
  - 5% : -2.8638475772391665
  - 10% : -2.5679985805677017

La statistique de test (-33.61817071160935) est bien inférieure aux valeurs critiques, et la p-value de 0.0 est inférieure à 0.05, indiquant que la série temporelle des rendements est stationnaire.

### 9.1.1.2 Estimation des Paramètres par Maximum de Vraisemblance

Pour estimer les paramètres du modèle OU, nous devons initialement utiliser la méthode du maximum de vraisemblance avec la fonction suivante :

$$L(\theta, \mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \log \left( \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\theta\Delta t})}{2\theta} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left( 1 - e^{-2\theta\Delta t} \right) - \frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(S_i - S_{i-1}e^{-\theta\Delta t} - \mu(1 - e^{-\theta\Delta t}))^2}{1 - e^{-2\theta\Delta t}}$$

Cependant, pour des raisons de convergence numérique, nous avons utilisé une méthode alternative basée sur les moments des rendements observés [11].

La moyenne des observations ( $S_{t_i}$ ) est donnée par :

$$\hat{\mu} = \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

L'autocorrélation à un lag de 1 ( $\hat{\rho}$ ) est utilisée pour estimer  $\theta$  :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^n (S_{t_i} - \bar{S})(S_{t_{i-1}} - \bar{S})}{\sum_{i=1}^n (S_{t_i} - \bar{S})^2}$$

Ensuite,  $\theta$  est estimé par :

$$\hat{\theta} = -\frac{\ln(\hat{\rho})}{dt}$$

L'écart-type des observations ( $S_{t_i}$ ) est donné par :

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_{t_i} - \bar{S})^2$$

Ensuite,  $\sigma$  est estimé par :

$$\hat{\sigma}^2 = 2\hat{\theta}\hat{s}^2$$

Pour résumer, les formules des estimateurs standards pour  $\mu$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  sont :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

$$\hat{\theta} = -\frac{\ln \left( \frac{\sum_{i=2}^n (S_{t_i} - \bar{S})(S_{t_{i-1}} - \bar{S})}{\sum_{i=1}^n (S_{t_i} - \bar{S})^2} \right)}{dt}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2\hat{\theta} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_{t_i} - \bar{S})^2 \right)$$

### 9.1.1.3 Simulation des Prix du Pétrole

Pour simuler les prix futurs du pétrole, nous utilisons les paramètres estimés dans l'équation de l'OU. La simulation est réalisée en générant des trajectoires pour le prix du pétrole sur un horizon temporel donné<sup>1</sup>.

La discrétisation de l'équation continue de l'OU se fait en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama. Cela nous permet de passer d'une équation différentielle stochastique à une équation aux différences finies, adaptée à une simulation numérique. La forme discrétisée de l'équation est :

$$S_{i+1} = S_i + \theta(\mu - S_i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_i$$

où :

- $\Delta t$  est le pas de temps,
- $\epsilon_i$  est une variable aléatoire suivant une distribution normale standard  $N(0, 1)$ .

L'algorithme de simulation suit les étapes suivantes :

1. **Initialisation** : Fixer  $S_0$  au prix initial du pétrole.
2. **Génération des incréments de Wiener** : Pour chaque pas de temps  $i$ , générer  $\epsilon_i \sim N(0, 1)$ .
3. **Calcul des prix** : Utiliser la formule discrétisée pour calculer  $S_{i+1}$  à partir de  $S_i$ .
4. **Répéter** : Répéter les étapes 2 et 3 pour tous les pas de temps jusqu'à atteindre l'horizon temporel souhaité.

### 9.1.1.4 Corrélations entre les Variations des Spreads de CDS et le Prix du Pétrole

Les corrélations entre les variations des spreads de CDS et le prix du pétrole brut sont essentielles pour comprendre l'impact des fluctuations des prix du pétrole sur les risques de crédit. Les corrélations calculées sont les suivantes :

Pays	Corrélation
UAE	-0.2764
QATAR	-0.2540
SAUDI	-0.3307
OMAN	-0.2133
BAHRAIN	-0.1574

TABLE 9.1 – Corrélations entre les pays et le prix du pétrole

Ces corrélations négatives indiquent que lorsque le prix du pétrole augmente, les spreads des CDS ont tendance à diminuer, et vice versa. Ce qui est logique, l'économie du Golf dépendant grandement de leur production de pétrole, une augmentation des prix diminuerait leurs risques de faillite.

