

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation de la structure par terme de taux d'intérêt

Préparé par : *Mme Zineb BEN-SAID*

Sous la direction de : *M. Fouad EL ABDI (INSEA)*
Mme Fatima Zohra EL BOQ (CDG Capital)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Fouad EL ABDI (INSEA)*
- *M. Fouad MARRI (INSEA)*
- *Mme. Fatima Zohra EL boq (CDG Capital)*

Résumé

La structure par terme des taux d'intérêt constitue jusqu'à aujourd'hui un domaine de recherche intéressant et novateur. Ainsi, les études révèlent un intérêt croissant des chercheurs pour les théories et les modèles relatifs à la construction et l'explication des variations de la courbe des taux d'intérêt.

L'analyse des taux d'intérêt des bons de Trésor nécessite l'utilisation des théories et des modèles capables de décrire et de modéliser leur comportement. Ces modèles utilisés doivent donc tenir compte de la composante temporelle et doivent être capables de déterminer la relation entre la courbe des taux d'intérêt et les facteurs susceptibles de l'influencer.

En effet l'objectif principal de ce travail est de développer sous VBA Excel un outil de stripping de la courbe obligataire. Après, nous envisagerons de l'utiliser pour évaluer les Bons de Trésor à taux fixe. Il existe plusieurs classes de méthodes de modélisation de la courbe des taux. On adoptera dans cette étude, deux grandes classes ; les modèles empiriques et les modèles financiers. Les premiers aborderont des méthodes d'interpolation. Les seconds traiteront respectivement les modèles de Nelson Siegel, de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.

Mots Clés :

Modèle de taux d'intérêt, courbe des taux zéro-coupon, modèle de Nelson-Siegel, modèle, modèle de Cox-Ingersoll-Ross, modèle de Vasicek, valorisation

Abstract

The term structure of interest rates is an interesting and innovative area of research. Thus, studies reveal a growing interest of researchers in theories and models related to the construction and explanation of the variations of the interest rate curve.

The analysis of interest rates on Treasury bonds requires the use of theories and models capable of describing and modeling their behavior. The models used must therefore take into account the time component and must be able to determine the relationship between the interest rate curve and the factors that may influence it.

Indeed, the main objective of this work is to develop in VBA Excel a tool for stripping the bond curve. Afterwards, we will consider using it to evaluate fixed-rate Treasury bonds. There are several classes of methods for modeling the yield curve. In this study, we will adopt two main classes; empirical models and financial models. The former will deal with interpolation methods. The latter will deal respectively with the Nelson Siegel, Vasicek and Cox, Ingersoll and Ross models.

Keywords:

interest rate model, zero-coupon yield curve, Nelson-Siegel model, model, Cox-Ingersoll-Ross model, Vasicek model, pricing

Dédicace

Je dédie ce modeste travail comme témoignage d'affection, de respect et de gratitude :

A mon très cher père et à ma très chère mère,

Merci pour votre amour, merci pour l'enseignement que vous m'avez transmis, merci d'avoir toujours cru en moi et de m'avoir toujours soutenu, merci de trimer sans relâche au bien être de vos enfants en dépit des péripéties de la vie et mille merci pour vos prières et pour l'encouragement sans limites que vous ne cessez de m'offrir.

A mes très chers frères et ma très chère sœur,

En témoignage de toute l'affection, des profonds sentiments fraternels que je vous porte et de l'attachement qui nous unit, je vous souhaite du bonheur et du succès dans toute votre vie.

A tous ceux dont l'oubli de la plume n'est pas celui du cœur...



Lineb

Remerciement

Il m'apparaît agréable et opportun, avant de développer mon expérience professionnelle, de m'acquitter d'une dette de remerciements auprès de toutes les personnes dont l'intervention au cours de ce stage a favorisé son aboutissement.

Ainsi, je tiens d'abord à remercier notre professeur et encadrant Mr. EL ABDI Fouad pour son encadrement tout au long de ce stage, et pour ces conseils et remarques pertinents.

Je saisis l'occasion pour remercier vivement mon encadrant Capital Mme EL BOQ Fatima Zohra trader au sein du Desk monétaire à la salle des marchés de la CDG Capital. Votre dynamisme, vos compétences jointes à vos qualités scientifiques seront pour moi un exemple à suivre. Je vous prie de croire l'expression de mon profond respect et de trouver dans ce travail le témoignage de ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe de la salle des marchés de la CDG Capital pour leur accueil leur aide, leur sympathie.

Je conserve un remerciement spécial à mon respectueux professeur Mr. MARRI Fouad, de m'avoir honorée de siéger parmi mon jury de soutenance, et d'accepter d'évaluer ce travail.

Enfin, je ne pourrai oublier de remercier tous mes professeurs de l'INSEA. Merci pour toutes ces longues heures passées à nous expliquer et à nous réexpliquer, merci pour le souci de nous apporter une formation complète et intéressante ; et bref, merci d'avoir été toujours là

Table des matières

INTRODUCTION.....	5
CHAPITRE 1 : PRESENTATION GENERALE	3
I. CONTEXTE ET MOTIVATION	4
<i>I.1 Salle des marchés :</i>	4
I.1.1 Front Office :.....	4
I.1.2 Middel Office :	5
I.1.3 Back Office :	5
<i>I.2 Marché obligataire marocain :</i>	5
I.2.1 Marché des taux :	5
I.2.2 Marché monétaire :.....	5
I.2.3 Marché obligataire :	5
I.2.4 Les intervenants sur le marché obligataire :.....	6
I.2.4.1 Les émetteurs :.....	6
I.2.4.2 Les investisseurs :.....	6
I.2.4.3 L'autorité Marocaine du Marché des Capitaux :	7
I.2.4.4 Les sociétés de bourse :	7
I.2.4.5 Le dépositaire des titres MAROCLEAR :	8
<i>I.3 Problématique :</i>	8
II. NOTION FINANCIERE	9
<i>II.1 Obligation et taux d'intérêt :</i>	9
II.1.1 Obligations zéro-coupon :	9
II.1.1.1 Définition Obligation zéro-coupon :.....	9
II.1.2 Obligation à coupons :.....	9
II.1.2.1 Définition Obligation à coupon	9
II.1.3 Obligation courue :.....	11
II.1.3.1 Définition : Obligation couru :.....	11
II.1.4 Taux d'intérêt zéro coupon (spot) :.....	12
II.1.4.1 Définition : Le taux zéro coupon :	12
II.1.4.2 Définition : Taux spot instantané	12
II.1.5 Le taux d'actualisation :.....	12
II.1.6 Taux de rendement actuariel :	13
<i>II.2 Courbe de taux :</i>	14
<i>II.3 Utilité de la courbe des taux.....</i>	15
CHAPITRE 2 : STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTERETS	16
I. RECONSTITUTION DE COURBE ZÉRO-COUPON :	17
<i>I.1 Reconstitution de courbe Zéro-Coupon : Théorie</i>	17
I.1.1 Extraction des taux zéro coupon :	17
I.1.1.1 Sur le court terme :	17
I.1.1.2 Sur le long terme :	17
I.1.2 Modèle de reconstitution de courbe de taux	18
I.1.2.1 Méthode directe de reconstitution : interpolation.....	18
I.1.2.2 Méthode indirecte de reconstitution : Nelson-Siegel	20
<i>I.2 Reconstitutions de courbe Zéro-Coupon : Application.....</i>	21
I.2.1 Méthode interpolation linéaire	22
I.2.2 Méthodes Nelson-Siegel.....	24
II. MODÉLISATION STOCHASTIQUE	27

II.1.1 Introductions	27
II.2 Lemme d'Ito.....	27
II.3 Méthode directe : Vasicek	28
II.4 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross	30
II.5 Implémentation des modèles stochastique de la courbe des taux (application).....	31
II.5.1 Vasicek	31
II.5.1.1 Discrétisation du modèle de Vasicek :	31
II.5.1.2 Analyse des données.....	32
II.5.1.3 Statistique descriptive de la série TMP journalier :	33
II.5.1.4 Test de racine unitaire (Dickey-Fuller Augmenté) :	34
II.5.1.5 Test d'autocorrélation :	36
II.5.1.6 Estimation des paramètres du modèle	37
II.5.1.7 Test d'homoscédasticité des résidus :	38
II.5.1.8 Test de normalité :	39
II.5.1.9 Test du bruit blanc	40
II.5.1.10 Estimation de la prime de risque	40
II.5.1.11 Prime à terme	42
II.5.2 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross	43
II.5.2.1 Discrétisation du modèle de CIR	44
II.5.2.2 Estimation des paramètres de modèle	44
II.5.2.3 Test d'hétéroscédasticité pour le modèle CIR.....	45
II.5.2.4 Test de normalité des résidus :	46
II.5.2.5 Estimation de la prime de risque :	46
CHAPITRE 3 : VALORISATION.....	48
I. VALORISATION DU PORTEFEUILLE OBLIGATAIRE	49
I.1 Evaluation des titres de créances de maturité initiale inférieure ou égale à 1 an :.....	49
I.2 Evaluation des titres de créances de maturité initiale supérieure à 1 an :	49
I.3 Pricer de BDT :	50
II. VALORISATION DU PRODUIT OPTION	52
II.1 Les éléments caractéristiques d'une option sont les suivants :	52
II.2 Formule de Black-Scholes	52
II.3 Pricer Black-Scholes	53
CONCLUSION.....	54
BIBLIOGRAPHIE :	55
ANNEXES.....	56

Liste des figures

Figure 1 : Diagramme de flux d'une obligation zéro-coupon.....	9
Figure 2 : Diagramme de flux d'une obligation à coupons.....	11
Figure 3 : Coupon Couru d'une Obligation.....	11
Figure 4 : les forme des courbes de taux d'intérêts.....	14
Figure 5 : Base de donnée BAM du marché obligataire secondaire pour la date 15/03/2022	22
Figure 6 : Construction de la courbe ZC par interpolation sous VBA pour la date 15/03/2022	23
Figure 7 : Comparaison entre de la courbe Zéro-Coupon du marché et la courbe interpoler pour la date 15/03/2022.....	23
Figure 8 : Reconstruction de la courbe Zéro-Coupon avec la méthode Nelson-Siegel pour la date 15/03/2022.....	25
Figure 9 : Comparaison entre la courbe Zéro-Coupon du marché et la courbe estimée par la méthode de Nelson-Siegel pour la date 15/03/2022.....	25
Figure 10 : Evolution journalière du TMP entre 2008 et 2022 réaliser par l'auteur sur Eviews.....	33
Figure 11 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier	33
Figure 12 : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté sur le taux cour pour l'existence d'une tendance (sortie Eviews)	35
Figure 13 : : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté sur le taux cour pour la significativité de la constante (sortie Eviews).....	35
Figure 14 : Résultats du test de racine unitaire pour la stationnarité de la série du taux court (sortie EViews).....	36
Figure 15 : Corrélogramme (autocorrélations simple et partielle) du TMPjj réalisé par l'auteur sur Eviews	36
Figure 16 : Résultats d'estimation par la méthode des MCO réalisée par l'auteur sur EViews.....	37
Figure 17 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité du modèle Vasicek réalisée par l'auteur sur EViews	38
Figure 18 : Test de la normalité des résidus du modèle Vasicek réalisée par l'auteur sur EViews.....	39
Figure 19 : Corrélogramme des résidus du modèle Vasicek.....	40
Figure 20 : Estimation de la valeur de la prime de risque du modèle Vasicek et calcul des rendements zéro coupon	41
Figure 21 : Comparaison entre la courbe réel et la courbe de Vasicek pour la date 15/03/2022	42
Figure 22 : Prime de terme du modèle Vasicek	43
Figure 23 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle CIR par la méthode des MCO réalisée par l'auteur sur EViews.....	45
Figure 24 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité du modèle CIR réalisée par l'auteur sur EViews	45
Figure 25 : test de normalité du modèle CIR réalisée par l'auteur	46
Figure 26 : Estimation de la valeur de la prime de risque du modèle CIR et calcul des rendements zéro coupon	47
Figure 27 : Comparaison entre la courbe réel et la courbe de CIR pour la date 15/03/2022	47
Figure 28 : Interface de pricer des Bons de Trésor réalisé par l'auteur sur VBA Excel.....	51
Figure 29 : Pricer d'options Black & Scho	54
Figure 30 : Organigramme du groupe CDG Capital	57
Figure 31 : processus des tests de racine unitaire.....	60
Figure 32 : aperçu d'historique des TMPjj importer avec VBA Excel réalisé par l'auteur	61

Abréviations :

- BAM: Bank Al Maghrib
- AMMC : Autorité marocaine du marché des capitaux
- IVT : Intermédiaires en Valeurs du Trésor
- TMP: Taux moyen pondéré
- CIR: Cox Ingersoll et Ross
- MCO: Moindre carré ordinaire
- BAM: Bank Al Maghrib
- BDT: Bon de trésor
- VBA: Visual Basic for Application
- ZC : zéro-coupon
- TMPjj : taux le jour le jour
- i.e : C'est à dire

Introduction

L'économie marocaine a connu de profonds changements au cours des vingt dernières années. Dans l'histoire économique nationale, cette période représente un tournant qui marque le passage à une vision, à une stratégie et à une renaissance économique et financière. L'ampleur de ces mutations a considérablement modifié le faciès de l'économie marocaine.

Le marché des enchères a été réformé pour offrir toutes les conditions possibles aux investisseurs, en particulier la transparence, la régularité et l'efficacité. La transparence par la mise en concurrence des investisseurs sur la base de la technologie des enchères, la régularité par l'établissement d'un calendrier prédéterminé des émissions de bons du Trésor, et l'efficacité qui accompagne la transparence et la régularité en assurant la simplicité et la liquidité des titres sur le marché obligataire. Toutes ces raisons ont fait que les bons du Trésor sont devenus le principal instrument de financement des besoins du Trésor au cours des 20 dernières années. Le gouvernement s'est tourné vers le marché primaire des obligations en raison de la volonté politique de changer la stratégie de gestion de la dette publique du Maroc. Elle consiste à assurer un financement stable et durable du trésor public en minimisant les charges d'intérêt et en optimisant le coût du financement. Cette force a également conduit à l'émergence de la structure de taux à terme, qui est devenue la référence pour les émissions obligataires des grandes entreprises privées au Maroc.

En effet ces courbes de rendement sont couramment utilisées dans les domaines de la pricing et d'évaluation des bons du Trésor. Ils aident les négociateurs à déterminer le niveau actuel des taux d'intérêt du marché et peuvent fournir des informations sur le prix à fixer pour les instruments de taux d'intérêt. D'une part les courbes de taux sont utilisées pour la fixation des prix sont généralement subjectives, dans la mesure où les opérateurs ajoutent des écarts à la courbe pour couvrir des facteurs tels que les coûts de transaction et les frais de gestion, le risque de crédit, les problèmes de liquidité, d'autre part les courbes de rendement d'évaluation des transactions d'un portefeuille qui est considéré comme un ensemble d'instruments achetés ou vendus sur le marché doivent être des reflets objectifs et précis des taux du marché afin de garantir que les estimations des bénéfices futurs sont correctes ainsi ils sont également utilisées dans le processus de gestion des risques pour déterminer le risque de marché actuel

de tout portefeuille. En bref, une courbe de rendement incorrecte peut entraîner des évaluations et des chiffres de risque incorrects, qui peuvent à leur tour conduire à des réserves de capitaux économiques insuffisants ou trop importantes.

L'objectif réel de notre étude est de déterminer les déterminants fondamentaux de la structure des taux d'intérêt au Maroc, tant à court qu'à long terme. Les recherches empiriques que nous mènerons à la suite de cette étude nous permettront de mieux comprendre comment cette structure réagit aux attentes des investisseurs et aux mesures prises par les autorités monétaires et fiscales.

Chapitre 1 : Présentation générale

I. Contexte et motivation

I.1 Salle des marchés :

Le présent projet s'est déroulé au sein de la Salle De Marchés de la CDG Capital. Cette salle, lieu de travail du trader sous l'emprise de la recherche du profit maximum qui est souvent désignée par le terme "Front Office".

En interne, le trader travaille également avec :

- Le middle office qui s'assure du respect des procédures. Le middle office est situé dans la salle de marché et dépend hiérarchiquement du front-office.
- Le back office qui gère les transactions aval (envoi de confirmation sur papier, ordonnancement des règlements, ...).

La salle de marchés de la CDG Capital est organisée comme suit :

I.1.1 Front Office :

La salle de marché, ou front office, service qui décide et conclut des transactions sur le marché ou avec des clients, elle est divisée par équipes appelées desk, spécialisées soit par produits soit par zones géographiques.

On trouve des cambistes de marché eux-mêmes parfois spécialisés par type de marché : comptant, terme, trésorerie, options, swap de taux, FRA..., et par type d'échéance : court, moyen et long terme. Et on trouve également les cambistes clientèle (sales ou dealers), dont le rôle est de développer la vente de produits et/ou de stratégies auprès de la clientèle de la banque.

Le desk fait référence à un ensemble de bureaux qui se jouxtent, la salle de marché de la CDG Capital est constituée des Desk suivant : Desk monétaire, Desk matière première, Desk change, Desk 16 trader

I.1.2 Middel Office :

Services dépendant du back-office et qui effectuent la liaison entre le front-office et le back-office. Ils contrôlent et valident toutes les transactions, calculent la valorisation de ces transactions au cours du jour (« market-to-market ») et réalisent des reporting monétaire pour permettre aux opérateurs de savoir de combien ils sont bénéficiaires ou déficitaires et établissent les niveaux de trésorerie.

