



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

**INSEA**



## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Construction de la courbe obligataire

Préparé par : *Mr Radouan Akabli*

Sous la direction de : *Mr Elqalli Yassine (INSEA)*  
*Mme Badraoui Safae (SG ATS)*  
*Mr El Yajzy Naoufel (SG CIB)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

Option : Actuariat-Finance

*Devant le jury composé de :*

- *Mr Elqalli Yassine (INSEA)*
- *Mr El Abdi Fouad (INSEA)*
- *Melle Badraoui Safae (SG CIB)*

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à son élaboration et spécialement :

A mes grands parents

A mes respectueux parents

A toute ma famille en témoignage de mon grand amour et affection.

A mes respectueux professeurs.

A mes fidèles amis en témoignage d'une amitié infinie et sérieuse.

# Remerciements

Au terme de mon projet de fin d'études, ma sincère reconnaissance va à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement et au bon déroulement de ce travail.

Ainsi, je tiens d'abord à remercier *M<sup>r</sup>*. EIQALLI Yassine pour son encadrement tout au long de ce stage, et pour ces conseils et remarques pertinents.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à mes encadrants de stage, *M<sup>me</sup>* BADRAOUI Sa-fae, analyste quantitatif à Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS), et *M<sup>r</sup>* EL YAJIZI Naoufel analyste quantitatif à Société Générale Corporate & Investment Banking (SG CIB), pour leur précieux suivi, leurs remarques pertinentes et leur encouragement tout au long de mon stage.

Je ne manquerai d'exprimer mes remerciements à *M<sup>me</sup>* BENJELLOUN Saoussane , analyste quantitatif à SG ATS, pour son aide précieuse et ses conseils. Je remercie également toute l'équipe SG ATS, d'avoir bien voulu de partager leurs connaissances et leur professionnalisme avec moi.

Je ne saurai oublier dans mes remerciements Monsieur El Abdi Fouad pour m'avoir honoré en acceptant de juger mon travail. Veuillez trouver ici le témoignage de mon respect le plus profond.

# Résumé

Le marché obligataire est l'un des marchés les plus liquides. Parmi les produits échangés, nous trouvons les produits de taux à revenu fixe dont la valorisation nécessite l'utilisation de la courbe de taux. Ainsi, celle-ci figure comme le facteur clé de la bonne gestion obligataire.

L'objectif principal de ce travail est de développer sous C# un outil de stripping de la courbe obligataire. Après, nous envisagerons de l'utiliser pour évaluer les obligations à taux fixe et à taux variable. Il existe plusieurs classes de méthodes de modélisation de la courbe des taux. On adoptera dans cette étude, deux grandes classes ; les modèles empiriques et les modèles financiers. Les premiers aborderont des méthodes d'interpolation. Les seconds traiteront respectivement les modèles de Nelson Siegel, de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>6</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>7</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>10</b>
<b>I Présentation générale du cadre de l'étude</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1 Présentation de l'organisme</b>	<b>13</b>
1.1 Présentation de SG ATS . . . . .	13
1.2 Présentation de l'équipe Quant . . . . .	14
<b>2 Présentation de la problématique</b>	<b>15</b>
2.1 Marché Obligataire . . . . .	15
2.2 Problématique . . . . .	16
<b>II Construction de la courbe des taux</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>18</b>
<b>1 Courbe de Taux</b>	<b>19</b>
1.1 Courbe de Taux Swap . . . . .	19
1.2 Courbe de Taux zéro-coupon . . . . .	20
1.3 Courbe Forward . . . . .	23
<b>2 Analyse statistique des données</b>	<b>25</b>
<b>3 Modèles de construction de la courbe des taux</b>	<b>26</b>
3.1 Description des données . . . . .	26
3.2 Principe de construction . . . . .	26
3.3 Modèles directs de construction . . . . .	27
3.3.1 Interpolation Lineaire . . . . .	27
3.3.2 Spline Cubique . . . . .	27

3.4	Méthodes indirectes de reconstruction . . . . .	29
3.4.1	Modèle de Nelson Siegel . . . . .	29
3.5	Modèles Stochastiques . . . . .	31
3.5.1	Vasicek . . . . .	31
3.5.2	Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) . . . . .	32
	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
	<b>III Implémentation des modèles de reconstitution de la courbe des taux</b>	<b>35</b>
	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
	<b>1 Outils de programmation</b>	<b>37</b>
	<b>2 Implémentation de la méthode Bootstrapping</b>	<b>39</b>
2.1	Mise en oeuvre de la méthode . . . . .	39
2.2	Application sous C# . . . . .	43
2.3	Implémentation de Cubic Spline . . . . .	46
	<b>3 modèle stochastique</b>	<b>48</b>
3.1	Application de Vasicek . . . . .	49
3.1.1	Méthodologie d'estimation . . . . .	49
3.1.2	Présentaion et analyse des données utilisées . . . . .	49
3.1.3	Estimation . . . . .	52
3.2	Application de CIR . . . . .	53
3.2.1	Méthodologie d'estimation . . . . .	53
3.2.2	Estimation des paramètres . . . . .	53
3.3	Interprétation et validation des résultats . . . . .	54
	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>
	<b>Webographie</b>	<b>58</b>
	<b>Annexes</b>	<b>59</b>

# Table des figures

1.1	Logo SG . . . . .	13
1.2	Organigramme de SG ATS . . . . .	14
2.1	Evolution de la structure de la dette mondiale . . . . .	15
1.1	Exemple d'opération de swap . . . . .	20
1.2	Courbe Swap . . . . .	20
1.3	Courbe des taux sur titres d'Etat français . . . . .	22
1.4	Schéma d'un FRA . . . . .	24
1.1	Output de la compilation de projet . . . . .	38
1.2	Outils de Metanumerics . . . . .	38
2.1	Methodologie de Bootstrapping . . . . .	39
2.2	Schéma des flux . . . . .	40
2.3	Bootstrapping sous Excel . . . . .	43
2.4	Extrait des données . . . . .	44
2.5	Boite de configuration . . . . .	44
2.6	Class Config . . . . .	45
2.7	Class Market Data . . . . .	45
2.8	Feuille Excel de Cubic Spline . . . . .	46
3.1	Graph de TMP. . . . .	49
3.2	Historamme de TMP. . . . .	50
3.3	Tableau Modèle 3. . . . .	50
3.4	Tableau Modèle 2. . . . .	50
3.5	Tableau Modèle 1. . . . .	51
3.6	Correlogramme. . . . .	51
3.7	Tableau estimation des paramètres. . . . .	52
3.8	Feuille excel de Vasicek. . . . .	53
3.9	Résultats de la régression . . . . .	54
3.10	Résultats de l'application de CIR sur Excel . . . . .	54

# Liste des tableaux

Tableau 1 : Modèle 3.....	53
Tableau 2 : Modèle 2.....	54
Tableau 3 : Modèle 1.....	54

# Liste des abréviations

- **CIR** : Cox Ingersol et Cox.
- **TMP** : taux moyen pondéré.
- **AMF** : Autorité des marchés financiers.

## Mots clés :

- Stripping de la courbe obligataire.
- Cubic Spline
- Bootstrapping
- Interpolation
- Lissage

# Introduction

La structure par terme des taux d'intérêt occupe une place importante dans la littérature de la finance. Etant un passage nécessaire pour toute évaluation d'actif à revenu fixe, l'étude de la courbe de taux est devenue incontournable pour chaque gestionnaire de produits financiers à revenus fixes ou variables opérant sur les marchés de la dette publique ou privée au comptant ou à terme.

En fait, la structure par terme se définit comme la relation entre les rendements des obligations zéro-coupons et leurs maturités. D'une manière plus précise, c'est la rémunération attendue d'un investissement d'une unité monétaire pour chaque maturité.

Les utilisations de la structure par terme des taux d'intérêt sont multiples, plus particulièrement pour les gérants d'actifs à revenu fixe ou variable. Ces gestionnaires ajustent leurs portefeuilles en fonction de leur stratégie et des caractéristiques des titres qui les composent. Vu son rôle dans le processus d'aide à la décision pour la gestion de portefeuille obligataire, la courbe de taux a un impact considérable sur la performance des portefeuilles obligataires. De plus, l'utilisation de l'interpolation linéaire pour lisser la courbe s'avère imprécise du moment qu'il existe des méthodes plus rigoureuses qui peuvent donner des résultats plus significatifs.

Notre étude a pour objectif de construire la courbe de taux à partir des cotations de marché. Dans un premier temps, nous envisagerons d'implémenter un bootstrapping généralisé pour extraire les rendements zéro-coupons de marché. Ensuite, nous examinerons plusieurs méthodes d'interpolation pour constituer une courbe lisse.

Dans la première partie, nous aurons à traiter deux chapitres. Dans le premier chapitre nous verrons une brève présentation de l'organisme d'accueil puisque c'est une nouvelle structure qui vient de s'installer au Maroc. En outre, elle s'opère dans une nouvelle activité : Recherche et développement en finance. Au deuxième chapitre, nous nous intéresserons à la structure de marché obligataire et nous présenterons la problématique.

En deuxième partie, nous aurons à traiter trois chapitres. Dans le premier chapitre de cette partie, nous nous intéresserons à la définition de la structure par terme de la courbe, en relatant les différentes courbes de taux que nous pouvons avoir. Dans le deuxième chapitre, nous exposerons la structure des données, puis nous examinerons la structure empirique de la courbe. Le dernier chapitre sera consacré aux différentes méthodes de modélisation de la courbe de taux. D'abord, nous nous intéresserons aux méthodes d'interpolations et le modèle de Nelson Siegel, puis nous présenterons deux modèles stochastiques à savoir : Vasicek et CIR.