---

1. 5 ans dans ce cas ci

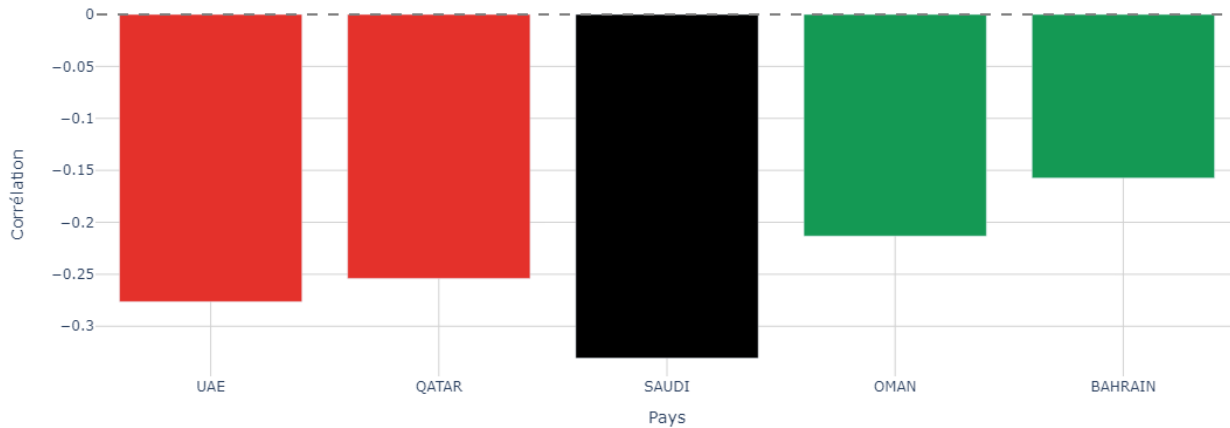


FIGURE 9.1 – Corrélation des Spread de CDS avec les Prix de Pétrole

### 9.1.1.5 Causalité de Granger

La causalité de Granger est utilisée pour déterminer si les variations du prix du pétrole peuvent prédire les variations des spreads des CDS. Le test de causalité de Granger repose sur l'hypothèse nulle selon laquelle les variations du prix du pétrole ne causent pas les variations des spreads des CDS. Si la p-value est inférieure à un seuil de signification (généralement 0.05), l'hypothèse nulle<sup>2</sup> est rejetée, indiquant qu'il existe une relation causale.

Pour cette analyse, nous considérons cinq lags. Les p-values obtenues pour ces cinq lags sont les suivantes pour chaque pays :

- **UAE** : p-value = 0.0471
- **QATAR** : p-value = 0.0030
- **SAUDI** : p-value = 0.0126
- **OMAN** : p-value = 0.0000
- **BAHRAIN** : p-value = 0.0000

Ces résultats montrent que les variations du prix du pétrole peuvent être utilisées pour prévoir les variations des spreads des CDS pour tous les pays analysés (UAE, Qatar, Arabie Saoudite, Oman, et Bahreïn), il existe une relation causale significative, suggérant que les fluctuations des prix du pétrole peuvent servir d'indicateur prévisionnel pour les variations des spreads des CDS dans ces pays.

### 9.1.1.6 Ajustement des Probabilités de Survie en Fonction des Prix du Pétrole

On suppose que l'impact des variations du prix du pétrole sur la probabilité de survie peut être linéairement proportionnel à la variation relative du prix du pétrole :

$$\Delta S_{ij} \propto \left( \frac{P_{t+j}}{P_t} - 1 \right)$$

La constante de proportionnalité est le facteur de corrélation  $\rho_i$ .

---

2.  $H_0$  : Pas de pouvoir prédictif.

On exprime l'ajustement de la probabilité de survie  $S_{ij}$  en ajoutant l'effet de la variation du prix du pétrole :

$$S_{ij}^{\text{adj}} = S_{ij} + \rho_i S_{ij} \left( \frac{P_{t+j}}{P_t} - 1 \right)$$

On peut factoriser  $S_{ij}$  pour obtenir une forme plus compacte :

$$S_{ij}^{\text{adj}} = \max \left( 0, \min \left( 1, S_{ij} \left( 1 + \rho_i \left( \frac{P_{t+j}}{P_t} - 1 \right) \right) \right) \right)$$

où  $\rho_i$  est le facteur de corrélation pour le pays  $i$ ,  $P_t$  est le prix initial du pétrole, et  $P_{t+j}$  est le prix du pétrole à l'instant  $t + j$ .