I.1.3 Back Office :

Le front-office décide et conclut les transactions sur le marché. Le back-office s'occupe de la confirmation des ordres auprès des contre parties, de la livraison des titres ou du règlement de la transaction, de la compensation sur les marchés à terme, de la comptabilisation des opérations. Le back-office est généralement situé dans une salle, voire un étage différent de celui du front-office.

I.2 Marché obligataire marocain :

I.2.1 Marché des taux :

Les marchés de taux d'intérêt sont les marchés de capitaux les plus importants du monde, loin devant le marché des changes et très loin devant le marché d'actions, non seulement par les volumes traités mais aussi par leur importance économique. Nous séparons les marchés de taux d'intérêt en marché obligataire pour les dettes d'une durée supérieure à 1 an et de marché monétaire pour les dettes inférieures à cette durée.

I.2.2 Marché monétaire :

Le marché monétaire est un marché financier sur lequel des titres à court terme sont utilisés en échange de liquidités. Il est destiné aux établissements financiers et aux entreprises qui peuvent prêter ou emprunter des liquidités pour une période très courte. Le marché monétaire est organisé principalement comme un marché interbancaire pour les banques et comme un marché de titres de créance pour les investisseurs.

I.2.3 Marché obligataire :

Le marché obligataire est la partie du marché financier sur laquelle sont négociées les obligations à moyen et long terme. Il s'agit d'un marché de prêt et d'emprunt de capitaux dont le support est constitué par les obligations.

On distingue le marché primaire, sur lequel de nouvelles obligations sont émises, et le marché secondaire, sur lequel ces titres de créance usagés sont ensuite négociés. Au Maroc, les obligations proposées sont principalement des obligations d'État. Les entreprises, les collectivités locales et l'État traitent des obligations sur le marché secondaire, mais aussi des produits dérivés (swaps de taux d'intérêt, contrats à terme sur obligations d'État, etc.)

Le marché obligataire est principalement réservé aux gros investisseurs et les particuliers ne peuvent y accéder que par le biais d'OPCVM.

En achetant des obligations en tant que forme d'investissement, les investisseurs privés peuvent devenir créanciers de grandes entreprises nationales ou d'États. Les obligations cotées en bourse sont négociées en bourse. Les obligations non cotées en bourse sont négociées de gré à gré par le biais d'intermédiaires financiers.

Les obligations d'État ou les bons du Trésor ne sont pas cotés en bourse. Leur négociation se fait par l'intermédiaire financiers appelés IVT.

I.2.4 Les intervenants sur le marché obligataire :

Le marché obligataire marocain fait intervenir plusieurs acteurs qui contribuent à sa dynamique et qui installent une certaine vivacité et permettent sa continuité.

I.2.4.1 Les émetteurs :

- L'Etat et les collectivités : Les émissions de ces deux acteurs constituent une part importante des émissions des émetteurs. La politique budgétaire mise en vigueur par l'État le conduit parfois à émettre pour financer ses déficits budgétaires.
- Les établissements de crédit : il s'agit des banques et des sociétés financières qui utilisent les marchés financiers pour financer leurs besoins économiques.
- Les entreprises : Les entreprises utilisent le marché obligataire pour financer leurs investissements dans une optique de croissance durable et stable.

I.2.4.2 Les investisseurs :

- Les banques : le rôle des banques sur ce marché est de servir d'intermédiaire entre les acheteurs et les vendeurs de titres. En outre, les banques peuvent

constituer leurs propres portefeuilles d'obligations afin d'améliorer leur propre position financière et économique.

- Les investisseurs institutionnels : Ces institutions jouent un rôle très important sur le marché obligataire. Elles contribuent au développement dynamique des marchés des capitaux mondiaux. Les compagnies d'assurance, les fonds de pension, les fonds de dépôt et également les fonds d'investissement font partie de cette catégorie d'investisseurs.
- Les institutions non financières et les particuliers : Il s'agit des institutions non financières et de toute personne morale ou physique qui peut également investir en obligations.

1.2.4.3 L'autorité Marocaine du Marché des Capitaux :

En tant qu'autorité de surveillance du marché des capitaux, l'AMMC a été créée par le Dahir n° 1-13-21 portant loi n° 43-12 et a pour mission de :

- Veiller à ce que l'épargne investie dans des instruments financiers soit protégée.
- Assurer l'égalité de traitement des épargnants, la transparence et l'intégrité du marché des capitaux et l'information des investisseurs.
- Veiller au bon fonctionnement des marchés de capitaux et à la mise en place des dispositions législatives et réglementaires.
- Assurer le contrôle des activités des différents organismes et personnes soumis à son contrôle.
- Veiller à ce que les personnes et entités soumises à son contrôle respectent les lois et règlements applicables en matière de lutte contre le blanchiment d'argent.
- Contribuer à la formation financière des épargnants.
- Aider le gouvernement à réguler les marchés des capitaux.

1.2.4.4 Les sociétés de bourse :

Les sociétés de bourse ont le monopole du courtage sur le marché boursier. Leur activité consiste à :

- Exécuter les transactions sur les valeurs mobilières.
- Conservation de titres.

- Gestion du portefeuille de valeurs en fonction d'un mandat et l'animation du marché des valeurs mobilières cotées en bourse.

1.2.4.5 Le dépositaire des titres MAROCLEAR :

Depuis la dématérialisation des titres, aujourd'hui gérés en comptes courants, une institution a été créée sous la forme d'une société anonyme dont le capital est souscrit par des banques et des sociétés cotées en bourse. Le dépositaire central de titres tisse des liens avec les différents acteurs du marché afin de gérer efficacement l'information financière. Il est soumis au contrôle des autorités de marché et ses principales missions sont les suivantes

- Ouvrir et gérer des comptes titres pour les détenteurs de titres de ses membres.
- Exécution d'opérations sur titres pour le compte de la société émettrice.
- Coder les titres conformément à la norme internationale I.S.I.N..
- Publier des informations sur le marché.

I.3 Problématique :

La structure à terme des taux d'intérêt reste aujourd'hui un domaine de recherche intéressant et innovant. De ce fait, les recherches ont montré un intérêt croissant des chercheurs pour les théories et les modèles liés à la structure et à l'explication des variations de la courbe des taux.

L'analyse des taux d'intérêt des BDT nécessite la mise en place des théories et des modèles permettant de décrire et de modéliser leur comportement. Les modèles utilisés doivent donc tenir compte de la composante temporelle et être capables d'identifier la relation entre la courbe des taux et les facteurs qui peuvent l'influencer.

En ce qui concerne la signification et la portée de la courbe des taux, les questions suivantes se posent : ***dans quelle mesure la courbe des taux sera-t-elle sensible aux attentes et aux réactions des investisseurs et des autorités monétaires et budgétaires ?***

II. Notion financière

II.1 Obligation et taux d'intérêt :

II.1.1 Obligations zéro-coupon :

Les résultats de ce mémoire seront fondés sur des obligations zéro-coupon, qui serviront à l'ajustement des modèles utilisés. Il convient donc de définir ces instruments financiers.

II.1.1.1 Définition Obligation zéro-coupon :

Une obligation zéro-coupon de maturité T est un titre de créance garantissant le versement d'une unité monétaire en T . Son prix $P(t, T)$ est défini de la manière suivante :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

Avec $R(t, T)$ le taux de rendement actuariel à la date t de l'obligation zéro-coupon de maturité T .

Graphiquement, il est possible de représenter cet instrument financier avec le diagramme de flux ci-dessous.

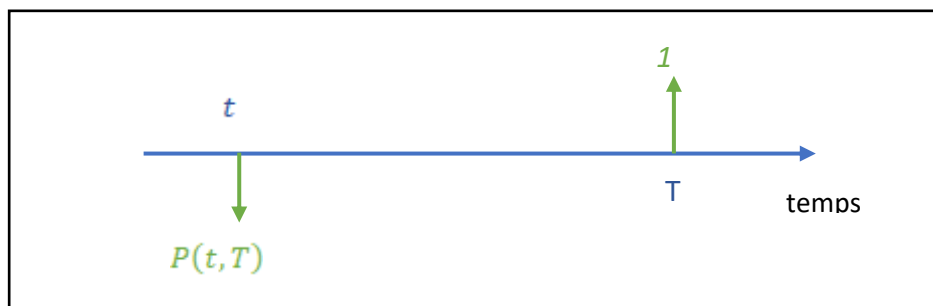


Figure 1 : Diagramme de flux d'une obligation zéro-coupon

II.1.2 Obligation à coupons :

II.1.2.1 Définition Obligation à coupon

Une obligation à coupons (ou couponnée) repose sur un principe similaire à celui des obligations zéro-coupon. Les deux types d'obligations se distinguent par le fait qu'une obligation couponnée verse des coupons entre la date d'évaluation t et la date de maturité T .

Sachant cela, il est possible de définir le prix d'une obligation couponnée de la manière suivante :

$$P(t, T) = \sum_{i=1}^n NC\delta_i e^{-R(t, t_i)(t_i-t)} + Ne^{-R(t, T)(T-t)}$$

Avec :

- t_i la date de versement du coupon i ;
- $t_n = T$;
- t la date de calcul ;
- T la date de maturité de l'obligation ;
- N le nominal de obligation ;
- C le taux de coupon annuel ;
- δ_i un coefficient fonction du temps séparant le versement du coupon i avec le coupon $i - 1$. Il permet d'obtenir le taux de coupon d'un versement précis. En pratique, δ_i est généralement fixe pour tout i

La seconde partie de l'équation correspond au prix d'une obligation zéro-coupon en t de maturité T de nominal N .

Dans cette formule, la convention de taux continus est utilisée. Ceci est une notation usuelle dans la littérature en finance, dans la mesure où le recours à la fonction exponentielle peut simplifier les calculs. Dans le cas particulier d'obligations à versement de coupons annuels, la convention de taux composés est préférable. En effet, ces versements sont bien effectués de manière discrète et non continue. Il est alors possible de réécrire le prix d'une obligation couponnée de la manière suivante :

$$P(t, T) = \sum_{i=1}^n \frac{NC\delta_i}{(1 + R(t, t_i))^{t_i-t}} + \frac{N}{(1 + R(t, T))^{T-t}}$$

Graphiquement, il est possible de représenter cet instrument financier avec le diagramme de flux ci-dessous (en supposant $\delta_i = \delta, i = 1, 2, \dots, n$).

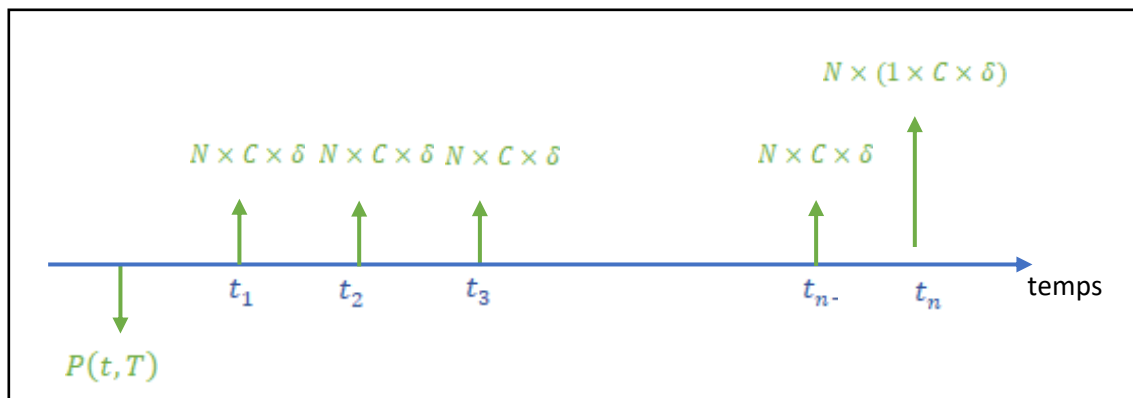


Figure 2 : Diagramme de flux d'une obligation à coupons

II.1.3 Obligation courue :

II.1.3.1 Définition : Obligation courue :

Le coupon couru d'une obligation correspond à la part du prochain coupon versé acquise.

À l'instant $\frac{t_1+t_2}{2}$, 50 % du temps séparant la date de versement du précédent coupon et la date de versement du prochain coupon s'est écoulé. Le détenteur de l'obligation a donc, d'une certaine manière, déjà acquis 50 % du prochain coupon versé. Cette situation est décrite dans le schéma suivant :

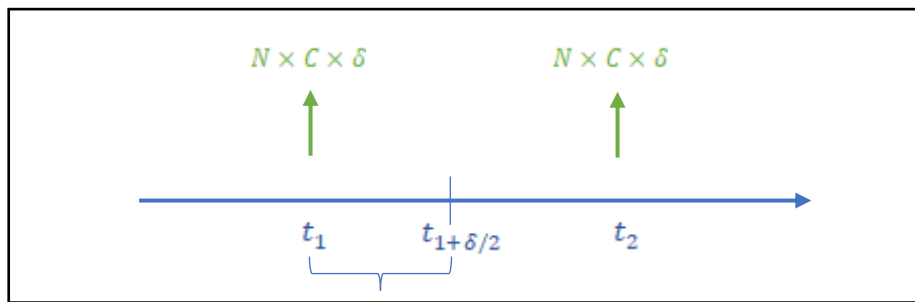


Figure 3 : Coupon Couru d'une Obligation

Il est donc possible de considérer que 50 % du prochain coupon versé a été acquis. Cet exemple peut être généralisé. Le coupon couru peut être calculé à toute date présente entre t_i et t_{i+1} .

En pratique, afin d'éviter les opportunités d'arbitrage liées au fait que les coupons sont versés de manière discrète, les obligations vont être échangées en réintégrant la valeur du coupon couru (dirty price). Pourtant, les marchés financiers communiquent le plus souvent le

prix d'obligation "pied de coupon" (clean price) afin de pouvoir comparer plus facilement les obligations. Les modèles utilisés dans ce mémoire se fonderont sur le prix d'obligations avec intégration du coupon couru. Il sera ainsi nécessaire de s'assurer de la bonne conformité des données utilisées

II.1.4 Taux d'intérêt zéro coupon (spot) :

Ce mémoire présente plusieurs méthodes de modélisation de courbes des taux d'actualisation. Ces courbes sont composées d'une multitude de taux dits « spot » de différentes maturités. Il convient donc de définir la notion de taux spot.

II.1.4.1 Définition : Le taux zéro coupon :

Le taux zéro coupon, $R(t, T)$ est le taux de rendement actuariel en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T .

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

Il est également possible de définir la limite du taux spot lorsque l'intervalle de temps considéré tend vers zéro.

II.1.4.2 Définition : Taux spot instantané

Le taux spot instantané, ou taux spot infinitésimal r_t est le taux de rendement actuariel en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T quand $T \rightarrow t$:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

II.1.5 Le taux d'actualisation :

Certains instruments du marché monétaire, comme les bons du Trésor et les acceptations bancaires, sont généralement émis et négociés à un taux d'escompte. Le taux d'escompte est utilisé pour calculer le montant qu'un investisseur doit investir aujourd'hui pour recevoir un montant prédéterminé à l'échéance. La différence entre la valeur à l'échéance et le montant de l'investissement initial est le montant de l'escompte. Ce qui donne le taux d'actualisation on comparant le montant d'escompte et la valeur à l'échéance

La relation entre le taux simple et le taux d'actualisation est la suivante :

$$\left(1 + i \frac{d}{DC}\right) = \left(1 + r \frac{d}{DC}\right)^{-1}$$

Dont

- i = taux d'intérêt simple
- r = taux d'actualisation
- d = nombre de jours de la période d'investissement
- DC = Nombre de jours dans l'année, cela dépend de la convention de comptage des jours applicable

Pour dériver un taux simple à partir d'un taux d'actualisation, nous reformulons l'équation précédente de la manière suivante comme suit :

$$i = \frac{r}{1 + r \times \frac{d}{DC}}$$

Et de la même manière, pour dériver le taux d'actualisation d'un taux simple, nous avons que :

$$r = \frac{i}{1 + i \times \frac{d}{DC}}$$

II.1.6 Taux de rendement actuariel :

Le taux de rendement actuariel α est le taux permettant l'égalisation du prix d'acquisition d'une obligation et la valeur actualisée des flux futurs qu'elle délivre. Dans ce cadre, on suppose connu l'échéancier et la valeur des flux.

Ce taux est précisément le taux de rendement obtenu par l'acheteur de l'obligation dans le cas où il décide de garder l'obligation jusqu'à son terme et de réinvestir les intérêts au même taux actuariel à chaque date de tombée du coupon.

L'extraction de ce taux α nécessite l'inversion de la formule suivante reliant le prix de l'obligation et la valeur actualisée des flux futurs.

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+a)^i}$$

Avec

- P prix du titre
- CF_i le flux versé en i ;
- n la maturité du titre;

II.2 Courbe de taux :

Trois grandes théories ont été proposées pour tenter d'expliquer la forme de la structure des taux d'intérêt : la théorie de la segmentation du marché, la théorie des attentes pures et la théorie de la prime de liquidité. Ces théories ne sont généralement pas acceptées par tous les acteurs du marché, mais sont considérées comme des influences sur la forme de la courbe des taux.

Les quatre principales formes que prennent généralement les courbes de rendement sont illustrées ci-dessous. Il s'agit de courbes à pente positive, à pente négative, à bosse et plates.