En troisième partie, nous aurons à traiter trois autres chapitres. Dans le premier, nous envisagerons d'exposer les outils de programmation utilisés lors de la réalisation de l'étude. Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les étapes suivies pour implémenter la méthode de Bootstrapping généralisée, puis nous aborderons la méthode de Cubic Spline pour lisser la courbe. Dans le dernier chapitre, nous procéderons à l'estimation des paramètres de modèle de Vasicek et CIR, puis nous examinerons la pertinence des résultats des différentes approches.

Les méthodes d'interpolations sont des méthodes mathématiques qui ne reposent pas sur des notions financières. Ainsi, leur démarche est totalement déconnectée de la réalité économique. Pour remédier à ce point, nous introduisons les modèles stochastiques fondés sur la théorie économique, plus précisément sur l'hypothèse d'absence d'arbitrage. Par la suite, les multitudes d'approches servent à comparer les résultats et à tirer des conclusions.

## **Première partie**

# **Présentation générale du cadre de l'étude**

# Introduction

De nos jours, les marchés financiers sont omniprésents et occupent une partie importante de l'économie mondiale. Le marché obligataire est l'un des marchés financiers les plus liquides. La valorisation des produits de taux à revenu fixe est fortement liée à la connaissance de la structure par terme des taux. Vu que le cadre de notre stage était dans une société nouvellement installée au Maroc dont l'activité est la recherche et développement en finance de marché, nous allons présenter sa structure ainsi que le métier de Quant. Dans le but de comprendre le contexte de l'étude, nous allons aborder de près le marché obligataire : les intervenants et son fonctionnement . Enfin, nous exposerons la problématique traitée dans cette étude.

# Présentation de l'organisme

## 1.1 Présentation de SG ATS

Le groupe Société Générale, est l'un des principales banques de France. Faisant partie du CAC 40, elle est la sixième capitalisation boursière française. Les principaux domaines d'activité de ce groupe sont : la banque, les assurances, le conseil et le financement. Le groupe Société Générale a été créé en 1864 pour favoriser le développement du commerce et de l'industrie française. Il accompagne aujourd'hui 32 millions de clients dans 77 pays avec 154 000 collaborateurs dont 61% exercent à l'international (hors France).



FIGURE 1.1 – Logo SG

La Société Générale Corporate and Investment Banking SGCIB est la banque de financements et d'investissements du groupe Société Générale, elle est présente dans 33 pays et 11000 personnes y travaillent. Trois domaines d'expertise la composent :

- Investment banking (Investissements bancaires).
- Global finance (Financements).
- Global markets (Gestion de placements et de risques).

Global Markets est une plate-forme complètement intégrée, multi-actifs et multi-produits qui se concentre sur l'apport des meilleures solutions d'investissement et de couverture de risques pour les gérants d'actifs, les fonds de pension, les banques privées, les banques, les compagnies d'assurance, les fonds de gestion alternative, les family offices, les fonds souverains et les distributeurs des réseaux de proximité dans le monde. Le pôle *RD* (Research Development) dans le domaine global markets rassemble une centaine d'employés ayant pour mission la conception, le développement, la maintenance et l'amélioration d'une plate-forme de calcul de qualité industrielle et l'exploitation de cette plate-forme (accompagnement des utilisateurs, veille technologique, conseil sur l'architecture du système et la mise en œuvre effective de la plate-forme), création de bibliothèques financières, de langages mathématiques...

C'est de ce pôle *R&D* qu'est né la Société Générale Africa Technologies & Services SG ATS à Casablanca, une structure nouvelle qui a ouvert ses portes en 2014.

## 1.2 Présentation de l'équipe Quant

L'équipe Quant est en charge de la conception, du développement et de la maintenance des bibliothèques de pricing et des calculateurs de risque pour l'ensemble des équipes de trading de la Banque de Financement et d'Investissement Société Générale. En effet, l'équipe travaille en étroite collaboration avec les équipes de R&D à Paris, New-York et Hong-Kong afin de développer de nouveaux outils toujours plus performants.

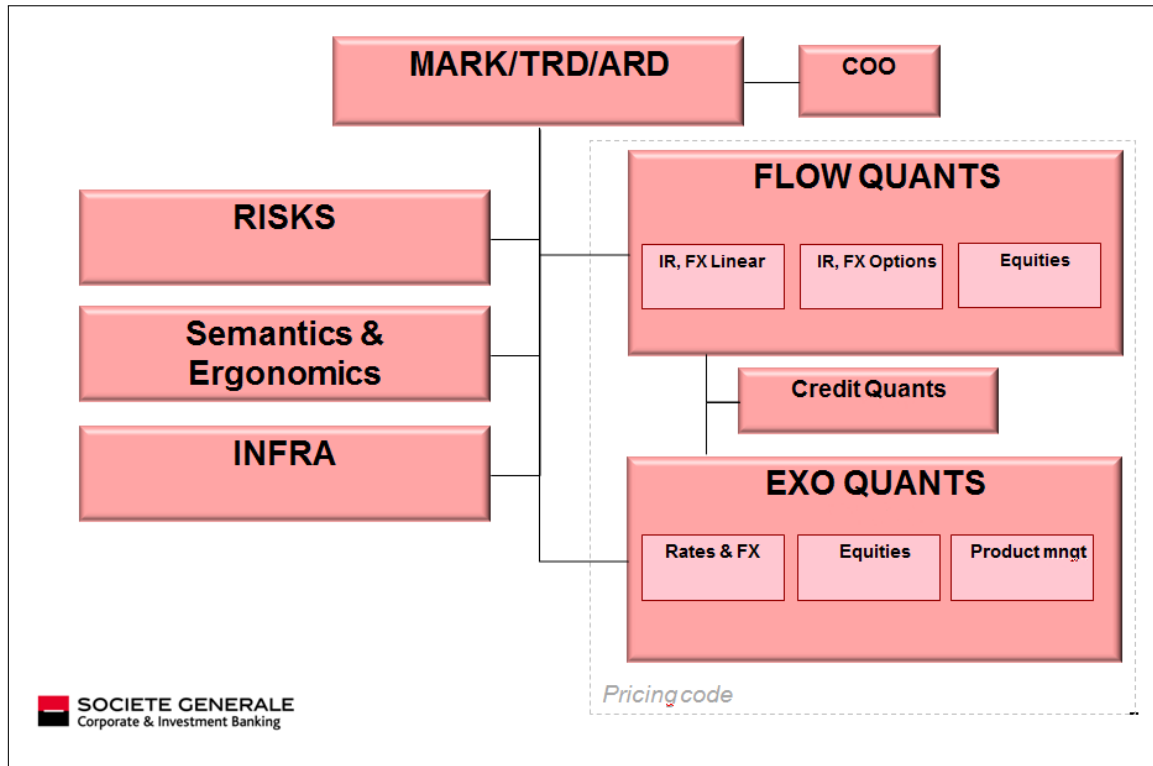


FIGURE 1.2 – Organigramme de SG ATS

# Présentation de la problématique

## 2.1 Marché Obligataire

### Introduction :

Le marché obligataire est le marché sur lequel les entreprises et les Etats se financent. D'un point de vue économique, c'est un circuit de financement qui permet de réinjecter l'épargne dans l'économie. Il constitue la source privilégiée des Etats pour se financer, surtout que cette source ne crée pas d'inflation. Ce marché est moins médiatique mais tout aussi important que celui des actions en termes de volume. Il est important de noter que la part de la dette souveraine dépasse la moitié. Les entreprises ont accès à ce marché via des intermédiaires.

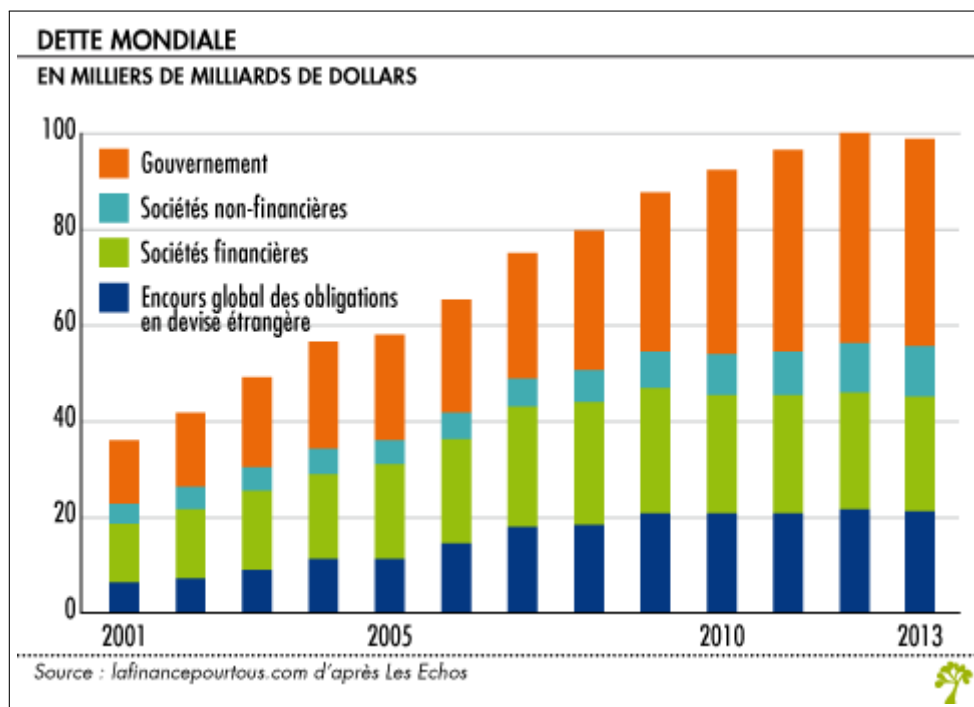


FIGURE 2.1 – Evolution de la structure de la dette mondiale

Le marché obligataire se compose de deux compartiments :

**1. Le marché primaire :** C'est le marché de neuf des obligations. Les titres se vendent pour la première fois sur ce marché. Depuis 1985, la technique de l'adjudication "au prix demandé" (dite en France "à la hollandaise") constitue la voie privilégiée d'émission des valeurs du Trésor, la syndication bancaire n'étant plus utilisée que dans des circonstances spécifiques. Effectuée de manière transparente et dans le cadre d'un calendrier prévisionnel, elle assure les conditions d'une parfaite concurrence entre les souscripteurs.

