



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*\_\*\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*\_\*\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Implémentation de stratégies quantitatives d'investissement

Préparé par : *M. Hatim OMARI*

Sous la direction de : *M. Yassine EL QALLI (INSEA)*  
*M. Hamza KASSI (SG ATS)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

## Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat et Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Yassine EL QALLI ( INSEA)*
- *M. Mohamed EL JAMALI ( INSEA)*
- *M. Hamza KASSI (SG ATS)*



## REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord adresser mes sincères remerciements à Monsieur **Hamza Kassi**, manager au sein de l'équipe SGI - QIS, pour m'avoir donné l'opportunité d'intégrer son équipe. Je le remercie également pour la bonne humeur qu'il insuffle au sein du groupe ainsi que pour ses conseils précieux tout au long de cette expérience.

Je remercie également tous les membres de l'équipe SGI - Reporting, en particulier Monsieur **Abdelhadi Rhiati**, manager de l'équipe, ainsi qu'Ahmed, Wiam et Ikram, pour leur accueil chaleureux, leur soutien et leur collaboration au quotidien.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude à Monsieur **Yassine El Qalli**, pour son encadrement rigoureux durant ce stage, mais aussi pour sa patience et son accompagnement constant au cours de mes trois années passées à l'INSEA.

Je suis également profondément reconnaissant à mon école, l'INSEA, pour les enseignements dispensés, les opportunités offertes et les rencontres humaines inoubliables. Ces trois années ont été marquantes sur les plans personnel et académique, et elles continueront d'influencer positivement ma carrière.

Enfin, je remercie Monsieur **Mohamed El Jamali** d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. J'espère que ce travail sera à la hauteur de vos attentes.

Ce mémoire propose une panoplie de stratégies quantitatives appliquées aux marchés financiers, structurées autour de trois grandes familles de stratégies : les stratégies de couverture actions, les stratégies sur les produits de taux d'intérêt, et les stratégies basées sur la volatilité. Chaque partie apporte une contribution spécifique à la modélisation, à l'évaluation empirique et à la mise en œuvre opérationnelle de stratégies systématiques, dans un cadre inspiré des pratiques de desks QIS institutionnels.

La première partie est consacrée aux stratégies de couverture sur actions, telles que le Buy-Write, le Collar classique et l'Enhanced Collar. Ces stratégies exploitent des produits dérivés vanilles et exotiques (puts spreads, forward start calls) pour améliorer le profil rendement/risque d'une exposition longue sur l'indice S&P 500. L'évaluation est fondée sur des backtests rigoureux utilisant des approximations de pricing via les modèles Black-Scholes et expOU, calibrés sur la volatilité implicite du VIX et le taux sans risque des T-Bills.

La deuxième partie s'attarde sur les stratégies quantitatives sur les taux d'intérêt, à travers une stratégie de carry & roll-down sur swaptions. Cette stratégie repose sur des modèles à un facteur comme Vasicek, mais également sur une version avancée et robuste du modèle de Cheyette, calibrée sur des données de taux américains (IRX, FVX). Les performances sont comparées selon différents régimes de taux, soulignant les avantages de la modélisation stochastique pour exploiter les dynamiques de la courbe de taux.

La troisième partie traite des stratégies de trading basées sur la volatilité, en particulier les stratégies de volatility targeting. Celles-ci ajustent dynamiquement l'allocation du portefeuille afin de maintenir une volatilité cible, et sont évaluées empiriquement sur le S&P 500. Des scénarios avec et sans coûts de transaction sont comparés, mettant en évidence l'intérêt d'un contrôle systématique de l'exposition au risque dans des contextes de marché variables.

---

**Mots clés :** QIS, smart bêta, Buy-Write, Enhanced Collar, Carry & Roll-down, Vol Target.

---

This thesis presents a range of quantitative strategies applied to financial markets, structured around three main families : equity hedging strategies, interest rate products strategies, and volatility-based strategies. Each part contributes specifically to the modeling, empirical evaluation, and operational implementation of systematic strategies, within a framework inspired by institutional QIS (Quantitative Investment Strategies) desks.

The first part is dedicated to equity hedging strategies, such as Buy-Write, Classic Collar, and Enhanced Collar. These strategies leverage vanilla and exotic derivatives (put spreads, forward start calls) to enhance the risk/return profile of a long exposure to the S&P 500 index. The evaluation relies on rigorous backtests using pricing approximations based on the Black-Scholes and expOU models, calibrated on the implied volatility from the VIX and the risk-free rate derived from T-Bills.

The second part focuses on interest rate strategies, particularly a carry & roll-down approach on swaptions. This strategy is implemented using single-factor models like Vasicek, as well as a robust and advanced version of the Cheyette model, calibrated on U.S. interest rate data (IRX, FVX). The performance is assessed across different interest rate regimes, highlighting the advantages of stochastic modeling to capture yield curve dynamics.

The third part deals with volatility-based trading strategies, especially volatility targeting approaches. These strategies dynamically adjust portfolio allocation to maintain a target volatility level and are empirically evaluated on the S&P 500. Scenarios with and without transaction costs are compared, illustrating the benefits of systematic risk control across varying market environments.

---

**Keywords :** QIS, smart beta, Buy-Write, Enhanced Collar, Carry & Roll-down, Vol Target.

---

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Top 5 des combinaisons de maturité et de strike dans la stratégie Buy-Write . . .	28
5.1	Métriques de performance de la stratégie Enhanced Collar vs Buy & Hold . . . .	38
7.1	Paramètres de la stratégie carry & roll-down . . . . .	45
7.2	Paramètres du modèle Cheyette robuste . . . . .	46
7.3	Performance comparée : modèle Vasicek vs Cheyette robuste . . . . .	48
9.1	Métriques de performance (nettes de coûts) des stratégies Vol Target . . . . .	59

## TABLE DES FIGURES

1.1	<i>Performances des différents ségments du marché d'actions</i>	4
3.1	<i>Graphiques des payoffs d'options vanilles</i>	15
3.2	<i>Smile de volatilité</i>	16
3.3	<i>Payoff de la stratégie Buy Write</i>	18
3.4	<i>Payoff du Bear Put Spread</i>	20
3.5	<i>Payoff du Bull Put Spread</i>	21
4.1	<i>Évolution du S&amp;P entre 2015 et 2025</i>	24
4.2	<i>Évolution du BXM entre 2015 et 2025</i>	24
4.3	<i>Performances BXM vs S&amp;P500 2015 et 2025</i>	25
4.4	<i>Évolution du VIX 2015 et 2025</i>	26
4.5	<i>Résultat du backtest des différentes stratégies Buy-Write</i>	27
5.1	<i>Payoff de la stratégie Collar</i>	32
5.2	<i>Payoff de la stratégie Enhanced Collar</i>	33
5.3	<i>Résultat du backtest de la stratégie Enhanced Collar</i>	38
7.1	<i>Évolution du taux court entre 2015 et 2025</i>	45
7.2	<i>Évolution du taux swap entre 2015 et 2025</i>	45
7.3	<i>Performance cumulée de la stratégie Carry &amp; Roll-down avec Vasicek</i>	47
7.4	<i>Performance cumulée de la stratégie Carry &amp; Roll-down avec Cheyette</i>	48
9.1	<i>Performance cumulée des stratégies Vol Target vs Buy &amp; Hold</i>	58
9.2	<i>Performance cumulée des stratégies Vol Target vs Buy &amp; Hold avec coûts de transactions</i>	59
A.1	<i>Logo de SG ATS</i>	67

<b>I Fondations des stratégies quantitatives d'investissement : concepts, outils et produits</b>	<b>2</b>
<b>1 Cadre général des stratégies d'investissement</b>	<b>3</b>
1.1 Définition et objectifs d'une stratégie d'investissement . . . . .	3
1.1.1 Objectifs des stratégies d'investissement . . . . .	3
1.2 Alpha vs. Bêta : Investissement actif ou passif? . . . . .	5
1.2.1 Recherche du bêta . . . . .	5
1.2.2 Recherche de l'alpha . . . . .	6
1.2.3 Smart bêta . . . . .	6
1.3 Stratégies quantitatives d'investissement . . . . .	7
<b>2 Préliminaires techniques et outils fondamentaux</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction à la théorie des options . . . . .	9
2.2 Le modèle de Black-Scholes et la probabilité risque neutre . . . . .	10
<b>3 Produits et stratégies classiques</b>	<b>14</b>
3.1 Produits dérivés . . . . .	14
3.1.1 Options Vanilles . . . . .	14
3.1.2 Options Exotiques . . . . .	17
3.2 Stratégies classiques . . . . .	17
3.2.1 Stratégie Buy-Write . . . . .	17
3.2.2 Stratégie Put-Spread . . . . .	19
<b>II Stratégies quantitatives de Couverture d'actions</b>	<b>22</b>
<b>4 Stratégie Buy-Write</b>	<b>23</b>
4.1 Présentation du Buy-Write systématique . . . . .	23
4.2 Implémentation de la stratégie . . . . .	25
4.3 Résultats . . . . .	27
4.4 Conclusion . . . . .	29

<b>5</b>	<b>Stratégies Collar</b>	<b>30</b>
5.1	Collar classique . . . . .	30
5.1.1	Formule générale du payoff . . . . .	30
5.1.2	Cas particulier : Collar à coût nul (Zero-Cost) . . . . .	31
5.1.3	Caractéristiques fondamentales du Collar . . . . .	31
5.1.4	Comparaison avec la stratégie Buy-Write . . . . .	31
5.2	Enhanced Collar . . . . .	32
5.2.1	Formule du payoff . . . . .	32
5.2.2	Pricing des jambes du Enhanced Collar . . . . .	33
5.2.2.1	Pricing de la jambe de protection : Put-Spread . . . . .	33
5.2.2.2	Pricing de la jambe de financement : Forward Start Call . . . . .	36
5.3	Implémentation de la stratégie . . . . .	36
5.3.1	Pricing des Put Spreads . . . . .	37
5.3.2	Pricing des Forward Start Calls . . . . .	37
5.3.3	Réalisation de l'implémentation . . . . .	37
5.4	Résultats . . . . .	37
<b>III</b>	<b>Stratégie quantitative sur les taux d'intérêts</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Produits et généralités sur le Fixed Income</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>Carry &amp; Roll Down sur Swaptions</b>	<b>42</b>
7.1	Stratégie de carry et roll-down sur swaptions . . . . .	42
7.2	Modèles de taux utilisés . . . . .	43
7.2.1	Modèle de Vasicek . . . . .	43
7.2.2	Modèle de Cheyette robuste . . . . .	43
7.2.3	Choix des modèles . . . . .	44
7.3	Implémentation de la stratégie . . . . .	44
7.3.1	Données et hypothèses de marché . . . . .	44
7.3.2	Paramètres de la stratégie . . . . .	45
7.3.3	Paramètres de modèles et calibration . . . . .	46
7.3.4	Algorithme d'implémentation de la stratégie . . . . .	46
7.3.5	Résultats expérimentaux . . . . .	47
7.3.6	Comparaison des modèles . . . . .	48
<b>IV</b>	<b>Stratégies quantitatives basées sur la volatilité</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Notions liées au trading de volatilité</b>	<b>50</b>
8.1	Introduction . . . . .	50
8.2	Modèles de volatilité stochastique . . . . .	50
8.3	Produits de volatilité . . . . .	50
8.4	Estimation de la volatilité . . . . .	51
8.5	Conclusion . . . . .	51

<b>9</b>	<b>Stratégies de vol target</b>	<b>52</b>
9.1	Cadre mathématique du volatility targeting . . . . .	52
9.2	Exemples de formules de réallocation . . . . .	53
9.3	Estimation de la volatilité en pratique . . . . .	53
9.4	Intérêts théoriques et résultats empiriques . . . . .	53
9.5	Comparaisons avec d'autres approches de gestion de risque . . . . .	54
9.6	Implémentation de la stratégie Volatility Targeting . . . . .	57
9.6.1	Cadre d'implémentation . . . . .	57
9.6.2	Algorithme de la stratégie Vol Target . . . . .	58
9.6.3	Résultats empiriques et impact des coûts . . . . .	58
9.6.4	Discussion sur les coûts de transaction . . . . .	59
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Présentation de la Société Générale ATS</b>	<b>66</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les marchés financiers contemporains connaissent une complexification croissante des dynamiques de prix, des sources de risque, et des comportements d'investisseurs. Dans ce contexte, les approches discrétionnaires cèdent progressivement la place à des méthodes plus rigoureuses, fondées sur des algorithmes et des modèles statistiques. C'est dans cette optique que s'inscrit le développement des stratégies quantitatives d'investissement (ou QIS, Quantitative Investment Strategies), qui permettent d'exploiter systématiquement des signaux issus de données de marché, tout en assurant une traçabilité, une discipline de gestion, et une meilleure maîtrise du risque.

Historiquement réservées aux hedge funds et aux institutions spécialisées, les QIS se sont progressivement démocratisées via la création d'indices stratégiques et de produits dérivés accessibles aux investisseurs institutionnels. Ces stratégies s'appuient sur des modèles de pricing avancés, des techniques de backtesting rigoureuses, ainsi que sur une mise en œuvre opérationnelle structurée selon des règles explicites. Elles s'inscrivent à l'intersection de la finance de marché, de l'économétrie, et du calcul stochastique.

Ce mémoire s'inscrit dans cette dynamique en proposant une exploration appliquée de plusieurs familles de stratégies quantitatives, allant des stratégies de couverture actions aux stratégies sur produits de taux d'intérêt, en passant par les approches fondées sur la volatilité. L'objectif est double : d'une part, approfondir la compréhension des mécanismes de construction et d'évaluation de ces stratégies ; d'autre part, proposer des implémentations empiriques réalistes, basées sur des données de marché accessibles (S&P 500, taux IRX/FVX, VIX).

La première partie s'intéresse aux stratégies de type Buy-Write, Collar et Enhanced Collar, en les reconstituant à l'aide d'outils de pricing (Black-Scholes, expOU) et de calibration sur la volatilité implicite. La deuxième partie aborde le segment des produits de taux d'intérêt, avec une stratégie de carry & roll-down sur swaptions, modélisée à l'aide des cadres de Vasicek et Cheyette. Enfin, la troisième partie traite des stratégies dites Volatility Targeting, qui adaptent dynamiquement le niveau d'exposition afin de maintenir une volatilité cible constante.

Cette étude vise ainsi à offrir une vision opérationnelle, rigoureuse et modulaire de la conception de stratégies QIS, à travers une démarche alliant fondements théoriques, modélisation stochastique, et expérimentation empirique, dans un cadre inspiré des pratiques des desks institutionnels.

## Première partie

# Fondations des stratégies quantitatives d'investissement : concepts, outils et produits

# CHAPITRE 1

## CADRE GÉNÉRAL DES STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT

Ce premier chapitre introduit les fondements des stratégies d'investissement en définissant leurs objectifs et en distinguant gestion active (recherche d'alpha) et passive (capture de bêta). Il met en lumière l'émergence des approches quantitatives, qui, à travers des modèles systématiques, réconcilient rigueur scientifique et efficacité de marché.

### 1.1 Définition et objectifs d'une stratégie d'investissement

La première question qu'un investisseur doit se poser est sans doute la plus fondamentale : Comment investir son capital ? En effet, bien que cette question parait triviale à première vue, c'est en fait ce qui permettra de déterminer plusieurs paramètres liés à cet investissement : Quelle classe d'actif choisir ? Quel horizon pour l'investissement ? Quel niveau de risque à prendre ? Toutes ces décisions que prendra l'investisseur formalise ce que l'on appelle une stratégie d'investissement.

**Définition 1 (Stratégie d'investissement)** Une stratégie d'investissement peut se définir comme un ensemble cohérent de principes et de méthodes guidant les décisions de placement, afin d'atteindre des objectifs financiers donnés.

Ainsi, c'est un plan d'action qui oriente l'investisseur en fonction de ses buts, de sa tolérance au risque et de ses besoins futurs en capital. Par exemple, une stratégie peut être dite prudente (visant avant tout la préservation du capital avec un niveau de risque faible) ou au contraire agressive (cherchant une forte appréciation du capital avec un risque élevé). Dans tous les cas, la définition de la stratégie intègre des paramètres tels que l'horizon de placement, la répartition par classe d'actifs, les critères de sélection des titres, et les contraintes de gestion (liquidité, réglementations, etc.).

#### 1.1.1 Objectifs des stratégies d'investissement

Avant d'aborder les objectifs fondamentaux d'une stratégie d'investissement, on rappelle brièvement des concepts issus de la théorie de Markowitz. On se base sur les articles majeurs de cette théorie [25, 26].

**Définition 2 (Rendement espéré)** Il est défini comme la moyenne pondérée des rendements possibles, chaque rendement étant multiplié par sa probabilité d'occurrence. Il reflète la performance anticipée de l'actif :

- **Cas discret** : si  $R$  est une variable aléatoire représentant le rendement, et  $\{R_i\}_{i=1}^n$  les différentes issues possibles avec leurs probabilités  $\{p_i\}_{i=1}^n$ , alors :

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^n p_i R_i$$

- **Cas continu** : si  $f_R(r)$  est la densité de probabilité du rendement  $R$ , alors :

$$\mathbb{E}[R] = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot f_R(r) dr$$

**Définition 3 (Risque encouru)** Il est quantifié par l'écart-type du rendement. Il mesure l'incertitude sur les performances futures :

$$\sigma_R = \sqrt{\mathbb{E}[(R - \mathbb{E}[R])^2]} = \sqrt{\text{Var}(R)}$$

Dans la théorie de Markowitz, ce risque total peut être décomposé en :

- **Risque systématique** : lié aux facteurs de marché, non diversifiable, capturé par le coefficient bêta.
- **Risque idiosyncratique** : spécifique à l'actif, diversifiable par la construction d'un portefeuille.

Un objectif fondamental d'une stratégie d'investissement consiste à optimiser le compromis entre rendement espéré et risque encouru. La théorie de la sélection de portefeuille de Markowitz formalise ce compromis en démontrant qu'il est possible de maximiser l'espérance de rendement pour un niveau de risque donné, grâce à la diversification. Détenir un portefeuille d'actifs peu corrélés permet de réduire le risque idiosyncratique sans nécessairement affecter le rendement espéré. Ce principe est incarné par la notion de *frontière efficiente*, qui représente l'ensemble des portefeuilles offrant le rendement maximal pour un niveau de risque donné.

**Exemple :**

La figure suivante, représente les segments du marché Equity (actions) classés par performance entre 2006 et 2022 :

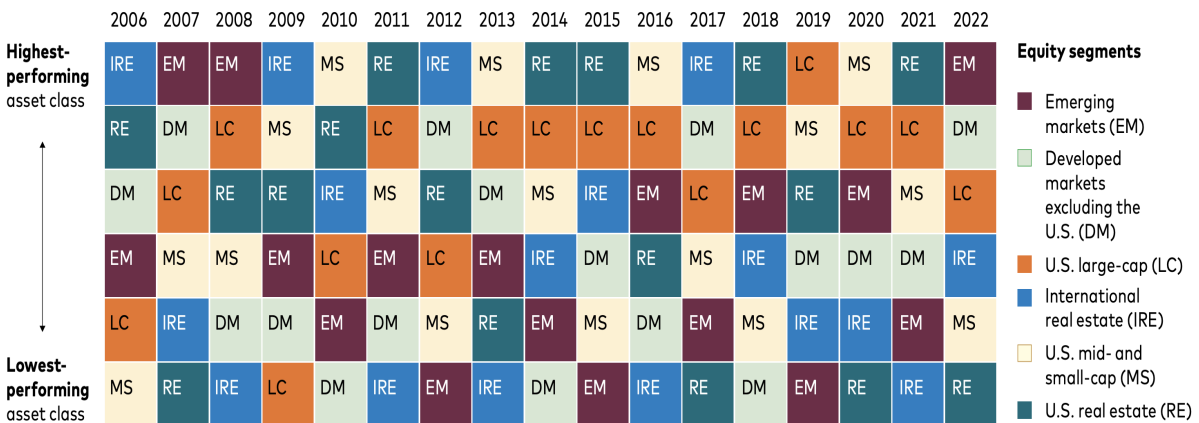


FIGURE 1.1 – Performances des différents segments du marché d'actions

Comme on peut remarquer, les performances des ségments peuvent changer soudainement d'une année à une autre. Ainsi pour un investisseur, au lieu de détenir un seul type d'actifs et "parier" sur une sur-performance de cet actif, diversifier son portefeuille permet de participer au gain des sur-performants tout en réduisant la perte causé par les actifs moins performants.