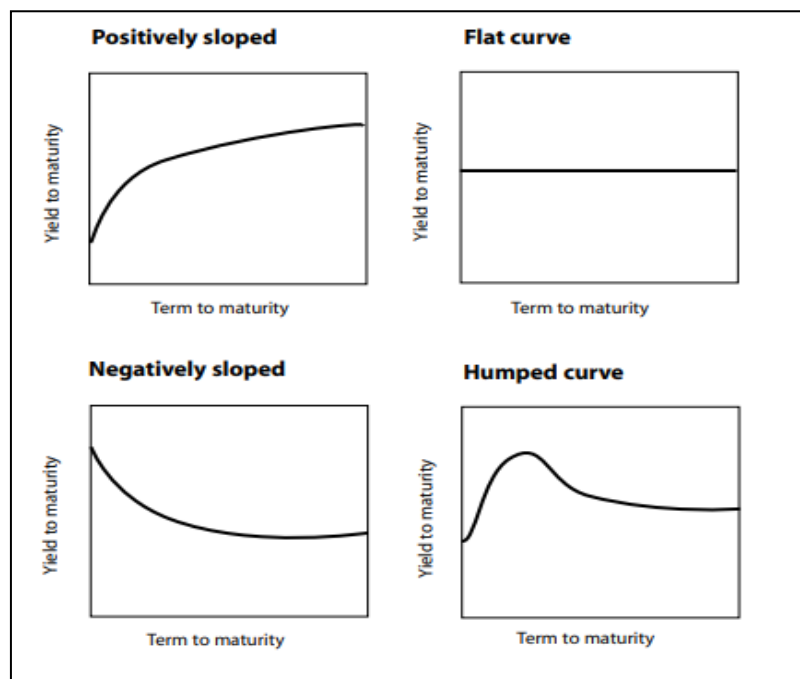


Figure 4 : les forme des courbes de taux d'intérêts

En observant les courbes de rendement sur différents marchés à tout moment, on remarque qu'une courbe de rendement peut adopter l'une des quatre formes de base suivantes :

- Normale ou conventionnelle : dans laquelle les rendements sont à des niveaux « moyens » et la courbe s'incline légèrement vers le haut à mesure que la maturité augmente ;
- Ascendante ou positive : dans laquelle les rendements sont à des niveaux historiquement bas, avec des taux longs nettement supérieurs aux taux courts ;
- Pente descendante ou inversée ou négative : les niveaux de rendement sont très élevés par rapport aux normes historiques, mais les rendements à long terme sont nettement inférieurs aux taux court.
- Bosselée : dans laquelle les rendements sont élevés, la courbe montant jusqu'à un pic dans la zone de maturité à moyen terme, puis s'inclinant vers le bas pour les maturités plus longues.

II.3 Utilité de la courbe des taux

La forme de la courbe de taux reflète l'état actuel du marché obligataire. Elle reflète les anticipations à l'instant t et renseigne sur trois aspects : prévisions sur les taux futurs, prévisions sur du taux d'inflation, prévisions d'activité.

- Prévisions de taux futurs : Le Spread de taux nous donne une information sur l'évolution future des taux courts. Ainsi, nous pouvons estimer ces derniers en se basant sur les taux spots.
- Prévisions du taux d'inflation.
- Prévisions d'activité : Le taux est le résultat de la confrontation de l'offre et la demande de capitaux. Ainsi, cela va se répercuter sur le pouvoir des entreprises à se financer et par la suite conditionne la croissance de l'activité économique

**Chapitre 2 : Structure par terme des
taux d'intérêts**

I. Reconstitution de courbe Zéro-Coupon :

I.1 Reconstitution de courbe Zéro-Coupon : Théorie

On constate dans le marché obligataire n'existe que très peu de cotations spot. Les produits zéro coupon sont moins liquides que les obligations à coupons, il n'en existe que rarement pour les maturités supérieures à 1 an, cette rareté est due que les investisseurs préférant une rémunération annuelle plutôt que infinie. Pour pouvoir actualiser un flux de n'importe quelle maturité, il est alors nécessaire de reconstruire la courbe de taux zéro-coupon $t \rightarrow R(0, T)$.

Sur le panier de taux obtenu, différentes méthodes peuvent ensuite être appliquées pour reconstruire entièrement la courbe. Nous verrons dans cette section deux grandes méthodes existent : la méthode d'interpolation directe et la méthode Nelson Siegel dite « indirecte » qui passent par un paramétrage de la courbe des taux.

I.1.1 Extraction des taux zéro coupon :

I.1.1.1 Sur le court terme :

Les taux zéros-coupon peuvent être extraits très facilement des produits financiers de maturités courtes (< 1 an) car ce sont des produits qui ne distribuent en général qu'un seul flux, les intérêts et le nominal étant remboursés à la même date de façon infinie.

I.1.1.2 Sur le long terme :

La plupart des obligations de maturité supérieure à 1 an délivrent des coupons chaque année. Il existe une méthode itérative qui permet d'extraire les taux zéro-coupon lorsqu'on dispose des obligations de maturités entières 1 an, 2 ans..., n ans : la méthode du Bootstrap.

Supposons que nous avons une obligation de maturité 1 an. Cette obligation ne distribue qu'un seul flux et est donc un zéro-coupon. Le taux zéro-coupon de maturité 1 an est donc obtenu en résolvant :

$$\frac{1 + C_1}{1 + x} = 1$$

C'est-à-dire :

$$R_1 = C_1$$

Puis le taux zéro-coupon 2 ans est obtenu à partir du zéro-coupon 1 an et de l'obligation 2 ans en résolvant :

$$\frac{C_2}{1 + R_2} + \frac{1 + C_2}{(1 + x)^2} = 1$$

D'où

$$R_2 = \left[\frac{1 + C_2}{1 - \frac{C_2}{1 + R_1}} \right]^{1/2} - 1$$

De même le taux zéro-coupon 3 ans est solution de l'équation :

$$\frac{C_3}{1 + R_1} + \frac{C_3}{(1 + R_2)^2} + \frac{1 + C_3}{(1 + x)^3} = 1$$

D'où :

$$R_3 = \left[\frac{1 + C_3}{1 - \frac{C_2}{1 + R_1} - \frac{C_3}{(1 + R_2)^2}} \right]^{1/3} - 1$$

Finalement par itération successives, nous obtenons le taux zéro-coupon n ans :

$$R_n = \left[\frac{1 + C_n}{1 - C_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1 + R_i)^i}} \right]^{1/n} - 1$$

I.1.2 Modèle de reconstitution de courbe de taux

I.1.2.1 Méthode directe de reconstitution : interpolation

➤ Transformation:

Avant d'interpoler afin d'extraire les taux correspondant à des maturités finit il faut homogénéiser les taux car pour les maturités inférieures à 365 jours, les taux publiés par BAM sont des taux monétaires. Tandis que pour les taux de maturités supérieures à 365 jours les taux sont des taux actuariels. Nous voulons une courbe homogène i.e. placement in fine et même base de calcul. Il est donc préférable de transformer tous ces taux en base actuarielle Exact/Exact.

Cette conversion concerne que les titres ayant des maturités inférieures à 1 an se fait via la formule de conversion du taux monétaire en taux actuariel, et qui est :

$$t_a = \left(1 + TMP \times \frac{m}{360}\right)^{\frac{365}{m}}$$

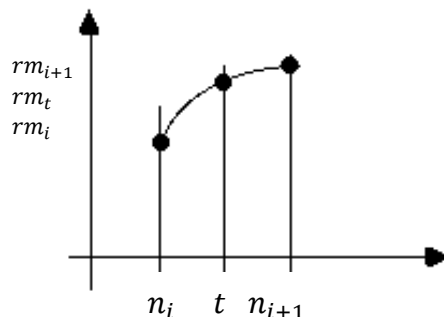
Avec

- t_a : le taux actuariel , m : le nombre de jours de placement

➤ Interpolation

L'interpolation consiste à déterminer, pour chaque échéance T_i (de 13 semaines à 30 ans), le taux d'actualisation qui lui est associé. Si la période T_i ne coïncide pas avec les points d'intérêts (maturités figurant déjà dans la courbe), le taux r_i correspondant peut être défini, à partir de la courbe des taux, par une interpolation linéaire de deux valeurs de taux avoisinantes par la formule suivante :

$$rm_t = rm_i + \frac{t - n_i}{n_{i+1} - n_i} + (rm_{i+1} - rm_i)$$



Où rm_t est le rendement estimé et n est le nombre d'années jusqu'à l'échéance pour les rendements observés. Par exemple, considérons les rendements de rachat :

1 mois	4,00%
2 ans	5,00%
4 ans	6,50%
10 ans	6,75%

Si nous souhaitons estimer le rendement à six ans, nous le calculons en utilisant obtenu d'interpolation, c'est-à-dire :

$$rm_{6y} = 6.50\% + \frac{6 - 4}{10 - 6} + (6.75\% - 5.50\%) = 6.5833\%$$

Remarque : Il est important qu'une courbe de rendement zéro-coupon soit construite aussi précisément que possible. En effet, cette courbe est utilisée dans l'évaluation d'un large éventail d'instruments, non seulement les obligations classiques à coupon du marché monétaire, mais aussi d'autres produits de taux d'intérêt tels que les swaps.

➤ Taux zéro coupon

Après homogénéiser la base des taux importer du site BAM et extraction des taux correspondant aux maturités pleines, la dernière étape restante est le calcul des taux zéro coupon qui se fait comme suit ; pour les maturités inférieures à un an le taux spot est égale au taux de rendement interpolé, pour les taux de 2ans à 30ans il suffit d'appliquer la méthode Bootstrap déjà détailler précédemment dans la section I.1.1.2

1.1.2.2 Méthode indirecte de reconstitution : Nelson-Siegel

Les méthodes indirectes s'appuient sur le calibrage d'un modèle à partir des données de marché, ce qui revient à minimiser l'erreur entre les taux obtenus par le modèle et les taux de marché. La mesure de l'erreur est définie par le choix d'une distance : écart absolu, écart quadratique, écart quadratiques pondérés sont les mesures les plus courantes.

Le modèle de Nelson Siegel (NS) est le modèle qu'on utilise le plus souvent en finance pour lisser la courbe des taux. La fonction de Nelson Siegel a une forme souple et un nombre limité de paramètres à estimer, chose qui lui permet de s'adapter aux différentes configurations du marché.

La fonctionnelle des taux zéro-coupon donnée par Nelson et Siegel est :

$$f(t, T) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right) + \beta_3 \frac{T-t}{\tau} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)$$

On considère la courbe des taux comme vue à l'instant $t = 0$, c'est également l'instant de référence de ce mémoire. Par la suite, t ne sera plus un paramètre et sera fixé à $t = 0$. Cette équation peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$f_{t=0}(T) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + \beta_3 \frac{T}{\tau} \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$$

Il est possible d'obtenir le taux spot correspondant, à l'aide de la formule.

D'où :

$$R_{t=0}(T) = \beta_1 + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]$$

Le modèle de Nelson-Siegel dispose donc de quatre paramètres :

- $R_{t=0}(T)$: Taux zéro-coupon de maturité T
- β_1 : Facteur de niveau, il s'agit du taux long
- β_2 : Facteur de rotation, il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long
- β_3 : Facteur de courbure
- τ : Paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps

I.2 Reconstitutions de courbe Zéro-Coupon : Application

Au Maroc, Bank Al Maghrib publie quotidiennement une courbe des taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés, primaire et secondaire, les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les volumes. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an. Par conséquent, les calculs des taux in fine pour les maturités pleines comprennent l'interpolation et la transformation des taux.

Cette section a pour objectif de proposer une nouvelle courbe des taux à retenir pour les évaluations actuarielles au 15 mars 2022

I.2.1 Méthode interpolation linéaire

Afin de construire la courbe des taux, nous avons automatiser une application sous VBA qui nous permet de télécharger la courbe du marché directement du site de BAM avec la méthode web scraping, et ensuite calculer les taux actuariels pour les maturités pleines (de 13 semaines à 30 ans) par interpolation de ladite courbe, et finalement construire la courbe zéro-coupon par Bootstrapping.

	A	B	C	D	E	F
1	Taux de référence des bons du Trésor en millions de dirhams pour la date : 15/3/2022					
2	<u>Date</u>		<u>Taux moyen</u>	<u>Date de la</u>		
3	<u>d'échéance</u>	<u>Transaction</u>	<u>pondéré</u>	<u>valeur</u>		
4	18/04/2022	181,31	1,53%	09/03/2022		
5	16/05/2022	92,01	1,55%	15/03/2022		
6	20/06/2022	182,72	1,55%	15/03/2022		
7	16/01/2023	30,16	1,60%	15/03/2022		
8	22/05/2023	724,34	1,68%	21/03/2022		
9	18/09/2023	117,88	1,72%	15/03/2022		
10	18/03/2024	190,63	1,80%	15/03/2022		
11	15/04/2024	397,92	1,81%	15/03/2022		
12	15/07/2024	1 020,59	1,88%	21/03/2022		
13	14/04/2025	466,23	1,92%	15/03/2022		
14	02/06/2025	84,52	1,93%	15/03/2022		
15	20/04/2026	174,98	2,01%	15/03/2022		
16	19/10/2026	66,59	2,07%	15/03/2022		
17	19/04/2027	102,36	2,10%	15/03/2022		
18	17/05/2027	177,12	2,12%	15/03/2022		
19	14/06/2027	126,07	2,11%	15/03/2022		
20	18/06/2029	145,22	2,19%	15/03/2022		
21	17/06/2030	418,2	2,29%	15/03/2022		
22	16/06/2031	20,07	2,48%	15/03/2022		
23	17/07/2034	232,27	2,55%	15/03/2022		
24	16/07/2035	189	2,61%	15/03/2022		
25	16/08/2038	161,55	2,73%	15/03/2022		
26	16/04/2040	331,1	2,83%	15/03/2022		
27	20/02/2051	36,7	3,17%	15/03/2022		
28	Total	5 669,54				
29						

Figure 5 : Base de donnée BAM du marché obligataire secondaire pour la date 15/03/2022

Après l'importation des données, le bouton interpolation sur la feuille Excel permet à l'utilisateur de calculer les maturités résiduelles de la base BAM et homogénéiser les taux en taux actuariel puis interpoler afin d'avoir les taux des maturités pleines et construit la courbe zéro-coupon pour cette date.

Chapitre 2 : structure par terme des taux d'intérêts

Taux de référence des bons du Trésor en millions de dirhams pour la date:									
Veuillez entrer une date (dd/mm/yyyy) :						15/03/2022			
mardi 15 mars 2022									
Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur	maturité résiduel	taux actuariel	maturité pleine	maturité corr	taux interpolés	taux ZC
18/04/2022	181,31	1,53%	09/03/2022	40	0,0155892	13 semaines	91	0,015799417	0,015799417
16/05/2022	92,01	1,55%	15/03/2022	62	0,0157668	26 semaines	182	0,015983003	0,015983003
20/06/2022	182,72	1,55%	15/03/2022	97	0,0158062	52 semaines	364	0,016493353	0,016493353
16/01/2023	30,16	1,60%	15/03/2022	307	0,0162431	2ans	730	0,018011758	0,018030066
22/05/2023	724,34	1,68%	21/03/2022	427	0,01677	3ans	1095	0,019124444	0,019185162
18/09/2023	117,88	1,72%	15/03/2022	552	0,0172	4ans	1460	0,020025776	0,020149698
18/03/2024	190,63	1,80%	15/03/2022	734	0,01803	5ans	1825	0,020894615	0,021106356
15/04/2024	397,92	1,81%	15/03/2022	762	0,0181	6ans	2190	0,021403429	0,021705901
15/07/2024	1020,59	1,88%	21/03/2022	847	0,01876	7ans	2555	0,021795741	0,022196562
14/04/2025	466,23	1,92%	15/03/2022	1126	0,01917	8ans	2920	0,022665714	0,023232923
02/06/2025	84,52	1,93%	15/03/2022	1175	0,0193	9ans	3285	0,02431456	0,025199828
20/04/2026	174,98	2,01%	15/03/2022	1497	0,02012	10ans	3650	0,024977285	0,026100452
19/10/2026	66,59	2,07%	15/03/2022	1679	0,02067	11ans	4015	0,025216948	0,026529659
19/04/2027	102,36	2,10%	15/03/2022	1861	0,02095	12ans	4380	0,02545661	0,026975312
17/05/2027	177,12	2,12%	15/03/2022	1889	0,02117	13ans	4745	0,025886538	0,02767964
14/06/2027	126,07	2,11%	15/03/2022	1917	0,02111	14ans	5110	0,026339326	0,028446496
18/06/2029	145,22	2,19%	15/03/2022	2652	0,0219	15ans	5475	0,026750639	0,029195354
22/17/06/2030	418,2	2,23%	15/03/2022	3016	0,02294	16ans	5840	0,027161952	0,029982465
16/06/2031	20,07	2,48%	15/03/2022	3380	0,0248	17ans	6205	0,027659507	0,030936722
17/07/2034	232,27	2,55%	15/03/2022	4507	0,02554	18ans	6570	0,02822289	0,032047546
16/07/2035	189	2,61%	15/03/2022	4871	0,02607	19ans	6935	0,028786273	0,033232109
16/08/2038	161,55	2,73%	15/03/2022	5998	0,02734	20ans	7300	0,029349655	0,034501058
16/04/2040	331,1	2,83%	15/03/2022	6607	0,02828	21ans	7665	0,029913038	0,035867287
20/02/2051	36,7	3,17%	15/03/2022	10569	0,03171	22ans	8030	0,03047642	0,037346613
Total	5669,54					23ans	8395	0,031039803	0,038958711
						24ans	8760	0,031603186	0,040728468
						25ans	9125	0,032166568	0,042687958
						26ans	9490	0,032729951	0,04487946
						27ans	9855	0,033293334	0,04633172
						28ans	10220	0,033856717	0,04788403
						29ans	10585	0,034420100	0,04943634
						30ans	10950	0,034983483	0,05098865

Figure 6 : Construction de la courbe ZC par interpolation sous VBA pour la date 15/03/2022

L'automatisation du bouton « Courbe » sert à afficher notre courbe souhaiter.