**2. Le marché secondaire :** Marché sur lequel sont échangées les obligations déjà émises. Il permet de récupérer son investissement en cédant à tout moment les titres achetés. Sur ce marché coexistent deux types d'intervenants :

- Les investisseurs qui souscrivent à une obligation avec pour objectif de la conserver jusqu'à sa maturité (buy and hold) : il s'agit en majorité de fonds de pension, fonds souverains, certains OPCVM et des particuliers ;

- Les investisseurs qui privilégient une gestion active, qui vont plutôt investir sur des titres supposés liquides.

### **Les intervenants de marché obligataire :**

Nous notons que le marché connaît une multiplicité d'intervenants, nous détaillerons par la suite les principaux acteurs du marché :

- Les émetteurs : Ce sont les acteurs économiques qui ont besoin de financement. Les entreprises et les Etats sont les intervenants classiques sur ce marché.
- Les investisseurs : Ils se répartissent schématiquement en quatre catégories : les hedge funds, les OPCVM, les assurances et caisses de retraites et les particuliers (directement ou à travers la gestion privée)
- Les teneurs de marché : Ces intervenants se composent en général des banques qui publient des prix (bid/ask) sur certaines lignes obligataires. Ils utilisent des plateformes dédiées ou via leurs propres pages.
- Les intermédiaires (ou courtiers) ont pour fonction de mettre en relation deux entités qui ont des intérêts opposés. Ils travaillent aussi bien avec les banques qu'avec les investisseurs finaux.
- Les plates-formes de négociation sont relativement peu développées en ce qui concerne le marché du crédit, de plus elles sont fragmentées

### **Une vue historique du marché avant et après la crise :**

La crise financière de subprime a touché tout le tissu économique. En ce qui concerne le marché obligataire, l'impact a été dramatique surtout au niveau des volumes négociés, ce qui signifie une baisse de liquidité. En fait, les autorités de marché financiers (AMF) ont réalisé une étude suite au choc qu'a connu le marché du crédit en 2008. L'étude distingue trois moments importants :

1) Le marché secondaire obligataire avant la crise des subprime : Le marché obligataire avant l'été 2007 se caractérise par des spreads très faibles, en partie liés à une abondance de liquidité sur le marché.

2) Le marché secondaire obligataire pendant la crise des subprime a conjugué, au cours de l'année 2008, une crise de liquidité à une crise de crédit. Pendant cette période, nous remarquons que peu d'entreprises ont pu procéder à de nouvelles émissions. Cette période a connu une baisse du nombre de teneurs de marche et une augmentation significative du nombre des courtiers.

3) Le marché des obligations corporate depuis le début 2009 : Le marché primaire obligataire a progressivement redémarré depuis le début de l'année pour trois raisons : le faible volume des émissions en 2008 et donc un besoin latent de financement de la part des entreprises, la volonté de désintermédiation des banques (diminution de teneur de marché) et enfin une participation plus importante des fonds equity , attirés par les rendements importants.

## **2.2 Problématique**

Le marché obligataire est au cœur du circuit de financement de l'économie. Les volumes traités de plus en plus importants incitent les acteurs de marchés, surtout les traders, à tirer profit des opportunités présentes sur ce marché. Ainsi, le souci majeur est de modéliser les tendances de marché et de faire des anticipations sur les prix des titres. Ces informations vont aider le trader à améliorer les gains à l'avenir. L'information en question se résume dans la courbe de zéro coupon. Cette dernière permet entre autres d'évaluer les produits obligataires. C'est le point de départ de tout modèle financier. Notre travail se focalisera sur le choix de la méthodologie adéquate afin de construire la courbe de zéro coupon et la courbe de discount à partir des prix de marché.

## **Deuxième partie**

# **Construction de la courbe des taux**

# Introduction

Vu notre objectif qui consiste à construire la courbe de taux afin de l'utiliser pour la valorisation des produits de taux, nous allons traiter trois chapitres. D'abord, nous allons définir les notions se rapportant à la structure par terme. Nous allons aborder, par la suite, la structure empirique de la courbe ainsi que les hypothèses relevant de la façon de construire la base de données. Il s'agira, dans le troisième chapitre, d'étudier les méthodes d'interpolation directes et indirectes de la courbe des taux. Ces modèles sont sans fondement théorique il ne serait donc raisonnable de se concentrer sur cette voie que si l'on ne souhaite disposer que de l'allure générale de la courbe avec le moins de paramètres possibles. Nous aborderons les modèles stochastiques fondés sur l'hypothèse d'absence d'arbitrage à un seul facteur : Vasicek et CIR. Ainsi, nous détaillerons les fondements de ces deux approches et les étapes d'estimation des paramètres.

# Courbe de Taux

La courbe de Taux est le point de départ pour toute modélisation des produits financiers. Dans ce chapitre, nous présenterons trois courbes de bases : Courbe Swap, Courbe Forward et la Courbe zéro-coupon. Nous examinerons de près les différentes notions de taux. Nous présenterons les produits liés à chaque courbe.

## 1.1 Courbe de Taux Swap

### Taux Swap

#### Introduction :

Le swap est un terme anglais qui signifie troc, échange. L'objet de l'échange peut être une devise contre une autre devise, une devise contre un prêt, un prêt à taux variable contre un prêt à taux fixe.

Ainsi, le swap de taux d'intérêts est un système d'échange d'un taux d'intérêt fixe contre un taux variable (ou inversement), libellé dans la même devise et pour la même période sur la base d'un capital notionnel, afin de profiter d'un taux plus intéressant ou de restructurer une dette ancienne. Historiquement, le rating détermine les conditions de financement de chaque entreprise ou Etat. Les premières opérations de swap ont visé à échanger les conditions d'endettement. Cette solution bénéficie les deux contreparties en optimisant les coûts des actifs.

#### Exemple :

Supposons qu'on a deux sociétés A et B qui envisagent de contracter un crédit. La société A bénéficie d'une bonne notoriété, ainsi elle peut s'endetter à un taux variable @Libor + 15bp de marge commerciale ou sur le marché obligataire @9.25%. Elle favorise la formule à taux variable. La société B, de moindre notoriété a accès à un emprunt à un taux fixe de 9.80% ou elle peut effectuer un emprunt à un taux variable de @Libor + 30bp. Elle préfère la formule à taux fixe.

Cet exemple montre l'intérêt à effectuer un swap de taux pour les contreparties ainsi que pour la banque en tant qu'intermédiaire.

- **La société B** s'endette à un taux variable Libor+30 bp. Ainsi, la banque lui propose un emprunt à un taux fixe de 9.35% en contrepartie C reçoit un taux variable @Libor.
- **La société A** s'endette à un taux fixe. Par contre, elle préfère effectuer un emprunt à un taux variable. Ainsi, la banque lui offre la possibilité d'emprunter à un taux variable @Libor en contrepartie elle verse à la société un taux fixe 9.30%.
- **La banque** se positionne comme intermédiaire. Elle génère un bénéfice de 5%. la société A profite d'une réduction de 20 pb. La société B tire avantage de cette situation en gagnant 15 pb.

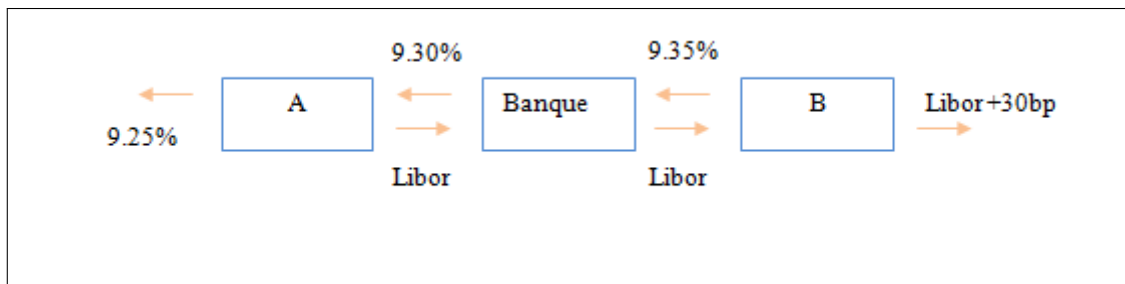


FIGURE 1.1 – Exemple d'opération de swap

## Courbe Swap

La courbe des taux swap est une courbe des taux construite en reprenant les taux pratiqués sur le marché des swaps pour les différentes échéances. Elle renseigne sur les anticipations à terme concernant le taux LIBOR et reflète également la qualité de crédit des banques.

Nous traçons la courbe swap Euro vs E3M du 15 Octobre 2012.

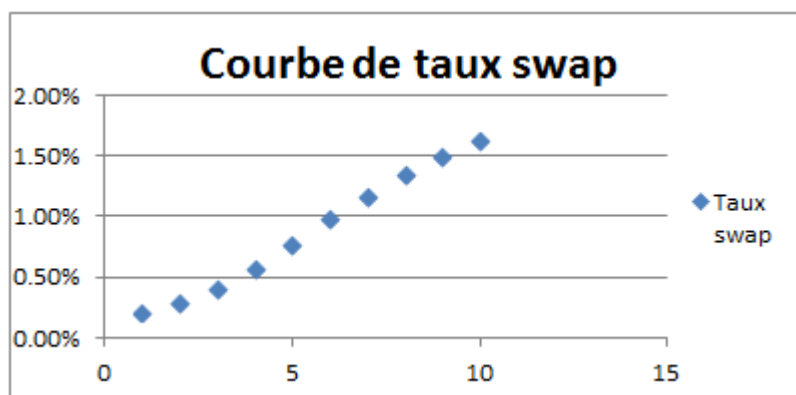


FIGURE 1.2 – Courbe Swap

### L'utilité d'un swap de taux :

- *La gestion de portefeuille* : En général, les swaps de taux permettent de réduire la sensibilité, d'ajuster l'exposition aux fluctuations des taux d'intérêt et de compenser les risques produits par le taux.
- *La spéculation* : Etant donnée que le capital nécessaire pour investir dans des swaps est largement petit, cet instrument permet de spéculer sur la baisse ou la hausse des taux.
- *Le financement d'entreprise* : Les entreprises ayant des engagements à taux variable peuvent effectuer un swap de taux. Ainsi, elle paye un taux fixe tout en recevant un taux variable.