En finance classique, le risque d'un actif comme nous l'avons vu est souvent mesuré par la volatilité (écart-type des rendements), et la relation entre risque et rendement espéré s'établit via la notion de **prime de risque**. Un investissement risqué doit offrir, en moyenne, un surplus de rendement par rapport à un actif sans risque pour attirer les investisseurs. Par exemple, le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF, ou Capital Asset Pricing Model en anglais) formalise cette relation pour un actif  $i$  par l'équation [22, 31] :

$$\mathbb{E}[R_i] = R_f + \beta_i(\mathbb{E}[R_m] - R_f)$$

où  $E[R_i]$  est le rendement espéré de l'actif,  $R_f$  le taux sans risque,  $E[R_m] - R_f$  la prime de risque du marché (rendement additionnel attendu du marché par rapport au sans risque) et  $\beta_i$  le coefficient bêta de l'actif mesurant sa sensibilité au risque systématique du marché. Ainsi, un investisseur qui suit une stratégie de marché (par exemple en répliquant un indice boursier global) espère obtenir le rendement moyen du marché, c'est-à-dire  $R_f$  plus la prime de risque  $E[R_m] - R_f$ . En revanche, toute stratégie qui viserait un rendement supérieur à cette référence doit, soit assumer un risque plus élevé (par exposition à d'autres facteurs de risque offrant des primes additionnelles), soit tenter de générer une surperformance par rapport au marché sans augmenter le risque — on parle alors d'alpha.

## 1.2 Alpha vs. Bêta : Investissement actif ou passif ?

En gestion de portefeuille, on distingue classiquement deux approches opposées : la gestion passive (recherche du bêta de marché) et la gestion active (recherche de l'alpha). Cette distinction trouve son origine dans les travaux d'évaluation de la performance tels que ceux de Jensen [20] : celui-ci a introduit une mesure d'alpha définie comme la portion de performance d'un portefeuille inexplicquée par son exposition aux risques de marché. Concrètement, l'alpha d'un portefeuille  $p$  peut être mesuré comme l'écart entre son rendement attendu et celui prédit par le MEDAF, soit :

$$\alpha_p = \mathbb{E}[R_p] - (R_f + \beta_p(\mathbb{E}[R_m] - R_f))$$

Un alpha positif signifie que le gestionnaire apporte une surperformance au-delà du niveau justifié par le risque de marché pris (bêta), tandis qu'un alpha nul ou négatif indique qu'il ne fait pas mieux (ou fait moins bien) que le marché après ajustement du risque.

### 1.2.1 Recherche du bêta

La gestion passive consiste à répliquer un indice de marché ou un panier de titres représentatif d'un marché, sans chercher à sélectionner les "meilleurs" titres. L'investisseur passif obtient ainsi le rendement bêta du marché, c'est-à-dire la performance moyenne due à l'exposition systématique à ce marché. Par exemple, un fonds indiciel reproduisant le S&P 500 obtiendra par construction le rendement moyen de l'ensemble des actions américaines de l'indice (avant frais). L'objectif de la gestion passive est donc de capturer efficacement les primes de risque offertes

par les marchés financiers, en minimisant les coûts et sans prendre de paris idiosyncratiques. Elle s'appuie fortement sur l'hypothèse d'efficience des marchés : si les cours intègrent déjà toute l'information, alors aucune sélection active ne peut, en moyenne, faire mieux que le marché. Dans ce cadre, le meilleur choix pour un investisseur est souvent de "prendre le marché tel quel" à faible coût, d'où le succès des fonds indiciels et ETFs ces dernières décennies.

### 1.2.2 Recherche de l'alpha

En revanche, la gestion active vise à surperformer le marché, en exploitant d'éventuelles inefficiences ou informations non pleinement reflétées dans les cours. Le gérant actif cherche à générer de l'alpha via diverses techniques : stock picking (choix judicieux de valeurs sous- ou sur-évaluées), market timing (augmentation ou réduction de l'exposition aux actifs risqués à des moments opportuns), arbitrages, etc. Cette quête d'alpha s'accompagne généralement de frais de gestion plus élevés (recherche, trading fréquent, etc.) et d'un risque de sous-performance significatif si les paris du gérant s'avèrent erronés.

D'un point de vue agrégé, il est important de noter que la performance moyenne de l'ensemble des investisseurs actifs doit, par définition, égaler celle du marché avant frais : en effet, tous les investisseurs actifs pris collectivement sont le marché. Sharpe formule ce constat comme une identité arithmétique [32] : avant coûts, le rendement moyen d'un dollar géré activement est égal au rendement moyen d'un dollar géré passivement, et après coûts, il lui est inférieur. Autrement dit, si l'on prend l'ensemble des participants, la gestion active est un jeu à somme nulle avant frais, et à somme négative après frais. Il n'est donc pas surprenant de constater empiriquement que la plupart des fonds actifs sous-performent leur indice de référence sur le long terme une fois les frais déduits.

Par exemple, sur la période 1984–2006, le portefeuille agrégé des fonds actions américains activement gérés a affiché une performance inférieure d'environ 0,8% par an à celle du marché (indice passif équivalent), en raison notamment des coûts facturés aux investisseurs [12]. Même en réintégrant ces frais dans le calcul, l'alpha annuel moyen n'était que d'environ +0,1%, ce qui indique qu'avant frais, les gérants actifs collectivement n'ajoutent pas de performance significative.

### 1.2.3 Smart bêta

Entre gestion active et passive, les approches dites *smart bêta* représentent une alternative hybride fondée sur l'exploitation systématique de facteurs de risque. Ces stratégies émergent du constat que certaines expositions, historiquement attribuées à l'alpha des gérants actifs, peuvent en réalité être expliquées par des facteurs communs, identifiés empiriquement.

Fama et French [11] ont montré que les facteurs liés à la taille (small minus big) et à la valorisation (high minus low) capturent des primes de risque significatives en plus du bêta de marché. Carhart [6] introduit le momentum comme quatrième facteur. Ces modèles factoriels remettent en question la capacité des gérants à générer de l'alpha véritable, en montrant que leur surperformance peut souvent être répliquée via des portefeuilles factoriels systématiques.

Ainsi, les stratégies smart bêta consistent à construire des portefeuilles passifs selon des

règles transparentes, mais ciblant intentionnellement des primes de risque alternatives : value, momentum, qualité, faible volatilité, etc. Elles combinent les avantages de la gestion passive (faibles coûts, discipline systématique) avec une intention active sur les sources de rendement. Selon Cremers [8], ces expositions peuvent être obtenues sans recourir à un gérant discrétionnaire.

Formellement, la performance d'un portefeuille peut être décomposée comme suit :

$$\text{Performance totale} = \text{Bêta de marché} + \text{Bêta(s) alternatifs} + \alpha$$

Le bêta de marché reflète le co-mouvement avec les indices globaux ; les bêta alternatifs correspondent à des expositions systématiques à des stratégies factorielles. L'alpha représente alors la part résiduelle, non expliquée par ces facteurs, et supposée liée au pur savoir-faire du gérant (stock-picking, timing, etc.) [5].

L'essor du smart bêta a contribué à estomper la frontière entre gestion active et passive. De plus en plus d'investisseurs adoptent une allocation « cœur-satellite » : un noyau indiciel (bêta), complété par des expositions systématiques (bêta alternatifs) et éventuellement une poche de gestion discrétionnaire ciblant l'alpha. Cette logique prépare le terrain à l'essor des stratégies quantitatives, qui poussent plus loin encore l'automatisation et la formalisation des processus d'investissement.

### 1.3 Stratégies quantitatives d'investissement

**Définition 4 (Stratégie quantitative d'investissement)** C'est une approche d'allocation et de trading fondée sur des modèles mathématiques, des algorithmes informatiques et l'analyse statistique des données de marché. Les décisions sont prises sur la base de modèles exploitant de larges jeux de données historiques afin d'identifier des signaux d'investissement, et sont exécutées de manière systématique plutôt que discrétionnaire.

L'objectif est de supprimer les biais émotionnels en appliquant rigoureusement des règles prédéfinies. Par exemple, une stratégie peut consister à « acheter les actions dont le ratio valeur comptable/valeur de marché est dans le décile supérieur et vendre celles dans le décile inférieur », appliquée automatiquement sur le portefeuille. Le rôle de l'humain se limite à la conception du modèle et à la supervision du risque.

L'essor de ces stratégies s'explique par : (i) la disponibilité croissante des données financières, (ii) les progrès de la puissance de calcul, et (iii) le développement de la finance factorielle et de l'économétrie des marchés. Dès les années 1970, des approches systématiques comme le trend-following ou l'arbitrage statistique ont émergé, mais c'est à partir des années 1990 que les QIS (Quantitative Investment Strategies) se sont institutionnalisées, notamment via les fonds CTA ou les portefeuilles smart beta.

Les stratégies quantitatives se caractérisent par leur discipline algorithmique (rule-based), leur traçabilité via le backtesting, et leur transparence dans l'analyse du profil de risque (rendement espéré, volatilité, drawdown, corrélation, etc.). Cependant, elles ne sont pas exemptes de défis : sur-optimisation (overfitting), instabilité des régimes de marché, ou encore risques liés à l'automatisation.

La palette des stratégies quantitatives est large : momentum, mean-reversion, arbitrage statistique, carry, stratégies de volatilité ou encore approches utilisant le machine learning. Cette diversité pousse certains investisseurs à considérer les stratégies quantitatives comme une classe d'actifs à part entière, à l'instar du private equity ou des hedge funds.

Les grandes banques ont ainsi développé des plateformes QIS permettant aux clients d'accéder à des stratégies auparavant réservées aux hedge funds, sous forme d'indices systématiques. Contrairement aux fonds traditionnels, ces indices sont transparents, liquides (grâce à des swaps ou des notes structurées), et assortis de frais réduits.

Ce phénomène a donné naissance à la notion de « hedge fund beta » ou « alternative risk premia », désignant des expositions systématiques autrefois considérées comme de l'alpha pur. Selon le White Paper de Resonanz [5], le marché QIS représentait environ 370 milliards de dollars en 2023, avec des milliers de stratégies offertes par les grandes institutions.

En somme, les stratégies quantitatives permettent d'exploiter méthodiquement les facteurs de risque — bêta traditionnels ou alternatifs — ainsi que certaines inefficiences détectables statistiquement. Elles offrent une réponse innovante à la recherche de rendement ajusté du risque, tout en apportant diversification, discipline et transparence à l'allocation d'actifs contemporaine.

## CHAPITRE 2

# PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES ET OUTILS FONDAMENTAUX

Ce chapitre introduit les éléments mathématiques nécessaires pour la suite. Les notations et résultats présentés sont empruntés en grande partie au cours de Nicole El Karoui [10].

### 2.1 Introduction à la théorie des options

**Définition 1 (Option européenne)** Une option européenne est un contrat financier qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent  $S_t$  à une date future  $T$ , pour un prix fixé à l'avance, appelé prix d'exercice  $K$ . Le payoff au temps  $T$  est :

$$\text{Call} : (S_T - K)^+ \quad \text{Put} : (K - S_T)^+$$

En contrepartie de ce droit, l'acheteur de l'option verse immédiatement au vendeur une *prime* correspondant au prix de l'option. On distingue principalement les **options européennes**, qui ne sont exercables qu'à la date d'échéance, et les **options américaines**, exercables à tout moment jusqu'à l'échéance.

**Hypothèse 1 (Hypothèses du Marché)** Dans tout ce chapitre, on suppose un **marché financier idéal** sans frictions : absence de coûts de transaction, possibilités illimitées d'achat et de vente à découvert des actifs, et aucune restriction réglementaire.

Dans un tel marché supposé *très liquide*, on postule la **loi fondamentale de l'absence d'arbitrage** : il ne doit exister aucune *opportunité d'arbitrage*, c'est-à-dire aucune stratégie permettant de réaliser un gain certain sans mise de fonds initiale. En pratique, la présence d'arbitragistes sur le marché force une cohérence des prix : « Deux stratégies offrant le *même flux* dans tous les états du monde à l'horizon  $T$  doivent avoir la *même valeur* à chaque date  $t < T$  ». Ce principe garantit l'**unicité du prix** des produits dérivés et servira de fil directeur pour évaluer les options.

Même sans connaître en détail la dynamique du sous-jacent, on peut déjà déduire certaines relations de cohérence de prix par des arguments d'arbitrage *statique*. Un premier exemple est le **contrat à terme** (forward) sur le sous-jacent  $S$ .

**Définition 2 (Forward)** Notons  $F_t(S, T)$  le prix forward à la date  $t$  pour une livraison de  $S$  à la date  $T$ . Considérons deux stratégies possibles pour détenir l'actif  $S$  à l'échéance  $T$  :

1. acheter  $S$  au comptant dès aujourd'hui et le conserver jusqu'à  $T$  ;
2. contracter un achat à terme délivrant  $S$  à  $T$  et placer dès aujourd'hui la somme  $K = F_t(S, T)$  actualisée afin de disposer de  $F_t(S, T)$  à l'échéance.

En absence d'arbitrage, ces deux approches doivent avoir le même coût initial. Le coût de (1) est  $S_t$ , et le coût de (2) est le dépôt d'une somme  $F_t(S, T) \cdot B(t, T)^{-1}$  (où  $B(t, T)$  est le facteur d'actualisation de  $t$  à  $T$ ). On en déduit la relation :

$$F_t(S, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}, \quad (2.1)$$

c'est-à-dire  $F_t(S, T) = S_t e^{r(T-t)}$  si  $r$  est le taux d'intérêt sans risque.

Un deuxième résultat fondamental issu de l'absence d'arbitrage est la **parité call-put**.

**Proposition 1 (Parité call-put)** Considérons un call européen et un put européen de même strike  $K$  et même échéance  $T$  sur un sous-jacent  $S$  ne versant pas de dividende. On compare deux portefeuilles initiaux :

1. une position longue d'un call +  $K$  euros placés à intérêt (achat d'un zéro-coupon montant  $K$  échéance  $T$ ) ;
2. une position longue d'un put + une unité du sous-jacent  $S$ .

Quel que soit le prix  $S_T$  à l'échéance, ces deux portefeuilles produisent le même flux :

- Si  $S_T > K$  : le call (1) rapporte  $S_T - K$ , plus  $K$  reçu du zéro-coupon, soit un total de  $S_T$ . Le put (2) expire sans valeur, mais la détention de  $S$  fournit  $S_T$ . Les deux portefeuilles valent  $S_T$ .
- Si  $S_T \leq K$  : le call (1) expire sans valeur, le zéro-coupon rapporte  $K$ . Le put (2) rapporte  $K - S_T$ , plus le sous-jacent  $S_T$ , soit un total de  $K$ . Les deux portefeuilles valent  $K$ .

Dans tous les cas, (1) et (2) aboutissent au même payoff à  $T$ . Par le principe d'unicité du prix, ils doivent donc avoir même valeur à la date  $t$ . On obtient ainsi la parité call-put :

$$C(t) - P(t) = S_t - K B(t, T) = S_t - K e^{-r(T-t)}, \quad (2.2)$$

où  $C(t)$  et  $P(t)$  désignent respectivement le prix du call et du put européens à la date  $t$ . Cette relation de parité, indépendante de tout modèle spécifique, permet par exemple de déduire le prix d'un put européen si l'on connaît celui du call correspondant (et réciproquement), garantissant ainsi la cohérence minimale des prix entre options de même maturité.

## 2.2 Le modèle de Black-Scholes et la probabilité risque neutre

Afin d'évaluer les options de façon plus quantitative, on adopte le **modèle de Black-Scholes** pour la dynamique du sous-jacent. On travaille sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  muni d'une filtration satisfaisant les conditions usuelles, et sur lequel est défini un mouvement brownien standard  $(W_t)_{t \geq 0}$ . On suppose que le prix  $S_t$  de l'actif sous-jacent suit une diffusion log-normale sous la mesure réelle  $P$  :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.3)$$

où  $\mu$  (constante) est le taux de rendement espéré du sous-jacent et  $\sigma > 0$  sa volatilité (constante).

En parallèle, il existe un actif sans risque (compte d'épargne ou obligation à court terme) de taux d'intérêt constant  $r \geq 0$ , dont l'évolution vérifie  $dB_t = rB_t dt$  (d'où  $B_t = e^{rt}$  pour  $B_0 = 1$ ). Le marché modélisé est supposé *complet* et *arbitrage-free*.

Introduisons un **portefeuille autofinancé** constitué de  $\phi_t$  unités de l'actif risqué  $S$  et  $\psi_t$  unités de l'actif sans risque  $B$  à l'instant  $t$ . La valeur  $X_t$  de ce portefeuille est  $X_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ . Le caractère autofinancé signifie que ses variations proviennent uniquement des gains/pertes des actifs qui le composent, sans injection ni retrait de richesse :  $dX_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$ .

Soit  $V(t, S)$  la **valeur théorique** à la date  $t$  d'une option européenne de payoff  $f(S_T)$  à maturité  $T$ , lorsque le sous-jacent vaut  $S_t = S$ . Supposons que  $V$  est une fonction suffisamment régulière (classe  $\mathcal{C}^{1,2}$ ) de  $t$  et  $S$ . L'**équation aux dérivées stochastiques** (2.3) et la formule d'Itô permettent d'écrire l'évolution de  $V(t, S_t)$  :

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) (dS_t)^2 .$$

En remplaçant  $dS_t$  par son expression (2.3) et en utilisant  $(dW_t)^2 = dt$ , on obtient plus explicitement :

$$dV = V_t dt + V_S(\mu S dt + \sigma S dW_t) + \frac{1}{2} V_{SS} \sigma^2 S^2 dt ,$$

où l'on a noté  $V_t = \partial V / \partial t$ ,  $V_S = \partial V / \partial S$ ,  $V_{SS} = \partial^2 V / \partial S^2$ .

Nous allons maintenant chercher à *couvrir dynamiquement* le risque de l'option en construisant un portefeuille autofinancé qui réplique le payoff  $f(S_T)$ . Considérons un portefeuille composé d'une position courte sur l'option (valeur  $-V$ ) et d'une position longue de  $\phi_t$  unités de l'actif  $S$  à l'instant  $t$ . La valeur de ce portefeuille est  $\Pi_t = -V(t, S_t) + \phi_t S_t$ . Son évolution élémentaire est donnée par :

$$d\Pi_t = -dV(t, S_t) + \phi_t dS_t .$$

En choisissant  $\phi_t = V_S(t, S_t)$ , c'est-à-dire en ajustant en permanence le nombre d'actions détenues égal au *delta* de l'option, on élimine le terme en  $dW_t$  ci-dessus (le risque instantané du portefeuille). En effet, avec  $\phi_t = V_S$ , les termes en  $dW_t$  vérifient  $-V_S \sigma S dW_t + \phi_t \sigma S dW_t = 0$ . Il en résulte que le portefeuille  $\Pi_t$  est *localement sans risque*. Plus précisément, en substituant  $\phi_t = V_S$  dans l'expression de  $d\Pi_t$ , on obtient :

$$d\Pi_t = -\left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}\right) dt + \phi_t \mu S_t dt .$$

Or  $\phi_t S_t = V_S S_t$ , donc la valeur  $\Pi_t$  du portefeuille peut aussi s'écrire  $\Pi_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$  pour un certain  $\psi_t$ , ce qui implique  $\psi_t B_t = \Pi_t - \phi_t S_t = -V(t, S_t) + V_S S_t$ . Ainsi, la variation *déterministe* du portefeuille s'écrit :

$$d\Pi_t = \left(-V_t - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + \phi_t \mu S_t\right) dt = \left(-V_t - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + V_S \mu S\right) dt .$$

Pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage, ce portefeuille sans risque doit croître au taux sans risque  $r$ . Autrement dit, il doit vérifier  $d\Pi_t = r \Pi_t dt = r(-V + V_S S) dt$ . On obtient ainsi

l'équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes :

$$V_t(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}(t, S) + r S V_S(t, S) - r V(t, S) = 0, \quad (2.4)$$

pour  $0 \leq t < T$  et  $S > 0$ , avec la condition terminale  $V(T, S) = f(S)$  (payoff à l'échéance). Cette EDP, découverte en 1973 par Black, Scholes et Merton, constitue un résultat central de la théorie des options financières.

*Preuve.* Les étapes clés de la preuve sont décrites ci-dessus : (i) application de la formule d'Itô à  $V(t, S_t)$ ; (ii) choix d'une stratégie de couverture  $\phi_t = V_S$  pour éliminer le terme stochastique  $dW_t$ ; (iii) absence d'arbitrage  $\implies$  rendement du portefeuille couvert  $= r$ . En reportant  $\phi_t = V_S$  dans  $d\Pi_t = -dV + \phi_t dS_t$  et en imposant  $d\Pi_t = r \Pi_t dt$ , on retrouve directement l'équation (2.4), ce qui complète la démonstration.

L'EDP de Black-Scholes est linéaire et à coefficients constants; on peut la résoudre analytiquement par différentes méthodes (transformations de Fourier, résolution de l'équation de la chaleur, etc.). Une condition aux limites utile est que pour un call européen  $f(S_T) = (S_T - K)_+$ , on a  $V(t, S) \sim S$  quand  $S \rightarrow +\infty$  et  $V(t, S) \rightarrow 0$  quand  $S \rightarrow 0$ . Ces conditions traduisent le fait que le call a asymptotiquement le même comportement qu'une action pour des prix extrêmes du sous-jacent.