Où :

- Probabilité de Survie Initiale ( $S_{ij}$ ) : Représente la probabilité que l'entité  $i$  survive jusqu'à l'instant  $t + j$  sans ajustement pour le prix du pétrole.
- Facteur de Corrélation ( $\rho_i$ ) : Mesure de la sensibilité de la probabilité de survie de l'entité  $i$  par rapport aux variations du prix du pétrole.
- Variation Relative du Prix du Pétrole ( $\frac{P_{t+j}}{P_t} - 1$ ) : Représente le pourcentage de changement du prix du pétrole entre les instants  $t$  et  $t + j$
- Ajustement de la Probabilité de Survie : Le terme  $1 + \rho_i \left( \frac{P_{t+j}}{P_t} - 1 \right)$  ajuste la probabilité de survie en fonction de la variation du prix du pétrole.

### 9.1.1.7 Simulation des Spreads des CDS avec le Modèle de Pétrole

Pour intégrer les prix du pétrole dans la simulation des spreads des CDS, les étapes suivantes sont suivies :

1. **Simulation des prix du pétrole** : Utilisation du modèle OU pour générer des trajectoires du prix du pétrole.
2. **Ajustement des probabilités de survie** : Utilisation des corrélations entre les prix du pétrole et les spreads des CDS pour ajuster les probabilités de survie.
3. **Simulation des spreads des CDS** : Utilisation des probabilités de survie ajustées dans la simulation de Monte Carlo pour calculer les spreads des CDS.

### 9.1.1.8 Interprétation des Résultats

Les spreads des CDS pour différents ordres de défaut, après ajustement en fonction des prix du pétrole, sont les suivants :

Ordre de défaut	CDS (avec pétrole)
1er défaut	100.0842
2ème défaut	38.5326
3ème défaut	14.1336
4ème défaut	6.5259
5ème défaut	2.5459

TABLE 9.2 – CDS avec le prix du pétrole

Ces résultats sont très proche des spreads calculé sans modélisation du pétrole, ce qui est toutefois logique ; le paramètre externe reflète l'état actuel du marché, ne devant pas impacter la vision du risque.

### 9.1.2 Scénario stressé

L'étude des spreads des CDS k-ème défaut peut être approfondie en intégrant des scénarios de stress basés sur un modèle de prix du pétrole.

#### 9.1.2.1 Tests de Stress des Paramètres du Modèle OU

Pour évaluer la sensibilité des spreads des CDS aux variations des paramètres du modèle OU (Ornstein-Uhlenbeck), nous effectuons des tests de stress en variant les paramètres  $\mu$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$ .

**9.1.2.1.1 Scénarios de Stress** Les valeurs de stress pour chaque paramètre sont générées comme suit :

$$\begin{aligned}\mu_{\text{values}} &= \left[ \frac{\mu}{2}, \frac{3\mu}{4}, \frac{5\mu}{4}, \frac{3\mu}{2}, 2\mu \right] \\ \theta_{\text{values}} &= \left[ \frac{\theta}{2}, \frac{3\theta}{4}, \frac{5\theta}{4}, \frac{3\theta}{2}, 2\theta \right] \\ \sigma_{\text{values}} &= \left[ \frac{\sigma}{2}, \frac{3\sigma}{4}, \frac{5\sigma}{4}, \frac{3\sigma}{2}, 2\sigma \right]\end{aligned}$$

**9.1.2.1.2 Processus de Simulation** Pour chaque combinaison de paramètres sous stress :

1. Simulation des prix du pétrole
2. Ajustement des probabilités de survie
3. Calcul des spreads des CDS

**9.1.2.1.3 Calcul de la Sensibilité** Pour quantifier la sensibilité des spreads des CDS aux variations des paramètres du modèle OU, nous utilisons les différences finies centrées.

**9.1.2.1.4 Formule de Sensibilité** La sensibilité est calculée comme suit :

$$\text{Sensibilité} = \frac{\frac{S(p+\Delta p) - S(p-\Delta p)}{2\Delta p}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

où  $p$  est le paramètre testé,  $\Delta p$  est une petite variation du paramètre, et  $S$  est le spread des CDS.