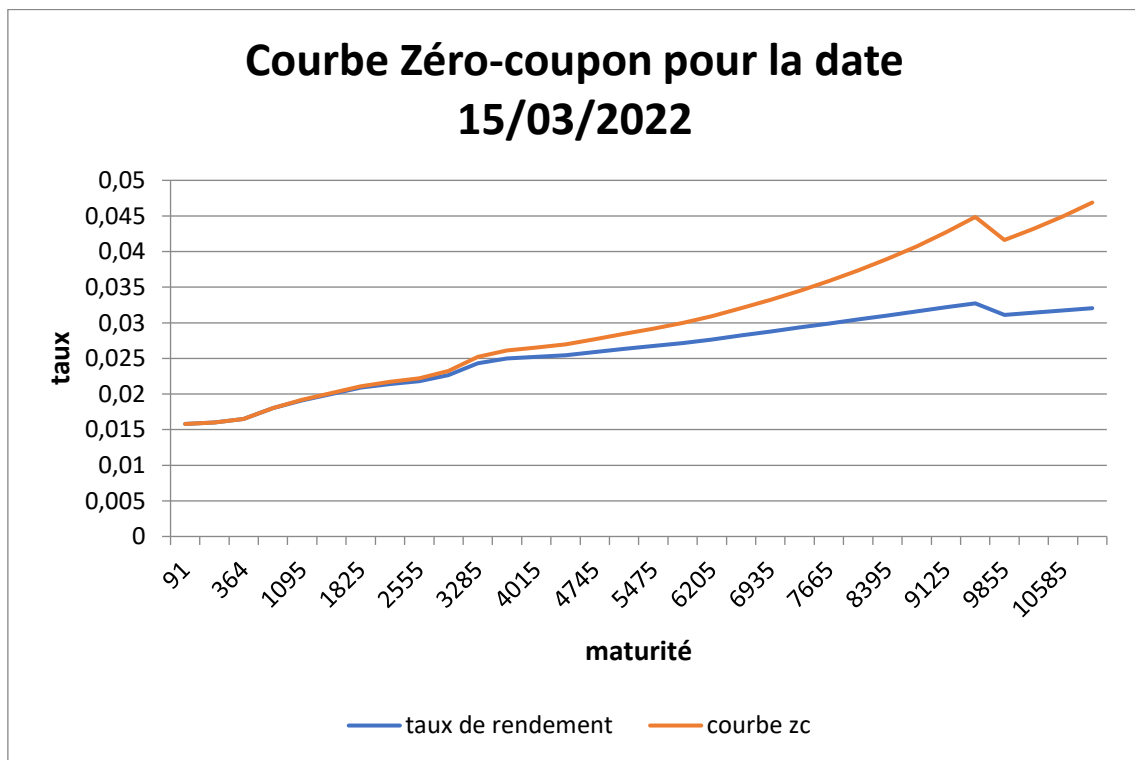


Figure 7 : Comparaison entre de la courbe Zéro-Coupon du marché et la courbe interpoler pour la date 15/03/2022

Derrière toute courbe des taux d'un pays, existe un ensemble d'interprétation économique du pays en question. En principe, la courbe des taux est croissante, puisque les obligations à longues durées doivent fournir un taux de rendement plus élevé que les obligations qui ont une maturité plus courte. En effet, les investisseurs ont toujours une préférence pour le court terme, car la vision du futur est assez claire. Et donc, pour qu'un investisseur s'engage à placer son argent à long terme avec un taux défini aujourd'hui, il demandera une rémunération plus élevée qu'à celle d'un placement à courte durée.

I.2.2 Méthodes Nelson-Siegel

Le choix initial des paramètres du modèle de Nelson-Siegel est très important et sensible qui affecte la justesse des résultats :

- β_1 : Prend comme valeur initiale le taux long qui correspond à la maturité 10 ans
- β_2 : Prend comme valeur initiale la différence entre le taux cours (correspondant à la maturité 13 semaines) et le taux long correspondant à 10 ans.
- β_3 : Prend comme valeur initiale 0, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de courbure
- τ : Prend comme valeur initiale 5 ans. Généralement si la courbe de taux présente une courbure, elle se positionne à la limite du moyen et long terme.

La feuille Excel automatiser marche comme suit :

En cliquant sur le bouton « Modéliser » après la saisie d'une date, VBA Excel importe les données des obligations du marché obligataire du site BAM correspondant à la date saisie, calcule le taux zéro-coupon avec la méthode Bootstrap et les affiche dans la colonne « Rzc réel » afin de récupérer les paramètres du modèle initiale pour calculer le taux spot selon modèle et le prix de l'obligation. Finalement à l'aide du solveur Excel qui permet de trouver les paramètres qui minimisent la somme des écarts au carré entre les prix de marché et les prix calculés et affiche la courbe selon ces paramètres optimiser.

Chapitre 2 : structure par terme des taux d'intérêts

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Modèle Nelson-Siegel										
3											
4	Entrez une Date	15/03/2022									
5		mardi 15 mars 2022									
6					maturité	Rzc calculé	Rzc réel	prix calculé	prix réel	prix calculé-prix réel	(prix calculé-prix réel)^2
7	Paramètres	valeurs initiales	valeurs Optimal		0,25	0,0155814	0,0157994	0,9961122	0,9960579	5,42929E-05	2,94771E-09
8	β_0	0,029195354	0,0484745		0,5	0,0158908	0,015983	0,9920861	0,9920403	4,57399E-05	2,09214E-09
9	β_1	-0,013395937	-0,03320554		1	0,0165005	0,0164934	0,9836349	0,9836419	-7,04656E-06	4,9654E-11
10	β_2	0	-0,010800124		2	0,0176839	0,0180301	0,9652503	0,9645823	0,00066801	4,46237E-07
11	τ	5	8,92075464		3	0,0188198	0,0191852	0,9451047	0,9440695	0,001035219	1,07168E-06
12					4	0,0199092	0,0201497	0,9234517	0,9225638	0,000887923	7,88408E-07
13					5	0,020953	0,0211064	0,9005359	0,8998459	0,000690037	4,76152E-07
14					6	0,0219526	0,0217059	0,8765904	0,8778887	-0,001298392	1,68582E-06
15					7	0,0229091	0,0221966	0,8518339	0,8560933	-0,004259377	1,81423E-05
16					8	0,023824	0,0232329	0,8264698	0,830387	-0,00391718	1,53443E-05
17					9	0,0246986	0,0251998	0,8006849	0,7970814	0,003603525	1,29854E-05
18					10	0,0255345	0,0261005	0,774649	0,7702774	0,004371531	1,91103E-05
19					11	0,0263331	0,0265297	0,7485147	0,7468983	0,001616421	2,61282E-06
20					12	0,0270959	0,0269753	0,7224184	0,7234645	-0,001046191	1,09452E-06
21					13	0,0278243	0,0276796	0,6964799	0,6977912	-0,001311292	1,71949E-06
22					14	0,0285199	0,0284465	0,6708043	0,6714935	-0,000689243	4,75056E-07
23					15	0,0291839	0,0291954	0,6454818	0,6453708	0,000111006	1,23224E-08
24											7,59699E-05

Figure 8 : Reconstruction de la courbe Zéro-Coupon avec la méthode Nelson-Siegel pour la date 15/03/2022

On constate que la courbe de taux estimée à partir de la méthode indirecte Nelson Siegel, est très proche

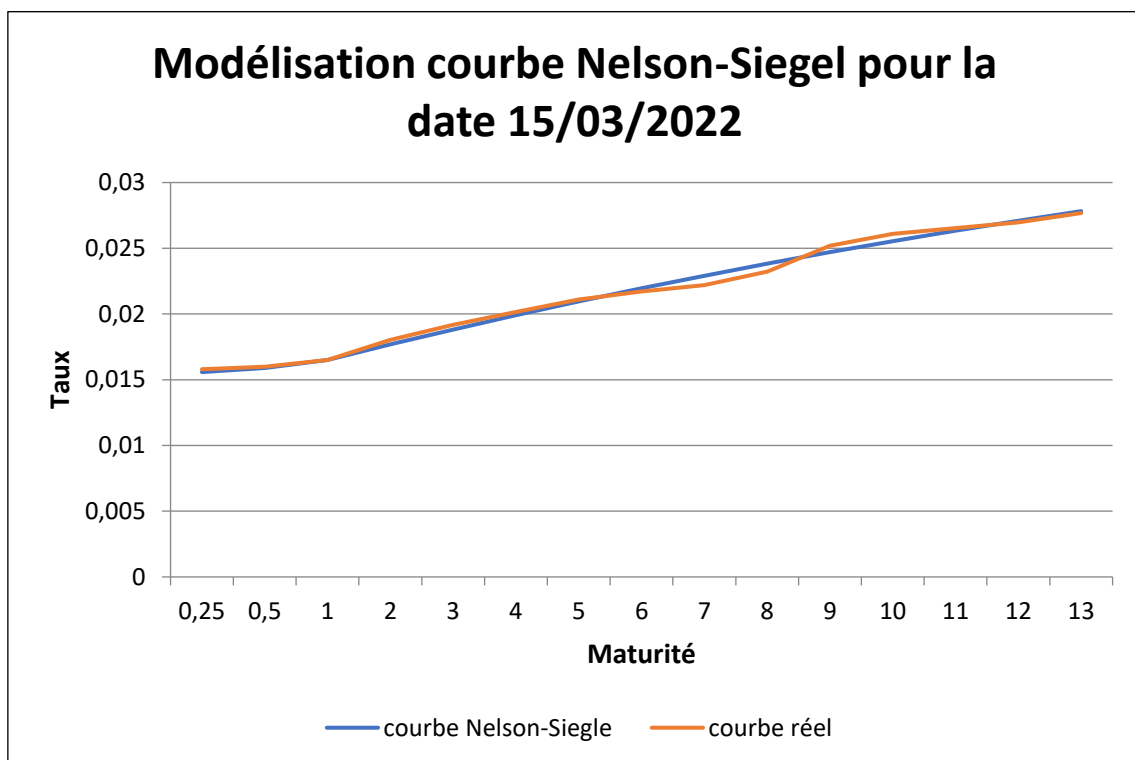


Figure 9 : Comparaison entre la courbe Zéro-Coupon du marché et la courbe estimée par la méthode de Nelson-Siegel pour la date 15/03/2022

La courbe de taux estimée à partir de la méthode indirecte Nelson Siegel, est très proche de la courbe réelle, donc cette méthode modélise bien la courbe de taux.

Malgré l'importance de ce modèle en finance, il ne permet pas de reconstituer toutes les formes des courbes de taux existantes sur le marché et il manque de souplesse d'ajustement pour les grandes maturités de sorte que les obligations de telles maturités sont mal évaluées par ce modèle.

II. Modélisation stochastique

II.1.1 Introductions

Les modèles d'équilibre proposent des théories sur la nature du processus stochastique qui détermine les taux d'intérêt et déduisent une caractérisation de la structure des taux dans un marché efficient (Vasicek et Fong, 1982). Les courbes découlant de ces modèles ne dépendent que de quelques paramètres. Le problème est que ces courbes zéro ne correspondent pas très bien aux données observées sur les rendements et les prix des obligations. Les courbes de rendement réelles présentent généralement des formes plus variées que celles justifiées par les modèles d'équilibre.

II.2 Lemme d'Ito

Il est important de connaître le lemme d'Ito afin de comprendre comment l'équation différentielle du facteur d'actualisation, qui est une fonction du taux d'intérêt, est déterminée. On suppose que le taux d'intérêt r suit un processus d'Ito.

Supposons que nous ayons une variable x qui suit un processus d'Ito :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dZ$$

Où dZ est un processus de Wiener et a et b sont des fonctions de x et t .

Un processus de Wiener possède deux propriétés de base. Premièrement, dZ est lié à dt par l'équation $dZ = \varepsilon\sqrt{dt}$ où ε est une variable aléatoire issue d'une distribution normale standard. Deuxièmement, les valeurs de dZ pour deux courts intervalles de temps différents dZ sont indépendantes.

Nous voyons que x a un taux de dérive de a et une variance de b^2 . Selon le lemme d'Ito, nous savons qu'une fonction G de x et de t suit alors le processus :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dZ$$

Où dZ est le même processus de Wiener.

II.3 Méthode directe : Vasicek

Vasicek (1977) explique les niveaux de rendement en utilisant un modèle avec un seul facteur exogène. Son modèle produit une courbe de rendement zéro-coupon (spot), sans arbitrage et déterminée par le niveau actuel des taux à court terme. Il définit le processus des taux à court terme comme suit :

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma dZ$$

Avec

- r = le taux du marché monétaire sans risque
- γ = le niveau attendu à long terme du taux du marché monétaire
- α = le taux de réversion moyen
- σ = la volatilité du taux du marché monétaire
- dZ = un terme stochastique normalement

Le modèle intègre ce que l'on appelle la réversion moyenne. La réversion moyenne est le processus qui décrit que lorsque le taux court r est élevé, il aura tendance à être tiré vers le niveau moyen à long terme. Lorsque le taux est faible, il aura une tendance à la hausse vers le niveau moyen. Dans le modèle de Vasicek, le taux court est tiré vers un niveau moyen γ à un taux de α . Le retour à la moyenne est régi par le terme stochastique σdZ , qui est normalement distribué. En utilisant l'équation, Vasicek et le lemme d'Ito montre que le prix au temps t d'une obligation à coupon zéro de maturité T est donné par :

$$dP = \mu P dt + \rho P dZ$$

Avec

$$\mu = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \alpha(\gamma - r) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2 \right)$$

Et

$$\rho = \sigma \left(\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} \right)$$

Nous interprétons μ comme le taux de rendement instantané de l'obligation ; et ρ comme la sensibilité du prix de l'obligation aux variations du taux au comptant (Vasicek,

1977). Sous l'hypothèse que le rendement attendu d'une obligation est égal au taux sans risque plus une provision pour risque, il s'avère que $\mu = r + a\rho$ avec a est le prix du risque sur le marché et tous les autres symboles sont définis comme précédemment. Pour des raisons de simplicité, on suppose que a est constant.

On peut montrer que l'équation différentielle a la solution suivante (et donc la forme fonctionnelle de la fonction d'escompte) :

$$P(t, T) = B(t, T)e^{-A(T-t)r(t)}$$

Avec

$$A(t, T) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)})$$

$$B(t, T) = \exp\left(\left(\gamma - \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3} \times (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) - \frac{1}{\alpha} \times \left(\gamma - \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\right)(1 - e^{-\alpha(T-t)})\right)$$

Sachant que λ est la prime de risque, celle-ci permet le calcul de la prime de terme de cette façon :

$$\psi(t, T, r) = \frac{\lambda}{\alpha} (e^{-\alpha(T-t)} - 1)$$

Ainsi, le rendement à l'instant d'un titre de maturité et de prix, s'écrit de la façon suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T))$$

En remplaçant $P(t, T)$ nous obtenons :

$$r(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(B(t, T)) + \frac{1}{(T-t)} A(t, T)r(t)$$

Un problème avec le modèle de Vasicek est que les taux à court terme négatifs sont autorisés. Cox, Ingersoll et Ross (1985) ont proposé un modèle alternatif à un facteur pour lequel les taux à court terme sont toujours non négatifs. Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross est discuté dans la section suivante.

II.4 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

La section précédente montre que, dans le cadre d'un modèle qui suppose que le taux court suit une distribution normale, il est possible que les taux à terme soient négatifs. Le modèle Cox-Ingersoll-Ross (1985) est un modèle à un facteur et, tel qu'il a été présenté à l'origine, il élimine la possibilité de taux négatifs. Dans le cadre du modèle CIR, la dynamique du taux court est décrite par :

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma r^\beta dZ$$

Cette formule présente la même méthode de retour à la moyenne que la formule de Vasicek, mais le terme stochastique a une volatilité proportionnelle à r^β . Ils suggèrent $\beta = 0.5$, car cela empêcherait le taux d'intérêt d'être négatif. Lorsque $\beta = 0$, le modèle proposé est exactement le même que le modèle de Vasicek, ce qui peut conduire à des taux d'intérêt négatifs.

Cependant, le terme stochastique a un écart type qui est proportionnel à r . Il s'agit d'une différence significative car elle indique que plus le taux court augmente, plus l'écart type augmente. Cela signifie que les taux à terme seront positifs. Dans le modèle CIR, le prix d'une obligation zéro-coupon sans risque est donné par :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

Avec

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\delta(T-t)} - 1)}{(\delta + \alpha)(e^{\lambda(T-t)} - 1) + 2\delta}$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2\delta e^{(\delta+\alpha)(T-t)/2}}{(\delta + \alpha)(e^{\delta(T-t)} - 1) + 2\lambda} \right]^{2\alpha\beta/\sigma^2}$$

Et

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$$

Le taux d'intérêt à long terme $R(t, T)$ est une fonction du taux à court terme $r(t)$.

$$R(t, T) = \frac{B(t, T) \times r(t) - \ln(A(t, T))}{T - t}$$

II.5 Implémentation des modèles stochastique de la courbe des taux (application)

Cette section sera dédiée à la présentation de l'implémentation des deux méthodes comparées pour construire la nouvelle courbe des taux. L'outil a été réalisé à l'aide de langage de programmation VBA Excel et le logiciel Eviews.