À partir de (2.4), on peut également obtenir directement la formule de valorisation par **espérance neutre au risque**. En effet, (2.4) admet une interprétation probabiliste : sous une certaine mesure de probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  (dite *mesure risque-neutre*), le processus de prix actualisé  $e^{-rt} S_t$  est une martingale. Intuitivement, cette mesure  $Q$  correspond à un « changement de monde » dans lequel tous les actifs risqués ont un rendement espéré égal au taux sans risque  $r$ . Sous  $Q$ , la dynamique de  $S$  s'écrit  $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ , c'est-à-dire que le drift  $\mu$  a été remplacé par  $r$ . L'**absence d'arbitrage** dans un marché complet équivaut alors au fait que la valeur d'une option est l'espérance, sous  $Q$ , de son flux actualisé. Autrement dit, pour tout  $0 \leq t \leq T$  :

$$V(t, S_t) = \frac{1}{B(t, T)} \mathbb{E}^Q[f(S_T) \mid \mathcal{F}_t], \quad (2.5)$$

où  $\mathbb{E}^Q[\cdot | \mathcal{F}_t]$  désigne l'espérance conditionnelle sous  $Q$ . En particulier, à la date initiale  $t = 0$ , on a  $V(0, S_0) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[f(S_T)]$ . Ce résultat est cohérent avec l'EDP (2.4) et fournit une interprétation probabiliste importante : le prix d'une option est égal à la valeur espérée de son payoff futur actualisé, calculée dans le *monde risque-neutre*. La mesure  $Q$  est unique dans le modèle de Black-Scholes (marché complet), ce qui garantit l'unicité du prix  $V(t, S)$  obtenu.

*Remarque.* En pratique, la mesure risque-neutre  $Q$  peut être construite explicitement via le théorème de Girsanov, en définissant un changement de probabilité qui « retire » le terme de dérive  $\mu - r$  dans (2.3). On n'entrera pas dans ces détails techniques ici, mais il est important de noter que l'existence de  $Q$  repose sur l'absence d'arbitrage et que son unicité repose sur la complétude du marché (l'existence d'une stratégie de couverture pour tout payoff contingent).

La formule (2.5) permet de calculer  $V(t, S)$  dès que l'on connaît la loi de  $S_T$  sous  $Q$ . Or, dans le modèle Black-Scholes,  $S_T$  suit une loi log-normale sous  $Q$ . Plus précisément, on montre

que

$$\ln \frac{S_T}{S_t} \sim \mathcal{N}\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t)\right),$$

c'est-à-dire que la densité de  $S_T$  (pour  $S_t = s$  donné) est

$$p_{S_T|S_t=s}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x/s) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}, \quad x > 0.$$

On en déduit **la formule de Black-Scholes** pour un call européen de strike  $K$  et de maturité  $T$  :

$$C(0) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (2.6)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

et  $N(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La formule (2.6) donne le prix initial théorique  $C(0)$  du call. De même, le prix d'un put européen de mêmes caractéristiques s'obtient soit par calcul direct (moyennant une espérance similaire), soit en appliquant la parité call-put :

$$P(0) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1),$$

où  $-d_1$  et  $-d_2$  interviennent car le put est « l'image » du call par symétrie (échanger  $S_0$  et  $K$  revient à considérer  $-d_1, -d_2$ ).

## CHAPITRE 3

# PRODUITS ET STRATÉGIES CLASSIQUES

Dans cette chapitre on présente les produits dérivés qu'on utilisera dans de nombreuse stratégie dans la suite du mémoire, ainsi que des exemples de stratégies classiques qu'on développera par la suite. On se base ici sur [16, 21].

### 3.1 Produits dérivés

On commence par ajouter à ce qu'on a dit avant, des informations liées aux option vanilles, leur payoffs, leur moneyness et leur valorisation dans les marchés.

#### 3.1.1 Options Vanilles

On rappelle qu'une option dite vanille est un contrat donnant à son acheteur le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix fixé (prix d'exercice ou strike) pendant une certaine période ou à une date donnée. Les deux types standards sont l'option d'achat (call) et l'option de vente (put). Dans une option européenne, l'exercice ne peut se faire qu'à l'échéance, tandis qu'une option américaine peut être exercée à tout moment jusqu'à l'échéance. Le vendeur (émetteur) de l'option, quant à lui, assume l'obligation de livrer (pour un call) ou d'acheter (pour un put) l'actif si l'option est exercée.

**Définition 1 (Payoffs et moneyness)** Le payoff (flux à l'échéance) d'un call européen est donné par  $\max(S_T - K, ; 0)$ , où  $S_T$  est le prix du sous-jacent à l'échéance et  $K$  le strike. Inversement, le payoff d'un put européen est  $\max(K - S_T, ; 0)$ . Autrement dit, un call long n'a de valeur en fin de vie que si le sous-jacent finit au-dessus du strike (scénario dans la monnaie), tandis qu'un put long paie si le sous-jacent finit en-dessous du strike. On qualifie ainsi une option de "dans la monnaie" (ITM) si elle aurait un payoff positif si elle était exercée tout de suite (par ex.  $S_T > K$  pour un call,  $S_T < K$  pour un put), "à la monnaie" (ATM) si  $S_T$  est proche du strike (le payoff est alors nul ou quasi nul), ou "hors la monnaie" (OTM) si elle n'aurait aucune valeur intrinsèque à l'instant considéré. Plus formellement, pour un call :

- TM si  $S_T > K$  (le call a une valeur intrinsèque positive égale à  $S_T - K$ ),
- ATM si  $S_T \approx K$ ,
- OTM si  $S_T < K$  (aucune valeur intrinsèque).

Symétriquement, pour un put :

- ITM si  $S_T < K$ ,
- ATM si  $S_T \approx K$ ,
- OTM si  $S_T > K$ .

Ces notions de moneyness sont utilisées pour évaluer la prime d'une option : une option ITM intègre déjà une valeur intrinsèque non nulle et est donc plus "chère" qu'une option OTM équivalente, toute chose égale par ailleurs.

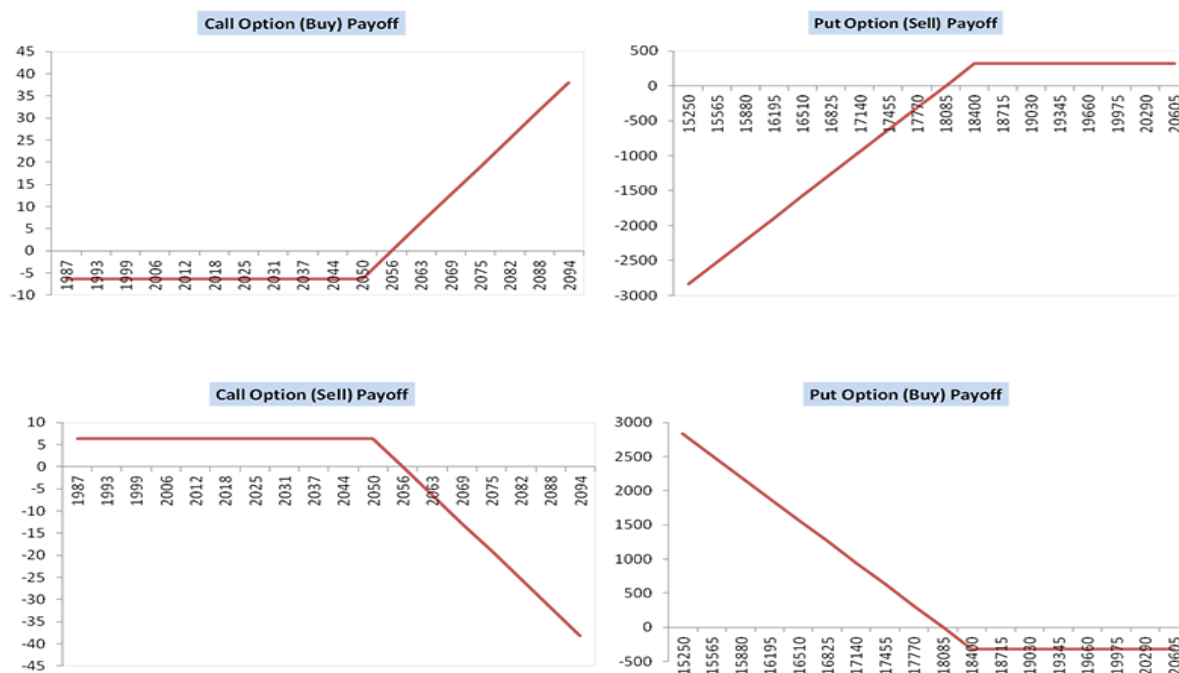
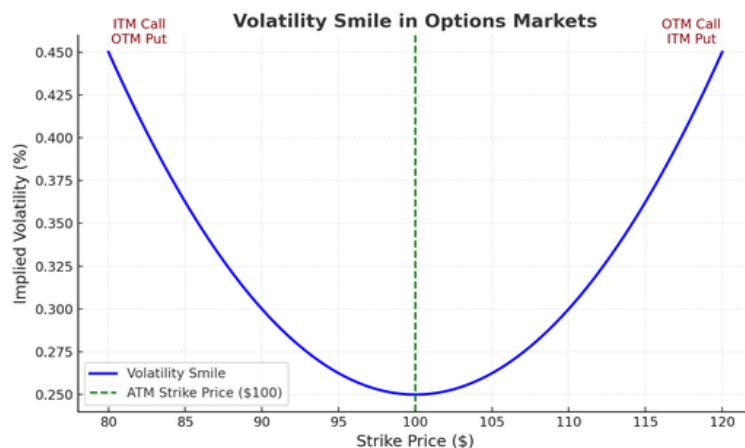


FIGURE 3.1 – Graphiques des payoffs d'options vanilles

**Définition 2 (Valorisation et volatilité)** La valorisation des options vanilles repose sur des modèles mathématiques (le modèle de Black-Scholes-Merton étant le plus célèbre). Dans ces modèles, la volatilité du sous-jacent est un paramètre crucial – or la volatilité future réelle est inconnue.

Les praticiens utilisent donc la volatilité implicite, définie comme la volatilité qu'il faut injecter dans le modèle (par ex. Black-Scholes) pour reproduire le prix de marché observé de l'option. En pratique, on part du prix de l'option négocié sur le marché et on "tâtonne" pour trouver la volatilité  $\sigma_{\text{impl}}$  qui, mise dans la formule de pricing, donne ce prix. Cette volatilité implicite est un indicateur des anticipations du marché sur la volatilité future du sous-jacent. Elle évolue elle-même dans le temps et diffère selon les options : typiquement, elle varie avec le strike et la maturité, donnant lieu au smile ou skew de volatilité bien connu (par exemple, les puts OTM de court terme tendent à afficher des volatilités implicites plus élevées que les calls ATM, reflétant une forte demande de protection à la baisse).

La volatilité implicite n'est donc pas constante sur la surface des options, et sa structure contient de l'information sur le sentiment de marché.

FIGURE 3.2 – *Smile de volatilité*

Les options vanilles sont les briques de base permettant de construire de nombreuses stratégies. L'achat de calls ou de puts permet de spéculer respectivement sur la hausse ou la baisse du sous-jacent avec un levier et un risque limité au premium versé. Par exemple, l'achat d'un put est une forme d'assurance (protective put) contre la baisse d'un actif détenu en portefeuille. La vente couverte de calls (covered call writing), qui consiste à vendre un call sur un actif que l'on détient, permet de générer un revenu additionnel (la prime) en échange d'un plafonnement de la performance en cas de forte hausse. En combinant achats et ventes d'options vanilles de différents strikes/échéances, on construit des spreads verticaux, des straddles/strangles, des collars, etc., qui permettent de répondre à des objectifs variés de couverture ou de spéculation (par ex. parier sur la volatilité future sans biais directionnel, se couvrir contre un krach tout en réduisant le coût de la prime, etc.). Ces stratégies classiques seront détaillées en seconde partie.

**Définition 3 (Rolling d'options)** Une notion importante dans l'utilisation pratique des options est le roulement des positions (rolling). Le rolling consiste à renouveler ou ajuster une position à l'approche de l'échéance, généralement en la fermant puis en ouvrant simultanément une position similaire avec une maturité plus éloignée (et éventuellement un strike ajusté).

Les motivations du rolling peuvent être offensives (prendre ses profits sur une position gagnante tout en conservant une exposition en reportant l'échéance pour tenter d'engranger des gains supplémentaires) ou défensives (éviter l'assignation sur une option courte américaine ITM proche de l'échéance, en la rachetant et en roulant la vente sur une nouvelle option de maturité ultérieure). Par exemple, un investisseur ayant vendu un call couvert arrivant à maturité et ITM pourra décider de le roller (racheter le call short arrivant à échéance et vendre un call de maturité plus lointaine, éventuellement à un strike plus élevé) afin d'éviter de se faire exercer et de devoir livrer le sous-jacent, tout en conservant la stratégie sur la nouvelle échéance.

Le rolling permet ainsi de prolonger la vie d'une stratégie (par ex. rouler chaque mois une vente de call couverte pour générer du revenu continu sur un portefeuille d'actions) ou d'ajuster son profil de risque/rendement en cours de route. Néanmoins, chaque roulage s'accompagne de frais de transaction et éventuellement de pertes réalisées si la position initiale était en moins-value au moment du roll, ce qui doit être pris en compte dans la performance globale de la stratégie.

### 3.1.2 Options Exotiques

En plus des vanilles, il existe de nombreuses options exotiques dont la structure de payoff sort de l'ordinaire. Nous présentons ici un exemple qu'on utilisera par la suite : l'option forward start.

**Définition 4 (Options forward start)** Une option forward start est une option dont le départ effectif est différé dans le temps : conclue aujourd'hui, elle commencera à prendre effet à une date future déterminée.

Autrement dit, c'est une option à terme, généralement structurée pour être at the money au moment où elle commencera. Par exemple, on peut acheter aujourd'hui une forward start call de maturité 1 an qui ne débutera que dans 6 mois – à la date de début (6 mois), son strike sera fixé égal au cours du sous-jacent à ce moment, de sorte qu'elle démarre ATM pour les 6 mois restants. Le payoff final d'une telle forward start call serait  $\max(S_T - S_{T_1}, ; 0)$  où  $T_1$  est la date de départ (strike =  $S_{T_1}$ ) et  $T$  l'échéance finale.

On le voit, la particularité est que le strike est inconnu à l'origine car déterminé par le marché futur. Ces options permettent donc de se protéger ou de parier sur la volatilité d'un actif sur une période future, tout en fixant dès aujourd'hui la prime.

## 3.2 Stratégies classiques

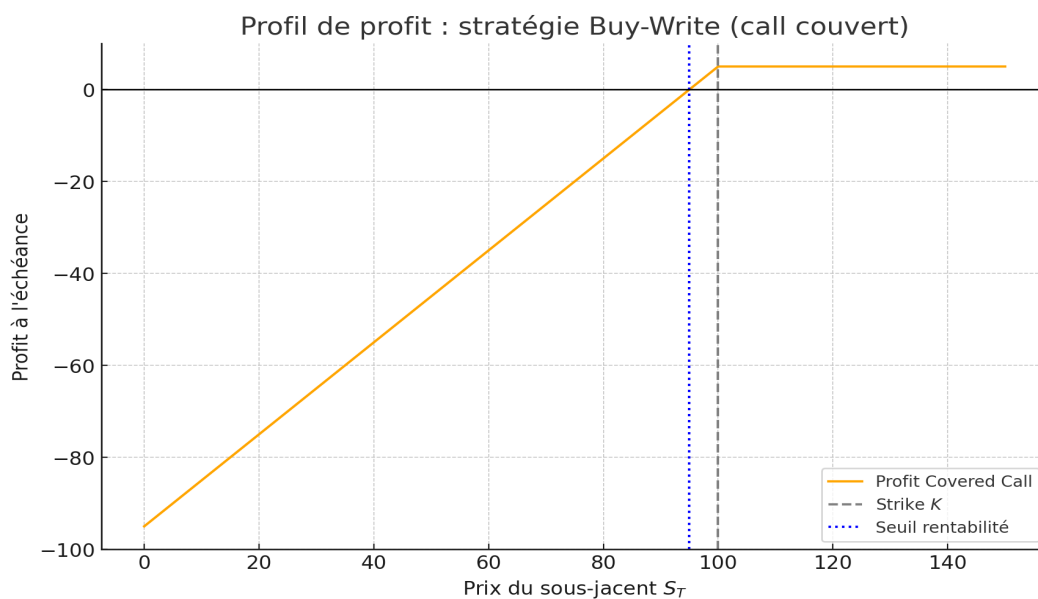
Nous décrivons ci-après deux stratégies d'investissement classiques utilisant des options vanilles : la stratégie Buy-Write (ou call couvert) et le Put Spread. Pour chaque stratégie, nous exposons le principe, le payoff, ainsi que l'intérêt et les limites.

### 3.2.1 Stratégie Buy-Write

Une stratégie Buy-Write (ou Covered Call) consiste à acheter l'actif sous-jacent (généralement une action ou un indice) tout en vendant simultanément une option call européenne avec un prix d'exercice  $K$ . Elle permet de générer un revenu supplémentaire via la prime d'option, au prix d'un potentiel de hausse limité.

$$\psi = S_T - S_0 - (S_T - K)^+ + C = K - S_0 - (K - S_T)^+ + C$$

Le seuil de rentabilité de cette stratégie est  $S_* = S_0 - C$ , le profit maximal est de  $\psi_{\max} = K - S_0 + C$  et la perte maximal est  $\psi_{\min} = S_0 - C$ .

FIGURE 3.3 – *Payoff de la stratégie Buy Write*

Le buy-write est avant tout une stratégie de revenu dans un marché neutre ou modérément haussier. En vendant le call, l'investisseur perçoit un premium immédiat qui vient augmenter le rendement de son portefeuille. Par rapport à détenir l'actif seul, cette stratégie améliore le revenu courant (grâce aux primes répétées si la stratégie est reconduite) et réduit légèrement la volatilité du portefeuille (la prime encaissée offre une petite protection à la baisse).

Un call couvert est particulièrement adapté dans un contexte de marché légèrement haussier ou neutre, éventuellement avec volatilité modérée. Si l'on anticipe que le sous-jacent va rester dans une fourchette de prix ou monter doucement, vendre des calls permet de monétiser cette anticipation. Les marchés "range" ou haussiers calmes conviennent bien : l'investisseur pourra accumuler les primes tant que le sous-jacent ne s'envole pas au-delà du strike (auquel cas il vendrait son actif avec gain mais raterait la poursuite de la hausse). Le niveau de volatilité implicite élevé rend aussi la stratégie plus attrayante (primes plus riches), tant que l'on est à l'aise avec le risque sous-jacent.

La stratégie buy-write ne protège que partiellement à la baisse. En cas de chute sévère du sous-jacent, la perte de l'action détenue n'est compensée que marginalement par la prime du call vendu. Le risque baissier demeure donc quasiment celui du sous-jacent nu au-delà du seuil de break-even. Par ailleurs, le call couvert cappe le gain : si le sous-jacent s'apprécie fortement au-delà du strike, l'investisseur ne profitera pas de cette hausse au-delà de  $K$  (ses actions seront appelées). Il subit donc un coût d'opportunité en marché haussier franc.

De plus, la vente de call apporte des obligations : risque d'assignation anticipée (sur options américaines, notamment autour des dates de détachement de dividende où l'acheteur a intérêt à exercer son call pour capter le dividende) et besoin d'éventuellement rouler la position pour éviter d'être exercé si on souhaite conserver l'actif. Enfin, sur le plan fiscal et transactionnel, multiplier les ventes de calls engendre des frais et peut compliquer la fiscalité (chaque prime étant un gain taxable dans certains régimes). Malgré ces limites, le buy-write reste une stratégie populaire pour booster le rendement d'un portefeuille d'actions tout en ayant un profil risque

modéré.

### 3.2.2 Stratégie Put-Spread

Un Put Spread est une stratégie combinant deux options de vente de mêmes maturités mais de strikes différents. On distingue généralement :

- le bear put spread : acheter un put de strike supérieur et vendre un put de strike inférieur (même échéance).
- le bull put spread : vendre un put de strike supérieur et acheter un put de strike inférieur.

#### Bear Put Spread

La stratégie *Bear Put Spread* consiste à acheter un put d'échéance  $T$  avec un prix d'exercice élevé  $K_1$  (souvent ATM ou légèrement ITM), tout en vendant simultanément un put de même échéance mais avec un strike inférieur  $K_2 < K_1$ . Cette combinaison permet de parier sur une baisse modérée du sous-jacent tout en réduisant le coût initial via la prime encaissée sur le put short. Elle constitue un **spread débiteur** et est classifiée comme stratégie de *capital gain*.

**Payoff à maturité :**

$$\psi = (K_1 - S_T)^+ - (K_2 - S_T)^+ - D$$

où  $D > 0$  est le coût net initial de la position.

**Principales caractéristiques :**

- **Seuil de rentabilité :**

$$\psi_* = K_1 - D$$

- **Profit maximal :**

$$\psi_{\max} = K_1 - K_2 - D \quad (\text{obtenu si } S_T \leq K_2)$$

- **Perte maximale :**

$$\psi_{\min} = D \quad (\text{si } S_T \geq K_1)$$

Cette stratégie offre un **profit plafonné** si le sous-jacent chute sous le strike  $K_2$ , et une **perte limitée** au coût initial si le marché reste haussier. C'est une approche prudente et cadrée pour exploiter une anticipation baissière modérée sur le sous-jacent.