## 1.2 Courbe de Taux zéro-coupon

### Taux zéro-coupon

La reconstitution de la courbe par terme des taux d'intérêts fait intervenir la notion du bon zéro-coupon de maturité  $T$ , noté  $B(t, T)$ , appelé également fonction d'actualisation, correspond à la valeur aujourd'hui d'une unité monétaire payé dans  $T$  périodes, sans paiements intermédiaires. En général, les obligations cotés ne sont pas tous des zéro-coupons. Les obligations sont caractérisées par des coupons intermédiaires. Ainsi, le prix doit tenir compte de ses flux.

### Obligation Zéro-coupon

Un euro détenu aujourd'hui vaudra plus qu'un euro perçu dans le futur. Un zéro-coupon de maturité  $T$ , est un titre versant 1 euro à la date  $T$  et qui ne détache aucun flux intermédiaire. La valeur faciale de l'obligation est  $N=1$

euro. On note  $B(t, T)$  le prix en date  $t$  de l'obligation d'échéance  $T$ .  $B(t, T)$  le prix en date  $t$  d'un euro payée en date  $T$ . Par définition, on a  $B(t, t) = 1$ .

Dans le marché obligataire américain, les zéro-coupons sont appelés bills. Les coupon-bonds sont appelés notes si leur maturité est comprise entre deux et dix ans et bonds pour des maturités supérieures à 10 ans.

#### Taux zéro-coupon en temps continu :

Nous considérons qu'il est possible de capitaliser sur une période infinitésimale. Par la suite, nous notons  $m$  la plus petite période de capitalisation et  $r$  est le taux d'intérêt en base annuelle pour  $m$  périodes de capitalisation.

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Une capitalisation en temps continu revient à tendre  $m$  vers l'infini. Ainsi, nous obtenons la formule suivante :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \exp(r)$$

On peut ainsi calculer la capitalisation d'une somme pour une durée de temps quelconque, en temps continu. Ainsi, l'actualisation à la date  $t$  d'un flux futur d'échéance  $T$  s'écrit sous cette forme :

$$P(t, T) = \exp(-r(T - t))$$

#### Taux zéro-coupon en temps discret :

Le taux zéro-coupon annuel linéaire qui prévaut entre les dates  $t$  et  $T$  est défini par la relation :

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + r(t, T) * \tau(t, T)}$$

la quantité  $\tau(t, T)$  désigne le nombre d'années entre la date  $t$  et la date  $T$ .

#### Intérêts courus, clean et dirty price

Les intérêts courus sont la fraction de l'intérêt annuel écoulé sur un titre. A l'instant  $t \in [T_{i-1}, T_i]$ , les intérêts courus sont,

$$AI(i, t) := c_i \frac{t - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}}, \text{ avec } c_i \text{ coupon}$$

Le clean price est le prix de l'obligation sans les intérêts courus,

$$p_{clean}(t) := p(t) - AI(i, t), \quad T_{i-1} < t < T_i$$

Autrement, le clean price est le prix affiché dans le marché. Le dirty price est le prix incluant les intérêts courus.

$$p_{dirty}(t) := p_{clean}(t) + AI(i, t), \quad T_{i-1} < t < T_i$$

## Obligation

Une obligation est un titre de créance négociable émis par une société ou une collectivité publique, principalement échangée sur les marchés de gré à gré. Les paramètres rentrants dans le calcul d'une obligation sont la date d'émission, la date d'échéance, le taux d'intérêt, la devise dans laquelle elle est émise et la périodicité du coupon.

Le prix  $P(t,T)$  d'une obligation couponnée  $i$  est défini par :

$$p_{clean}(t) + AI(i,t) = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{(1+y(t,T))^{t_i-t}} + \frac{N}{(1+y(t,T))^{t_n-t}}$$

$y(t,T)$  c'est le taux de rendement de l'obligation.

Il est important de mentionner que le rendement est inversement corrélé au prix de l'obligation. Nous pouvons exprimer le prix en fonction des prix zéro-coupons. En fait, nous actualisons chaque flux par un taux zéro-coupon correspondant à sa maturité.

Nous notons  $B_i$  le prix d'une obligation zéro-coupon de nominal, le coupon  $c_i$  avec pour maturités  $t_i$ .

$$p_{clean}(t) + AI(i,t) = \sum_{i=0}^n c_i * B(t, t_i) + N * B(t, t_n)$$

$p_{clean}(t)$  : la cotation de marché (clean price)

AI : coupon couru.

$$AI(i,t) = coupon * \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

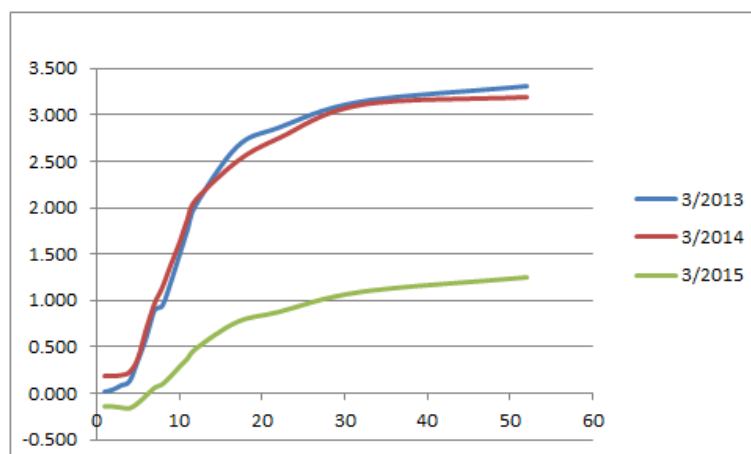


FIGURE 1.3 – Courbe des taux sur titres d'Etat français

Le graphe illustre bien le changement de la forme de la courbe de taux au cours de trois années consécutives.

## Utilité de la courbe des taux

La forme de la courbe de taux reflète l'état actuel du marché obligataire. Elle reflète les anticipations à l'instant  $t$  et renseigne sur trois aspects : prévisions sur les taux futurs, prévisions sur du taux d'inflation, prévisions d'activité.

- *Prévisions de taux futurs* : Le Spread de taux nous donne une information sur l'évolution future des taux courts. Ainsi, nous pouvons estimer ces derniers en se basant sur les taux spots.
- *Prévisions du taux d'inflation*.
- *Prévisions d'activité* : Le taux est le résultat de la confrontation de l'offre et la demande de capitaux. Ainsi, cela va se répercuter sur le pouvoir des entreprises à se financer et par la suite conditionne la croissance de l'activité économique.

## 1.3 Courbe Forward

### Taux Forward

#### Introduction

Le terme forward désigne tout instrument financier dont la date de départ est supérieure à la date d'aujourd'hui. Le taux forward est le taux d'intérêt appliqué à un emprunt futur.

A la date  $t$  d'aujourd'hui, nous fixons un taux  $R(T, U)$  qui sera utilisé durant la période entre  $T$  et  $U$ . On note  $B(t, U)$  le prix qu'il faudra payer à la date  $T$  pour détenir le zéro-coupon d'échéance  $U \geq T$ . Le prix  $B(t, U)$  en date  $T$  de 1 u. m. payée en date  $U$ .

Le taux forward est calculé selon l'approche suivante :

Le principe est d'acheter le zéro-coupon d'échéance  $U$  et de vendre simultanément  $B(t, U)/B(t, T)$  zéro-coupons d'échéance  $T$ . La stratégie donne lieu à deux flux : un flux sortant à la date  $T$  et un flux entrant à la date  $U$ . On reconnaît un zéro-coupon synthétique de départ  $T$  et d'échéance  $U$  dont le prix est donné par la formule :

$$B_t(T, U) = \frac{B(t, U)}{B(t, T)}, \quad \text{tel que } T \leq U$$

#### Taux zéro-coupon forward en temps continu :

Le taux de rendement associé au prix  $B_t(T, U)$  est noté  $R_t(T, U)$  et défini par :

$$R_t(T, U) = -\frac{\ln(B_t(T, U))}{\tau(T, U)}$$

#### Taux zéro-coupon forward en temps discret :

Le taux de rendement forward linéaire associé au prix  $B_t(T, U)$  est noté  $F(t, T, U)$  et défini par :

$$B_t(T, U) = \frac{1}{1 + F(t, T, U)\tau_F(T, U)}$$

A partir de cette formule, nous obtenons :

$$F(t, T, U) = \frac{1}{\tau_{F(t, T, U)}} \left( \frac{B(t, U)}{B(t, T)} - 1 \right)$$

#### Taux Forward instantanée

On suppose que la fonction  $u \rightarrow F(t, T_1, T_2)$  est continue. On peut alors définir pour chaque date  $T_1$  la quantité :

$$f_t(T) = \lim_{u \rightarrow T^+} F(t, T, u)$$

$f_t(T)$  est appelé taux forward instantané. Ce taux sera appliqué entre les dates futures  $T$  et  $T+\varepsilon$ , vu de  $t$ .

Le prix d'une obligation zéro coupon d'échéance  $T$  s'écrit sous la forme :

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_t(s) ds\right)$$

Nous introduisons le log :

$$\text{Log}(B(t, T)) = -\int_t^T f_t(s) ds$$

Finalement, nous obtenons l'expression du taux forward instantané :

$$f_t(T) = \frac{\partial \ln B_t(T, U)}{\partial U}$$

## FRA

Forward Rate Agreement Contrat de gré à gré dont les parties négocient un taux d'intérêt de prêt ou d'emprunt qui sera appliqué à une période future pour un montant, une durée et une date bien précis.