#### 9.1.2.2 Calcul de la Sensibilité pour Chaque Paramètre

Pour chaque paramètre ( $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ), la sensibilité est calculée en prenant en compte les variations autour de la valeur de base. Les résultats sont interprétés comme suit :

Ordre de défaut	Sensibilité à $\mu$	Sensibilité à $\theta$	Sensibilité à $\sigma$
1er défaut	0.5816	0.6497	0.6394
2ème défaut	-0.7048	-0.7398	-0.7509
3ème défaut	-1.2294	-1.2446	-1.2213
4ème défaut	-1.3018	-1.3158	-1.3191
5ème défaut	-1.3214	-1.3214	-1.3214

TABLE 9.3 – Sensibilité des CDS au pétrole (modèle OU)

### 9.1.2.3 Interprétation des Résultats

Les résultats montrent que les spreads des CDS sont particulièrement sensibles aux variations de  $\mu$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$ . Les sensibilités négatives indiquent que l'augmentation des paramètres diminue les spreads, tandis que les sensibilités positives indiquent que l'augmentation des paramètres augmente les spreads. Examinons en détail les implications de chaque paramètre :

**9.1.2.3.1 Sensibilité à  $\mu$  :** Le paramètre  $\mu$  représente le niveau moyen de long terme du prix du pétrole. Une augmentation de  $\mu$  signifie que l'on s'attend à ce que le prix du pétrole soit plus élevé en moyenne à long terme.

Les résultats indiquent que pour le premier défaut, la sensibilité à  $\mu$  est positive, ce qui signifie que l'augmentation de  $\mu$  augmente les spreads des CDS. Cela s'explique par le fait que des prix du pétrole plus élevés sont souvent associés à des conditions économiques plus favorables, ce qui peut accroître la perception du risque de crédit initial.

Cependant, pour les ordres de défaut supérieurs, la sensibilité est négative. Cela indique que l'augmentation de  $\mu$  réduit les spreads des CDS pour ces défauts. En effet, à mesure que les conditions économiques s'améliorent (reflétées par un  $\mu$  plus élevé), la probabilité de multiples défauts simultanés diminue, réduisant ainsi les spreads des CDS associés.

**9.1.2.3.2 Sensibilité à  $\theta$  :** Le paramètre  $\theta$  représente la vitesse de retour à la moyenne du prix du pétrole. Une augmentation de  $\theta$  signifie que le prix du pétrole revient plus rapidement à son niveau moyen après une déviation.

La sensibilité à  $\theta$  suit une tendance similaire à celle de  $\mu$ . Les sensibilités sont positives pour le premier défaut, ce qui signifie que l'augmentation de  $\theta$  augmente les spreads des CDS. Un retour rapide à la moyenne peut être perçu comme une volatilité accrue à court terme, augmentant ainsi le risque de défaut initial.

Pour les ordres de défaut supérieurs, la sensibilité à  $\theta$  est négative. Cela indique que l'augmentation de la vitesse de retour à la moyenne réduit les spreads des CDS pour ces défauts. Un retour rapide à la moyenne peut stabiliser les prix du pétrole à long terme, réduisant la probabilité de défauts multiples.

**9.1.2.3.3 Sensibilité à  $\sigma$  :** Le paramètre  $\sigma$  représente la volatilité du prix du pétrole. Une augmentation de  $\sigma$  signifie une plus grande variabilité des prix du pétrole.

La sensibilité à  $\sigma$  montre que l'augmentation de la volatilité augmente les spreads des CDS pour le premier défaut. Cela s'explique par le fait que des prix du pétrole plus volatils augmentent l'incertitude économique, ce qui accroît le risque de défaut initial.

Cependant, pour les ordres de défaut supérieurs, la sensibilité à  $\sigma$  est négative. L'augmentation de la volatilité réduit les spreads des CDS pour ces défauts. Cette réduction peut s'expliquer par la diversification du risque : bien que la volatilité augmente le risque de défaut initial, elle ne conduit pas nécessairement à une augmentation proportionnelle des risques de défauts multiples.

**En conclusion :** Les résultats de sensibilité montrent que les spreads des CDS k-ème défaut réagissent de manière significative aux variations des paramètres du modèle OU. Les variations de  $\mu$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  influencent différemment les spreads selon l'ordre de défaut.

## 9.2 US-Yield

Les rendements des obligations américaines à 10 ans sont souvent utilisés comme un indicateur de la santé économique et des anticipations de taux d'intérêt futurs. Pour modéliser les rendements des obligations américaines, nous utilisons le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Ce modèle est particulièrement adapté pour modéliser les taux d'intérêt car il garantit que les taux restent positifs et permet de capturer la volatilité stochastique.

### 9.2.1 Modèle CIR

Le modèle CIR décrit l'évolution des taux d'intérêt par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \theta(\mu - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t$$

où :

- $S_t$  est le rendement à l'instant  $t$ .
- $\theta$  est la vitesse de retour à la moyenne.
- $\mu$  est le niveau moyen de long terme du rendement.
- $\sigma$  est la volatilité du rendement.
- $dW_t$  est un mouvement brownien standard.