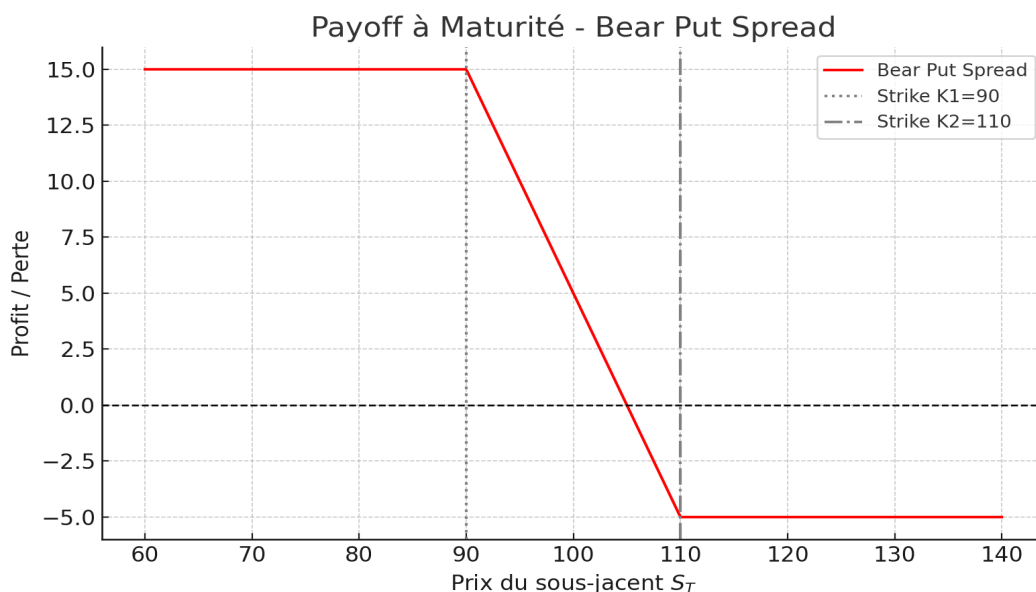


FIGURE 3.4 – Payoff du Bear Put Spread

### Bull Put Spread

La stratégie *Bull Put Spread* est une combinaison d'options verticales consistant à prendre une position longue sur un put OTM de prix d'exercice  $K_1$  (strike faible), tout en vendant un put OTM avec un strike supérieur  $K_2 > K_1$ . Elle génère une prime nette en entrée (stratégie **créditrice**) et est adaptée à un scénario de marché **légèrement haussier à neutre**. Elle vise principalement un revenu plutôt qu'un gain en capital.

#### Payoff à maturité :

$$\psi = (K_1 - S_T)^+ - (K_2 - S_T)^+ + C$$

où  $C > 0$  représente le crédit net encaissé à l'initiation de la stratégie.

#### Caractéristiques principales :

- Seuil de rentabilité :

$$S_* = K_2 - C$$

- Profit maximal (si  $S_T \geq K_2$ ) :

$$P_{\max} = C$$

- Perte maximale (si  $S_T \leq K_1$ ) :

$$L_{\max} = K_2 - K_1 - C$$

Cette stratégie permet de capter un gain limité dans un environnement peu volatil ou modérément haussier. En contrepartie, une chute du sous-jacent en dessous de  $K_1$  expose à une perte plafonnée et connue d'avance.

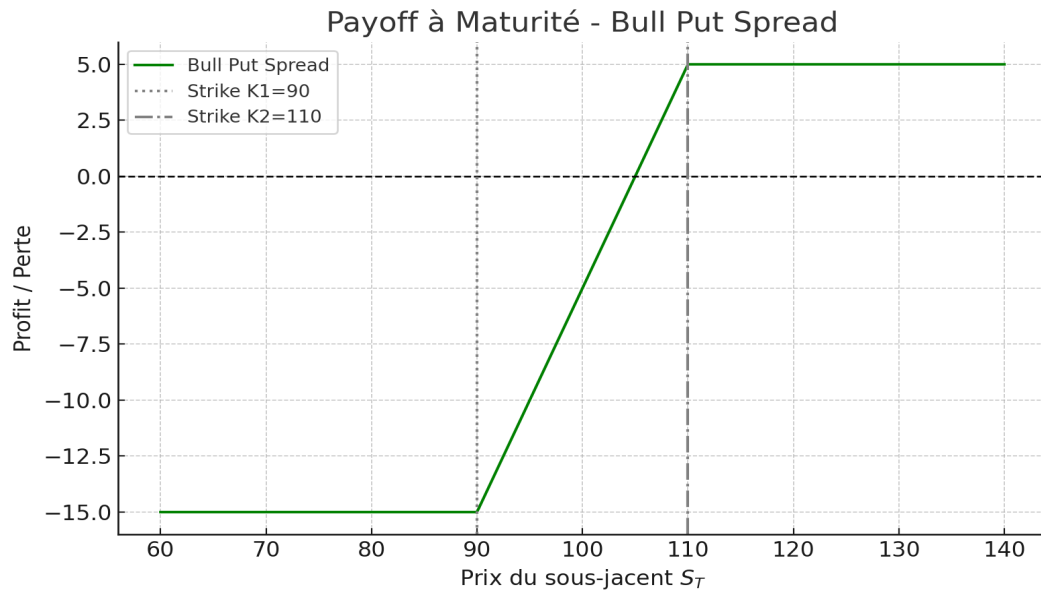


FIGURE 3.5 – *Payoff du Bull Put Spread*

## Deuxième partie

# Stratégies quantitatives de Couverture d'actions

Dans ce chapitre on s'intéresse à notre première stratégie de couverture, il s'agit ici d'une des stratégies les plus simples et les plus populaires. On montrera comment cette stratégie peut être implémenté dans un contexte systématique, ce qui en fait en un parfait candidat pour plusieurs types d'investissement. On se basera ici sur les articles [13, 15, 18, 19, 35].

## 4.1 Présentation du Buy-Write systématique

Dans ce chapitre on implémentera la stratégie Buy-Write sur l'indice S&P 500, on rappelle que cette stratégie consistera donc à acheter l'actif (ou indice dans ce cas) et à vendre un call sur ce même indice. Pour faire en sorte que cette stratégie fonctionne dans un contexte systématique, il faudrait être en mesure d' :

1. Être long S&P 500 tout au long de la période d'investissement,
2. Vendre simultanément et de manière répétée les calls OTM sur S&P.

Ainsi, tant que le sous-jacent n'apprécie pas au-delà du prix d'exercice du call vendu, la prime reçue constitue un gain supplémentaire venant s'ajouter au rendement du sous-jacent.

Un intérêt de réaliser cette implémentation sur le S&P est le fait que nous aurons à notre disposition un benchmark qui va nous permettre de vérifier la robustesse et cohérence de notre démarche. En effet, en 2002 le CBOE (Chicago Board Options Exchange) a lancé l'indice BXM (CBOE S&P 500 BuyWrite Index) – premier indice officiel reproduisant une stratégie de call couvert sur l'indice S&P 500 – a offert un cadre de référence standardisé pour l'étudier.

L'indice BXM suit une approche buy-write systématique (achat du S&P 500 et vente chaque mois d'un call à une échéance d'un mois). Depuis, de nombreuses études ont évalué la performance du BXM par rapport à l'indice S&P 500, confirmant en général que les stratégies de type buy-write peuvent améliorer le couple rendement/risque sur des horizons longs, tout en présentant des comportements différenciés selon les phases de marché.

Ces travaux ont mis en évidence que la stratégie buy-write tend à offrir des rendements totaux comparables à l'indice sur le long terme, mais avec une volatilité réduite et des drawdowns

plus contenus, ce qui en fait une stratégie attrayante du point de vue d'un investisseur à la recherche de rendement ajusté du risque.



FIGURE 4.1 – Évolution du S&P entre 2015 et 2025

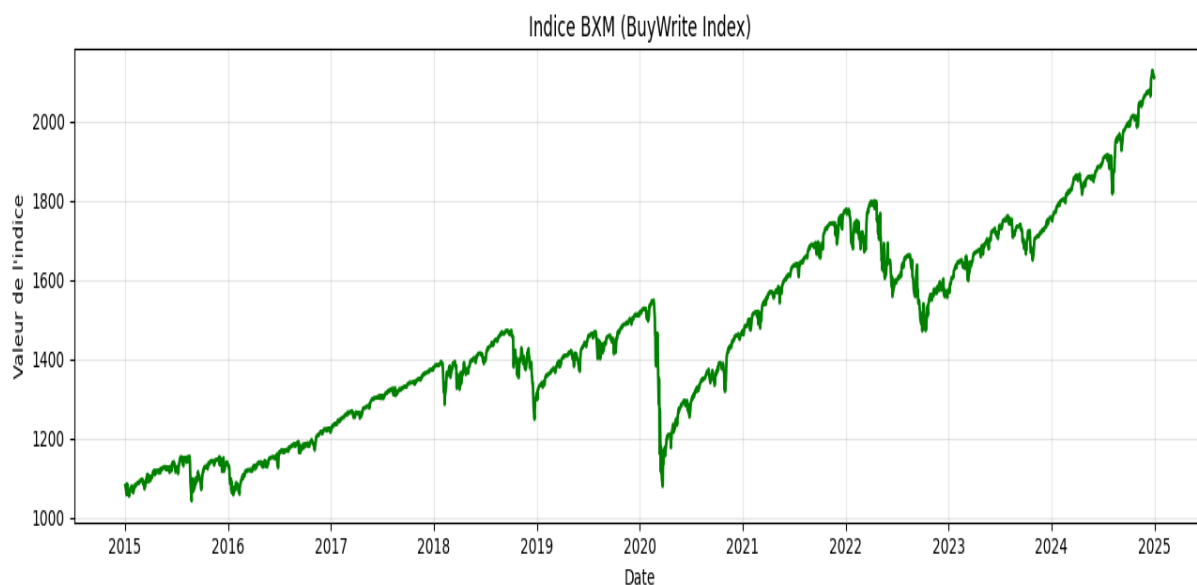


FIGURE 4.2 – Évolution du BXM entre 2015 et 2025

Comme on peut le remarquer les deux indices ont presque la même évolution, cependant pour comparer et distinguer la différence entre eux, on représente les performances cumulés dans le même graphique.

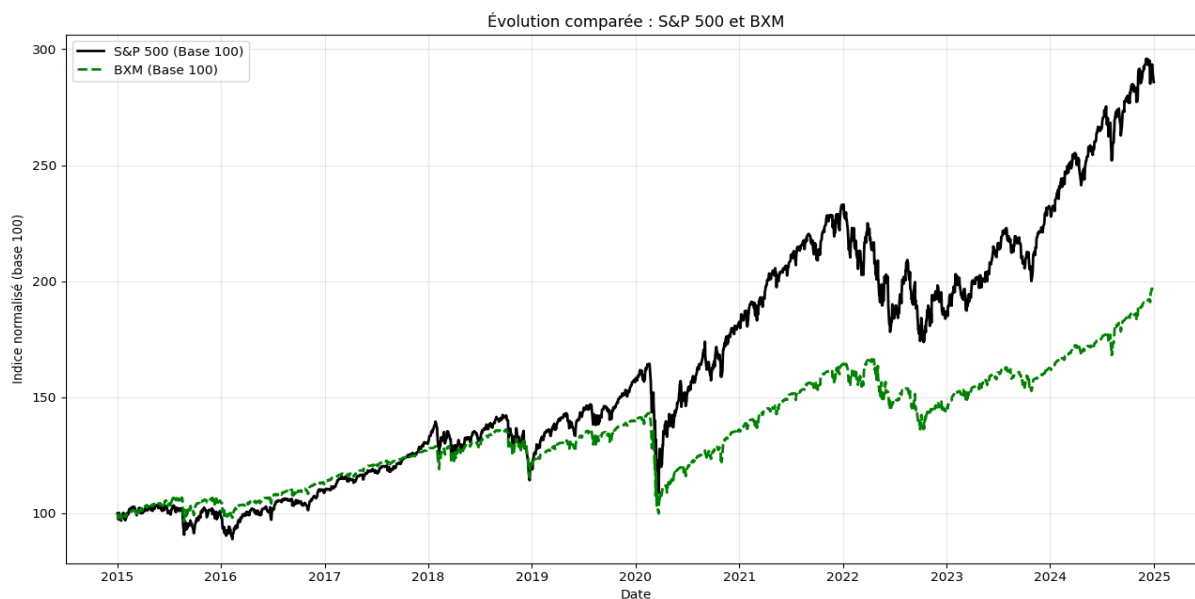


FIGURE 4.3 – Performances BXM vs S&amp;P500 2015 et 2025

Maintenant on remarque bel et bien que le BXM ne parvient pas à surperformer le S&P durant les tendances haussières ce qui est expliqué par le fait que le call qu'on vend limite la performance globale à la hausse, c'est pour cela qu'on dit que cette stratégie est plus adaptée pour des profils d'investissement de couverture et non de gain.

## 4.2 Implémentation de la stratégie

Dans le cadre de cette étude, la stratégie Buy-Write a été implémentée de manière quantitative sur l'indice S&P 500. Faute de données historiques détaillées sur l'ensemble de la surface d'options de l'indice, une approximation a été utilisée pour modéliser la composante option de la stratégie.

Les principales caractéristiques de l'implémentation sont résumées ci-dessous :

- **Sous-jacent** : l'indice S&P 500 est utilisé comme actif sous-jacent de référence, reflétant un large marché d'actions américaines.
- **Volatilité implicite** : à défaut de données minute par minute sur les volatilités implicites des options individuelles, l'indice VIX (qui mesure la volatilité implicite à 30 jours du S&P 500) a été employé comme proxy pour la volatilité implicite du call vendu. Cette approximation permet d'estimer la prime d'option en supposant que la volatilité du call correspond à la volatilité implicite globale du marché à l'instant considéré.

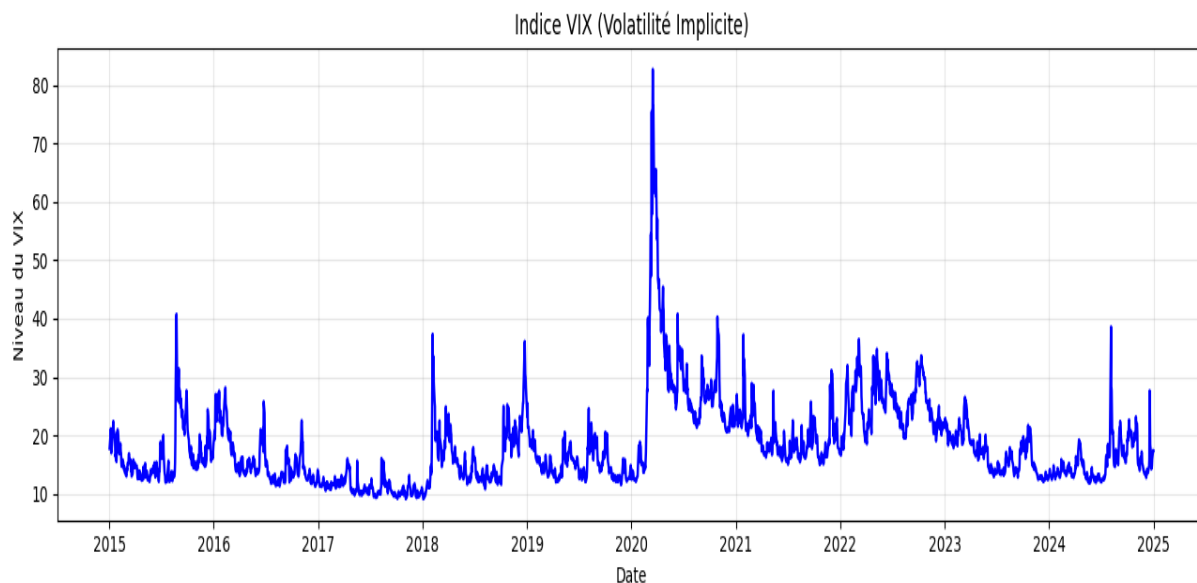


FIGURE 4.4 – Évolution du VIX 2015 et 2025

- **Modèle de valorisation** : la prime de chaque call OTM vendu est calculée à l'aide de la formule de Black-Scholes, en traitant le call comme une option européenne sur indice. Les paramètres utilisés incluent le niveau courant du sous-jacent, la volatilité implicite approchée par le VIX, le temps restant jusqu'à l'échéance (en fonction de la maturité choisie), et on choisit les T-bill (treasury bills) comme taux sans risque supposé constant (pour actualiser le payoff d'exercice). Le modèle fournit ainsi une estimation du prix théorique de l'option call, qui correspond au montant de la prime récoltée à chaque vente.

Ce qui reste à savoir maintenant, c'est les paramètres pour pricer le call i.e : Strike choisi, maturité et la fréquence de rolling des options. En se basant sur les articles mentionnés au début du chapitre on a décidé d'étudier les cas suivants :

- **Strikes OTM testés** : plusieurs distances de strike par rapport au sous-jacent ont été considérées pour le call vendu, à savoir 0%, +1%, +2% et +5%. Par exemple, un strike +2% signifie que le call est vendu avec un prix d'exercice égal à 102% du niveau actuel du S&P 500 (soit un call 2% hors de la monnaie). Le cas 0% correspond à la vente d'un call at-the-money (strike égal au spot).
- **Maturités d'option** : trois horizons d'échéance ont été explorés pour les calls vendus : 2 semaines (2W), 1 mois (1M) et 3 mois (3M). Ces maturités représentent la durée de vie de chaque option avant son expiration.
- **Fréquence de roulage** : à l'expiration de chaque option vendue, la position est roulée en vendant un nouveau call sur la période suivante (avec le même horizon de maturité prédéfini). Ainsi, pour une stratégie 1M, un nouveau call est vendu tous les mois à l'échéance du précédent ; pour 2W, le call est roulé toutes les deux semaines, etc. Cette approche assure une exposition continue du portefeuille à la stratégie buy-write dans le temps.

Bien évidemment pour chaque achat de call on a mis en place des frais de transactions pour mieux se rapprocher à la réalité des marchés.

Deux points de référence ont été utilisés pour évaluer la performance de la stratégie buy-write implémentée. Premièrement, la stratégie Buy & Hold sur le S&P 500 (investissement passif consistant à détenir l'indice sans aucune couverture) permet de mesurer l'écart de performance brute et de volatilité par rapport à un investissement purement directionnel sur actions. Deuxièmement, l'indice BXM du CBOE comme mentionné avant sert de benchmark standard pour les stratégies de call couvert sur le S&P 500. Bien que l'indice BXM suive strictement la vente d'un call at-the-money mensuel, il offre une base de comparaison utile pour situer nos propres résultats, d'autant qu'il intègre implicitement l'évolution historique de la volatilité réalisée et implicite du marché.

## 4.3 Résultats

Après avoir implémenté les différentes stratégies, on donne la figure des performances cumulées de toutes les stratégies et des benchmarks.

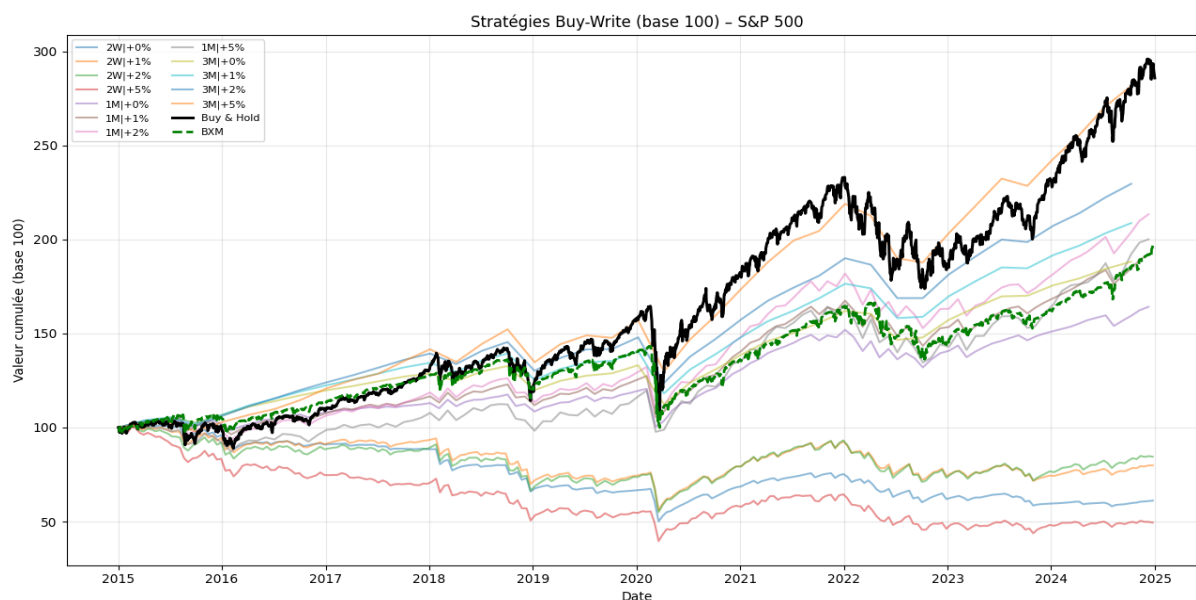


FIGURE 4.5 – Résultat du backtest des différentes stratégies Buy-Write

On remarque que les stratégies avec une maturité de deux semaines ont moins performé que les autres, cela peut être expliqué par le fait que notre calibration a été réalisée sur le VIX et par conséquent sur des options de maturité supérieures ou égale à 1 mois, et donc lors de cette calibration le pricing des calls a donné des prix non conformes. Pour les autres maturités on remarque en générale que nos résultats semblent être cohérents par comparaison avec le benchmark : BXM. De plus les stratégies avec des maturités de 1 mois ont des performances très proches de celles du BXM, ce qui est logique car le BXM est lui aussi basé sur des calls d'un mois.