Les FRA sont notés en indiquant la date de départ et la date de fin, comptés en mois à partir d'aujourd'hui, la durée effective étant la différence entre les deux.

### Exemples de FRA :

- 2x6 - FRA d'une durée de 4 mois, départ dans 2 mois.
- 6x12 - FRA d'une durée de 6 mois, départ dans 6 mois.

Nous présentons un schéma illustrant le fonctionnement de ce produit :

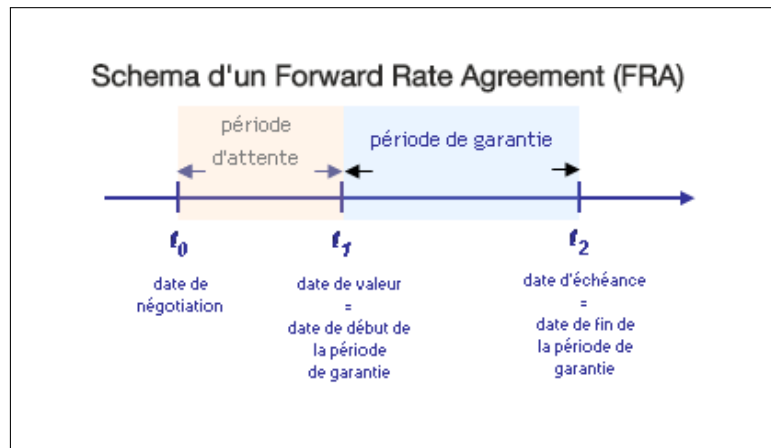


FIGURE 1.4 – Schéma d'un FRA

La formule pour calculer le versement se présente alors comme suit :

$$F = c \cdot \frac{(i_{ref} - i_{fixe}) \cdot n}{(1 + i_{ref} \cdot n)}$$

- $i_{ref}$  : Le taux dont le niveau est garanti, généralement un IBOR (veut dire Interbank Offered Rate ou, en français, taux interbancaire offert) de la même durée que le FRA.
- $i_{fixe}$  : taux forward.
- $n$  : La période de temps entre la date de négociation et la date de valeur du FRA. Cette période peut aller de 1 mois jusqu'à 2 ans.

### Exemple

Le 10 juillet 2009, une entreprise apprend qu'elle devra emprunter la somme de 10 millions d'euros trois mois plus tard, et ce pour une durée de 6 mois. Craignant une hausse des taux dans les trois mois à venir, elle veut se prémunir contre ce risque et achète un FRA auprès de sa banque. Pour ce FRA 3x9, le taux négocié est de 1.35%, le taux de référence étant l'Euribor 6 mois. A la fin de la période d'attente, le 10 septembre 2009, l'Euribor 6 mois est à 1.75%. Ce taux étant supérieur au taux préfixé, l'entreprise recevra de sa banque un paiement.

# Analyse statistique des données

## L'évolution empirique de la courbe des taux

### Introduction

La formation de la courbe des taux est très importante à cause de l'information qu'elle contient. La forme de cette courbe peut nous informer sur les anticipations des intervenants en terme d'inflation et de croissance des taux à court terme. L'allure la plus naturelle d'une courbe des taux est bien évidemment croissante : L'investisseur doit être mieux rémunéré s'il investit à long terme. Or, nous observons en pratique, outre l'allure croissante, des courbes plates, des courbes inversées ainsi que des courbes bosselées.

### Aperçu sur l'évolution empirique d'une courbe des taux

L'étude historique des mouvements de la courbe des taux met en relief les points suivants :

- les taux d'intérêts ne sont pas négatifs.
- les taux d'intérêts sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
- les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélés.
- les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme.
- trois facteurs de niveau, pente et courbure sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.

#### 1. les taux d'intérêts ne sont pas négatifs :

Les taux d'intérêt négatifs sont en général générés par un contexte où l'inflation est galopante. En parallèle, l'économie ne peut pas supporter des taux d'intérêt élevés dans un tel contexte sous peine de déprimer la consommation et par la suite freiner la croissance. D'un point de vue économique, le fait de prêter l'argent à un taux négatif est aberrant, ainsi il est préférable de conserver le capital sans le prêter.

#### 2. les taux d'intérêts sont affectés par des effets de retour à la moyenne :

Des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

3. **les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélés.** L'étude statistique des variations de taux zéro-coupon de maturité par exemple 3 mois, 2 ans et 10 ans montre qu'un seul facteur ne suffit pas à rendre compte de ces évolutions. En particulier, l'évolution des taux à court terme apparaît peu corrélée avec l'évolution des taux à long terme puisque plus l'écart de maturité entre deux taux est important, moins la corrélation est élevée.

4. **les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme** Nous constatons que la volatilité est fonction décroissante de la maturité. Cela est justifié par la catégorie des intervenants sur chaque segment. La politique monétaire de la banque centrale impacte le plus le court terme.

5. **Facteurs explicants la déformation de la courbe des taux :** L'analyse en composantes principales sur la courbe des taux zéro-coupon permet de mettre en évidence trois facteurs à l'origine de plus de 95% des déformations de la courbe des taux. En fait, ces facteurs sont : le facteur de niveau, le facteur de courbure et le facteur de rotation.

# Modèles de construction de la courbe des taux

## 3.1 Description des données

Sachant que la courbe zéro-coupon représente les différents taux zéro-coupons en fonction des maturités. La courbe reconstituée doit révéler les différences de rendement dues au seul facteur maturité. Ainsi, Nous devons sélectionner le panier des obligations d'une manière à éliminer toute influence des autres risques à savoir, le risque de contrepartie, le risque de change.

Par la suite, nous optons pour les obligations émises par le même émetteur. Ce choix est justifié par le souci d'homogénéiser les données. Nous ne devons pas oublier que la qualité de l'émetteur est un facteur essentiel intervenant dans le processus des prix. En fait, les agences de ratings attribuent une note sur la base d'un modèle. Cette note sera utilisée par les marchés afin d'apprécier la solvabilité des entreprises, qui est en général liée à la situation financière et les perspectives de développement à court et à long terme.

Le marché obligataire ne contient pas assez de maturité zéro-coupon pour reproduire la courbe. Étant donné que les seules obligations zéro-coupons existantes ne dépassent pas une année de maturité, nous serons amenés à utiliser le bootstrapping pour générer les taux de maturité supérieure à un an.

La construction de la courbe de taux nécessite la constitution d'un panier d'obligations de différentes maturités, Pour cela il faut éliminer :

- Les titres qui présentent des clauses optionnelles car ce type de contrat nuit à l'homogénéité du panier.
- Les titres qui représentent des erreurs de prix causées éventuellement par des erreurs de saisie.
- Les titres qui sont soit illiquides, soit surliquides, qui présentent des prix qui ne sont pas dans le marché.
- Les segments de maturité dans lesquels on ne dispose pas de titres.

## 3.2 Principe de construction

La construction de la courbe de taux est le point de départ pour les opérations de couverture ou d'évaluation de tout instrument financiers. Ainsi, la qualité de la démarche suivie aura un impact significatif sur les résultats de toute utilisation de cette courbe. Pour cette raison, nous devons être attentifs à la qualité des données et aux conventions de marché utilisées. De plus, le bon choix de la méthode de lissage est essentiel pour approcher la courbe de marché. Les étapes de la construction d'une courbe de taux sont les suivantes :

1. Choix d'une famille d'instruments de calibration liquides, dont les dates d'échéances sont équidistantes dans une plage de maturité allant d'un jour à au moins 50 ans.
2. Extraction des discounts  $d(t, T)$  à partir des prix observés pour les instruments du panier.
3. Conversion des discounts en des zéro-coupons.
4. Choix d'une famille de fonctions d'interpolation ou de lissage pour les taux zéro-coupons.
5. Calibration de la fonction choisie sur les taux zéro-coupon obtenus à l'étape 2 du processus.
6. Tester la courbe : calculer le prix d'obligation à partir de cette courbe et comparer le au prix de marché.

### 3.3 Modèles directs de construction

Par la suite, nous se baserons sur les points discrets constitués durant l'étape de bootstrapping. Notre objectif est de constituer une courbe continue et lisse. Pour cela, nous envisagerons plusieurs approches afin de sélectionner la meilleure méthode à savoir : l'interpolation linéaire et Cubic Spline.

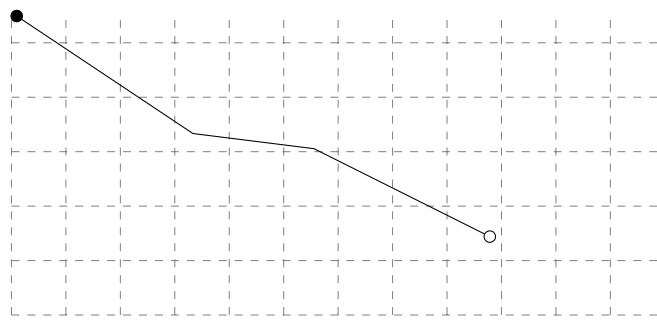
#### 3.3.1 Interpolation Lineaire

L'interpolation linéaire est la méthode la plus simple à implémenter. Il consiste à joindre par une ligne deux points. Ainsi, la pente entre chaque deux points est constante. En fait, l'approche suppose que le phénomène étudié évolue d'une manière régulière et constante. Nous considérons un ensemble de points  $d_f(t)$  représentant le discount à la maturité  $t$ . Il convient de signaler que la maturité coïncide avec la durée car les obligations zéro-coupons détache un seul flux.