Les étapes à suivre lors de l'implémentation des modèles:

1. Nous étudierons les propriétés statistiques de la série des TMP : stationnarité et normalité.
2. Nous réalisons la régression avec l'outil Eviews.
3. Nous testons la normalité et l'indépendance des résidus.
4. Nous exécutons le modèle sur Excel.

II.5.1 Vasicek

Application du modèle :

Pour pouvoir appliquer ce modèle et faire les estimations des paramètres, nous devons nécessairement passer par la discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci nous permettra, par la suite, de modéliser la série du taux interbancaire pondéré TMP qui s'étend de 01/01/2008 au 01/04/2022.

II.5.1.1 Discrétisation du modèle de Vasicek :

Nous savons, d'après ce qui précède, que le taux instantané à court terme du modèle de Vasicek suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = \alpha[\gamma - r(t)dt] + \sigma dZ$$

Pour estimer les paramètres γ , α et σ qui sont positifs, nous appliquons la discrétisation exacte définie sous la forme suivante :

$$r_t - r_{t-1} = \gamma(1 - e^{-\alpha}) + (e^{-\alpha} - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha} \times (1 - e^{-2\alpha})\right)$$

Donc :

$$r_t = \gamma(1 - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} \times r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$r_t = a + br_{t-1} + \varepsilon_t$$

Et

- $b = e^{-\alpha}$
- $a = \gamma(1 - e^{-\alpha})$

Cette équation montre que les taux courts suivent un processus autorégressif d'ordre 1. L'estimation des paramètres de l'équation ??? sera faite à partir des données discrètes du taux court, à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires.

Une fois ces paramètres estimés, nous pouvons calculer les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, en utilisant les formules suivantes :

$$\hat{\alpha} = -\ln(\hat{b}) \quad \text{et} \quad \hat{\gamma} = \frac{\hat{a}}{1-\hat{b}} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon \times \sqrt{\frac{-\ln \hat{b}^2}{1-\hat{a}^2}}$$

II.5.1.2 Analyse des données

Nous nous baserons dans notre étude sur des données journalières du Taux Moyen Pondéré au jour le jour (TMPjj) du marché monétaire interbancaire, qui s'étale du 01/01/2008 au 01/04/2022, soit 5169 observations.

Ces données sont représentées sur le graphe suivant décrivant les fluctuations du TMP sur la durée considérée :

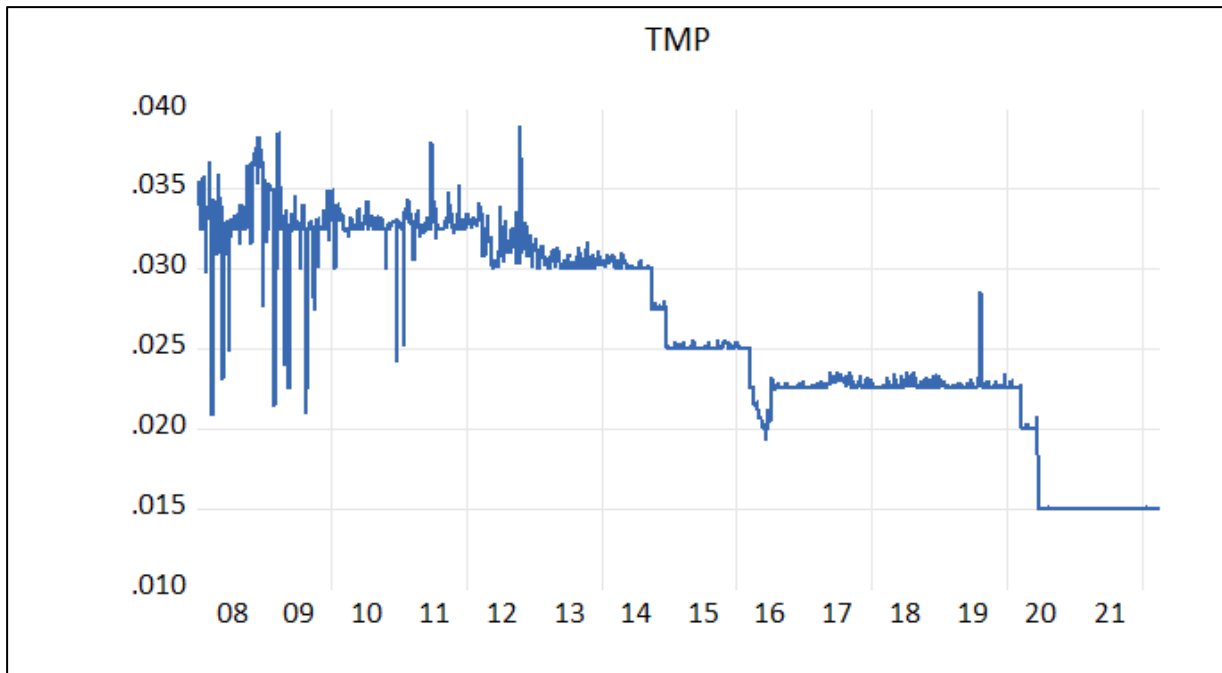


Figure 10 : Evolution journalière du TMP entre 2008 et 2022 réalisée par l'auteur sur Eviews

A partir de l'évolution du TMP journalier, nous remarquons que la série est stationnaire, mais, nous ne pouvons le confirmer qu'en faisant appel aux tests de DickeyFuller Augmentés à l'aide du logiciel Eviews.

II.5.1.3 Statistique descriptive de la série TMP journalier :

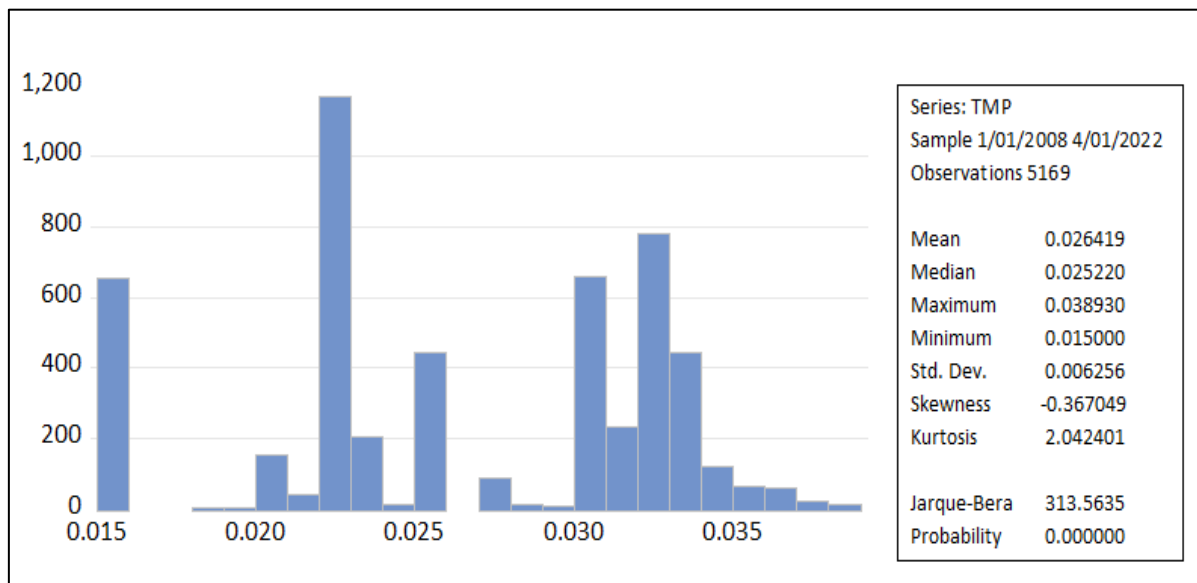


Figure 11 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier

Cette figure résume les différentes statistiques relatives à la statistique TMP. Le Skewnes renseigne sur l'asymétrie de la distribution. Le Kurtosis indique la normalité des données. Pour notre cas, nous remarquons que le Skewnes est négatif ce qui signifie que les données se concentre à droite de la moyenne. Le kurtosis est inférieure à 3 qui représente la valeur de cet indice pour la loi normale. La valeur obtenue pour la statistique de Jarque & Bera est largement supérieur à la valeur critique, ainsi nous rejetons l'hypothèse de la normalité de TMP.

II.5.1.4 Test de racine unitaire (Dickey-Fuller Augmenté) :

Un test de stationnarité largement utilisé et répandu est le test de racine unitaire « Unit Root Test » proposé par Dickey et Fuller dans le cas des modèles AR(1) ou encore le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) pour le cas général des modèles AR(p). La logique de ces tests repose sur les trois modèles suivants :

- Modèle 1 : modèle autorégressif avec tendance et constante :

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \text{ avec } \beta \neq 0 \text{ sous } H_0$$

- Modèle 2 : modèle autorégressif avec constante :

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ sous } H_0$$

- Modèle 3 : modèle stationnaire

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \alpha$$

Nous commençons par tester la stationnarité de la série TMP, nous choisissons d'effectuer le test de racine unitaire. Ainsi, nous testons le troisième modèle, c'est-à-dire l'existence d'une constante et d'une tendance.

✓ Modèle 1

Null Hypothesis: TMP has a unit root Exogenous: Constant, Linear Trend Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-11.13229	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.959813
	5% level	-3.410674
	10% level	-3.127120
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Figure 12 : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté sur le taux cour pour l'existence d'une tendance (sortie Eviews)

La statistique de Dickey-Fuller qui affiche une valeur de -11.13229 négative et inférieure à -3.959813 pour la valeur critique à 5% mais aussi la p-value < 0.05 permettent de rejeter H0 et donc de déduire que la série ne suit pas de tendance ($\beta = 0$).

✓ **Modèle 2**

Nous testons le modèle avec constante.

Null Hypothesis: TMP has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.870845	0.0023
Test critical values:	1% level	-3.431434
	5% level	-2.861904
	10% level	-2.567006
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Figure 13 : : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté sur le taux cour pour la significativité de la constante (sortie Eviews)

De même, à ce niveau, la statistique de Dickey-Fuller prend une valeur de -3.870845 inférieure à -3.431434 pour la valeur critique à 5% mais aussi la p-value < 0.05 permettent de rejeter H0 et donc de déduire que la nullité de la constante ($\alpha = 0$)

✓ **Modèle 3**

Null Hypothesis: TMP has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.283243	0.1843
Test critical values:		
1% level	-2.565410	
5% level	-1.940885	
10% level	-1.616658	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Figure 14 : Résultats du test de racine unitaire pour la stationnarité de la série du taux court (sortie EViews)

Une analyse similaire aux deux précédentes de la statistique de $(|-1.283243| < |-1.940885|$ valeur critique à un seuil de confiance 95%) et de la p-value qui dépasse ici les 5% donc on rejette H_0 l'hypothèse d'existence d'une racine unitaire dans la série et on conclut que la série est stationnaire.

II.5.1.5 Test d'autocorrélation :

Correlogram of TMP						
Sample: 1/1/2008 4/1/2022						
Included observations: 5169						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.993	0.993	5104.3	0.000
		2	0.988	0.073	10153.	0.000
		3	0.982	0.009	15146.	0.000
		4	0.978	0.081	20096.	0.000
		5	0.974	0.050	25007.	0.000
		6	0.971	0.050	29885.	0.000
		7	0.969	0.112	34743.	0.000
		8	0.967	0.101	39591.	0.000
		9	0.966	0.038	44428.	0.000
		10	0.965	0.037	49256.	0.000
		11	0.964	0.021	54073.	0.000
		12	0.963	0.045	58880.	0.000
		13	0.962	0.038	63679.	0.000
		14	0.961	0.055	68471.	0.000
		15	0.961	0.018	73256.	0.000
		16	0.960	0.032	78035.	0.000
		17	0.959	0.022	82807.	0.000
		18	0.959	0.037	87575.	0.000
		19	0.958	0.008	92336.	0.000
		20	0.957	0.022	97091.	0.000
		21	0.956	0.012	101838.	0.000
		22	0.956	0.046	106582.	0.000
		23	0.955	0.029	111324.	0.000
		24	0.955	0.021	116063.	0.000
		25	0.955	0.059	120805.	0.000
		26	0.955	0.023	125548.	0.000
		27	0.955	0.020	130294.	0.000
		28	0.955	0.017	135039.	0.000
		29	0.955	0.036	139786.	0.000
		30	0.955	0.019	144533.	0.000
		31	0.955	0.016	149279.	0.000
		32	0.954	-0.034	154017.	0.000
		33	0.953	-0.016	158746.	0.000
		34	0.952	-0.040	163459.	0.000
		35	0.950	0.001	168158.	0.000
		36	0.948	-0.017	172843.	0.000

Figure 15 : Correlogramme (autocorrélations simple et partielle) du TMPjj réalisé par l'auteur sur EViews

Soit, PAC_i le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre i , nous testons l'hypothèse $H_0 : PAC_i = 0, i = 1 \dots 36$. L'intervalle de confiance qui correspond à ce test, au niveau de confiance 95% est :

$$\left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{n}} \right] = \left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{5169}} \right] = [-0.02726; 0.02726]$$

Nous remarquons qu'à partir du second ordre presque tous les PAC_i rentrent dans l'intervalle de confiance, d'où le non-rejet de H_0 , Ce qui mènent à dire que notre processus se rapproche d'un processus autorégressif d'ordre 1.

Puisque la série est stationnaire et qu'elle suit un processus AR(1), nous pouvons faire l'estimation de ses paramètres

II.5.1.6 Estimation des paramètres du modèle

Après avoir vérifié la stationnarité de la série et la légitimité d'un processus AR(1), nous passons à la régression du taux d'intérêt court suivant le modèle présenté par Vasicek. En utilisant le logiciel EViews, l'estimation des paramètres a et b de la relation de régression nous a donné les résultats suivants :

Dependent Variable: TMP				
Method: Least Squares				
Date: 06/11/22 Time: 00:23				
Sample (adjusted): 1/02/2008 4/01/2022				
Included observations: 5168 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000153	4.15E-05	3.673692	0.0002
TMP(-1)	0.994078	0.001530	649.7638	0.0000
R-squared	0.987912	Mean dependent var		0.026418
Adjusted R-squared	0.987909	S.D. dependent var		0.006255
S.E. of regression	0.000688	Akaike info criterion		-11.72567
Sum squared resid	0.002444	Schwarz criterion		-11.72313
Log likelihood	30301.12	Hannan-Quinn criter.		-11.72478
F-statistic	422193.1	Durbin-Watson stat		2.152220
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 16 : Résultats d'estimation par la méthode des MCO réalisée par l'auteur sur EViews

Nous avons des statistiques de Student de respectivement 3.67 et 642.7638 qui sont supérieures à la valeur critique de Student qui est de 1.96 (pour un niveau de confiance de 95% et un degré de liberté de 5168). Donc on rejette l'hypothèse de la nullité des coefficients a et b. De plus, la statistique de Fisher permet de rejeter la nullité de tous les coefficients estimés simultanément. La statistique de Durbin-Watson est de 2.15, proche de 2, informe que les résidus sont significativement indépendants

Ce même tableau d'estimation donne

$$\hat{a} = 0.000153 ; \hat{b} = 0.994078 ; \hat{\sigma} = 0.006256$$

Donc l'équation s'écrit comme suit

$$TMP = 0.000747 + TMP(-1) \times 0.994078$$

Et on peut donc déduire les paramètres du modèle de Vasicek :

- $\hat{\alpha} = -\ln(\hat{b}) = -\ln(0.994078) = 0.005939605$
- $\hat{\gamma} = \frac{\hat{a}}{1-\hat{b}} = \frac{0.000153}{1-0.994078} = 0.025835866$
- $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon \times \sqrt{\frac{-\ln\hat{b}^2}{1-\hat{a}^2}} = 0.006256 \times \sqrt{\frac{-\ln(0.994078^2)}{1-0.000153^2}} = 0.006274$

II.5.1.7 Test d'homoscédasticité des résidus :

Nous testons l'hypothèse H_0 : L'homoscédasticité des résidus. Cette hypothèse suppose que la variance du terme d'erreur est constante pour chaque observation et ne varie pas en fonction des observations $V(\varepsilon_t) = cte \quad \forall t$

Heteroskedasticity Test: White			
Null hypothesis: Homoskedasticity			
F-statistic	1.986045	Prob. F(2,5165)	0.1373
Obs*R-squared	3.971343	Prob. Chi-Square(2)	0.1373
Scaled explained SS	278.7770	Prob. Chi-Square(2)	0.0000

Figure 17 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité du modèle Vasicek réalisée par l'auteur sur EViews

Puisque la p-value du test est supérieure au seuil qui est de 5%, nous acceptons l'hypothèse H_0 . D'où l'homoscédasticité des résidus

II.5.1.8 Test de normalité :

Nous testons H_0 : l'hypothèse de la normalité des résidus

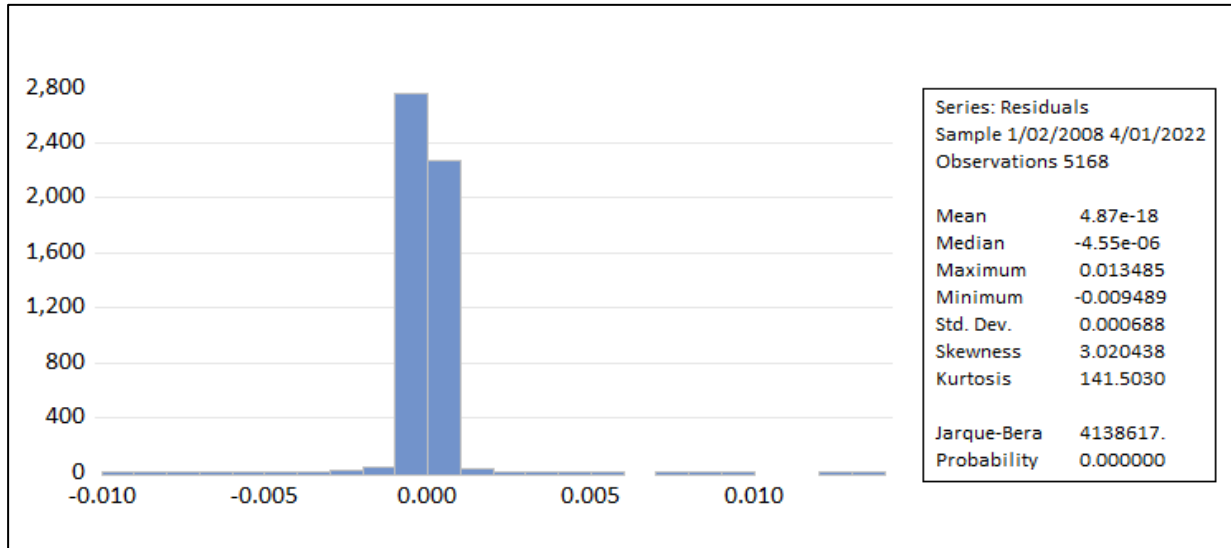


Figure 18 : Test de la normalité des résidus du modèle Vasicek réalisée par l'auteur sur EViews

Puisque la p-value du test Jarque-Bera est inférieure au seuil de 5%, nous déduisons qu'il n'y a pas de normalité des résidus.