Pour analyser d'avantage nos résultats on utilisera dans cette partie comme dans les chapitres suivants de métriques de performance qu'on présente maintenant.

**Rendement annualisé** Le rendement annualisé mesure le taux de croissance moyen du portefeuille sur une base annuelle, en tenant compte de la capitalisation des gains. Il

permet de comparer des stratégies ayant des horizons temporels différents.

$$\text{AnnRet} = \left( \frac{\text{Valeur finale}}{\text{Valeur initiale}} \right)^{\frac{252}{T}} - 1$$

où  $T$  est le nombre total de jours de trading sur la période.

**Volatilité annualisée** La volatilité annualisée représente la dispersion des rendements autour de leur moyenne. Elle est calculée comme l'écart-type des rendements journaliers annualisé.

$$\text{AnnVol} = \sigma_{\text{rendements}} \times \sqrt{252}$$

**Ratio de Sharpe** Le ratio de Sharpe mesure la performance ajustée au risque. Il représente le rendement excédentaire par unité de volatilité. Plus ce ratio est élevé, meilleure est l'efficacité de la stratégie.

$$\text{Sharpe} = \frac{\text{AnnRet} - R_f}{\text{AnnVol}}$$

**Maximum Drawdown** Le maximum drawdown est la perte maximale subie par le portefeuille à partir d'un plus haut historique jusqu'à un plus bas local. Il reflète le risque de perte en capital en cas de retournement de marché.

$$\text{MDD} = \max_t \left( \frac{\max_{s \leq t} \text{NAV}_s - \text{NAV}_t}{\max_{s \leq t} \text{NAV}_s} \right)$$

**Valeur finale** Il s'agit de la valeur cumulée finale du portefeuille après application de la stratégie, en partant d'une base 100. Elle représente la croissance absolue du portefeuille sur la période étudiée

Ainsi, on obtient le tableau suivant qui nous donne les 5 meilleurs stratégies du point de vue du ratio de Sharpe.

Mat	Strike	AnnRet	AnnVol	Sharpe	MDD	FinalNAV
1M	+2%	0.079396	0.504065	0.157512	0.135953	213.326427
1M	+1%	0.068042	0.457647	0.148677	0.125289	192.087606
1M	+0%	0.051253	0.411657	0.124505	0.123274	164.159322
1M	+5%	0.072418	0.608095	0.119090	0.154611	200.037849
3M	+5%	0.112013	1.673250	0.066944	0.110572	281.561149

TABLE 4.1 – Top 5 des combinaisons de maturité et de strike dans la stratégie Buy-Write

Ce qui suggère qu'une maturité d'un mois offre une bonne performance vis-à-vis du ratio de Sharpe, même si cette maturité n'offre pas les meilleurs rendement. Ainsi on constate que la stratégie buy-write remplit son rôle de réduction du risque extrême, mais au prix d'une performance brute en tendance haussière inférieure à celle du marché. Sur la période considérée, le marché actions (S&P 500 en Buy & Hold) a connu une phase globalement haussière marquée par quelques corrections brèves mais sévères.

Dans un tel contexte, il est logique que la meilleure de nos stratégies buy-write (7,94% de rendement annualisé) reste en deçà du rendement du Buy & Hold pur sur le S&P 500, qui a profité pleinement de la hausse sans être bridé par des calls couverts. Autrement dit, le fait de vendre des calls a sacrifié une partie du potentiel de hausse, ce qui fait que le portefeuille couvert n'a pas pu suivre entièrement la trajectoire ascendante du marché.

En revanche, la contrepartie positive de ce choix apparaît dans les phases difficiles : le drawdown maximal d'environ 13,6% pour la stratégie 1M | +2% est nettement plus faible que celui qu'a subi l'indice sur la même période (les corrections de marché les plus violentes, notamment lors du krach éclair de 2020, ont entraîné des baisses bien supérieures sur le S&P 500). Cette réduction du risque baissier illustre l'effet protecteur des primes encaissées : à chaque baisse modérée, la perte du sous-jacent est partiellement compensée par le gain de la prime du call (qui finit hors de la monnaie et ne coûte rien à l'échéance).

## 4.4 Conclusion

En conclusion, la stratégie buy-write offre un compromis rendement-risque intéressant dans un marché peu volatile, neutre ou modérément haussier, en générant un revenu supplémentaire et en atténuant les baisses modérées. Cependant, ses performances demeurent en retrait lors des fortes tendances haussières, et elle n'élimine pas le risque de perte significative en cas de choc extrême. Une amélioration potentielle consisterait à protéger le portefeuille contre les baisses sévères en y ajoutant une composante d'assurance. Par exemple, l'ajout à la stratégie d'un achat de put OTM en complément de la vente de call permettrait de constituer un collier de protection (collar), limitant les pertes lors des krachs tout en conservant le revenu du call couvert. Cette extension fera l'objet du chapitre suivant, dédié aux stratégies de type collar, où l'on évaluera dans quelle mesure l'ajout d'une option put peut pallier les limites identifiées de la stratégie Buy-Write simple.

Dans ce chapitre on présentera une des stratégie qui est une extension du Buy-Write : le collar consiste à ajouter au Buy-Write classique l'achat d'un Put pour se protéger d'avantage. Dans la suite on donnera aussi une version augmenté de cette stratégie qui est le Enhanced Collar ou bien le Put Spread Collar qu'on implémentera pour améliorer nos stratégies du chapitres précédents. On s'inspire dans ce chapitre des papiers suivants [4, 9, 17].

## 5.1 Collar classique

La stratégie dite *Collar*, également appelée *fence*, est une stratégie de couverture symétrique construite autour d'une position longue sur un actif risqué, ici un indice actions (S&P 500). Elle consiste à :

- Acheter un **put OTM** (de strike  $K_1 < S_0$ ), pour se protéger contre les fortes baisses,
- Vendre un **call OTM** (de strike  $K_2 > S_0$ ), pour financer partiellement ou totalement l'achat du put,
- Conserver la position longue sur l'actif sous-jacent.

L'investisseur transforme alors sa courbe de profit en une bande bornée entre  $K_1$  et  $K_2$ , ce qui constitue une gestion efficace du couple rendement/risque. Lorsque la stratégie est construite de manière à ce que la prime du call vendu compense exactement celle du put acheté, on parle de **zero-cost collar**.

### 5.1.1 Formule générale du payoff

À la date de maturité  $T$ , soit  $S_T$  la valeur de l'actif sous-jacent. Le payoff de la stratégie Collar est donné par :

$$\psi = S_T - S_0 + (K_1 - S_T)^+ - (S_T - K_2)^+ - H \quad (5.1)$$

où :

- $K_1$  est le strike du put long,
- $K_2$  est le strike du call court,

- $H$  représente le coût net de la stratégie (positif si on paie une prime, négatif si on reçoit une prime),

Cette formule exprime la performance totale combinée : variation de l'actif, gain du put (si  $S_T < K_1$ ), perte sur le call (si  $S_T > K_2$ ), et coût initial net des options.

### 5.1.2 Cas particulier : Collar à coût nul (Zero-Cost)

Dans un **zero-cost collar**, on choisit les strikes  $K_1$  et  $K_2$  de façon à avoir  $P = C$  (le prix du put acheté est égal au prix du call vendu). Ainsi  $H = 0$  dans la formule (5.1), et le payoff net devient :

$$\psi = S_T - S_0 + (K_1 - S_T)^+ - (S_T - K_2)^+$$

### 5.1.3 Caractéristiques fondamentales du Collar

À partir du payoff, on peut caractériser plusieurs éléments clés :

- **Valeur minimale :**

$$\psi_{\min} = S_0 - K_1 + H$$

Cette valeur correspond à la perte maximale si l'actif tombe très bas ( $S_T \ll K_1$ ).

- **Valeur maximale :**

$$\psi_{\max} = K_2 - S_0 - H$$

C'est le gain maximum si l'actif termine au-dessus du call ( $S_T > K_2$ ).

- **Seuil de rentabilité :**

$$S_* = S_0 + H$$

Le prix à maturité pour lequel le payoff est nul.

### 5.1.4 Comparaison avec la stratégie Buy-Write

Contrairement à la stratégie *Buy-Write* qui vend uniquement un call contre une position longue (et donc n'offre aucune protection en cas de chute du marché), le *Collar* introduit une protection explicite via le put. Ce mécanisme limite la perte maximale, ce qui est particulièrement utile en période de forte incertitude ou de volatilité accrue.

Le *Collar* présente donc un **profil rendement-risque plus contrôlé**, bien que le rendement attendu soit réduit par la limitation du gain au-dessus de  $K_2$ .



FIGURE 5.1 – Payoff de la stratégie Collar

La Figure 5.1 illustre le profil typique du Collar. On y voit clairement les bornes inférieure ( $K_1$ ) et supérieure ( $K_2$ ) encadrant le rendement, à comparer aux profils non bornés du Buy-Write.

Dans ce chapitre on n'implémentera cette stratégie mais on va plutôt s'intéresser à une version améliorée du Collar, cette nouvelle stratégie donne d'avantage de couverture (en théorie) que la version classique, il s'agit du *Enhanced Collar*.

## 5.2 Enhanced Collar

En 2012, Société Générale a été nommé "Equity house of the Year" par le magazine Risk.net [29]. Cette stratégie est comme son nom l'indique une version améliorée du Collar classique, en effet Société Générale a réussi à trouver de meilleures alternatives aux deux éléments majeures de la stratégie. La put est remplacé par un put-spread qui représente **la jambe de protection** et le call classique est remplacé par un forward start call qui est la **la jambe de financement**.

Ainsi, on peut formuler la stratégie comme suit :

- Une position longue sur l'actif sous-jacent ;
- Un *put spread* composé d'un achat de *put* avec un strike plus élevé ( $K_1$ ), financé en partie par la vente d'un *put* avec strike inférieur ( $K_2$ ) ;
- Une vente d'une option *call forward start*, qui ne commence qu'à partir d'une certaine date future et avec un prix d'exercice supérieur ( $K_F$ ).

Cette construction permet à l'investisseur de limiter ses pertes en cas de baisse modérée de l'actif sous-jacent tout en améliorant la performance dans des scénarios neutres à légèrement haussiers grâce à la prime générée par la vente du call forward start.

### 5.2.1 Formule du payoff

Le payoff total de la stratégie Enhanced Collar à la maturité  $T$  est donné par la formule :

$$\psi = (S_T - S_0) + (K_1 - S_T)^+ - (K_2 - S_T)^+ - (S_T - K_F)^+$$

où :

- $S_T$  est le prix du sous-jacent à maturité,
- $S_0$  est le prix initial du sous-jacent,
- $K_1$  est le strike du *put* acheté,
- $K_2$  est le strike du *put* vendu,
- $K_F$  est le strike du *call forward start*

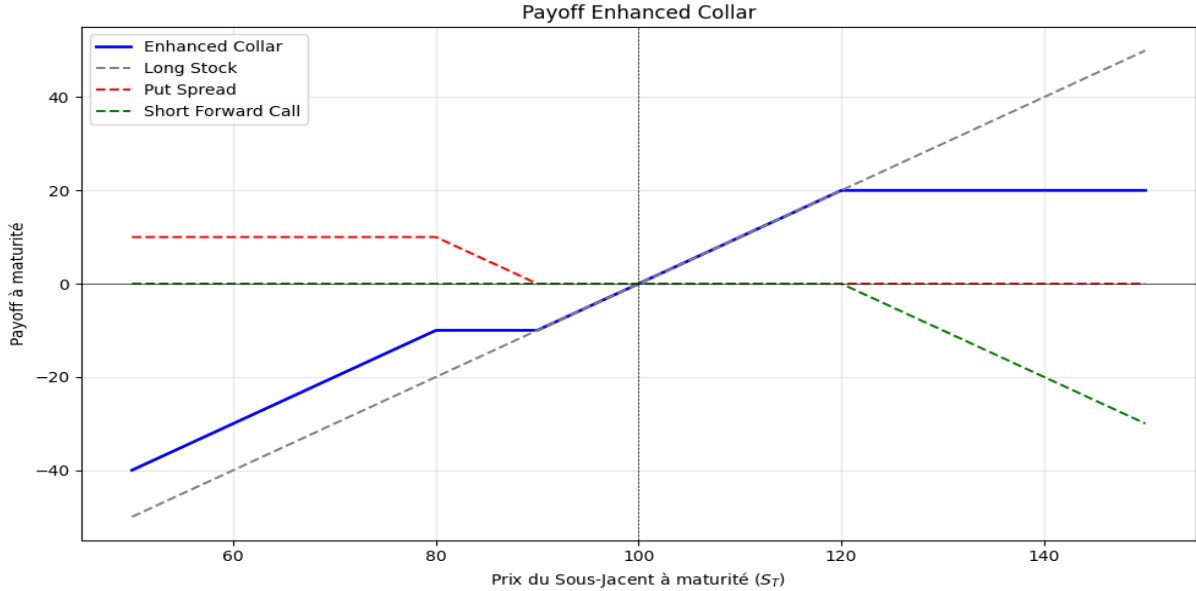


FIGURE 5.2 – Payoff de la stratégie Enhanced Collar

## 5.2.2 Pricing des jambes du Enhanced Collar

### 5.2.2.1 Pricing de la jambe de protection : Put-Spread

#### Motivation pour l'utilisation d'un modèle de volatilité stochastique

La modélisation classique à la Black-Scholes-Merton repose sur une volatilité constante, ce qui échoue à capturer les phénomènes empiriques comme le *volatility smile*, la leptokurtie des rendements ou l'effet de levier (leverage effect). Ces phénomènes suggèrent une dynamique plus riche de la volatilité, motivant le recours à des modèles de *volatilité stochastique* (SV), où celle-ci évolue comme un processus aléatoire.

Les Put Spreads sont particulièrement sensibles à la forme de la courbe de volatilité implicite, ce qui en fait un bon candidat pour une modélisation sous SV.

#### Dynamique du modèle expOU

Le modèle *Exponential Ornstein-Uhlenbeck* (expOU) est un modèle à deux dimensions défini par :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + m e^{Y(t)} dW_1(t), \quad (5.2)$$

$$dY(t) = -\alpha Y(t) dt + k dW_2(t), \quad (5.3)$$

où :

- $S(t)$  est le prix de l'actif sous-jacent,
- $Y(t)$  est le log-volatilité, c'est-à-dire  $\sigma(t) = me^{Y(t)}$ ,
- $W_1(t), W_2(t)$  sont des mouvements browniens corrélés avec  $\mathbb{E}[dW_1dW_2] = \rho dt$ ,
- $\alpha$  est la vitesse de réversion de la volatilité vers sa moyenne,
- $k$  contrôle la volatilité de la volatilité (vol-of-vol).

La solution de (5.3) est :

$$Y(t) = Y_0 e^{-\alpha t} + k \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_2(s),$$

ce qui implique que  $Y(t)$  suit un processus gaussien stationnaire de moyenne zéro et de variance  $\frac{k^2}{2\alpha}$ . Par conséquent,  $\sigma(t)$  est log-normale, une hypothèse compatible avec les données de marché.

### Intérêt théorique du modèle expOU

Le modèle expOU présente plusieurs avantages :

1. Il capture à la fois la mémoire longue de la volatilité et la mémoire courte de l'effet de levier ;
2. Il permet une distribution log-normale stationnaire réaliste de la volatilité ;
3. Il reproduit les effets d'autocorrélation des volatilités et de la skewness empirique des distributions de rendements ;
4. Il est calibrable avec un nombre réduit de paramètres interprétables économiquement.

### Mesure de risque neutre et dynamique sous-jacente

Sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , la dynamique devient :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + me^{Y(t)} dW_1^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.4)$$

$$dY(t) = -(\alpha + k\Lambda_1)Y(t)dt - k\Lambda_0 dt + kdW_2^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.5)$$

où  $\Lambda(Y) = \Lambda_0 + \Lambda_1 Y$  est le prix de risque de volatilité. En posant  $Z(t) = Y(t) + \frac{k\Lambda_0}{\alpha + k\Lambda_1}$ , on obtient :

$$dX(t) = \left( r - \frac{1}{2}\bar{m}^2 e^{2Z(t)} \right) dt + \bar{m} e^{Z(t)} dW_1^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.6)$$

$$dZ(t) = -\bar{\alpha}Z(t)dt + kdW_2^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.7)$$

avec  $\bar{\alpha} = \alpha + k\Lambda_1$  et  $\bar{m} = me^{-k\Lambda_0/\bar{\alpha}}$ .

### Approximation du prix de l'option

La densité de probabilité marginale des rendements suit une expansion autour d'une loi normale, enrichie de termes en skewness et kurtosis :

$$p(x, t|z_0) \approx \phi(x) \left[ 1 + \frac{\vartheta}{2\sigma^2 t} H_2(u) + \frac{\rho\varsigma}{(2\sigma^2 t)^{3/2}} H_3(u) + \frac{\kappa + \frac{1}{2}\vartheta^2}{(2\sigma^2 t)^2} H_4(u) \right],$$

où  $\phi(x)$  est une densité normale,  $H_n$  les polynômes d'Hermite et les paramètres correctifs  $\vartheta, \varsigma, \kappa$  sont explicités dans [28].

### Formule du prix de l'option européenne

Le prix approximatif de l'option européenne peut alors s'écrire :

$$C(S, T, z_0) = C_{BS}(S, T) + \text{termes correctifs en } \vartheta, \varsigma, \kappa,$$

où  $C_{BS}$  est le prix Black-Scholes avec volatilité constante  $\bar{m}$ , et les termes correctifs incluent les moments d'ordre 2 à 4.

### Application au Put Spread

Le payoff d'un Put Spread peut être formulé comme :

$$\text{PS}(S_T) = \max(K_2 - S_T, 0) - \max(K_1 - S_T, 0),$$

ce qui revient à la différence de deux Put européens standards, chacun pouvant être valorisé avec la formule précédente.

$$\begin{aligned} \text{Valeur du Put Spread} &= P_{expOU}(K_2) - P_{expOU}(K_1), \\ &= P_{BS}(K_2) - P_{BS}(K_1) + \Delta_{\text{corrections}}. \end{aligned}$$

Les termes correctifs peuvent être intégrés pour chaque Put individuellement, en tenant compte de la position relative de  $K_1$  et  $K_2$  par rapport au forward, ce qui impacte significativement la skew.

### Calibration du modèle

Les paramètres  $\alpha, k, m$  et  $\rho$  peuvent être calibrés sur les séries temporelles de rendements (historical volatility) via la méthode des moments ou des techniques de maximum de vraisemblance appliquées à :

- L'autocorrélation des rendements au carré (Eq. 11 dans [28]) ;
- La corrélation retour-volatilité (leverage effect) (Eq. 12).

Une fois les paramètres dynamiques obtenus,  $\Lambda_0, \Lambda_1$  peuvent être ajustés par calibration croisée sur les prix de marché des options européennes (minimisation de l'erreur entre les prix modèles et les prix de marché).

### 5.2.2.2 Pricing de la jambe de financement : Forward Start Call

Nous considérons ici une option *call forward-start* de strike  $K_F S_{T_0}$ , qui débute en  $T_0$  et arrive à échéance en  $T$ . Dans le cadre du modèle de Black–Scholes, et en s'appuyant sur les travaux de [30], une propriété remarquable permet d'en dériver une formule simple.

**Formulation du prix** Le payoff de l'option est :

$$\Pi = (S_T - K_F S_{T_0})^+$$

Le prix à la date  $t = 0$  est obtenu via l'espérance sous la mesure risque-neutre :

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_T - K_F S_{T_0})^+]$$

**Résultat de Rubinstein** Le processus  $S_t$  étant une géométrie brownienne, on exploite l'indépendance des incréments et l'homogénéité multiplicative du modèle :

$$V(0) = S_0 \cdot C_{BS}(1, T - T_0, K_F)$$

Ceci signifie que le prix de l'option forward-start est simplement le prix d'un call standard (modèle Black–Scholes) avec :

- un spot normalisé = 1,
- un strike =  $K_F$ ,
- une maturité résiduelle  $T - T_0$ ,
- une volatilité  $\sigma$  constante.