Supposons que nous cherchons à calculer le discount associé à la date  $t$ . D'abord, nous déterminons l'intervalle où se situe la date  $t$ .

$$t_1 < t < t_2, d(t) = d(t_1) + d(t_2) * \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

Cette méthode est discontinue dans les points discrets. La courbe construite ne sera pas lisse.



Cette méthode ne garantit pas la continuité de la dérivée première, ceci implique que la courbe sera pas lisse. En fait, la courbe ne réplique pas les tendances de marché.

#### 3.3.2 Spline Cubique

##### Introduction

L'approximation d'une fonction  $f$  par un polynôme est une démarche naturelle que l'on rencontre dans divers contextes. Dans cette vision, nous envisagerons de construire un polynôme de degré 3. Cette méthode consiste à approcher la fonction  $f$  par morceaux. En fait, nous définissons un polynôme sur chaque segment.

Le problème de l'interpolation peut se formuler mathématiquement comme suit : Nous disposons de  $n$  intervalles, c'est-à-dire que nous allons estimer les coefficients de  $n$  polynômes.

Soit  $n + 1$  points de coordonnées  $P(x_i, y_i), i = 0 \dots n$ .

Pour chaque segment nous définissons le polynôme suivant :

$$y = a_i(x - x_i)^3 + b_i * (x - x_i)^2 + c_i * (x - x_i) + d_i, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

**Hypothèses de base :** Nous supposons que le polynôme construit par morceaux est continu sur l'ensemble de domaine de définition  $[x_0, x_n]$ . Ainsi, la dérivée première et seconde doivent être continues. Formulation des contraintes :

- $S_i(x_i) = y_i \quad i = 0 \dots n-1$
- $S_{n-1}(x_n) = y_n$
- $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \quad i = 1 \dots n-1$
- $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \quad i = 1 \dots n-1$
- $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \quad i = 1 \dots n-1$

En total, nous avons  $4n-2$  conditions. La résolution du système nécessite deux conditions supplémentaires. Ainsi, nous supposons qu'il s'agit d'un Natural Spline :

$$S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$$

### Résolution du problème

D'abord, nous notons :

$$\sigma_i = S''(x_i) = 6 * a_i(x - x_i) + 2b_i$$

Par la suite, nous pouvons réécrire les paramètres en fonction de  $\sigma_i$  avec hypothèse que  $h_i = h$  :

1.  $d_i = y_i$
2.  $b_i = \sigma_i/2$
3.  $a_i = (\sigma_{i+1} - \sigma_i)/6h$
4.  $c_i = (y_{i+1} - y_i)/h - h(\sigma_i + 1) + 2\sigma_i)/6$

Nous supposons que le pas  $h$  est constant :

$$\sigma_{i-1} + 4\sigma_i + \sigma_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right)$$

Avec  $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & \cdot & 1 & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \dots \\ \dots \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \end{pmatrix}$$

Nous parcourons les lignes en essayant d'annuler les coefficients de diagonale. A la fin de cette étape, la dernière équation aura un seul inconnu. Ainsi, nous recalculons les autres paramètres en remontant la diagonale. Une fois les  $\sigma$  sont calculés, nous les utiliserons pour calculer les paramètres de chaque  $d_i(t)$ .

La résolution de ce problème nous permet de calculer les paramètres de cubique spline. Pour cela, nous utilisons **Tri Diagonal Matrix Algorithm** ou Thomas Algorithm [7].

### 3.4 Méthodes indirectes de reconstruction

Ce sont les méthodes les plus utilisées en pratique. Ces méthodes reposent sur le principe suivant : Pour un panier d'obligations à coupons, il s'agit de la minimisation de l'écart au carré entre les prix de marché et les prix reconstitués à l'aide d'une forme à priori spécifiée des taux zéro-coupons ou de la fonction d'actualisation.

Nous supposons que notre panier est composé de  $n$  titres. On note à la date  $t$  :

- $P_t^j$  : Prix de marché du  $j^{\text{eme}}$  titre.
- $\hat{P}_t^j$  : Prix estimé du  $j^{\text{eme}}$  titre.
- $F_t^j$  : Flux futur du  $j^{\text{eme}}$  titre tombant à la date  $s(s>t)$ .

L'idée consiste à trouver le vecteur des paramètres  $\beta$  tel que :

$$\text{Min}(\sum_{j=1}^n (P_t^j - \hat{P}_t^j)^2)$$

On distingue deux grandes classes de modèles :

- **Les modèles type Nelson et Siegel** fondés sur une modélisation des taux zéro-coupon. Le prix théorique s'écrit :

$$P_t^j = \sum_s F_s^j B(t, s) = \sum_s F_s^j \exp(-(s-t)g(s-t; \beta))$$

le  $g$  est la fonctionnelle des taux zéro-coupons. Le prix de l'obligation est une fonction non linéaire des paramètres d'estimation.

- **Les modèles à Spline** fondés sur une modélisation de la fonction s'actualisation :

$$\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j B(t, s) = \sum_s F_s^j f(s-t; \beta)$$

$f$  est une fonction linéaire des paramètres d'estimation. Ainsi, le prix de l'obligation est également linéaire des paramètres d'estimation.

#### 3.4.1 Modèle de Nelson Siegel

Nelson et Siegel (1987) proposent une classe de fonctions mathématiques pour estimer la structure par terme des taux d'intérêts à une date donnée. Ce modèle suppose que le taux instantané  $f_t(\tau)$  est la solution d'une équation différentielle. C'est-à-dire  $f_t(\tau)$  est de la forme :

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 * \exp(-\frac{\tau}{\tau_1}) + \mu_3 (-\frac{\tau}{\tau_1}) \exp(-\frac{\tau}{\tau_1}) \quad \tau : \text{est la maturité.}$$

Sachant que le taux d'intérêt est défini par :

$$R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_t(\theta) d\theta$$

Ainsi, nous obtenons l'expression finale de  $R_t$  :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 * \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\tau_1})}{-\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 * [\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\tau_1})}{-\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\tau_1})]$$

Il est aisé d'exprimer les dérivées de  $R_t$  par rapport à chacun des paramètres  $\mu$ , c'est ce que l'on appelle les sensibilités des taux zéro-coupon aux paramètres  $\mu$ .

La courbe des taux zéro coupon dépend donc d'un vecteur de 4 paramètres :

$$V = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tau_1]$$

Certains de ces paramètres ont une signification, puisque nous avons :

$$R_t(0) = \mu_1 + \mu_2$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_t(\tau) = \mu_1$$

- Le paramètre  $\mu_1$  représente le taux long
- $\mu_2$  mesure la différence entre le taux court instantané et le taux long
- $\mu_3$  un facteur de courbure
- $\tau_1$  un paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps.

Nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=1}^N w_n (p_t^{(n)}(\theta) - P_t^{(n)})^2, \text{ avec } P_t^{(n)} = \exp(-R_t(\tau)\tau)$$

Nous cherchons donc à minimiser l'écart quadratique entre le prix de l'obligation donné par le modèle et celui observé sur le marché.

**Limites de ce Modèle** Cette méthode a quelques limites :

- Le modèle de Nelson et Siegel ne permet pas de reconstituer toutes les formes de courbes de taux que l'on peut rencontrer sur le marché, en particulier les formes à une bosse et un creux.
- Il y a un manque de souplesse d'ajustement pour certaines maturités. Ainsi, Ces maturités sont parfois mal évaluées par le modèle.

Par contre, les paramètres de ce modèle sont interprétables financièrement. Mais, il souffre d'un manque de flexibilité.

## 3.5 Modèles Stochastiques

### 3.5.1 Vasicek

#### Introduction

Le modèle de Vasicek (1977) est fondé sur l'idée que le taux court est la seule source d'incertitude qui influence les prix des titres obligataires, que celui-ci est censé suivre un processus d'Ornstein - Uhlenbeck dont l'évolution stochastique obéit à l'équation différentielle de type :

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (3.1)$$

- $r(t)$  : taux court en  $t$  ( assimilable au taux JJ).
- $b$  : moyenne sur le long terme du taux court.
- $a$  : désigne la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme  $b$ .
- $W(t)$  : mouvement brownien standard.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêts. En effet, nous remarquons que les valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. Au contraire, les valeurs bas des taux ont tendance à s'approcher de la moyenne sur le long terme.

Nous utilisons le taux JJ ou le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire. il est publié par la banque centrale et constitue un des principaux taux de référence du marché monétaire.

Nous remarquons que l'espérance de la variation instantanée de taux court s'écrit sous cette forme :

$$E\left[\frac{dr(t)}{dt}\right] = a(b - r(t))$$

Cette valeur est positive quand le taux court est inférieur à  $b$ . Ainsi, le taux court aura une tendance haussière pour se rapprocher de la moyenne. L'inverse est constaté quand le taux court est supérieur à  $b$ . Ces tendances sont d'autant plus intenses que le taux est très écarté de son moyen et la valeur de  $a$  est grande.

Ainsi, le taux court subit deux contraintes : la première est liée à la capacité de taux à reprendre sa valeur moyenne à long terme ( $b$ ) tandis que la seconde a pour objectif de faire fluctuer le taux court autour de sa moyenne.

#### Solution à l'équation différentielle

Pour la résolution de l'équation (3.1), nous supposons que la prime de risque est constante. Nous obtenons une forme de solution qui s'écrit sous la forme.

$$r_t = r_0 \exp -at + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp -at \int_0^t \exp(as) dW(s)$$

En posant  $\tau = T - t$ , la solution de l'équation différentielle partielle à laquelle doit obéir le prix d'un titre est la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} B(t, T) = \frac{1 - \exp(-a(T-t)r(t))}{a} \\ A(t, T) = \exp[(B(t, T) - (T-t))R(\infty) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}] \end{cases}$$

- $R(\infty) = b + \frac{\sigma\pi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2}$  : représente le taux implicite à long terme.
- $\pi$  correspond à la prime de risque supposée constante.