#### 9.2.1.1 Test ADF

Pour justifier l'utilisation du modèle CIR, nous devons d'abord vérifier la stationnarité des séries temporelles utilisées. Le test ADF (Augmented Dickey-Fuller) est couramment employé à cette fin. Les résultats du test ADF sur la série temporelle sont les suivants :

- **Statistique de test** : -7.4663
- **p-value** : 0.0000
- **Valeur critique (5%)** : -2.8639

La statistique de test (-7.4663) est bien inférieure à la valeur critique de 5% (-2.8639), indiquant que la série est stationnaire au niveau de 5%. La p-value de 0.0000 confirme également la stationnarité.

#### 9.2.1.2 Estimation des Paramètres du Modèle CIR

Pour calibrer le modèle CIR, nous utilisons les variations journalières des rendements des obligations américaines. L'estimation des paramètres se fait par la méthode du maximum de vraisemblance en minimisant la fonction de log-vraisemblance [10] :

$$\ln L(\theta, \mu, \sigma | S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \ln(v_i) + \frac{(S_{t_i} - m_i)^2}{v_i} \right)$$

où  $m_i$  et  $v_i$  sont respectivement la moyenne et la variance conditionnelles de  $S_{t_i}$ , données par :

$$m_i = S_{t_{i-1}} e^{-\theta(t_i - t_{i-1})} + \mu \left(1 - e^{-\theta(t_i - t_{i-1})}\right)$$

$$v_i = \frac{\sigma^2}{2\theta} \left(1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}\right)$$

En minimisant cette fonction de log-vraisemblance négative, nous obtenons les estimations des paramètres du modèle CIR, permettant ainsi de modéliser efficacement les rendements obligataires dans un cadre de diffusion.

### 9.2.1.3 Simulation des Rendements

Une fois les paramètres calibrés, nous pouvons simuler les rendements futurs en utilisant la discrétisation de l'équation du modèle CIR :

$$S_{i+1} = S_i + \theta(\mu - S_i)\Delta t + \sigma\sqrt{S_i}\sqrt{\Delta t}\epsilon_i$$

où  $\epsilon_i$  est une variable aléatoire suivant une distribution normale standard.

## 9.2.2 Test de Causalité de Granger

Pour déterminer si les rendements des obligations américaines peuvent prédire les variations des spreads de CDS, nous utilisons le test de causalité de Granger. Le test de Granger examine si les variations passées des rendements des obligations peuvent expliquer les variations futures des spreads de CDS.

Les résultats du test de causalité de Granger pour un lag de 5 jours sont les suivants :

- **UAE** : p-value = 0.0142
- **QATAR** : p-value = 0.0328
- **SAUDI** : p-value = 0.0484
- **OMAN** : p-value = 0.0185
- **BAHRAIN** : p-value = 0.0000

Ces p-values indiquent que pour les rendements des obligations américaines peuvent être utilisés pour prédire les variations des spreads de CDS.

### 9.2.3 Corrélations entre les Spreads de CDS et les Rendements des Obligations Américaines

Nous avons calculé les corrélations entre les variations des spreads de CDS et les variations des rendements des obligations américaines à 10 ans. Les résultats sont les suivants :

Ces corrélations négatives indiquent que, globalement, une augmentation des rendements des obligations américaines tend à être associée à une diminution des spreads de CDS pour ces pays, et vice versa. Cette relation inverse peut être interprétée comme une indication que des rendements obligataires plus élevés (souvent associés à une économie plus forte et à des anticipations de hausse des taux d'intérêt) sont perçus comme des signes de risque de crédit plus faible pour ces pays.

Pays	Corrélation
UAE	-0.1960
QATAR	-0.2217
SAUDI	-0.2566
OMAN	-0.1170
BAHRAIN	-0.1529