II.5.1.9 Test du bruit blanc

Correlogram of Residuals						
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.076	-0.076	30.070	0.000
		2	-0.004	-0.010	30.160	0.000
		3	-0.085	-0.087	67.458	0.000
		4	-0.039	-0.053	75.371	0.000
		5	-0.042	-0.052	84.445	0.000
		6	-0.100	-0.118	135.90	0.000
		7	-0.075	-0.107	164.84	0.000
		8	-0.008	-0.042	165.14	0.000
		9	-0.000	-0.038	165.14	0.000
		10	0.019	-0.020	166.93	0.000
		11	-0.016	-0.046	168.24	0.000
		12	-0.000	-0.038	168.24	0.000
		13	-0.017	-0.052	169.81	0.000
		14	0.019	-0.013	171.71	0.000
		15	-0.008	-0.028	172.05	0.000
		16	0.010	-0.011	172.55	0.000
		17	-0.016	-0.032	173.89	0.000
		18	0.022	0.000	176.36	0.000
		19	0.000	-0.013	176.36	0.000
		20	0.008	-0.005	176.68	0.000
		21	-0.033	-0.040	182.41	0.000
		22	-0.004	-0.018	182.49	0.000
		23	0.000	-0.010	182.49	0.000
		24	-0.035	-0.051	188.84	0.000
		25	0.007	-0.011	189.07	0.000
		26	0.006	-0.007	189.24	0.000
		27	0.013	-0.007	190.08	0.000
		28	-0.007	-0.026	190.35	0.000
		29	0.008	-0.006	190.70	0.000
		30	0.015	0.001	191.90	0.000
		31	0.058	0.053	209.53	0.000
		32	0.024	0.034	212.53	0.000
		33	0.045	0.060	222.93	0.000
		34	-0.006	0.019	223.15	0.000
		35	0.019	0.042	224.99	0.000
		36	-0.016	0.019	226.25	0.000

Figure 19 : Correlogramme des résidus du modèle Vasicek

Nous remarquons que toutes les probabilités sont inférieures au seuil de 5%, donc les résidus de notre série ne sont pas des bruits blancs.

II.5.1.10 Estimation de la prime de risque

Le rendement, $R(t, T)$, d'une obligation zéro-coupon, de maturité T , à la date t est donné pour le modèle de Vasicek sous la forme suivante :

$$R(t, T) = R_{\infty} + \frac{1}{(T-t)a} \times (1 - \exp(-(T-t)a))(r(t) - R_{\infty}) + \frac{\sigma^2}{4(T-t)a^3} (1 - \exp(-(T-t)a) - (T-t)k)^2$$

Avec $R_{\infty} = b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a}$

Chapitre 2 : structure par terme des taux d'intérêts

Le seul paramètre restant à estimer est la prime de risque de marché. Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant cette obligation. Plusieurs méthodes existent pour approcher cette valeur. Dans notre modèle, nous proposons de minimiser l'écart entre les rendements de marchés et les rendements estimé qui dépend de ce paramètre à l'aide du solveur Excel.

Nous allons travailler sur la courbe correspondante au 15/03/2022. Nous allons initialiser par zéro, et puis utiliser le solveur Excel pour calculer la valeur de qui minimise les écarts pour cette date

Modèle Vasicek											
Date		15/03/2022		Modélisation		0,999410475					
Date		mardi 15 mars 2022									
Paramètres	Valeur	maturité pleine	A(0,T)	B(0,T)	A(0,T)*r(0)	Rendement calculé	Rendement réel	écart	écart^2	prime de terme	
a	0,000153	13 semaines	0,25	-0,24981	-7,83666E-05	-0,003767	0,015382276	0,015793417	0,00041714	1,74E-07	0,000234118
b	0,934078	26 semaines	0,5	-0,49926	-0,000312902	-0,007523	0,0156883435	0,015983003	0,00023957	8,374E-08	0,000468099
ecart type	0,006256	52 semaines	1	-0,99704	-0,00124711	-0,015035	0,016282414	0,016493353	0,00021094	4,45E-08	0,000935646
gamma	0,025835866	2ans	2	-1,98817	-0,004952638	-0,029382	0,017467103	0,018030066	0,00056296	3,169E-07	0,001869067
alpha	0,005939605	3ans	3	-2,97343	-0,011063464	-0,044839	0,018634262	0,018185162	0,0005509	3,035E-07	0,002800329
sigma	0,006274588	4ans	4	-3,95286	-0,019527239	-0,059609	0,019784082	0,020149698	0,00036562	1,337E-07	0,003723378
tmp	0,01508	5ans	5	-4,92648	-0,030292372	-0,074291	0,020916752	0,021106356	0,0001896	3,595E-08	0,004656237
lamda	-0,00235880	6ans	6	-5,89435	-0,043308025	-0,088887	0,02203246	0,021705901	-0,0003266	1,066E-07	0,005580913
ecart^2	3,91375E-05	7ans	7	-6,85648	-0,058524097	-0,103396	0,023131393	0,022196562	-0,0009348	8,739E-07	0,00650341
		8ans	8	-7,81291	-0,075891221	-0,117819	0,024213734	0,023232923	-0,0009808	9,62E-07	0,007423733
		9ans	9	-8,76368	-0,095360751	-0,132156	0,025279665	0,025199828	-7,384E-05	6,374E-09	0,008341889
		10ans	10	-9,70881	-0,116884751	-0,146409	0,026329366	0,026100452	-0,0002289	5,24E-08	0,009257881
		11ans	11	-10,6484	-0,140415989	-0,160577	0,027363015	0,026529659	-0,0008334	6,945E-07	0,010171715
		12ans	12	-11,5823	-0,165307929	-0,174662	0,028380789	0,026975312	-0,0014055	1,975E-06	0,011083396
		13ans	13	-12,5108	-0,193314717	-0,188662	0,029382863	0,02767964	-0,0017032	2,901E-06	0,011992929

Figure 20 : Estimation de la valeur de la prime de risque du modèle Vasicek et calcul des rendements zéro coupon

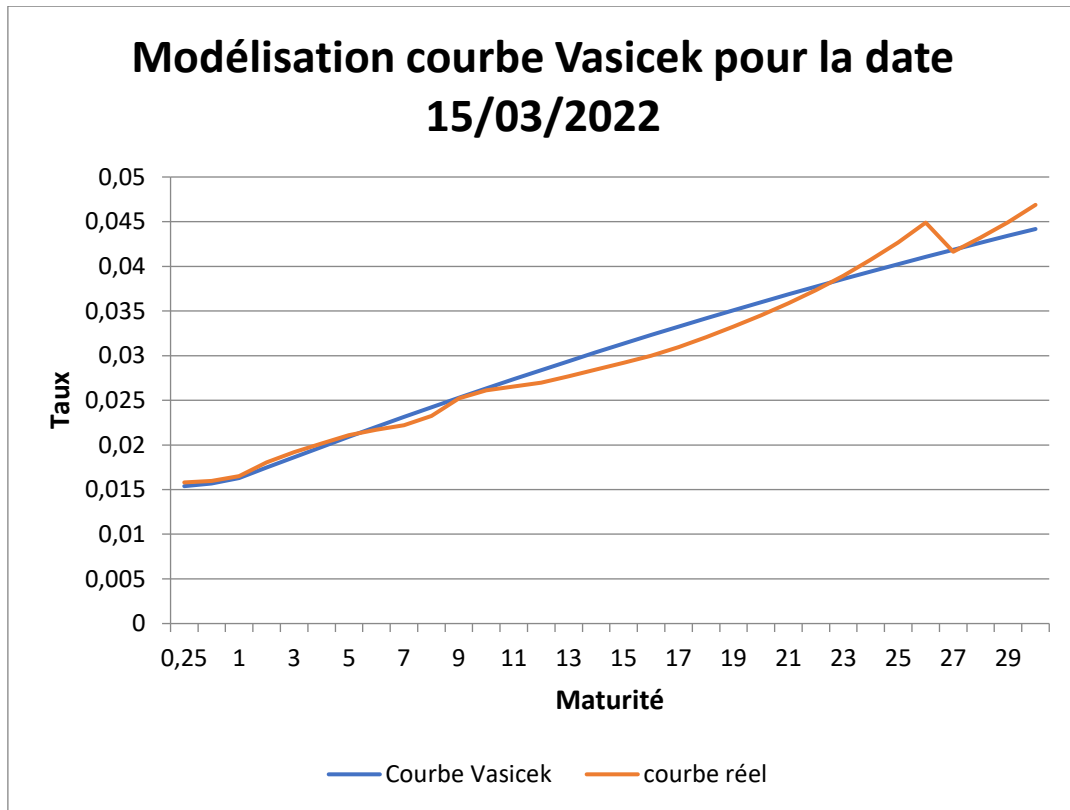


Figure 21 : Comparaison entre la courbe réel et la courbe de Vasicek pour la date 15/03/2022

On constate que la courbe estimée par le modèle de Vasicek est certes proche de celle observée sur le marché marocain, mais elles ne coïncident pas en toute maturité surtout pour le moyen et le long terme.

II.5.1.11 Prime à terme

En outre, l'estimation de nous a permis de calculer la prime de terme présentée par la formule suivante :

$$\varphi(t, T, r) = \frac{\lambda}{\alpha} (e^{-\alpha(T-t)} - 1)$$

Le graphe suivant illustre son évolution :

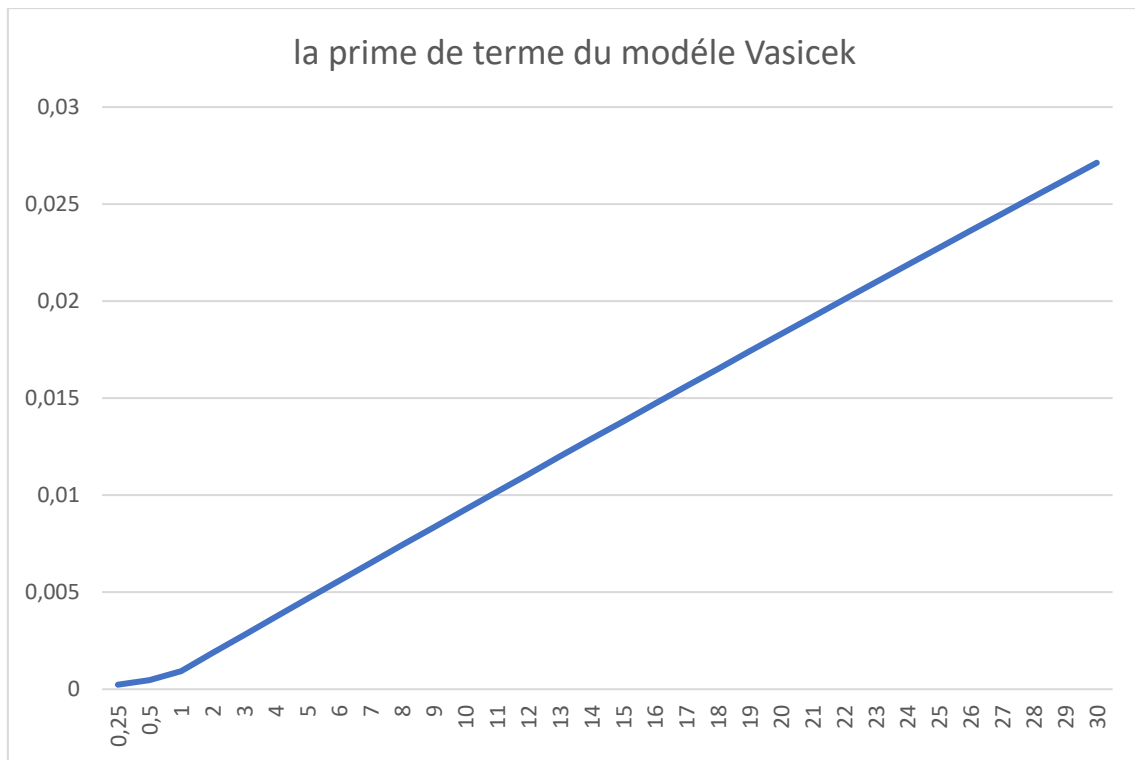


Figure 22 : Prime de terme du modèle Vasicek

Nous remarquons que la prime croît avec les maturités, ce qui paraît logique car plus le risque est important plus la prime est élevée.

Le modèle Vasicek a plusieurs avantages : Sa distribution gaussienne est facile à manipuler, la simulation est aisée puisque les formules sont explicites pour les obligations et les taux zéro-coupon.

Mais, son défaut majeur est dû à son caractère gaussien qui ne garantit pas la positivité du taux court. Donc, pour remédier à cela, nous allons utiliser le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, qui ajoute de nouvelles contraintes sur la dynamique des taux, garantissant la positivité des taux

II.5.2 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

Dans cette section, nous implémentons le modèle CIR. D'abord, nous exposons la méthodologie d'estimation des paramètres. Ensuite, nous construisons la courbe afin de la comparer avec les autres modèles.

II.5.2.1 Discrétisation du modèle de CIR

Dans notre cas, nous avons opté pour le schéma d'Euler. Le procédé de discrétisation consiste en l'approximation du processus continu r par le processus discret \tilde{r} , d'où ce dernier s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} \times \delta + \varepsilon_{t+\delta}$$

Tel que $\varepsilon_{t+\delta}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite

Si nous considérons que δ est égale à une période, on aura donc :

$$r_t = a \times b + (1 - a)r_{t-1} + \sigma\sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_t$$

$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{ab}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1 - a)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma\varepsilon_t$$

Posons

$$X_t = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} ; \quad Z_t = \sqrt{r_{t-1}} ; \quad Y_t = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}}$$

Donc l'équation de régression devient

$$X_t = a \times bY_t + (1 - a)Z_t + \sigma\varepsilon_t$$

II.5.2.2 Estimation des paramètres de modèle

Nous utilisons Eviews pour trouver les paramètres, les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Dependent Variable: $TMP/(TMP(-1))^{(0.5)}$				
Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)				
Date: 06/19/22 Time: 04:45				
Sample (adjusted): 1/02/2008 4/01/2022				
Included observations: 5168 after adjustments				
Convergence achieved after 8 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
$TMP/(TMP(-1))^{(0.5)}=C(1)*C(2)/(TMP(-1))^{(0.5)}+(1-C(1))*(TMP(-1))^{(0.5)}$				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.004128	0.001387	2.975599	0.0029
C(2)	0.025485	0.002216	11.50080	0.0000
R-squared	0.958030	Mean dependent var	0.161307	
Adjusted R-squared	0.958022	S.D. dependent var	0.020276	
S.E. of regression	0.004154	Akaike info criterion	-8.129031	
Sum squared resid	0.089149	Schwarz criterion	-8.126496	
Log likelihood	21007.42	Hannan-Quinn criter.	-8.128144	
Durbin-Watson stat	2.138642			

Figure 23 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle CIR par la méthode des MCO réalisée par l'auteur sur EViews

Nous constatons que les p-values associées à la statistique de student sont toutes nulles, inférieures donc au seuil critique de 5%. On rejette donc l'hypothèse de nullité des coefficients. De plus, la statistique Durbin-Watson est de 2.138642 et donc proche de 2, ce qui nous permet de vérifier l'absence d'autocorrélation entre les erreurs. Ainsi nous récupérons les estimations des paramètres qui sont tous significatif

$$\hat{\alpha} = 0.004128 ; \hat{b} = 0.025485 ; \hat{\sigma} = 0.006256$$

II.5.2.3 Test d'hétéroscédasticité pour le modèle CIR

Heteroskedasticity Test: White			
Null hypothesis: Homoskedasticity			
F-statistic	1.604145	Prob. F(2,5165)	0.2012
Obs*R-squared	3.208160	Prob. Chi-Square(2)	0.2011
Scaled explained SS	283.6012	Prob. Chi-Square(2)	0.0000

Figure 24 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité du modèle CIR réalisée par l'auteur sur EViews

Puisque la p-value est supérieur au seuil de 5%, nous acceptons l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus.