Ce modèle suppose que la prime de risque est constante. Or, Celle-ci est indépendante de la durée de vie des titres et n'est pas unique pour toutes les obligations de l'échantillon. Elle ne peut être obtenue arbitrairement, par minimisation des écarts entre les prix observés et les prix théoriques obtenues à l'aide du modèle.

La mise en œuvre de ce modèle nécessite de le discrétiser, que ce soit pour l'estimation de ses paramètres ou pour la simulation des trajectoires.

### Discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Un processus  $X$  admet une discrétisation exacte dès lors que l'on peut résoudre explicitement l'EDS qui lui est associée. C'est notamment le cas du mouvement brownien géométrique retenu par Black et Scholes (1973) pour modéliser le cours d'une action ou encore celui du processus d'Ornstein-Uhlenbeck retenu par VASICEK [1977] pour modéliser le taux d'intérêt instantané  $r$  :

$$r_t = r_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp(-at) \int_0^t \exp(as) dW(s)$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$r_t = r_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a)}{2a}} \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

### Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres du processus d'Ornstein - Uhlenbeck peut s'effectuer en recourant soit à la méthode des moindres carrés ordinaires, soit à celle du maximum de vraisemblance qui nécessite la normalité de la distribution des taux. Ici, nous avons eu recours à la méthode des moindres carrés ordinaires. Le point de départ de cette méthode consiste à régresser la série des taux courts à l'aide de la formule suivante :

$$r_t = b(1 - \exp(-at)) + \exp(-a)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Avec : } \varepsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)))$$

## 3.5.2 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

### Processus Racine Carrée

Afin d'éviter l'apparition des taux d'intérêts négatifs, Cox, Ingersoll et Ross (CIR) ont eu recours au processus racine carrée dont la dynamique des taux est matérialisée par cette équation différentielle :

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW(t)$$

Ce processus est identique au précédent à la seule différence que le poids accordé à la relation de proportionnalité est ici égale à  $\frac{1}{2}$  alors qu'il était nul dans le modèle de Vasicek.

Lorsqu'on impose la condition  $2ab > \sigma^2$ , le taux est toujours positif. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut garantir la non négativité des taux, mais avec une probabilité non nulle d'avoir des taux nuls.

### Solution de l'équation différentielle

La solution de ce processus est donnée par :

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s}dW(s)$$

Sachant que la valeur d'une obligation ne dépend que d'une seule variable d'état, la solution à l'équation différentielle régissant le prix d'une obligation zéro-coupon est la suivante :  $\tau = T - t$

$$P(r,t,n) = A(t,n) \exp[-B(t,n)r(t)]$$

$$A(t,T) = \left[ \frac{2 \cdot \mu \cdot \exp\left(\frac{(a+\pi+\mu)\tau}{2}\right)}{2} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\mu = \sqrt{(a+b)^2 + \sigma^2}$$

$$B(t,T) = \left[ \frac{2[\exp \mu \tau - 1]}{(a+\pi+\mu)[\exp \mu \tau - 1] + 2\mu} \right]$$

Comme dans le modèle de Vasicek, les données disponibles sont discrètes, et par conséquent l'estimation des paramètres des modèles en temps continu n'est pas immédiate. Nous devons passer par la discrétisation du processus.

### Discrétisation approximative du processus Racine Carrée

Les schémas d'Euler et de Milstein sont les procédés de discrétisation les plus répandus. Tous les deux sont des développements d'Itô-Taylor de la solution de l'équation différentielle à des ordres différents (ordre 1 pour Euler, ordre 2 pour Milstein). Dans ce travail, nous allons utiliser le schéma d'Euler.

Le procédé de discrétisation d'Euler consiste, dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, en l'approximation du processus continu  $r_t$  par le processus discret  $\hat{r}_t$  défini avec les mêmes notations que précédemment par :

$$\hat{r}_{t+\delta} = \hat{r}_t + a(b - \hat{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\hat{r}_t} * \delta\varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire normale centrée réduite.

### Estimation des paramètres

Si la variation  $\delta$  est constante et égale à une période, l'estimation des paramètres de ce processus peut s'effectuer en recourant à l'une des régressions suivantes :

$$r_t = ab + (1-a)r_{t-1} + \sigma\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_t$$

$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{ab}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1-a)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma\varepsilon_t$$

Nous allons retenir la deuxième forme de la régressions en choisissant pour taux de référence le TMP utilisé dans le modèle précédent :

Posons :

$$\begin{aligned} - Y &= \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} \\ - X &= \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} \\ - Z &= \sqrt{r_{t-1}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de régression devient :

$$Y = ab * X + (1-a)Z + \sigma\varepsilon_t$$

Avec :  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  correspond au résidu de la régression.

# Conclusion

Le passage en revue des principales notions de taux et des théories traditionnelles de taux d'intérêt est susceptible de nous fournir une vue d'ensemble du contexte du projet et nous donnera les moyens de mieux appréhender les chapitres qui constituent le vif du sujet. Par la suite, nous examinerons la modélisation empirique de la courbe.

## **Troisième partie**

# **Implémentation des modèles de reconstitution de la courbe des taux**

# Introduction

Dans cette partie, nous nous intéresserons à l'implémentation des méthodes vues précédemment sous C#. Ainsi, le travail sera présenté de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous présenterons les différents outils utilisés lors de la réalisation de l'étude : le langage de programmation C#, Excel Dna et la librairie Metanumerics.

Dans le deuxième chapitre, nous détaillerons la démarche suivie pour implémenter l'algorithme de Bootstrapping généralisé. Puis, nous nous intéresserons à la méthode d'interpolation Cubic Spline. A la fin de cette étape, nous construisons la courbe de taux à partir des prix de marché .

Dans le troisième chapitre, nous adopterons une vision purement financière pour modéliser la courbe des taux. Les deux parties de ce chapitre seront consacrées respectivement aux modèles de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross. Ainsi, dans chacune de ces parties, nous détaillerons les différentes étapes par lesquelles on passe pour obtenir la structure des taux. Ensuite, nous procéderons à l'estimation des paramètres de ces modèles.

# Outils de programmation

## Présentation de C#

Le c# est un langage de programmation orienté objet. Il est créé par la société Microsoft et notamment par l'un de ses employés Anders Hejlsberg. C'est un langage proche de Java en terme de concept utilisé. Le développement de code se fait sur la plateforme Visual studio. **Les différences entre C++ et C#**

- La manipulation des pointeurs ne peut se faire qu'au sein d'une zone déclarée unsafe.
- Les objets ne peuvent pas être explicitement détruits.
- l'héritage multiple des classes est interdits.
- La syntaxe pour la déclaration des tableaux est différent.
- les délégués sont les pointeurs sur les fonctions.

## Présentation de ExcelDna :

Excel-DNA est un projet open source qui vise à intégrer c# dans Excel. Son environnement d'exécution est distribuée sous une license libre ce qui permet de l'utiliser commercialement. Cet AddIn nous permet de trouver les fonctions développées sous c# en Excel via Exce-DNA.

## Configuration d'un projet C#

Nous présentons les étapes à suivre pour intégrer une librairie C# à excel :

1. Une fois le projet excel-dna est téléchargé, nous le décompressons dans le dossier convenable.L'étape d'extraction va créer deux dossiers à savoir : Distribution et Source.
2. Dans le dossier Distribution, double-click sur le fichier ExcelDna.xll, un message d'avertissement s'affiche, vous devez cliquer sur "Enable".
3. Maintenant, nous créons un projet C# :
4. Nous ajoutons la refernece "ExcelDna.Integration" :
5. Ensuite, nous ajoutons un fichier nommé " FirstAddIn.dna " :  

```
<DnaLibrary Name="First Add-In" RuntimeVersion="v4.0">  
<ExternalLibrary Path="MyLibrary.dll" />  
</DnaLibrary>
```
6. Dans les propriétés de ce fichier, changer le champs suivant :
7. Copier 'ExcelDna.xll" au dossier de projet et renommer le en "FirstAddIn.xll" :
8. Ajouter ce dernier fichier au projet et changer ses propriétés comme dans la figure :
9. Enfin, nous compilons le projet, le dossier Debug doit contenir les fichiers suivants :

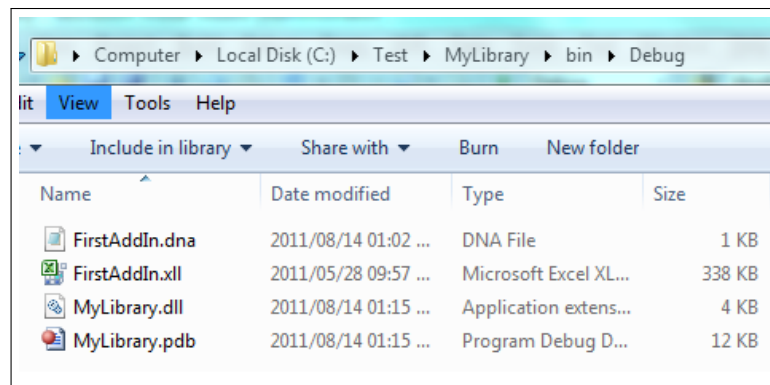


FIGURE 1.1 – Output de la compilation de projet

## MetaNumerics

Metanumerics est une librairie qui fournit des outils mathématiques et statistiques développés sous la plateforme .Net. Il est facile à intégrer à C#, ce qui permet d'utiliser les fonctions prédéfinis dans cette librairie.

Meta Numerics

HOME SOURCE CODE DOWNLOADS DOCUMENTATION DISCUSSIONS ISSUES PEOPLE LICENSE

Page Info | Change History (all pages) ★ Follow (100) | Subscribe

We provide quick-start tutorials illustrating the capabilities of the Meta.Numerics in a number of areas:

- » Installation
- » Advanced Mathematics
  - » Complex numbers, uncertain values, and spinors
  - » Special functions of real number, complex numbers, and integers
- » Analysis of Functions
  - » Integration
  - » Optimization
  - » Finding Zeros
- » Statistics and Data Analysis
  - » Statistics
    - » Univariate samples
    - » Comparing samples
    - » Bivariate samples
    - » Multivariate samples
    - » Fitting data with error bars to a model
    - » Contingency table analysis
  - » Statistical tests
  - » Probability distributions
- » Matrix Algebra
  - » Solving systems of equations
  - » Finding eigenvalues and eigenvectors
  - » Singular Value Decompositions
- » Fourier Transforms

Search Wiki & Documentation

SYSTEM REQUIREMENTS

There are currently no defined requirements.