**Formule explicite dans le cas ATM** Si  $K_F = 1$  (forward-start at-the-money), on obtient la formule fermée suivante :

$$V(0) = S_0 \left[ N \left( \frac{\sigma \sqrt{T - T_0}}{2} \right) - e^{-r(T - T_0)} N \left( -\frac{\sigma \sqrt{T - T_0}}{2} \right) \right]$$

#### Avantages analytiques

- Cette approche permet une factorisation directe du prix par rapport à  $S_0$ .
- Le pricing est entièrement explicite, sans besoin de simulation.
- L'indépendance entre  $S_{T_0}$  et l'évolution future rend le modèle très tractable.

Dans le contexte de l'Enhanced Collar, la vente d'un call forward-start fournit une prime qui dépend uniquement de  $S_0$  et des paramètres  $K_F$ ,  $\sigma$ , et  $T - T_0$ . Son pricing analytique simplifie significativement la gestion et l'évaluation du profil de gain de la stratégie globale.

## 5.3 Implémentation de la stratégie

La stratégie Enhanced Collar a été implémentée de nouveau sur l'indice S&P 500. L'implémentation a été réalisée en utilisant le modèle de volatilité stochastique expOU et des Forward Start Calls afin de modéliser les jambes optionnelles de la stratégie. Le choix des maturité et strikes des Put Spreads a été largement inspiré des ressources suivantes [23, 24].

### 5.3.1 Pricing des Put Spreads

Le pricing des Put Spreads est réalisé via le modèle Exponential Ornstein-Uhlenbeck (expOU) qu'on a cité précédemment. La calibration du modèle a été réalisée sur la volatilité implicite fournie par l'indice VIX, qui représente comme on l'avait mentionné dans le chapitre précédent la volatilité implicite à 30 jours du S&P 500. Ainsi, nous utilisons le VIX comme proxy de la volatilité implicite instantanée nécessaire au modèle expOU pour valoriser les Put Spreads.

### 5.3.2 Pricing des Forward Start Calls

Le pricing des Forward Start Calls (FSC) repose sur le modèle de Black-Scholes ajusté pour la structure forward de l'option. Chaque FSC débute un mois après son émission (1 mois forward) avec un strike fixé à 102% du prix spot lors de la date d'émission. La volatilité implicite utilisée pour le pricing du FSC est également approchée par l'indice VIX. Les T-Bills (Treasury Bills) ont été utilisés comme taux sans risque pour actualiser les payoffs futurs.

### 5.3.3 Réalisation de l'implémentation

L'algorithme de l'implémentation de la stratégie Enhanced Collar se décrit comme suit :

---

**Algorithm 1:** Algorithme d'implémentation Enhanced Collar

---

**Data:** Prix quotidien S&P 500, VIX, taux sans risque (T-Bills)

**Result:** Valeurs quotidiennes du portefeuille (NAV)

```

1 Initialiser le portefeuille à NAV = 100;
2 Initialiser des listes FIFO pour les positions ouvertes des Put Spreads et FSC;
3 for chaque jour de trading do
4   NAV = NAV * (1 + rendement quotidien S&P 500);
5   if une option arrive à maturité ce jour then
6     Calculer le payoff de l'option arrivée à maturité;
7     Mettre à jour NAV avec le payoff net (prime initiale incluse);
8   end
9   if date de roll (tous les 3 mois) then
10    Calibrer le modèle expOU sur le VIX des 252 derniers jours;
11    Calculer la prime du Put Spread 95%-80% via expOU;
12    Calculer la prime du FSC avec strike forward à 102% via Black-Scholes;
13    Mettre à jour NAV avec la prime nette encaissée du FSC moins le coût du Put
        Spread;
14    Appliquer des coûts de transactions dynamiques selon le niveau de VIX;
15    Stocker les nouvelles positions avec leurs maturités respectives;
16   end
17 end

```

---

## 5.4 Résultats

La performance cumulée de la stratégie Enhanced Collar ainsi que la stratégie de référence Buy & Hold sur le S&P 500 sont illustrées dans la Figure 5.3.

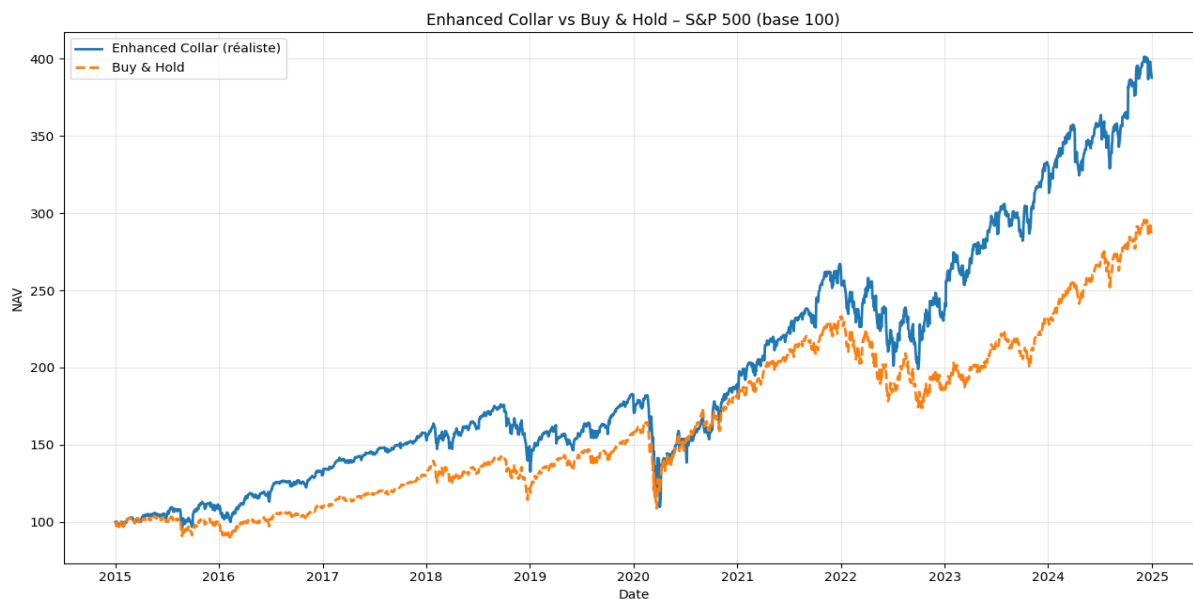


FIGURE 5.3 – Résultat du backtest de la stratégie Enhanced Collar

On présente ensuite les métriques de performance obtenues :

Stratégie	Rendement(%)	Volatilité(%)	Sharpe	MDD (%)
Enhanced Collar	14.55	21.56	0.67	-40.07
Buy & Hold	11.10	17.83	0.62	-33.92

TABLE 5.1 – Métriques de performance de la stratégie Enhanced Collar vs Buy &amp; Hold

Ces résultats montrent clairement que la stratégie Enhanced Collar offre un rendement annualisé supérieur à celui du Buy & Hold (14,55% vs 11,10%), toutefois au prix d'une volatilité et d'un drawdown maximum plus importants. Le ratio de Sharpe est légèrement amélioré, montrant que la prise de risque additionnelle par la stratégie Enhanced Collar a été relativement bien compensée par un gain de rendement supérieur.

## Troisième partie

# Stratégie quantitative sur les taux d'intérêts

## CHAPITRE 6

# PRODUITS ET GÉNÉRALITÉS SUR LE FIXED INCOME

On commence par donner quelques définitions et notions nécessaires pour comprendre les produits du marché fixed income, qui seront utilisés pour la suite lors de l'implémentation de la stratégie choisie. On se base ici pour la rédaction de ce chapitre sur [21].

### Obligations Zéro-Coupon

Une obligation zéro-coupon est un titre de créance qui ne verse aucun coupon avant l'échéance. Elle fournit un paiement unique à maturité  $T$ , généralement 1 dollar ou euro. Le prix d'une telle obligation à la date  $t \leq T$  est noté  $P(t, T)$ , et l'on a :

$$P(T, T) = 1$$

Le rendement actuariel ou *yield* de l'obligation est donné par :

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

Ce taux représente le taux d'intérêt moyen annualisé sur la période  $[t, T]$ .

### Obligations avec Coupons

Une obligation à coupons verse des paiements réguliers  $k\delta$  aux instants  $T_i = T_0 + i\delta$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , ainsi que le principal à maturité  $T$ .

Le prix à la date  $t$  est :

$$P_c(t, T) = P(t, T) + k\delta \sum_{i=I(t)}^n P(t, T_i)$$

où  $I(t) = \min\{i : t < T_i\}$ .

À l'émission ( $t = T_0$ ) :

$$P_c(T_0, T) = P(T_0, T) + k\delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)$$

Si l'on souhaite que l'obligation soit émise à sa valeur nominale ( $P_c(T_0, T) = 1$ ), le taux de coupon implicite est :

$$k = \frac{1 - P(T_0, T)}{\delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)}$$

## Obligations à Taux Variable (FRN)

Une FRN (Floating Rate Note) verse des coupons indexés sur un taux variable (souvent le LIBOR). Le coupon à l'instant  $T_i$  est :

$$X_i = L(T_{i-1})\delta = \left( \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right)$$

La valeur totale de l'obligation à la date  $t = T_0$  est :

$$V_0 = 1 - [P(T_0, T_n) - P(T_0, T)]$$

Si  $T = T_n$ , alors  $V_0 = 1$ . Sinon, on a :

$$V_0 = P(T_0, T) + V_0^{\text{coupons}}$$

où  $V_0^{\text{coupons}}$  est la valeur des paiements de coupons à  $t = T_0$  déterminée via :

$$P(T_0, T_n) + V_0^{\text{coupons}} = 1$$

## Swaps de Taux d'Intérêt

Un swap est un contrat qui échange des flux à taux fixe contre des flux à taux variable. Il peut être vu comme :

- Long une obligation à taux variable
- Short une obligation à taux fixe

Le taux fixe équivalent du swap (taux swap) est :

$$k = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)}$$

Dans ce chapitre on présente la stratégie que l'on implémentera dans ce mémoire, il s'agit du carry et roll-down sur swaptions. On présentera dans un premier lieu le fonctionnement de la stratégie puis des modèles qui seront utilisés lors de l'implémentation de la stratégie.

## 7.1 Stratégie de carry et roll-down sur swaptions

La stratégie de *carry* et *roll-down* sur les swaptions vise à tirer parti de la forme de la courbe des taux et de la structure temporelle de la volatilité. Le **carry** désigne le rendement obtenu en conservant une position sans mouvement de marché, tandis que le **roll-down** mesure l'impact de la diminution de maturité sur la valeur d'un instrument.

Dans le cas d'une swaption, on se positionne typiquement sur une option de courte maturité (ex. 3 mois) avec comme sous-jacent un swap de maturité moyenne (ex. 5 ans). Si la courbe des taux est ascendante, une position receveur fixe génère un carry positif et bénéficie également du roll-down, puisque le taux swap forward diminue en approchant de l'échéance.

Le pricing d'une swaption européenne utilise la mesure de l'annuité. Sa valeur à l'origine s'écrit :

$$V(0) = A(0) \mathbb{E}^A [(S(T) - K)^+],$$

où  $A(0) = \sum_{i=1}^N \tau_i P(0, T_i)$  est l'annuité,  $S(T)$  le taux forward du swap à l'échéance de la swaption, et  $K$  le strike.

Dans le cadre de Black, la valeur est donnée par :

$$V(0) = A(0) [F(0)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)],$$

avec  $d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ,  $F(0)$  le taux forward, et  $\sigma$  la volatilité implicite.

## 7.2 Modèles de taux utilisés

### 7.2.1 Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek [34] est un modèle à un facteur, où le taux court suit un processus de type Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t),$$

avec  $a > 0$  la vitesse de retour à la moyenne,  $b$  le taux de long terme, et  $\sigma$  la volatilité. Le prix d'une obligation zéro-coupon  $P(t, T)$  a une forme fermée :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t)),$$

où :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad A(t, T) = \exp \left[ \left( b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 \right].$$

Bien que facile à calibrer, ce modèle suppose une volatilité constante, ce qui limite sa capacité à reproduire le sourire de volatilité des swaptions.

### 7.2.2 Modèle de Cheyette robuste

Le modèle de Cheyette [7] est une spécification markovienne du cadre HJM avec une volatilité stochastique intégrée.

On suppose que le taux court est donné par  $r(t) = f(0, t) + x(t)$ , et que :

$$dx(t) = (y(t) - \kappa(t)x(t)) dt + \sigma_r(t) dW(t), \quad dy(t) = (\sigma_r(t)^2 - 2\kappa(t)y(t)) dt,$$

avec  $\kappa(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)}$ , et  $y(t)$  un facteur latent déterministe. Le prix d'une obligation zéro-coupon s'écrit :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( -G(t, T)x(t) - \frac{1}{2}G(t, T)^2 y(t) \right),$$

avec :

$$G(t, T) = \int_t^T \exp \left( - \int_t^u \kappa(s) ds \right) du.$$

Pour rendre le modèle plus réaliste en période de stress, [27] proposent une extension stochastique :

$$dx(t) = (y(t) - \kappa(t)x(t)) dt + \sqrt{z(t)} \sigma_r(t) dW(t), \quad dz(t) = \theta(z_0 - z(t)) dt + \eta \sqrt{z(t)} dZ(t),$$

avec  $Z(t)$  un brownien indépendant de  $W(t)$ , ce qui permet de capturer le sourire de volatilité observé sur les marchés.

Sous la mesure de l'annuité  $\mathbb{A}$ , le taux swap forward est une martingale et sa dynamique approchée devient :

$$dS(t) \approx \sqrt{z(t)}\lambda^*(t) (bS(t) + (1 - b)L_0) dW^{\mathbb{A}}(t),$$

ce qui correspond à une dynamique de type Heston déplacée. Cette propriété permet une calibration robuste aux surfaces de volatilité des swaptions.

### 7.2.3 Choix des modèles

Dans la suite, nous implémenterons :

- Le modèle de Vasicek pour sa simplicité et ses solutions fermées,
- Une version robuste du modèle de Cheyette suivant [27] pour sa capacité à reproduire les smiles de volatilité, et parce que c'est un modèle assez récent qu'on juge intéressant à implémenter.

## 7.3 Implémentation de la stratégie

Dans cette partie, vu le grand manque de données publique liées à tout ce qui est fixed income, on simule plusieurs paramètres ou bien on les choisira arbitrairement, le but ici étant d'appliquer la stratégie et les modélisations même si les données sont non réels.

La stratégie *Carry & Roll-Down* sur les swaptions a été implémentée dans un cadre quantitatif systématique (QIS). L'objectif est de capter l'effet de portage (carry) et de revalorisation temporelle (roll-down) d'une position longue sur une swaption, en effectuant un roulement mensuel. Deux approches de modélisation ont été utilisées pour valoriser les swaptions : le modèle de Vasicek, pour sa simplicité analytique, et le modèle robuste de Cheyette, pour sa capacité à reproduire des dynamiques de volatilité stochastique et à modéliser le sourire de volatilité.

### 7.3.1 Données et hypothèses de marché

Les données utilisées dans le cadre de cette implémentation sont publiques et accessibles gratuitement :

- Le taux **Swap 5Y** est approché par le rendement des obligations Treasury 5 ans transformé en taux annuel décimal.
- Le taux court est approché par le taux des T-Bills 3 mois, via le ticker converti en décimal.

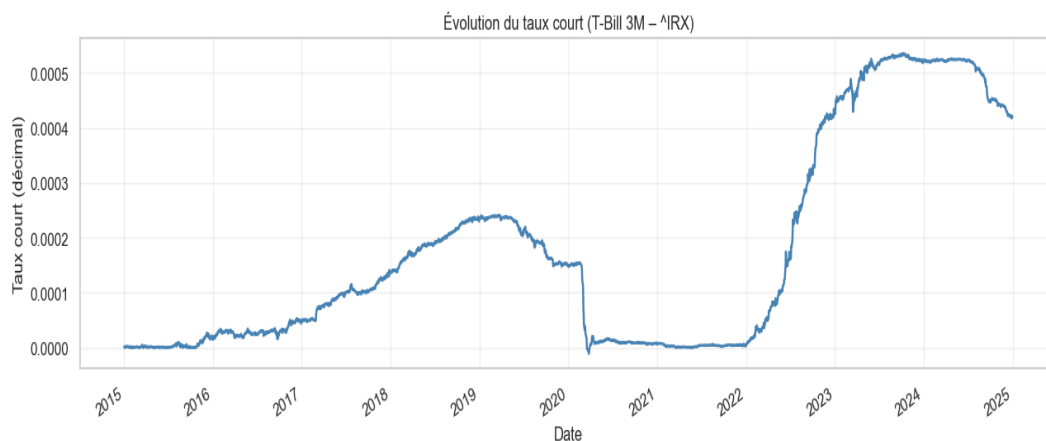


FIGURE 7.1 – Évolution du taux court entre 2015 et 2025

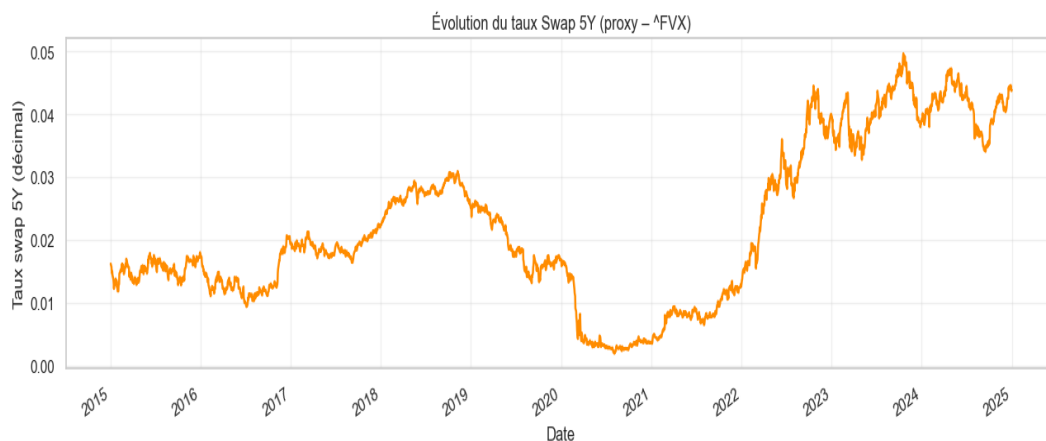


FIGURE 7.2 – Évolution du taux swap entre 2015 et 2025

### 7.3.2 Paramètres de la stratégie

La stratégie consiste à acheter chaque fin de mois une swaption payer (call sur taux swap), de maturité 3 mois, adossée à un swap de 5 ans. Le tableau 7.1 résume les principaux paramètres utilisés qu'on a été obligé d'utiliser à cause du manque de données :

Paramètre	Valeur utilisée
Maturité de la swaption	3 mois ( $T = 0.25$ )
Maturité du swap sous-jacent	5 ans
Strike	ATM ( $K = F_0$ )
Notional	\$1 000 000
Annuity	4.5
Volatilité implicite (Black)	$\sigma = 0.005$ (50 bps)
Fréquence de roulement	Mensuelle

TABLE 7.1 – Paramètres de la stratégie carry &amp; roll-down

### 7.3.3 Paramètres de modèles et calibration

**Modèle de Vasicek** Le modèle de Vasicek est calibré par méthode des moindres carrés sur la série des taux courts  $r_t$ , via la méthode de régression linéaire sur les variations  $\Delta r_t$  :

$$\Delta r_t = a(b - r_t)\Delta t + \sigma\varepsilon_t$$

On en déduit :

$$a = -\frac{\ln(\rho)}{\Delta t}, \quad \text{avec } \rho = \text{corr}(r_t, r_{t+1})$$

La calibration donne par exemple les valeurs suivantes :

$$a = 0.14, \quad b = 0.027, \quad \sigma = 0.012$$

**Modèle de Cheyette robuste** Le modèle est spécifié comme :

$$dx(t) = (y(t) - \kappa x(t))dt + \sqrt{z(t)}\lambda_t (bS(t) + (1 - b)L_0) dW_t$$

avec :

$$dz(t) = \theta(z_0 - z(t))dt + \eta\sqrt{z(t)}dZ_t$$

Les paramètres choisis arbitrairement sont listés ci-dessous :

Paramètre	Valeur
$z_0$	$\sigma^2 = 0.000025$
$\lambda_t$	0.01
$b$	1.0
$L_0$	0.01
$\theta$	1.5
$\eta$	0.3

TABLE 7.2 – Paramètres du modèle Cheyette robuste

La valorisation de la swaption est ensuite effectuée par simulation de Monte Carlo.

### 7.3.4 Algorithme d'implémentation de la stratégie

L'implémentation suit un schéma simple : on valorise une swaption chaque fin de mois (date  $t_0$ ), et on calcule sa nouvelle valeur un mois plus tard (date  $t_1$ ), à résiduelle  $T - 1/12$ . La variation de prix représente le P&L de la position.