TABLE 9.4 – Corrélation entre les pays et les rendements des obligations

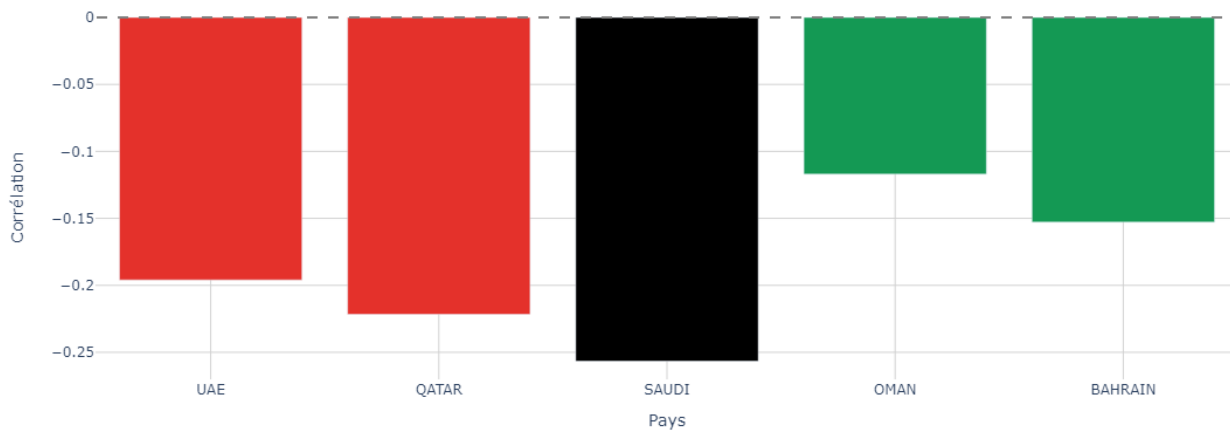


FIGURE 9.2 – Corrélation des Spread de CDS avec US-Yield

## 9.2.4 Sensibilités aux Paramètres du Modèle CIR

### 9.2.4.1 Méthodologie

Pour analyser la sensibilité des spreads de CDS aux paramètres du modèle CIR ( $\mu$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$ ), nous effectuons des simulations de stress en variant chacun de ces paramètres autour de leur valeur de base. Les sensibilités sont calculées en utilisant les différences finies centrées, qui permettent d'estimer la variation du spread de CDS en réponse à un changement marginal du paramètre.

$$\text{Sensibilité} = \frac{\left( \frac{\Delta \text{Spread}}{\text{Spread}_{\text{base}}} \right)}{\left( \frac{\Delta \text{Paramètre}}{\text{Paramètre}_{\text{base}}} \right)}$$

où  $\Delta \text{Spread}$  est la variation du spread de CDS et  $\Delta \text{Paramètre}$  est la variation du paramètre du modèle CIR.

### 9.2.4.2 Interprétation des Résultats

Les résultats des sensibilités sont résumés dans les tableaux suivants :

**9.2.4.2.1 Sensibilité à  $\mu$**  La sensibilité négative à  $\mu$  pour tous les ordres de défaut indique qu'une augmentation de  $\mu$ , qui représente le niveau moyen de long terme du rendement, diminue les spreads de CDS. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'une valeur plus élevée de  $\mu$  suggère des rendements obligataires plus élevés à long terme, ce qui peut être perçu comme une amélioration des conditions économiques et une réduction du risque de crédit.

Ordre de défaut	Sensibilité à $\mu$	Sensibilité à $\theta$	Sensibilité à $\sigma$
1er défaut	-0.0006	-0.2000	-0.1046
2ème défaut	-0.0036	-0.9186	-0.9747
3ème défaut	-0.0046	-1.2388	-1.2657
4ème défaut	-0.0048	-1.3214	-1.3190
5ème défaut	-0.0048	-1.3214	-1.3214

TABLE 9.5 – Sensibilité des CDS aux rendements de Obligations Américaines (modèle CIR)

**9.2.4.2.2 Sensibilité à  $\theta$**  La sensibilité négative à  $\theta$ , la vitesse de retour à la moyenne, indique qu'une augmentation de  $\theta$  réduit également les spreads de CDS. Un  $\theta$  plus élevé signifie que les rendements obligataires reviennent plus rapidement à leur niveau moyen, ce qui réduit l'incertitude et donc le risque perçu.

**9.2.4.2.3 Sensibilité à  $\sigma$**  La sensibilité négative à  $\sigma$  pour tous les ordres de défaut indique qu'une augmentation de la volatilité ( $\sigma$ ) réduit les spreads de CDS. Bien que cela puisse sembler contre-intuitif, dans le contexte du modèle CIR, une volatilité plus élevée peut entraîner des mouvements de retour à la moyenne plus fréquents, réduisant ainsi l'effet des chocs temporaires sur les rendements et les spreads de CDS.

# Conclusion

Dans cette étude, nous avons cherché à comprendre l'impact des variations des prix du pétrole et des rendements des obligations américaines sur les spreads de Credit Default Swaps (CDS) pour plusieurs pays du Moyen-Orient, à savoir les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite, Oman et Bahreïn.