II.5.2.4 Test de normalité des résidus :

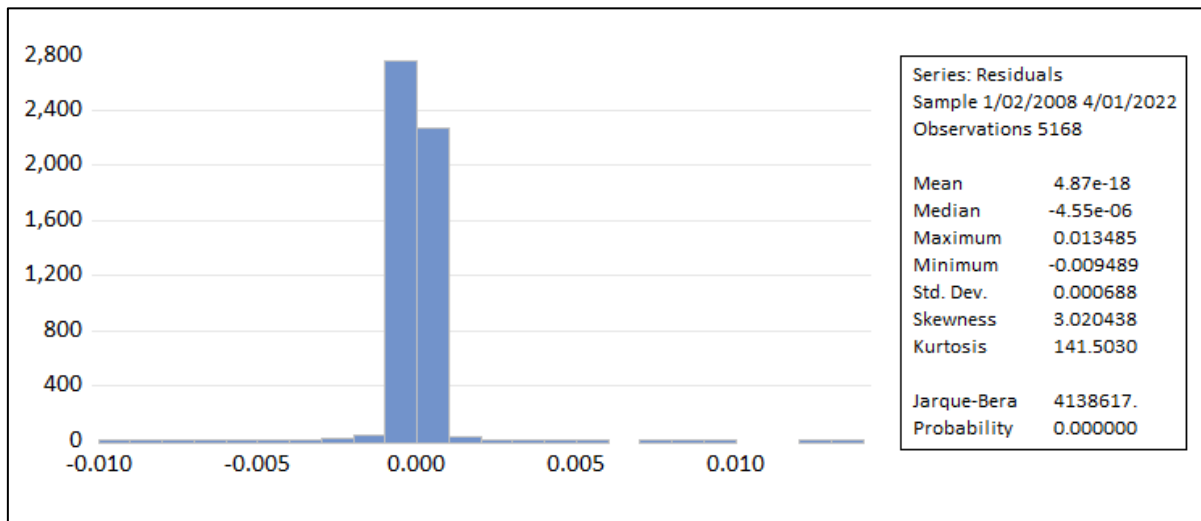


Figure 25 : test de normalité du modèle CIR réalisée par l'auteur

Puisque la p-value du test Jarque-Bera est inférieure au seuil de 5%, nous déduisons qu'il n'y a pas de normalité des résidus.

II.5.2.5 Estimation de la prime de risque :

Afin de construire la courbe du taux zéro coupon par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, nous devons faire l'estimation de λ . Celle-ci est obtenue par la minimisation des écarts au carré entre les rendements théoriques et les rendements du marché à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

Comme dans le modèle de Vasicek, nous allons travailler sur la courbe de taux correspondante au 07/03/2014. Nous allons initialiser par zéro, et puis utiliser le solveur Excel pour calculer la valeur de λ qui minimisent les écarts pour cette date.

Chapitre 2 : structure par terme des taux d'intérêts

Modèle Cox, Ingersoll et Ross									
Date		Modélisation							
15/03/2022									
mardi 15 mars 2022									
paramètres	valeur	maturité pleine	A(0,T)	B(0,T)	Rendement calculé	Rendement réel	écart	écart*2	
a	0,004128	13 semaines	0,25	0,9999966941012	0,252094771	1,522%	0,015799417	0,058%	3,36211E-07
b	0,025485	26 semaines	0,5	0,9999867025053	0,508425533	1,536%	0,015983003	0,062%	3,8725E-07
ecart type	0,006256	52 semaines	1	0,9999462119774	1,034078276	1,565%	0,016493353	0,085%	7,15147E-07
lamda	-11,31587462	2ans	2	0,9997799519873	2,139396912	1,624%	0,018030066	0,179%	3,20044E-06
k	-0,066664112	3ans	3	0,9994935326707	3,320812696	1,686%	0,019185162	0,232%	5,39948E-06
gamma	0,067248635	4ans	4	0,9990787897492	4,58350621	1,751%	0,020149698	0,264%	6,96681E-06
tmp	0,01508	5ans	5	0,9985270579324	5,93300237	1,819%	0,021106356	0,292%	8,51248E-06
		6ans	6	0,9978291464478	7,37519211	1,890%	0,021705901	0,281%	7,8814E-06
		7ans	7	0,9969753143387	8,916355272	1,964%	0,022196562	0,256%	6,53024E-06
		8ans	8	0,9959552457063	10,56318471	2,042%	0,023232923	0,281%	7,92254E-06
		9ans	9	0,9947580251101	12,3228117	2,123%	0,025199828	0,397%	1,57474E-05
		10ans	10	0,9933721133753	14,2028326	2,208%	0,026100452	0,402%	1,6141E-05
		11ans	11	0,9917853241064	16,21133686	2,297%	0,026529659	0,356%	1,26417E-05
		12ans	12	0,9899848012517	18,35693646	2,391%	0,026975312	0,307%	9,41234E-06
		13ans	13	0,9879569981220	20,64879656	2,488%	0,02767964	0,280%	7,81218E-06
		14ans	14	0,9856952933222	23,08552755	2,587%	0,028442165	0,254%	6,14322E-06

Figure 26 : Estimation de la valeur de la prime de risque du modèle CIR et calcul des rendements zéro coupon

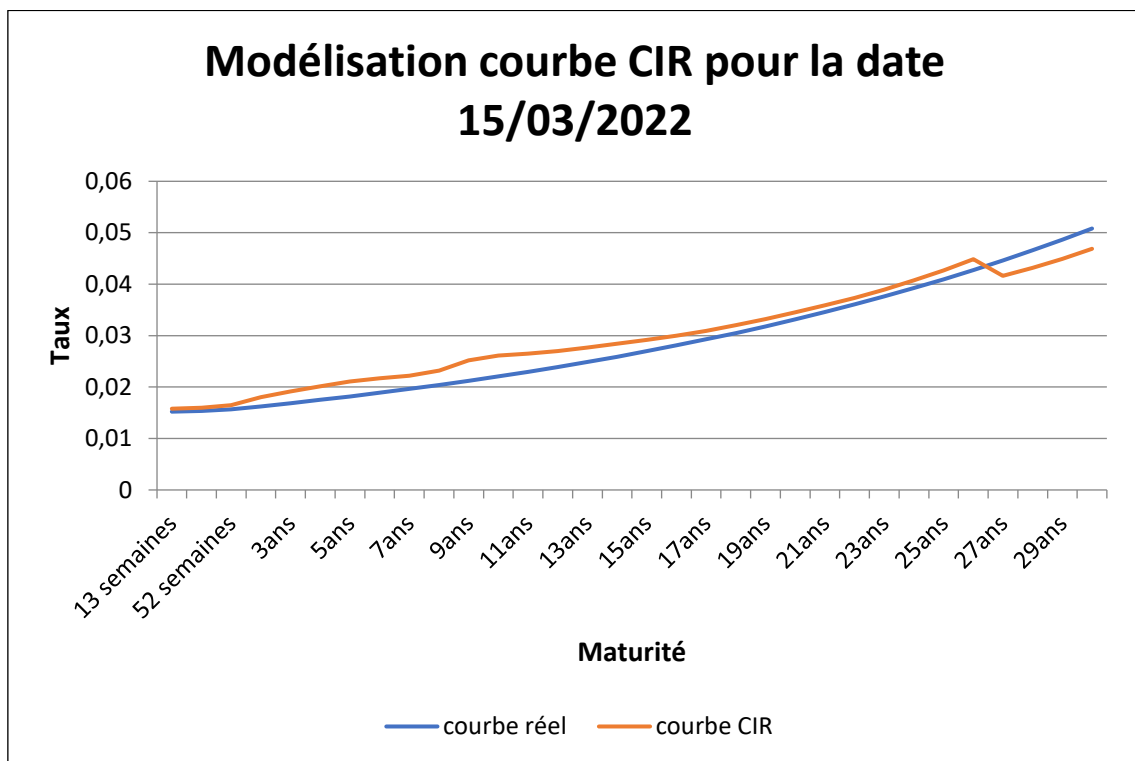


Figure 27 : Comparaison entre la courbe réel et la courbe de CIR pour la date 15/03/2022

Nous remarquons que la courbe des prix s'écarte de la courbe de marché. Or, les deux courbes suivent la même tendance.

Chapitre 3 : Valorisation

I. Valorisation du portefeuille obligataire

Dans cette partie, nous allons décrire le processus d'évaluation des titres de créance émis ou garantis par l'état à coupon annuel et à taux fixe remboursable « in fine » comme défini dans la circulaire de BAM. Ensuite, nous développerons notre code sur VBA Ecel pour valoriser ces obligations. Enfin, nous doterons notre pricer d'outils quantitatifs de gestion de risque.

I.1 Evaluation des titres de créances de maturité initiale inférieure ou égale à 1 an :

Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est inférieure ou égale à 365 jours est calculé de la manière suivante :

$$P = N \times \frac{1 + T_f \frac{M_i}{360}}{1 + T_r \frac{M_r}{360}}$$

Où

- i. P : le prix du titre, en DH ;
- ii. N : le nominal, en DH ;
- iii. Mi : la maturité initiale, en jours ;
- iv. Mr : maturité résiduelle, en jours ;
- v. TF : le taux facial ;
- vi. Tr : le taux de rendement, simple

I.2 Evaluation des titres de créances de maturité initiale supérieure à 1 an :

- **Titres de créances de maturités résiduelles inférieures à 1 an :**

Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est supérieure à 1 an et dont la maturité résiduelle est inférieure ou égale à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = N \times \frac{1 + T_f}{1 + T_r \frac{M_r}{360}}$$

Sauf dans le cas des lignes postérieures à un seul flux où la formule s'écrit :

$$P = N \times \frac{1 + T_f \frac{M_i}{A}}{1 + T_r \frac{M_r}{360}}$$

Où

A : égale à 366 jours si l'année en cours est une année bissextile et 365 sinon

- **Titres de créances de maturité résiduelle supérieure à 1 an :**

$$P = \frac{1}{(1 + t_r)^{\frac{n_j}{A}}} \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + t_r)^{(i-1)}}$$

Où

- P : prix du titre ;
- tr : le taux de rendement au moment de l'évaluation
- Fi : flux monétaire à la date i (coupon ou coupon plus nominal) ;
- n : nombre de coupons à venir ;
- nj : nombre de jours restant à courir jusqu'à la date du prochain coupon ;
- A : égale à 366 jours si l'année en cours est une année bissextile ou 365 sinon ;

I.3 Pricer de BDT :

Sous VBA, nous avons élaboré un pricer qui nous permet de valoriser les BDT suivant les formules précédentes. Notons que chaque ligne du marché est caractérisée par son code MaroClear (AMC). Ce code appelé code ISIN nous permet, dans une première étape, de récupérer les caractéristiques de la ligne à valoriser, à partir d'une base des données contenant tous les BDT du marché. Ensuite, à partir de ces données, et en précisant la date de valorisation et la quantité des bons de l'emprunt, le pricer détermine en premier lieu le rendement de ce BDT, puis calcule son prix unitaire (prix dirty), le prix global.

valorisation code ISIN

Pricer des Bons de Trésor

Date de pricing :	Code ISIN	Quantité
15/03/2022	MA0002014266	600

Valorisation

Prix unitaire	120378,751 MAD	Prix Global	72227250,682 MAD
----------------------	----------------	--------------------	------------------

Déscription du BDT

Date d'émission	02/05/2016	Date d'échéance	18/08/2036
Taux facial	0,0355	Taux de rendement	2,93496551724138E-02

Figure 28 : Interface de pricer des Bons de Trésor réalisé par l'auteur sur VBA Excel

II. Valorisation du produit Option

Une option est un produit dérivé donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier appelé actif sous-jacent, à une date future convenue et à un prix fixé d'avance. Ainsi, une option d'achat est appelée call et put pour une option de vente.

II.1 Les éléments caractéristiques d'une option sont les suivants :

- **La nature de l'option** : *Call* s'il s'agit d'une option d'achat et *put* pour une option de vente.
- **L'actif sous-jacent** noté $(S_t)_{t \in [0, T]}$, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'une devise etc.
- **Le montant**, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.
- **L'échéance ou date** d'expiration notée T , qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'option américaine, si l'option ne peut être qu'à l'échéance, on parle d'option européenne. –*
- **Le prix d'exercice**, appelé aussi Strike noté K : c'est un prix fixé d'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

II.2 Formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

- S la valeur de l'action sous-jacente
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années)
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque
- σ la volatilité du prix de l'action

Le prix théorique d'une option d'achat (call), qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T , est caractérisé par son payoff :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$$

Le prix de l'option est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du payoff terminal actualisé

$$C = E[\text{payoff} e^{-rT}]$$

Soit la formule de Black-Scholes :

$$C(S, K, r, t, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

De même, le prix théorique d'une option de vente (put), de payoff

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$$

Est donné par :

$$P(S, K, r, t, \sigma) = -SN(-d_1) - Ke^{-rt}N(-d_2)$$

Avec N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans le modèle Black & Scholes, la volatilité est définie comme étant l'écart-type annuel du cours du sous-jacent. L'investisseur peut laisser le marché calculer la volatilité pour lui en recourant à la volatilité implicite. La volatilité implicite est fonction du Strike et de l'échéance choisis par le client. L'opérateur insère cette volatilité anticipée dans la formule de Black & Scholes afin de calculer le prix de l'option correspondant.

II.3 Pricer Black-Scholes

Chapitre 3 : Valorisation

Nous présentons ci-dessous un pricer basé sur la formule de Black & Scholes que nous avons programmé sous VBA, et qui fournit les prix d'options vanilles.

Paramètre	Valeurs
Valeur de l'action sous-jacente	56
Prix d'exercice	60
Taux d'intérêt sans risque	0,05
Volatilité	0,2
Date d'échéance	05/08/2028
Pate de pricing nominal	01/05/2022 1

Calcule

Prix Black-Scholes	
Put	4,977308509
Call	16,52821527

Figure 29 : Pricer d'options Black & Scho

Conclusion

Au terme de ce mémoire, il serait utile de rappeler que la structure par terme des taux d'intérêts figure parmi les questions financières les plus complexes et auxquelles il a été très difficile de trouver des réponses complètes. Il s'agit en fait, d'une problématique qui a fait couler beaucoup d'encre depuis les années 30.

Nous avons donné un aperçu large sur les différentes approches de modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt en explicitant quelques modèles appartenant à chacune des approches. Ce travail vise à développer un outil pour la construction de la courbe d'actualisation à partir des obligations à taux fixe qui sera utilisé pour évaluer d'autres produits : obligation, swap.

Il n'est pas évident d'expliquer la structure par terme de taux d'intérêt et son évolution sur le court, moyen et long terme avec un seul facteur qui est le taux du marché interbancaire ; la valeur du TMP_{jj} d'une date donnée, ne permet pas de déterminer l'évolution de la courbe des taux d'intérêt sur le court, moyen et le long terme.

Sur ce champ la banque centrale cherche à agir, à travers ses politiques monétaires, sur le niveau du taux d'intérêt du marché interbancaire. Ainsi, l'influence de la politique monétaire est plus importante pour les échéances courtes et moyennes de la courbe des taux, tandis que l'extrémité longue est davantage influencée par d'autres variables qui doivent être prises en compte, notamment.

- Le déficit public ;
- Les montants levés par le Trésor ;
- Les anticipations des investisseurs ;

Il serait donc judicieux de modéliser la courbe des taux d'intérêt au Maroc avec un modèle à deux ou trois facteurs afin d'améliorer le caractère vraisemblable de la courbe des taux modélisée, tout en prenant en considération les variables explicatives de la partie moyenne et longue de la courbe des taux

Bibliographie :

❖ Livre et article

- [1] Analysing and Interpretation the Yield Curve, second edition, MOORAD CHOUDHRY, Wiley Finance Series
- [2] La Structure par terme des taux d'intérêt, Christophe Bisière, Presses Universitaire de France
- [3] Yield Curve Modeling, Yolanda S. Stander, palgrave macmillan
- [4] Modelization Yield Curve By Vasicek Model Interest Rate In Morocco, Mostafe LEKHAL
- [5] Produits de Taux d'intérêt, Lionel MARTELLINI, Philippe PRIAULET
- [6] Structure par terme des taux d'intérêt et anticipations du Policy-mix, Mohsine AIT CHEIKH, Adil MSADY, Driss OUAHID,
- [7] Circulaire N° 02/04, Relative aux conditions d'évaluation des valeurs apportées à un organisme de placement collectif en valeurs mobilières ou détenues par lui

❖ Sites WEB :

- [1] <http://www.bkam.ma/>
- [2] <https://www.ammc.ma/>
- [3] <http://www.excel-pratique.com/>
- [4] <https://www.developpez.net/>
- [5] <https://www.lafinancepourtous.com/>

Annexes

Annexes A : Présentation de l'organisme CDG Capital

Filiale à cent pour cent de la Caisse de dépôt et de gestion, CDG Capital a été créée en 2006 suivant l'Arrêté numéro 284-06 du 11 moharrem 1427 (10 février 2006) dans le cadre de la stratégie de filialisation opérée par la CDG, et qui avait pour objectif d'offrir un cadre juridique et légal, ainsi qu'un environnement plus adéquat aux activités financières de la CDG.