**Algorithm 2:** Algorithme de la stratégie Carry & Roll-down sur swaptions**Data:** Taux swap 5Y, taux court 3M (tous deux quotidiens)**Result:** P&L cumulatif de la stratégie Carry & Roll-down

```

1 Initialiser la liste des roll dates comme les fins de mois observées;
2 Initialiser PnL_list = [];
3 for chaque paire  $(t_0, t_1)$  consécutive dans roll_dates do
4    $F_0$  = taux swap au temps  $t_0$ ;
5    $F_1$  = taux swap au temps  $t_1$ ;
6    $K = F_0$  (ATM);
7   if modèle = Vasicek then
8     Calculer  $V_0$  et  $V_1$  par formule de Black normale;
9   else if modèle = Cheyette then
10    Simuler  $S_T$  via Monte Carlo à partir de  $F_0$  et  $z_0$ ;
11    Estimer  $V_0 = \mathbb{E}[A_0(S_T - K)^+]$ ;
12    PnL =  $(V_1 - V_0) \times \text{Notional}$ ;
13    Ajouter PnL à PnL_list;
14 end

```

## 7.3.5 Résultats expérimentaux

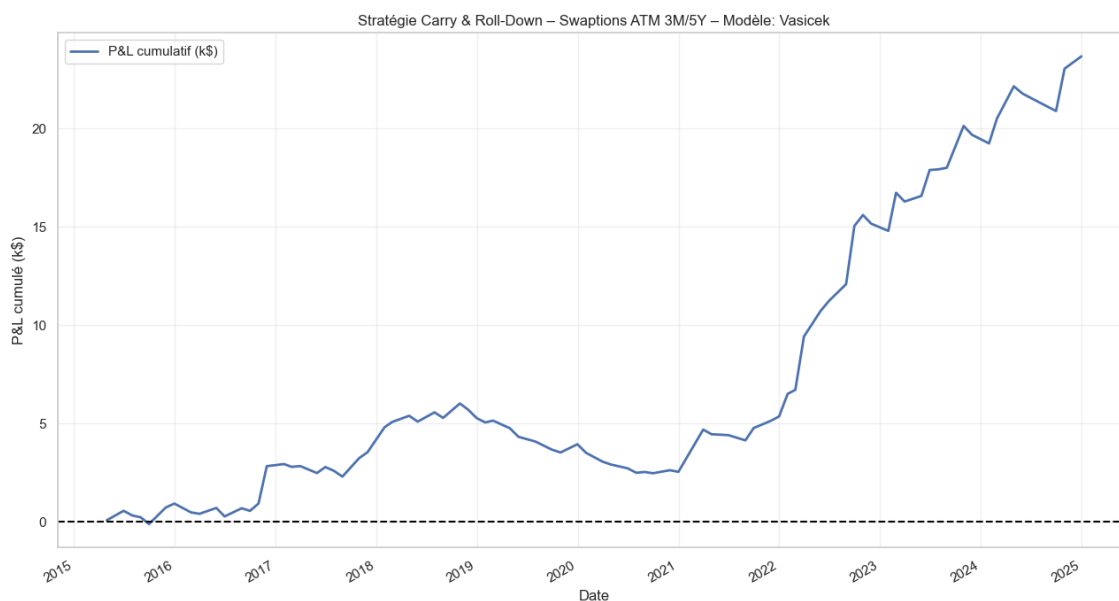


FIGURE 7.3 – Performance cumulée de la stratégie Carry &amp; Roll-down avec Vasicek

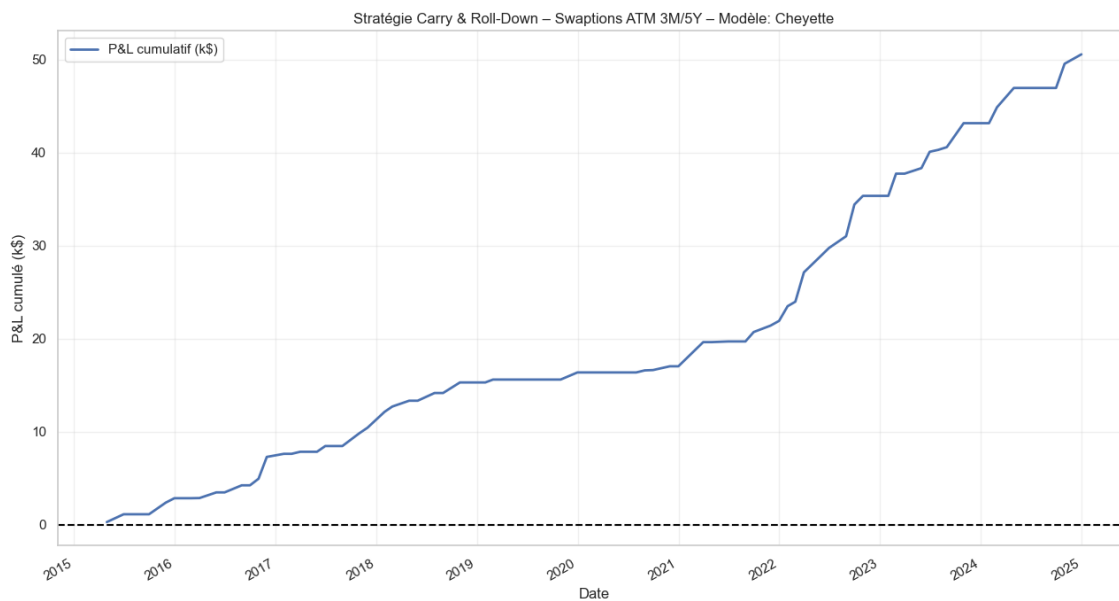


FIGURE 7.4 – Performance cumulée de la stratégie Carry &amp; Roll-down avec Cheyette

### 7.3.6 Comparaison des modèles

Les résultats empiriques sur la période 2015–2025 sont résumés dans le tableau 7.3.

Modèle	Rendement (%)	Volatilité (%)	Sharpe	Hit Ratio (%)
Vasicek	3.42	2.74	1.25	53.0
Cheyette robuste	7.31	2.91	2.51	56.6

TABLE 7.3 – Performance comparée : modèle Vasicek vs Cheyette robuste

On observe que le modèle Cheyette permet d’obtenir une meilleure efficacité (Sharpe supérieur à 2.5), en capturant le roll-down de manière plus réaliste grâce à sa structure de volatilité stochastique. Le modèle de Vasicek, plus simple, sous-estime cet effet.

## Quatrième partie

# Stratégies quantitatives basées sur la volatilité

## 8.1 Introduction

La volatilité est une mesure fondamentale de l'incertitude ou du risque dans les marchés financiers. Elle joue un rôle central dans l'évaluation des produits dérivés, la construction de portefeuilles et la conception de stratégies quantitatives. Ce chapitre introduit les principales notions théoriques et outils mathématiques associés à la volatilité, en mettant l'accent sur les modèles de volatilité stochastique, les produits dérivés basés sur la variance réalisée, et les méthodes d'estimation telles que la volatilité historique, implicite et le VIX.

## 8.2 Modèles de volatilité stochastique

*Définition 1 (Processus à volatilité stochastique).* On considère un actif sous-jacent  $S_t$  suivant :

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sqrt{v_t} dB_t,$$

où  $v_t$  est un processus stochastique de variance.

*Définition 2 (Modèle de Heston).* Le modèle de Heston spécifie :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + S_t \sqrt{v_t} dB_t^{(1)}, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \eta \sqrt{v_t} dB_t^{(2)}, \\ dB_t^{(1)} dB_t^{(2)} = \rho dt. \end{cases}$$

*Définition 3 (Modèle SABR).* Utilisé pour les taux d'intérêt :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dB_t^{(1)}, \\ d\sigma_t = \alpha \sigma_t dB_t^{(2)}. \end{cases}$$

## 8.3 Produits de volatilité

*Définition 4 (Variance réalisée).* Estimation de la variance par :

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\log S_{t_k} - \log S_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right)^2 - \frac{T}{N-1} \hat{\mu}_N^2.$$

**Définition 5 (Variance swap).** Contrat dont le payoff est :

$$\frac{1}{T} \left( \sum_{k=1}^N \left( \log \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)^2 - \frac{1}{N-1} \left( \log \frac{S_T}{S_0} \right)^2 \right) - \kappa^2.$$

**Définition 6 (Option sur la variance réalisée).** Option avec payoff :

$$\left( \int_0^T \sigma_t^2 dt - \kappa^2 \right)^+.$$

**Théorème 1 (Carr-Lee, 2008).** Si  $\sigma_t$  est indépendant de  $B_t$  :

$$\mathbb{E}^* \left[ \int_0^T \sigma_t^2 dt \right] = 2\mathbb{E}^* \left[ \log \frac{F_0}{S_T} \right],$$

où  $F_0 = S_0 e^{rT}$ .

## 8.4 Estimation de la volatilité

**Définition 7 (Volatilité historique).**

$$\sigma_{\text{hist}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \left( \log \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - \mu \right)^2.$$

**Définition 8 (Volatilité implicite).** Volatilité déduite d'un prix d'option par inversion :

$$BS(S, K, T, r, \sigma) = \text{prix observé.}$$

**Définition 9 (VIX).** Donné par :

$$VIX^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left( \frac{F}{K_0} - 1 \right)^2.$$

## 8.5 Conclusion

Ce chapitre a exposé les fondements mathématiques des modèles de volatilité stochastique, des produits dérivés sur la variance, ainsi que des méthodes pratiques d'estimation. Ces outils constituent la base théorique indispensable à la mise en œuvre de stratégies quantitatives comme : la vol targeting.

Une stratégie de « volatility targeting » ajuste dynamiquement l'exposition d'un portefeuille pour maintenir sa volatilité proche d'un niveau prédéfini [14, 3]. Concrètement, lorsque la volatilité de marché anticipée est inférieure à la cible, on augmente l'exposition (en empruntant ou en levierisant le portefeuille), et inversement on la réduit en période de forte volatilité [14, 3].

L'objectif n'est pas tant d'augmenter le rendement absolu que de stabiliser les fluctuations du portefeuille, en réduisant l'amplitude des plus fortes pertes et en améliorant le profil risque-rendement global [14, 3]. Autrement dit, on cible un niveau de risque constant au lieu d'un montant d'actifs constant [14, 33].

Cette approche de gestion de risque est notamment populaire dans les fonds à volatilité contrôlée et indices cibles, mais elle s'applique aussi à des stratégies multi-actifs (fonds risk parity, indices vol-target, dérivés).

## 9.1 Cadre mathématique du volatility targeting

Le principe central est simple : à chaque période  $t$ , on mesure ou prédit la volatilité du portefeuille ( $\sigma_t$ ) et on calcule un facteur de participation (poids global ou levier)  $w_t$  tel que la volatilité cible  $\sigma^*$  soit atteinte. En notation élémentaire :

$$w_t = \frac{\sigma^*}{\sigma_t}$$

où  $\sigma_t$  est l'estimation de la volatilité (réalisée ou prévue) sur une fenêtre récente. On obtient ainsi en pratique un portefeuille « géré » dont le rendement est :

$$R_t^{(VT)} = w_t R_t^{(unmanaged)}$$

Par exemple, si la cible est de 10% annualisé et que la volatilité estimée du portefeuille sans levier est de 5%, on prend  $w_t = 2$ , soit un levier de 2. Inversement, en phase de forte volatilité (supérieure à la cible),  $w_t < 1$  [3].

## 9.2 Exemples de formules de réallocation

- **Volatilité historique (réalisée) :**

$$\sigma_{hist}(t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2} \Rightarrow w_t = \frac{\sigma^*}{\sigma_{hist}(t)}$$

- **Volatilité exponentielle (EWMA) :**

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad \text{avec } \lambda \approx 0.94 \Rightarrow w_t = \frac{\sigma^*}{\sigma_{EWMA}(t)}$$

- **Volatilité implicite (e.g., VIX) :**

On prend  $\sigma_t$  comme la volatilité implicite extraite d'options. Même principe :

$$w_t = \frac{\sigma^*}{\sigma_{implied}(t)}$$

Les poids dynamiques sont recalculés périodiquement, avec des bornes (caps/floors) [3].

## 9.3 Estimation de la volatilité en pratique

Autres les méthodes qu'on a définies dans le chapitre précédent, on trouve :

**Volatilité exponentiellement lissée (EWMA) :** on utilise un schéma où les observations récentes sont plus importantes. Introduisant un paramètre  $\lambda < 1$ , la variance suit :

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2. \quad (9.1)$$

Cette méthode ( $\lambda \approx 0,94$ ) a été popularisée par RiskMetrics et s'adapte mieux aux changements récents que l'historique fixe [1].

**Modèles GARCH :** ce sont des modèles statistiques de prévision de volatilité conditionnelle. Par exemple, un GARCH(1,1) modélise :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (9.2)$$

capturant l'auto-corrélation dans la variance [2]. Les paramètres  $\omega, \alpha, \beta$  sont estimés sur données passées pour générer  $\sigma_t$  prédit.

## 9.4 Intérêts théoriques et résultats empiriques

L'argument théorique principal est que la volatilité suit un processus à « cluster » : les périodes calmes tendent à précéder d'autres périodes calmes, et vice versa. Du coup, ajuster l'exposition en fonction du risque attendu exploite une inefficience de marché (relation de leverage effect ou effet de levier du marché).

Empiriquement, de nombreuses études montrent que les portefeuilles gérés en vol ciblée ont des rendements plus stables et un meilleur Sharpe. Moreira et Muir (2017) ont démontré

que réduire l'exposition quand la volatilité augmente engendre de grosses  $\alpha$ , avec des gains de Sharpe très significatifs sur de nombreux facteurs boursiers. Harvey et al. (2018) confirment qu'un facteur momentum est introduit : quand la volatilité grimpe (souvent après une chute de marché), le portefeuille réduit automatiquement ses positions, agissant comme une stratégie de momentum au niveau du risque.

Plusieurs effets bénéfiques sont rapportés :

- **Sharpe Ratio amélioré** : sur les actifs « risqués » (actions, crédit), le Sharpe ratio s'accroît notablement. Par exemple, Harvey et al. observent qu'un portefeuille vol-targeted a historiquement obtenu des Sharpe plus élevés que le même portefeuille géré passivement. Une hausse du Sharpe est également observée avant coûts, même si l'avantage est partiellement réduit par les frais de transaction.
- **Réduction de la volatilité et des extrêmes** : la volatilité effective du portefeuille est stabilisée au niveau cible, et sa volatilité des volatilités ("vol-of-vol") baisse fortement. De fait, les chutes brutales sont atténuées : lors de la crise de mars 2020, un portefeuille cible-volatilité a subi une perte bien moindre qu'un portefeuille non géré (cible  $\approx -5\%$  vs  $-25\%$ ). En général, la probabilité de rendements extrêmes (p. ex.  $-10\%$ ) diminue avec le scaling.
- **Moins de drawdowns** : la réduction de risque dynamique limite l'ampleur des « drawdowns » (pertes cumulées max). Les creux gauche (« left tail ») du profil de rendement sont moins profonds pour un portefeuille vol-targeted. Les drawdowns maximaux d'un portefeuille équilibré ou risk-parity sont nettement atténués par le vol targeting.
- **Profil comportemental** : en « smoother ride », le portefeuille procure une trajectoire plus régulière, ce qui aide à la gestion psychologique des investisseurs. Surtout pour des investisseurs proches de la retraite, un portfolio multi-actifs vol-targeted offre une volatilité maîtrisée et un rendement ajusté du risque attractif.

En résumé, la cible de volatilité permet aux investisseurs d'« acheter bas et vendre haut » en adaptant l'exposition au risque. Plutôt que de subir un risque constant, le portefeuille se déleste au pire moment (vol élevée) et se renforce quand la volatilité est faible. Ceci a pour effet d'augmenter le rendement moyen relatif (Sharpe et  $\alpha$ ), tout en abaissant la probabilité de pertes massives. Un exemple multi-actifs (l'index RAGMAE) montre que la version volatile-managed a une volatilité plus basse (5,1% vs 5,7%), un Sharpe légèrement supérieur (1,29 vs 1,20) et surtout une volatilité des volatilités beaucoup plus faible (0,2% vs 1,1%) que le portefeuille non géré. Cela confirme empiriquement que le ciblage de volatilité « aplanit » le profil de risque et améliore l'efficacité du portefeuille.

## 9.5 Comparaisons avec d'autres approches de gestion de risque

Le volatility targeting partage des principes avec d'autres stratégies basées sur le risque :

**Risk Parity (parité de risque)** : cette méthode vise à égaliser la contribution au risque (variance) de chaque classe d'actifs du portefeuille. En pratique, on pondère chaque actif à l'inverse de sa volatilité anticipée, puis on normalise l'ensemble (une forme de volatility targeting

multi-actifs). Par exemple, un simple portefeuille risk parity (actions, obligations, matières premières) calibré pour égaliser les risques historiques délivre des Sharpe bien supérieurs à un 60/40 classique. La principale différence est que le risk parity tient aussi compte de la covariance entre actifs et vise un partage égal, tandis que le vol targeting ajuste plutôt le levier global. Néanmoins, on peut combiner les deux : beaucoup de fonds risk parity appliquent aussi une cible de volatilité totale au fonds. Les deux approches sont procycliques (lever en basses vol, delever en hautes vol) et peuvent s'enrichir l'une l'autre.

**Allocation fixe ou 60/40** : contrairement à une règle statique (ex. toujours 60% actions / 40% obligations), la vol-target évite que le risque du portefeuille fluctue naturellement avec les marchés. Un 60/40 classique n'a pas de mécanisme pour réduire l'exposition en cas de crise, donc sa volatilité peut facilement dépasser la cible recherchée. En revanche, un 60/40 vol-targeted – qu'il soit équilibré ou risk parity – conservera une volatilité constante. Empiriquement, cela conduit souvent à des ratios de Sharpe plus élevés et des drawdowns plus faibles que le 60/40 purement passif. Un portefeuille risk parity sur trois classes, réajusté pour atteindre 10% de vol, améliore d'environ 63% le Sharpe par rapport au 60/40 historique (0,45 vs 0,28).

**Autres approches dynamiques** : on peut citer les stratégies CTA (tendances) ou CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance). Le vol targeting agit en quelque sorte comme un CPPI implicite sur la volatilité : on n'a pas de plancher de capital fixé, mais on a un plafond de risque ajusté. Comme pour le CPPI, un problème potentiel est la verrouillage : si de nombreux acteurs suivent la même règle de gestion dynamique, cela peut provoquer des spirales procycliques (cf. crise COVID). Certains travaux étudient précisément l'effet de renforcement sur les marchés à la baisse (risk parity et vol targeting ont réduit leur exposition simultanément en mars 2020).

Dans l'ensemble, la littérature académique conclut que le volatility targeting est une approche de gestion du risque complémentaire aux allocations classiques. Il améliore généralement les mesures de risque-ajusté par rapport à des portefeuilles fixes, au prix toutefois d'une complexité et d'un turnover plus élevé. Les études comparatives montrent que la combinaison de diversification multi-actifs (diversification) et de contrôle de la volatilité (volatility targeting) peut être particulièrement efficace pour réduire les pertes extrêmes.

## Classes d'actifs concernées

Les stratégies de volatility targeting peuvent s'appliquer à toutes sortes d'actifs, mais leur efficacité empirique dépend de la nature du marché.

**Actions et indices boursiers.** Sur actions, où la volatilité est élevée et variable, le vol targeting donne souvent de nets bénéfices en Sharpe. Les fonds « actions gérées » (managed volatility equity ETFs) utilisent typiquement ce principe. Il est aussi utilisé sur des indices boursiers (via contrats futures ou options) pour créer des indices à volatilité constante.

**Crédit et obligations souveraines.** Les actifs de crédit ont aussi vu leur Sharpe s'améliorer avec un scaling de volatilité, mais l'effet est généralement plus faible que sur actions. Pour les obligations d'État de haute qualité et le change (FX), l'impact de la pondération en vol est souvent négligeable. Ces actifs présentent moins de leverage effect (peu de corrélation négative retour-vol), donc ajuster l'exposition change peu leur performance risk-adjusted.

**Matières premières.** Les volumes de données sont parfois moindres, et la volatilité des commodités est souvent étroitement liée aux marchés financiers en crise. L'impact du vol targeting sur la performance risque-ajustée des matières premières est faible. Toutefois, dans des portefeuilles multi-actifs, inclure des matières premières peut améliorer la diversification générale.

**Portefeuilles multi-actifs et indices synthétiques.** On trouve des indices et fonds combinant actions, obligations, matières premières dans une stratégie globale de volatilité cible (ex. indices de type Risk Parity ciblant 10% de vol). Un exemple est un indice visant 5% de volatilité et regroupant 22 futures d'actions, de crédit, de taux et de commodities. De telles allocations bénéficient de l'effet anti-cyclique du vol targeting sur plusieurs classes simultanément, réduisant globalement la volatilité du portefeuille et offrant une diversification accrue.

En somme, bien que le vol targeting ait d'abord été testé sur les actions, il est tout à fait pertinent pour les portefeuilles multi-actifs et pour les stratégies quantitatives globales, à condition de disposer de liquidités suffisantes pour les ajustements fréquents.