Pour ce faire, nous avons d'abord calculé les spreads de CDS pour les  $k$ -ièmes défauts en utilisant des modèles avec et sans corrélation. Cette approche initiale nous a permis d'établir une base de comparaison solide pour évaluer l'importance de la corrélation dans l'évaluation du risque de crédit. En incorporant la corrélation, nous avons constaté une réduction significative des spreads pour le premier défaut, ce qui reflète la diversification du risque et l'atténuation des probabilités de défaut simultané.

Ensuite, nous avons élargi notre analyse en modélisant les variations des prix du pétrole en utilisant le modèle Ornstein-Uhlenbeck (OU). Les paramètres du modèle OU ont été calibrés à partir des rendements historiques du pétrole, et nous avons simulé les trajectoires futures des prix du pétrole sur un horizon de cinq ans. Ces simulations nous ont permis d'ajuster les probabilités de survie des entités en fonction des variations simulées des prix du pétrole. Nos résultats ont montré que les hausses des prix du pétrole sont généralement associées à une diminution des spreads de CDS, ce qui suggère une perception réduite du risque de crédit en période de hausse des prix du pétrole.

Parallèlement, nous avons examiné l'impact des rendements des obligations américaines à 10 ans sur les spreads de CDS en utilisant le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Après avoir calibré les paramètres du modèle CIR aux rendements obligataires historiques, nous avons simulé les trajectoires futures de ces rendements et évalué leur effet sur les spreads de CDS. Les corrélations négatives observées entre les variations des rendements obligataires et les spreads de CDS indiquent que les hausses des rendements sont perçues comme un indicateur de risque accru, conduisant à une augmentation des spreads de CDS.

Pour évaluer la robustesse de nos résultats, nous avons effectué des tests de causalité de Granger. Ces tests ont révélé des relations causales significatives entre les variations des prix du pétrole et les spreads de CDS pour certains pays, notamment les Émirats Arabes Unis, le Qatar, l'Arabie Saoudite, Oman et Bahreïn. De manière similaire, les tests de causalité ont montré que les variations des rendements des obligations américaines peuvent également prédire les variations des spreads de CDS, soulignant l'importance de ces variables macroéconomiques dans l'évaluation du risque de crédit.

En examinant les sensibilités des spreads de CDS aux paramètres des modèles OU et CIR, nous avons découvert que les spreads sont particulièrement sensibles aux variations de  $\mu$  (le niveau moyen de long terme),  $\theta$  (la vitesse de retour à la moyenne) et  $\sigma$  (la volatilité). Une augmentation

de  $\mu$  tend à augmenter les spreads pour le premier défaut, mais à les diminuer pour les défauts suivants, reflétant une perception accrue du risque de crédit à court terme mais une stabilisation à long terme. De même, une augmentation de  $\theta$  et de  $\sigma$  influence significativement les spreads, mettant en évidence l'importance de ces paramètres dans la modélisation des risques.

# Annexe : Test Statistiques

## Test ADF (Augmented Dickey-Fuller)

Le test ADF est utilisé pour vérifier la présence d'une racine unitaire dans une série temporelle, ce qui implique que la série est non-stationnaire. La stationnarité est une propriété importante pour les séries temporelles, car elle influence les propriétés statistiques des modèles utilisés pour les analyser.

### Formulation du Test ADF

Le test ADF est basé sur la régression suivante :

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \delta_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t$$

où :

- $y_t$  est la série temporelle à tester.
- $\Delta$  est l'opérateur de différence ( $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ ).
- $\alpha$  est une constante.
- $\beta t$  est une tendance temporelle.
- $\gamma$  est le coefficient de la variable retardée  $y_{t-1}$ .
- $\delta_i$  sont les coefficients des termes de décalage des différences.
- $\epsilon_t$  est le terme d'erreur.

### Hypothèses du Test ADF

Les hypothèses du test ADF sont les suivantes :

- $H_0$  : La série temporelle  $y_t$  a une racine unitaire (non-stationnaire).
- $H_1$  : La série temporelle  $y_t$  est stationnaire.

### Procédure du Test ADF

Pour réaliser le test ADF, les étapes suivantes sont suivies :

1. Estimer le modèle de régression.
2. Tester la significativité de  $\gamma$  en utilisant la statistique de test  $t$ .
3. Comparer la statistique de test à des valeurs critiques pour décider de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

# Test de Causalité de Granger

Le test de causalité de Granger permet de déterminer si une série temporelle peut prédire une autre série temporelle. En d'autres termes, il teste si les valeurs passées d'une série contiennent des informations utiles pour prévoir les valeurs futures d'une autre série.