Cette jeune banque d'investissement est un acteur majeur du paysage financier marocain et un opérateur de premier plan sur les trois groupes du métier de la banque d'investissement :

- Asset Management ;
- Corporate and Investment Banking ;
- Marché des capitaux.

Organigramme de l'organisme :

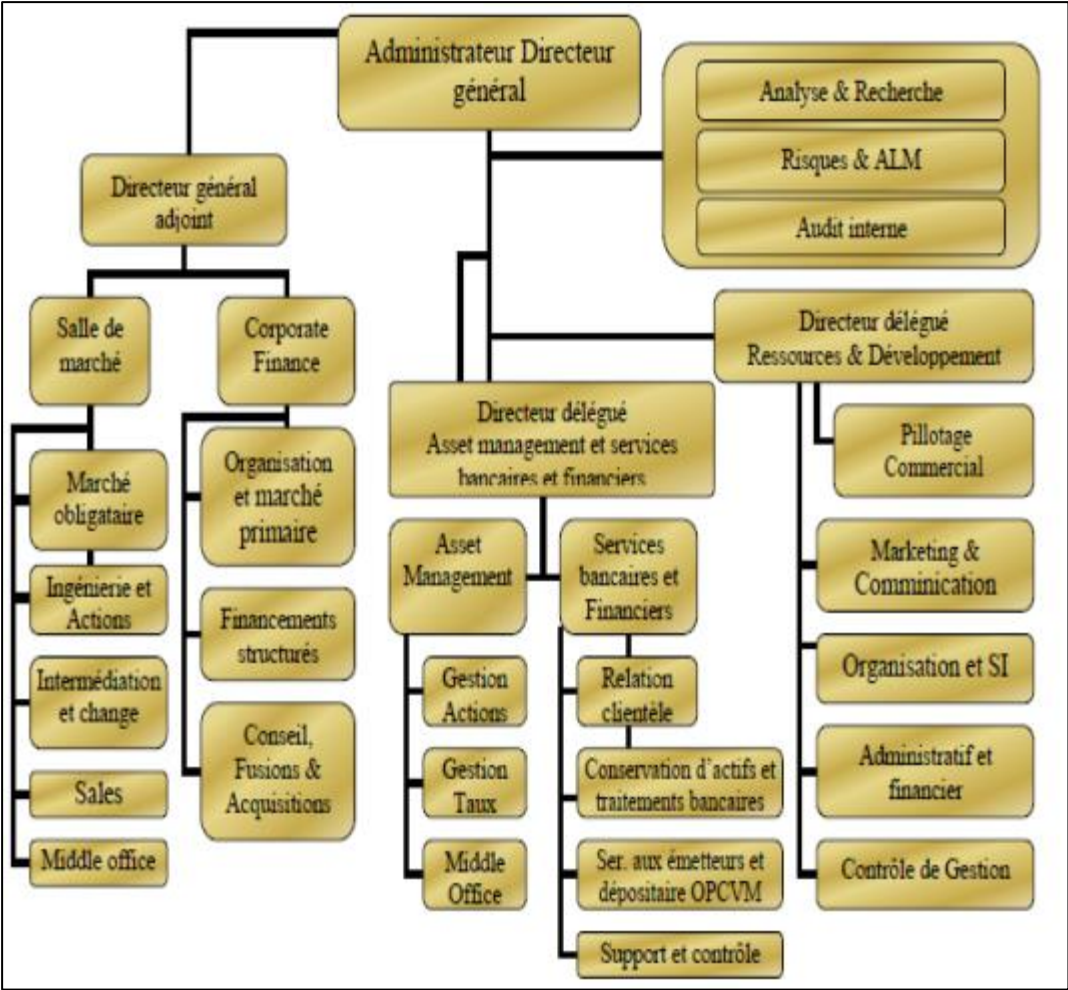


Figure 30 : Organigramme du groupe CDG Capital

Annexe B : processus d'Ornstein-Uhlenbeck

En mathématiques, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nommé d'après Leonard Ornstein et George Uhlenbeck et aussi connu sous le nom d'un « processus de retour à la moyenne », est un processus stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique.

$$dr(t) = \theta(\mu - r(t)) + \sigma dW(t)$$

Où θ , μ et σ sont des paramètres déterministes et $W(t)$ est le processus de Wiener.

Cette équation est résolue par la méthode de variation des constantes. Appliquons le lemme d'Itô à la fonction $f(r_t, t) = r_t e^{\theta t}$ pour obtenir

$$df(r_t, t) = \theta r_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dr_t$$

$$df(r_t, t) = \theta \mu r_t e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$$

En intégrant de 0 à t, nous obtenons :

$$r_t = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

Ainsi, le premier moment est donné, en supposant que r_0 est déterministe par :

$$E(r_t) = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$$

De même, la variance sera considérée ainsi :

$$V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-\theta t})$$

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un exemple de processus gaussien à variance bornée, il admet une distribution de probabilité stationnaire, contrairement au processus de Wiener.

Annexe C : Processus de Wiener

En mathématique, le processus de Wiener est un processus stochastique à temps continu. Il permet de modéliser le mouvement brownien. Il est très souvent utilisé en mathématique appliquée, en économie. Or un mouvement brownien est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Or la difficulté de modélisation de ce mouvement en mathématique réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant.

Un processus B_t avec $t \geq 0$ est considérée comme mouvement brownien si et seulement si :

- $B_0 = 0$ presque sûrement ;
- Pour tous $0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\sigma(X_r, r \leq s)$ et suit la loi $N(0, t-s)$.
- Les trajectoires de B sont tous continues.

Annexe D : Stratégie des tests de racine unitaire

- L'hypothèse nulle : existence d'une racine unitaire

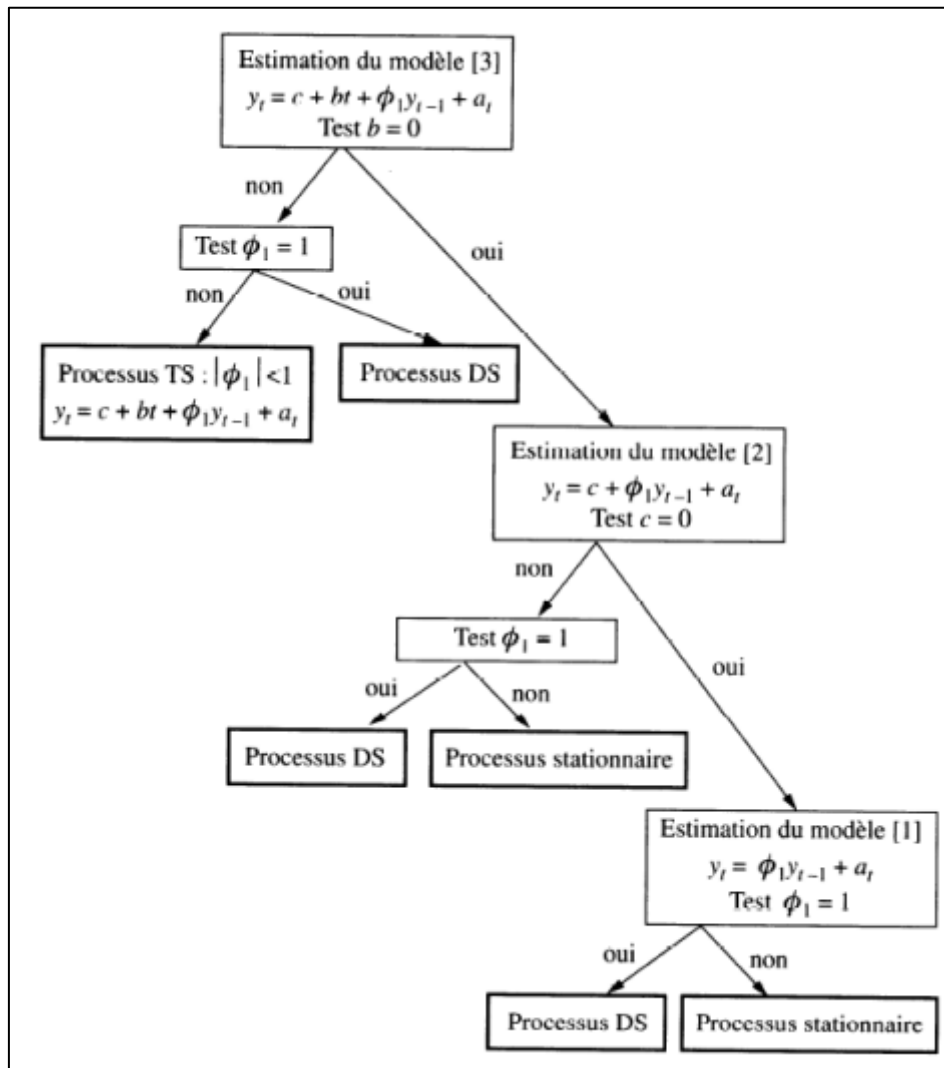


Figure 31 : processus des tests de racine unitaire

Annexe E : Historique des taux interbancaire journalier

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Marché monétaire interbancaire: Importation de l'historique du taux moyen pondéré au jour le jour							
2								
3		Du	01/01/2008			Au	01/04/2022	
4								
5	Date	TMP						
6	01/04/2022	0,01500						
7	31/03/2022	0,01500						
8	30/03/2022	0,01500						
9	29/03/2022	0,01500						
10	28/03/2022	0,01500						
11	27/03/2022	0,01500						
12	26/03/2022	0,01500						
13	25/03/2022	0,01500						
14	24/03/2022	0,01500						
15	23/03/2022	0,01500						

	A	B
5154	21/01/2008	0,03422
5155	20/01/2008	0,03307
5156	19/01/2008	0,03307
5157	18/01/2008	0,03307
5158	17/01/2008	0,03247
5159	16/01/2008	0,03390
5160	15/01/2008	0,03402
5161	14/01/2008	0,03438
5162	13/01/2008	0,03545
5163	12/01/2008	0,03545
5164	11/01/2008	0,03545
5165	10/01/2008	0,03545
5166	09/01/2008	0,03545
5167	08/01/2008	0,03419
5168	07/01/2008	0,03401
5169	06/01/2008	0,03426
5170	05/01/2008	0,03426
5171	04/01/2008	0,03426
5172	03/01/2008	0,03421
5173	02/01/2008	0,03408
5174	01/01/2008	0,03498

Figure 32 : aperçu d'historique des TMPjj importer avec VBA Excel réalisé par l'auteur

Annexe F : Code VBA de la méthode web scraping

```
Sub importer()  
Dim Day1 As String  
Dim Month1 As String  
Dim Year1 As String  
Dim date1 As String  
Dim term1 As String  
Dim term2 As String  
Dim nbrows As Integer  
Dim site_web As String  
Dim date2 As Date  
  
Worksheets("interpolation").Activate  
date2 = Range("H2").Value  
If date2 <> Format(date2, "dd/mm/yyyy") Then  
MsgBox "le format Date est incorrect !"  
Else  
Day1 = Day(date2)  
Month1 = Month(date2)  
Year1 = Year(date2)  
date1 = "date=" & Day1 & "%2F" & Month1 & "%2F" & Year1  
term1 = "https://www.bkam.ma/Marches/Principaux-indicateurs/Marche-obligataire/Marche-des-bons-de-tresor/Marche-secondaire/Taux-de-1  
term2 = "&block=eld6b9bbf87f86f8ba53e8518e882982#address-c3367fcefc5f524397748201aee5dab8-eld6b9bbf87f86f8ba53e8518e882982"  
site_web = term1 + date1 + term2  
  
Worksheets("base_BAM").Activate  
Dim ReQ, URL, code, elem  
Dim html As MSHTML.HTMLDocument, hTable As Object  
Set html = New MSHTML.HTMLDocument  
URL = site_web  
Set ReQ = CreateObject("microsoft.xmlhttp")  
ReQ.Open "POST", URL, False  
ReQ.send  
html.body.innerHTML = ReQ.responseText  
  
Set hTable = html.querySelector(".dynamic_contents_ref_12")
```

```
Set hTable = html.querySelector(".dynamic_contents_ref_12")

If hTable Is Nothing Then

Worksheets("interpolation").Range("A5:F100").Clear
Worksheets("base_BAM").Range("A2:D100").Clear
Cells(1, 1) = "Taux de référence des bons du Trésor en millions de dirhams pour la date : " & Day1 & "/" & Month1 & "/" & Year1
Cells(6, 2) = "PAS DE COURBE PUBLIER POUR CETTE DATE"

Else
With CreateObject("htmlfile")

.body.innerHTML = ReQ.responseText

code = .getElementsByTagName("table")(0).outerHTML

.body.innerHTML = code
For Each elem In .all
If elem.tagName = "TD" Then elem.innerHTML = elem.innerText
Next
If .parentWindow.clipboardData.setData("text", .body.innerHTML) Then
With Sheets(1): Cells.Clear: .Cells(2, 1).Select: .Paste: End With
Cells(1, 1) = "Taux de référence des bons du Trésor en millions de dirhams pour la date : " & Day1 & "/" & Month1 & "/" & Year1
.parentWindow.clipboardData.clearData ("text")
End If
End With

ActiveSheet.DrawingObjects.Delete

End If
```

Annexe G : Code VBA de la fonction pricing des BDT

```

End Function
Function IsBisextil(date_liquidation As Date) As Double
If Month(date_liquidation) >= 3 Then
  IsBisextil = 365
Else
  If Year(date_liquidation) Mod 4 = 0 And (Year(date_liquidation) Mod 100 <> 0 Or Year(date_liquidation) Mod 400 = 0) Then
    IsBisextil = 366
  Else
    IsBisextil = 365
  End If
End If
End Function
Function price(date_liquidation As Date, date_echeance As Date, taux As Double, nominal As Double, rendement As Double, date_emission _
As Date) As Double

Dim flux(), maturit As Double
Dim i, nbr_flux, n As Integer
Dim date_flux As Date
maturit = date_echeance - date_emission

date_flux = date_echeance
nbr_flux = 0
Do While date_flux >= date_liquidation
  nbr_flux = nbr_flux + 1
  date_flux = ajouter(date_flux, -1)
Loop

If date_echeance < date_liquidation Then
  MsgBox "date de pricing est supérieure à la date d'échéance"
Else
  '***** Cas des maturités <= 365 *****
  If maturit <= 365 Then
    price = (nominal * (1 + taux * (maturit / 360))) / (1 + rendement * (date_echeance - date_liquidation) / 360)
  Else
    '***** Cas des maturités >= 365 *****

```

```

***** Cas des maturités >= 365 *****
If (date_échéance - date_liquidation) <= 365 Then
If (Day(date_echeance) - Day(date_emmission)) = 0 And (Month((date_echeance)) - Month((date_emmission))) = 0 Then
price = (nominal * (1 + taux)) / (1 + rendement * ((date_echeance - date_liquidation) / 360))
Else
price = (nominal * (1 + taux * (maturit / IsBisextil(date_liquidation)))) / (1 + rendement * ((date_echeance - date_liquidation) / 360))
End If
Else
somme = 0
Dim dernier_flux As Double
ReDim flux(1 To nbr_flux)
dernier_flux = nominal / ((1 + rendement) ^ nbr_flux)

For i = 1 To nbr_flux
flux(i) = 1 / (1 + rendement) ^ i
somme = somme + flux(i)
Next i
price = (nominal * taux * (maturit / IsBisextil(date_liquidation)) * somme) + dernier_flux
End If

End If
End If
End Function

Function ajouter(ByVal d As Date, ByVal n As Integer) As Date
Dim y, m, j As Integer
j = Day(CDate(d))
m = Month(CDate(d))
y = Year(CDate(d))
ajouter = CDate(CStr(j) & "/" & CStr(m) & "/" & CStr(y + n))
End Function

```

Annexe G : Code VBA de la fonction pricing Black & Scholes

```
Public Function Norm(x As Double)
Norm = Application.WorksheetFunction.NormSDist(x)
End Function

Public Function BS_Call(S As Double, x As Double, r As Double, v As Double, T As Integer) As Double
Dim dt As Double
Dim D1 As Double, d2 As Double
Dim Nd1 As Double, Nd2 As Double
dt = v * Sqr(T)
D1 = (Log(S / x) + (r + 0.5 * v ^ 2) * T) / dt
d2 = D1 - dt
Nd1 = Norm(D1)
Nd2 = Norm(d2)
If T = 0 Then
BS_Call = Application.WorksheetFunction.Max(S - x, 0)
Else
BS_Call = (S * Nd1) - (x * Exp(-r * T) * Nd2)
End If
End Function

Public Function BS_Put(S As Double, x As Double, r As Double, v As Double, T As Integer) As Double
Dim dt As Double
Dim D1 As Double, d2 As Double
Dim NNd1 As Double, NNd2 As Double
dt = v * Sqr(T)
D1 = (Log(S / x) + (r + 0.5 * v ^ 2) * T) / dt
d2 = D1 - dt
NNd1 = Norm(-D1)
NNd2 = Norm(-d2)
If T = 0 Then
BS_Put = Application.WorksheetFunction.Max(x - S, 0)
Else
BS_Put = (-S * NNd1) + (x * Exp(-r * T) * NNd2)
End If
End Function
```