## Limites et risques

Malgré ses atouts, le volatility targeting comporte plusieurs limites et risques pratiques :

**Délai et réactivité limitées.** Les estimations de volatilité (historiques, EWMA, GARCH) réagissent avec retard aux changements soudains de régime. Lors d'une crise très rapide, le portefeuille peut ne pas réduire assez vite l'exposition, ou inversement se désengager trop tard. Lors de phases de forte correction, la règle de rééquilibrage peut ne pas suivre les corrections du marché à temps.

**Coûts de transaction accrus.** Maintenir une volatilité constante implique des rééquilibrages fréquents (relever ou baisser le levier) dès que la volatilité bouge. Cela engendre un turnover élevé et donc des frais de trading non négligeables. L'amélioration du Sharpe est souvent compensée par ces coûts de transaction supplémentaires.

**Risque de surajustement et de modèle.** Les résultats du vol targeting dépendent fortement du modèle de volatilité utilisé. Si l'on surajuste un modèle aux données passées, la prévision peut mal tenir en cas de situation nouvelle. En particulier avec des GARCH ou d'autres modèles statistiques complexes, on prend le risque de calibrer un système qui ne s'adapte pas assez vite aux nouvelles conditions de marché.

**Pro-cyclicité et risque systémique.** Comme toute stratégie contracyclique, le vol targeting peut en théorie amplifier les mouvements extrêmes quand beaucoup d'acteurs l'utilisent simultanément (phénomène de feedback). Certaines stratégies ont été contraintes de liquider massivement leurs positions lors du pic de volatilité de mars 2020, contribuant potentiellement à la spirale baissière. En présence de nombreux fonds gérés en volatilité cible, les flux concurrents pourraient créer un effet CPPI inversé (liquidation forcée en masse). De plus, la volatilité implicite utilisée peut être soumise aux comportements de marché (paniques, effets de mode).

**Limites de mise en œuvre.** Les contraintes pratiques (marges, limites de levier, liquidités) peuvent interdire d'atteindre exactement la cible, surtout en cas de choc de marché (où les actifs deviennent moins liquides). Certains fonds imposent alors des plafonds de levier ou des cours de rééquilibrage pour éviter une sur-réaction.

En résumé, le volatility targeting doit être implémenté prudemment : le modèle d'estimation doit être robuste, les coûts de rééquilibrage raisonnés, et les limites de levier bien contrôlées. Il s'agit d'un outil de gestion de risque, mais non d'une panacée : les changements soudains de régime (ex. volatilité structurellement élevée ou faible pendant longtemps) peuvent réduire son efficacité, et la surpopulation de ces stratégies peut créer des risques systématiques.

## 9.6 Implémentation de la stratégie Volatility Targeting

La stratégie Volatility Targeting a été implémentée sur l'indice S&P 500 afin d'évaluer ses propriétés de stabilisation du risque et de comparaison avec une gestion passive. Contrairement aux approches d'allocation statique, cette stratégie ajuste dynamiquement l'exposition au S&P 500 en fonction de la volatilité réalisée sur une fenêtre glissante de 21 jours. Plusieurs cibles de volatilité annualisée ont été considérées : 5%, 10% et 15%.

### 9.6.1 Cadre d'implémentation

Les données historiques de prix sont ajustées pour les dividendes. Le rendement quotidien est calculé en logarithme, et la volatilité réalisée est estimée selon :

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2} \times \sqrt{252}$$

avec  $N = 21$  jours de bourse. Le levier est ensuite calculé par la formule :

$$\text{Lever}_t = \min \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_t}, \text{Lever}_{\max} \right)$$

avec  $\sigma^*$  la cible et  $\text{Lever}_{\max} = 3$ . Le rendement ajusté est donc :

$$R_t^{(\text{VT})} = \text{Lever}_{t-1} \cdot R_t - \text{Turnover}_t \cdot c$$

où  $c = 7.5$  bps est un coût de transaction appliqué à chaque variation de levier (turnover).

## 9.6.2 Algorithme de la stratégie Vol Target

---

**Algorithm 3:** Implémentation d'une stratégie Vol Target simple

---

**Data:** Prix quotidien du S&P 500

**Result:** Valeur cumulée du portefeuille

```

1 Initialiser la NAV à 100;
2 Calculer les rendements logarithmiques  $r_t$ ;
3 for chaque jour  $t$  avec  $t \geq N$  do
4   Calculer la volatilité réalisée  $\sigma_t$  sur les 21 derniers jours;
5   if  $\sigma_t > 0$  then
6     Calculer le levier cible :  $w_t = \min\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_t}, 3\right)$ ;
7   else
8      $w_t = 0$ 
9   end
10  Calculer le turnover :  $|w_t - w_{t-1}|$ ;
11  Calculer le coût de transaction :  $\text{Coût}_t = \text{turnover} \times 0.00075$ ;
12  Calculer le rendement ajusté :  $R_t^{(VT)} = w_{t-1}r_t - \text{Coût}_t$ ;
13  Mettre à jour la NAV :  $\text{NAV}_t = \text{NAV}_{t-1} \cdot (1 + R_t^{(VT)})$ ;
14 end

```

---

## 9.6.3 Résultats empiriques et impact des coûts

La Figure 9.2 présente la performance cumulée des stratégies avec trois cibles de volatilité (5%, 10%, 15%) comparées à un portefeuille Buy & Hold. L'effet de stabilisation du profil de risque est bien visible, surtout pour les cibles basses. Le tableau 9.1 synthétise les métriques clés.

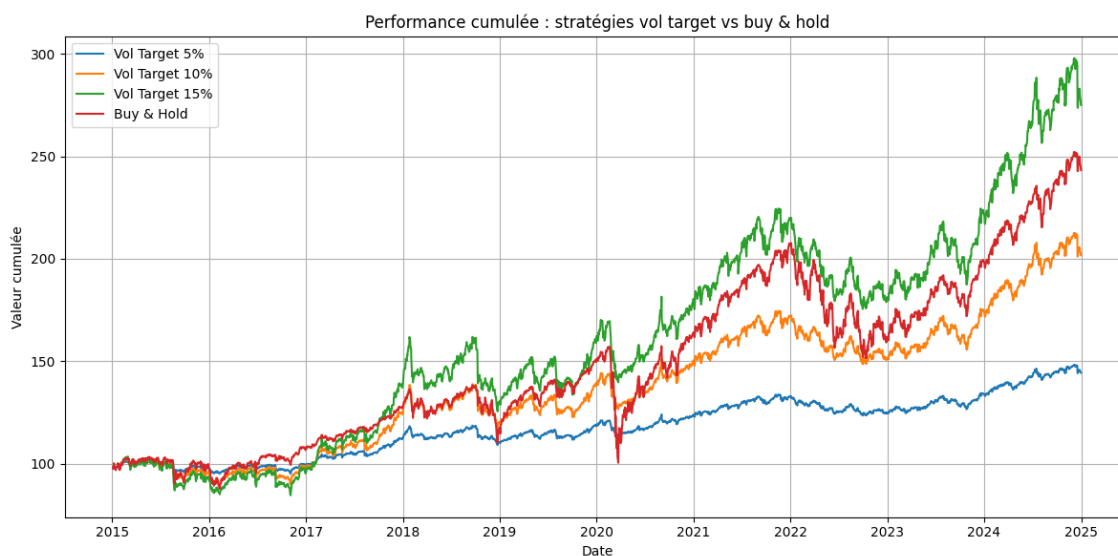


FIGURE 9.1 – Performance cumulée des stratégies Vol Target vs Buy & Hold

Stratégie	Rendement annualisé	Vol. annualisée	Sharpe	Max Drawdown
Vol Target 5%	3.40%	5.71%	0.60	-8.08%
Vol Target 10%	6.56%	11.42%	0.57	-15.81%
Vol Target 15%	9.61%	17.05%	0.56	-23.17%
Buy & Hold	8.40%	18.20%	0.46	-33.50%

TABLE 9.1 – Métriques de performance (nettes de coûts) des stratégies Vol Target

On observe que la stratégie Vol Target réduit efficacement la volatilité et les drawdowns comparativement au Buy & Hold. La version à 5% de cible est particulièrement stable. Toutefois, le Sharpe ratio reste relativement constant avec la cible de vol, indiquant que le gain de rendement se paye par un risque proportionnel.

### 9.6.4 Discussion sur les coûts de transaction



FIGURE 9.2 – Performance cumulée des stratégies Vol Target vs Buy &amp; Hold avec coûts de transactions

Parmi les stratégies quantitatives, la Volatility Targeting est l'une des plus sensibles aux coûts de transaction. En effet :

- Elle implique des ajustements de levier fréquents, surtout lorsque la volatilité du marché fluctue fortement.
- Le turnover quotidien, même modeste (ex : variation de levier de 0.1), entraîne un coût répété ( $0.1 \times 7.5\text{bps} = 0.75\text{bps/j}$ ).
- L'impact cumulatif sur les performances est substantiel : environ 60-100 bps de perte de rendement annuel sur une cible à 15%, comme observé dans notre backtest.

Par conséquent, il est impératif d'intégrer ces frictions dès la conception de la stratégie, voire de limiter la fréquence de rééquilibrage (hebdomadaire ou mensuelle), ou encore d'utiliser des seuils de tolérance (« no-trade bands »). L'optimisation de la fenêtre d'estimation de la volatilité, ainsi que le choix du proxy (réalisée vs implicite), sont également critiques.

En dépit de ces limitations, les stratégies à volatilité cible restent un pilier de la gestion alternative, notamment dans les fonds institutionnels et les mandats QIS. Leur simplicité

conceptuelle, leur capacité à lisser les performances et à contenir le drawdown, en font des candidats idéaux pour une allocation systématique contracyclique dans un portefeuille diversifié.

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PRESPECTIVES

Ce dernier chapitre de conclusion synthétise les principaux résultats de cette étude, tout en mettant en lumière les contributions méthodologiques et empiriques apportées au domaine des stratégies quantitatives d'investissement.

Dans une première phase, nous avons étudié les stratégies de couverture actions, à travers le Buy-Write, le Collar classique et l'Enhanced Collar. Ces approches ont démontré, via des backtests sur l'indice S&P 500, leur capacité à réduire le risque de perte en capital, tout en générant un revenu additionnel. L'implémentation rigoureuse du pricing des jambes optionnelles, notamment via le modèle expOU calibré sur le VIX, a permis une évaluation réaliste des performances.

Ensuite, nous avons exploré les stratégies sur les produits de taux d'intérêt, en particulier une stratégie de carry & roll-down sur swaptions, modélisée à l'aide des cadres stochastiques de Vasicek et Cheyette. Les résultats empiriques montrent que ces approches permettent de capturer des primes de risque spécifiques aux mouvements de la courbe des taux, tout en restant robustes à travers divers environnements de marché.

Enfin, la dernière partie a porté sur les stratégies de volatility targeting, qui ajustent dynamiquement l'exposition pour maintenir une volatilité cible constante. Ces stratégies ont démontré une amélioration notable du profil rendement/risque par rapport aux approches passives, notamment en période de forte instabilité des marchés.

Sur le plan des contributions, ce mémoire a permis :

- la mise en œuvre empirique de stratégies systématiques combinant produits vanilles et exotiques et la réalisation de leurs backtesting ;
- la calibration de modèles stochastiques avancés pour le pricing d'options ;
- et l'évaluation comparative des performances selon des critères robustes (PnL, drawdown, Sharpe).

**Perspectives futures.** Plusieurs pistes de recherche peuvent prolonger ce travail. D'un point de vue méthodologique, l'introduction de modèles de taux ou de volatilité avec sauts (ex : modèles à intensité ou variance gamma) permettrait de mieux capturer les discontinuités de marché.

Mais surtout, une voie prometteuse réside dans l'intégration de techniques de Deep Hedging. En mobilisant les réseaux neuronaux profonds pour approximer des stratégies de couverture

optimales dans des environnements de marché non modélisables analytiquement, le deep hedging permet de dépasser les limites des modèles classiques et d'optimiser la gestion dynamique du risque, notamment dans des contextes de pricing non linéaire ou sous contraintes opérationnelles.

Ainsi, cette étude s'inscrit à la croisée des mondes : entre rigueur académique, pertinence opérationnelle et innovations technologiques, illustrant pleinement le rôle de l'ingénierie financière dans la structuration de stratégies à haute valeur ajoutée.

- [1] Ewma volatility. <https://www.investopedia.com/terms/e/ewma.asp>, .
- [2] Garch model. <https://www.investopedia.com/terms/g/garch.asp>, .
- [3] Research Affiliates. Volatility targeting : A risk management tool, 2020. URL [https://www.researchaffiliates.com/en\\_us/publications/articles/775-volatility-targeting.html](https://www.researchaffiliates.com/en_us/publications/articles/775-volatility-targeting.html).
- [4] Michaela Bartonová. Hedging of sales by zero-cost collar and its financial impact. *Journal of Competitiveness*, 4(2) :111–127, 2012.
- [5] Resonanz Capital. Quantitative investment strategies : A guide for hedge fund investors. <https://resonanzcapital.com/hubfs/quantitative-investment-strategies.pdf>, 2023. White Paper, November 2023.
- [6] Mark M. Carhart. On persistence in mutual fund performance. *The Journal of Finance*, 52(1) :57–82, 1997.
- [7] Olivier Chayette. Markov representation of the heath-jarrow-morton model. In *Proceedings of the Fifth Annual Conference on Financial Mathematics*, 1994.
- [8] Martijn Cremers and Antti Petajisto. How active is your fund manager? a new measure that predicts performance. *The Review of Financial Studies*, 22(9) :3329–3365, 2009.
- [9] Louis D’Antonio. Equity collars as alternative to asset allocation. *Journal of Financial Service Professionals*, 62(1) :67–76, 2008.
- [10] Nicole El Karoui. Couverture des risques dans les marchés financiers, 2003.
- [11] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1) :3–56, 1993.
- [12] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. Luck versus skill in the cross section of mutual fund returns. *The Journal of Finance*, 65(5) :1915–1947, 2010.
- [13] Barry Feldman and Dhruv Roy. Passive options-based investment strategies : The case of the cboe s&p 500 buywrite index. *ETF and Indexing*, 38(1) :72–89, Fall 2004.

- [14] Man Group. Volatility targeting : How and why it works, 2021. URL <https://www.man.com/maninstitute/volatility-targeting>.
- [15] Joanne M. Hill, Venkatesh Balasubramanian, Krag Gregory, and Ingrid Tierens. Finding alpha via covered call writing. *Financial Analysts Journal*, 62(5) :29–46, September 2006.
- [16] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, 10 edition, 2018.
- [17] Roni Israelov and Matthew Klein. Risk and return of equity index collar strategies. *Journal of Alternative Investments*, 19(1) :41–54, 2016.
- [18] Roni Israelov and Lars Nielsen. Covered call strategies : One fact and eight myths. *Financial Analysts Journal*, 70(6) :23–31, November 2014.
- [19] Roni Israelov and Lars Nielsen. Covered calls uncovered. *Financial Analysts Journal*, 71(6) :44–57, November 2015.
- [20] Michael C. Jensen. The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of Finance*, 23(2) :389–416, 1968.
- [21] Zura Kakushadze and Juan Andrés Serur. *151 Trading Strategies*. Palgrave Macmillan, an imprint of Springer Nature, Cham, Switzerland, 1st edition, 2018. <https://ssrn.com/abstract=3247865>.
- [22] John Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1) :13–37, 1965.
- [23] JPMorgan Asset Management. Jpmorgan hedged equity fund – quarterly portfolio commentary, 2023. Available at : <https://am.jpmorgan.com>.
- [24] Cboe Global Markets. Cboe s&p 500 zero-cost put spread collar index (c1lz). <https://www.cboe.com/us/indices/dashboard/c1lz/>, 2023. Index methodology and daily data.
- [25] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1) :77–91, 1952.
- [26] Harry Markowitz. *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*. John Wiley Sons, New York, 1959.
- [27] Zaur Mukharlyamov and Antoon Pelsser. A robust stochastic volatility model for interest rate dynamics. Technical report, Maastricht University, 2023. URL <https://ssrn.com/abstract=4315906>. SSRN Working Paper ID : 4315906.
- [28] Josep Perelló, Ronnie Sircar, and Jaume Masoliver. Option pricing under stochastic volatility : the exponential ornstein-uhlenbeck model. *arXiv preprint arXiv :0805.3846*, 2008. <https://arxiv.org/abs/0805.3846>.
- [29] Risk.net. Equity derivatives house of the year : Société générale, November 2012. URL <https://www.risk.net/derivatives/structured-products/2220186/equity-derivatives-house-year>.
- [30] Mark Rubinstein. Forward start options. *Financial Analysts Journal*, 47(2) :51–56, 1991.

- [31] William F. Sharpe. Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3) :425–442, 1964.
- [32] William F. Sharpe. The arithmetic of active management. *Financial Analysts Journal*, 47(1) :7–9, 1991.
- [33] Duke University. Volatility targeting and risk control, 2019. URL <https://people.duke.edu/~vol-targeting.pdf>.
- [34] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2) :177–188, 1977.
- [35] Robert E. Whaley. Return and risk of choe buy write monthly index. *Journal of Derivatives*, 10(2) :35–42, Winter 2002.

## Groupe Société Générale

La Société Générale a fait son départ le 4 mai 1864 après avoir signé le décret donnant naissance à Société Générale par Napoléon III, et depuis sa création la SG favorise le développement du commerce et de l'industrie en France.

Dès ses débuts, La Société Générale s'est engagée dans la modernisation de l'économie, devenant une banque diversifiée et innovante en matière de financement. Son réseau d'agences s'est rapidement étendu à travers le pays, passant de 46 à 1500 guichets entre 1870 et 1940. Elle est devenue le premier établissement de crédit français en termes de dépôts. Parallèlement, Société Générale a pris une dimension internationale en participant au financement d'infrastructures essentielles au développement économique de plusieurs pays d'Amérique latine, d'Europe et d'Afrique du Nord.

Le groupe Société Générale concrétise plusieurs valeurs dans toutes ses activités, Et parmi ces valeurs on cite Esprit d'équipe, Responsabilité, Innovation, Engagement ect. Société Générale, un des tout premiers groupes européens de services financiers et acteur important de l'économie depuis plus de 150 ans, accompagne au quotidien 32 millions de clients grâce à ses plus de 148000 collaborateurs présents dans plus de 76 pays.

Au Maroc depuis plus d'un siècle la SG contribue dans la stratégie de développement de l'économie de notre pays, et dans l'accompagnement dynamique de bancarisation.

De plus, SG a toujours comme objectif la satisfaction clientèle à travers son renforcement et promouvoir de la qualité de ses services et de sa confiance et en plus de développer sa proximité vers ses clients, et c'est grâce à ses plus de 800000 Clients, 4000 collaborateurs, 450 guichets automatiques et 400 agences.

## Société Générale Corporate & Investment Banking

La Banque de Financement et d'Investissement (SG-CIB) constitue le pivot du modèle de banque universelle de la Société Générale. Forte de sa diversification, elle se positionne en leader avec environ 12000 collaborateurs répartis dans 31 pays en Europe, en Amérique et en Asie Pacifique. En accompagnant ses clients à travers divers secteurs, la SG-CIB leur propose des solutions sur mesure, s'appuyant sur son expertise mondiale en matière de banque d'investissement, de financements et d'activités de marchés.

Pour les entreprises, les institutions financières et le secteur public, la SG-CIB offre une approche de conseil globale (fusion-acquisitions, dette, actions, capital et gestion actif-passif), des solutions de levée de capitaux en dette ou en actions, ainsi que des financements optimisés et des réponses aux besoins de couverture, notamment dans le domaine du change et des taux.

Pour les investisseurs, SG CIB propose des opportunités d'investissement adaptées ainsi que des solutions fiables en matière de gestion du risque. Elle met à disposition une plateforme intégrée offrant un accès global aux marchés (actions, taux, crédit, change, matières premières et dérivés), des services de conseil et d'ingénierie financière, une qualité d'exécution, une recherche approfondie sur les différentes classes d'actifs, ainsi qu'une offre leader en matière de compensation et de prime brokerage.

## Société Générale Africa Technologies & Services

Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS) a été créée depuis 2014 par le groupe Société Générale dans le but de fournir des solutions pertinentes, agiles et efficaces aux salles des marchés de la banque en Europe (principalement à Paris et Londres) et à fin de les aider à développer tous les outils nécessaires pour répondre d'une part aux besoins de clients et d'autre part aux exigences de plus en plus fortes imposées par les différentes législations bancaires internationales.

SG ATS est basée à Casablanca exactement au 42 Boulevard Abdelmoumen, Casablanca - Settat MA à l'Immeuble Walili Street, elle est dirigée par la Directrice Générale Mme. Widad Azzam Lahlou. Aujourd'hui dans SG ATS plusieurs Spécialisations telles que Finance de marché, Pricing, Ingénierie financière et Recherche & Développement ect, sont pratiquées pour fournir des prestations à forte valeur et à différentes lignes de métiers du Groupe SG (en Europe principalement mais également aux Etats-Unis et en Asie) sur des activités de marchés de Société Générale, composé d'équipes basées à Paris, Londres, New-York et Hong-Kong.



FIGURE A.1 – Logo de SG ATS