## Formulation du Test de Granger

Le test de Granger repose sur les modèles de régression suivants :

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j x_{t-j} + \epsilon_t$$

$$x_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^p \gamma_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^q \delta_j y_{t-j} + \eta_t$$

où :

- $y_t$  et  $x_t$  sont les séries temporelles.
- $\alpha_i$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_i$ , et  $\delta_j$  sont les coefficients des termes de décalage.
- $\epsilon_t$  et  $\eta_t$  sont les termes d'erreur.

## Hypothèses du Test de Granger

Les hypothèses du test de Granger sont les suivantes :

- $H_0$  :  $x_t$  ne cause pas Granger  $y_t$ .
- $H_1$  :  $x_t$  cause Granger  $y_t$ .

## Procédure du Test de Granger

Pour réaliser le test de Granger, les étapes suivantes sont suivies :

1. Estimer les deux modèles de régression.
2. Tester la significativité des coefficients  $\beta_j$  en utilisant la statistique de test  $F$ .
3. Comparer la statistique de test à des valeurs critiques pour décider de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

## Test de Kolmogorov-Smirnov (KS)

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test non paramétrique utilisé pour déterminer si une série temporelle suit une distribution spécifique ou pour comparer deux distributions. Il est particulièrement utile pour vérifier la normalité des résidus dans les modèles de régression ou pour comparer les distributions empiriques de deux séries temporelles.

## Formulation du Test KS

Le test de Kolmogorov-Smirnov repose sur les fonctions de distribution cumulative (FDC) des séries temporelles ou des distributions à comparer. Soit  $F(x)$  et  $G(x)$  les FDC de deux distributions. Le test KS est basé sur la statistique suivante :

$$D = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

où  $D$  est la distance maximale absolue entre les deux FDC.

## Hypothèses du Test KS

Les hypothèses du test KS sont les suivantes :

- $H_0$  : Les distributions  $F(x)$  et  $G(x)$  sont identiques.
- $H_1$  : Les distributions  $F(x)$  et  $G(x)$  sont différentes.

## Procédure du Test KS

Pour réaliser le test KS, les étapes suivantes sont suivies :

1. Calculer les fonctions de distribution cumulative (FDC) empiriques des deux séries à comparer.
2. Calculer la statistique  $D$  comme la distance maximale entre les deux FDC.
3. Comparer la statistique  $D$  à une valeur critique basée sur la taille de l'échantillon pour décider de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

## Application du Test KS

Le test KS peut être appliqué de deux manières principales :

- **Test de conformité** : Comparer la FDC empirique d'une série temporelle avec une FDC théorique (par exemple, une distribution normale).
- **Test de deux échantillons** : Comparer les FDC empiriques de deux séries temporelles pour déterminer si elles proviennent de la même distribution.

## Interprétation des Résultats

- Si la statistique  $D$  est supérieure à la valeur critique, on rejette l'hypothèse nulle  $H_0$  et on conclut que les distributions sont différentes.
- Si la statistique  $D$  est inférieure ou égale à la valeur critique, on ne rejette pas l'hypothèse nulle  $H_0$  et on conclut que les distributions ne sont pas significativement différentes.

# Bibliographie

- [1] Bank for International Settlements. (2021). *Basel Committee on Banking Supervision and International Association of Insurance Supervisors : Joint Forum Report*. Récupéré de <https://www.bis.org/publ/joint21.pdf>
- [2] Bank for International Settlements. (1999). *Credit Risk Modeling : Current Practices and Applications*. Récupéré de <https://www.bis.org/publ/bcbs49.pdf>
- [3] Barlow, R. E., Proschan, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley & Sons.
- [4] Kalbfleisch, J. D., Prentice, R. L. (2002). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley-Interscience.
- [5] Cox, D. R., Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*. Chapman and Hall/CRC.
- [6] Efron, B. (1979). Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- [7] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications.
- [8] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- [9] O’Kane, D. (2008). *Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivatives*. The Wiley Finance Series.
- [10] Zan Miao (2018). *Linnæus University CIR Modeling of Interest Rates Sweden*<https://lnu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1270329/FULLTEXT01.pdf>
- [11] University of Wisconsin-Milwaukee. Robust Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Parameters. (2021). Récupéré de <https://dc.uwm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3918&context=etd>
- [12] ResearchGate. (2015). Pricing Basket Credit Default Swaps. Récupéré de [https://www.researchgate.net/publication/277132528\\_Pricing\\_Basket\\_Credit\\_Default\\_Swaps](https://www.researchgate.net/publication/277132528_Pricing_Basket_Credit_Default_Swaps)