FIGURE 1.2 – Outils de Metanumerics

Dans la page web de Meta Numerics, nous pouvons consulter une multitude de librairies dans différents domaines : Statistique, analyse des données et algèbre. Pour les utiliser, il suffit de télécharger le code source et de l'enregistrer dans un dossier. Puis, dans la partie code, nous l'ajoutons dans l'onglet référence.

# Implémentation de la méthode Bootstrapping

## Introduction

Nous rappelons que le Bootstrapping est utilisé pour extraire directement les zéro-coupons ou les discounts à partir des prix de marché. A l'inverse de l'approche matricielle, le Bootstrapping ne se base pas totalement sur une méthode numérique.

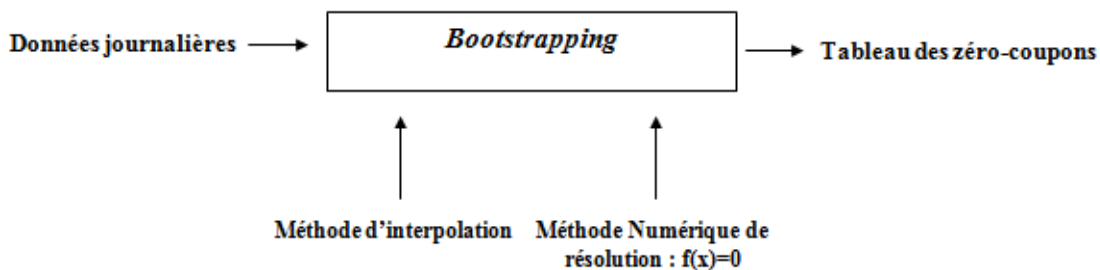


FIGURE 2.1 – Methodologie de Bootstrapping

## 2.1 Mise en oeuvre de la méthode

Nous supposons que nous disposons d'un échantillon de  $m$  obligations bien choisies. En fait, chaque titre est caractérisé par une équation qui égalise le prix de l'obligation (dirty price) et les flux actualisés.

$$\begin{cases} \text{eq 1 : } P_1 = \sum_{i=1}^{n_1} c_{i,1} df_{i,1} + N_1 * df_{n_1,1} \\ \dots = \\ \text{eq m : } P_m = \sum_{i=1}^{n_m} c_{i,m} df_{i,m} + N_m * df_{n_m,m} \end{cases}$$

Nous reformulons les équations de système précédents sous cette forme :

$$\begin{cases} \text{eq 1 : } df_{n_1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1-1} c_{i,1} df_{i,1} - P_1}{1 + c_{n_1,1}} \\ \dots = \\ \text{eq m : } df_{n_m,m} = \frac{\sum_{i=1}^{n_m-1} c_{i,m} df_{i,m} - P_m}{1 + c_{n_m,m}} \end{cases}$$

Le bootstrapping permet de calculer progressivement ces discounts.

Nous remarquons que la méthode nécessite la connaissance des flux de chaque obligation ainsi que les discounts associés à chaque date de coupon.

**problématique :**

Lors de cette étape, notre objectif est de proposer un algorithme qui prend en argument n'importe quel échantillon d'obligation. Ensuite, Il déduit le tableau des discounts pour chaque maturité. En fait, les algorithmes proposés en générale suppose que les obligations ont la même périodicité et que le pas entre les maturités est constant. Or, il est difficile de collecter une base de donnée qui satisfait à ces deux contraintes. Par la suite, nous proposerons un algorithme qui génère les discounts sans contraindre les données à satisfaire à une configuration donnée.

Nous présentons un exemple illustrant les étapes et les contraintes liées à notre objectif.

Exemple 1 :

Considérons un échantillon constitué de 3 obligations :

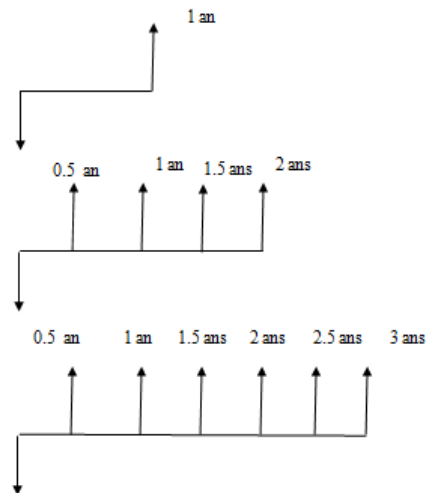


FIGURE 2.2 – Schéma des flux

La démarche consiste à calculer progressivement les discounts en commençant par la maturité la plus petite. Nous notons que ces obligations ont un nominal de  $N=100\$$ .

– **Obligation 1 :**

Supposons que le marché affiche une cotation de 95.5\$ pour cette obligation. Nous en déduisons le facteur d'actualisation associé à un an.

$$\text{à l'instant } t, P(t) = \text{Coupon} * B(t, T)$$

Nous calculons le facteur d'actualisation de la façon suivante :

$$B(t, T) = \frac{95.5}{100}$$

– **Obligation 2 :**

Avant de procéder au calcul, il convient de préciser le prix  $P = 97\$$ . Le taux de coupon (yield coupon) est  $c = 2\%$ .

$$P = c_1 * B(t, t + 0.5) + c_2 * B(t, t + 1) + c_3 * B(t, t + 1.5) + (N + c_4) * B(t, t + 2) \quad (2.1)$$

$$97 = 2 * B(t, t + 0.5) + 2 * B(t, t + 1) + 2 * B(t, t + 1.5) + (100 + 2) * B(t, t + 2) \quad (2.2)$$

En fait, nous disposons déjà de  $B(t, t + 1)$ . Nous utilisons l'interpolation linéaire pour calculer  $B(t, t + 0.5)$ .

$$B(0, t) = \frac{(t_2 - t)B(0, t_1) + (t - t_1)B(0, t_2)}{(t_2 - t_1)}$$

$$B(t, t + 0.5) = \frac{(1 - 0.5) * 1 + (0.5 - 0) * 0.955}{1 - 0}$$

$$= 0.9775$$

Nous rappelons que nous cherchons à calculer le discount de maturité 2 ans. Il nous manque le discount de 1.5 ans. Dans ce cas, nous pouvons pas interpoler entre 1 an et 2 an, puisque le facteur d'actualisation de 2 an est inconnu. L'équation (2.2) a deux inconnus. Nous proposons d'écrire le facteur d'actualisation en fonction des autres discounts via une méthode d'interpolation.

$$B(t, t + 1.5) = f(B(t, t + 1), B(t, t + 2)) \quad (2.3)$$

Nous supposons que  $f$  est linéaire alors  $B(t, t + 1.5)$  sera écrite de la façon suivante :

$$B(t, t + 1.5) = p * B(t, t + 1) + q * B(t, t + 2), \text{ avec } p + q = 1 \quad (2.4)$$

En remplaçant dans l'équation (2.2), nous trouverons l'expression suivante :

$$P(t) = 2 * B(t, t + 0.5) + 2 * B(t, t + 1) + 2 * f(B(t, t + 1), B(t, t + 2)) + (100 + 2) * B(t, t + 2)$$

$$P(t) = 2 * B(t, t + 0.5) + 2 * B(t, t + 1) + 2 * (p * B(t, t + 1) + q * B(t, t + 2)) + (100 + 2) * B(t, t + 2)$$

$$P(t) = 2 * B(t, t + 0.5) + (2 + 2p) * B(t, t + 1) + (100 + 2 + 2q) * B(t, t + 2)$$

$$B(t, t + 2) = \frac{P(t) - 2 * B(t, t + 0.5) + (2 + 2p) * B(t, t + 1)}{100 + 2 + 2q}$$

Ainsi, cette équation a un seul inconnu. Par la suite, nous pouvons calculer le discount directement ou utiliser une méthode numérique pour approcher sa valeur exacte. En fait, la résolution de l'équation dépend de la forme d'interpolation. Si nous considérons l'interpolation linéaire, la solution sera déduite directement. A l'inverse, si nous choisissons une forme d'interpolation à l'image de Spline Cubic, nous devons dans ce cas utiliser la méthode de Newton Raphsen.

- **Obligation 3** : Nous procédons de la même façon que l'obligation 2. Nous calculons au fur et à mesure les discounts.

Par la suite, nous présentons un algorithme qui récapitule les étapes vues dans l'exemple précédent :

---

**Algorithm 1** Bootstrapp des obligations
 

---

**Require:**  $N$  obligations de maturité  $T_i$  et de fréquence  $f_i$

**Ensure:** Les données sont justes et les maturités sont triées en ordre croissant.

Nous commençons par le premier obligation

$i \leftarrow 1$

STEP 1 :  $T \leftarrow T_i$

STEP 2 : TryDirectMethod= True

**while**  $T > 0$  **do**

$T \leftarrow T - f_i$

Result  $\leftarrow$  Try to Find  $df(T)$  in Discount Table

**if** Result = True **then**

$df(T) \leftarrow$  Get discount from Table

**else**

TryInterpolate  $\leftarrow$  Try to interpolate df(T)

**if** TryInterpolate **then**

$df(T) \leftarrow$  Interpolate(T)

**else**

$df(T) \leftarrow f(df(T_{inf}), df(T_i))$ , avec  $T_{inf} < T$ ,  $f$  : fonction d'interpolation

**end if**

**end if**

$SUM \leftarrow SUM + df(T) * c_i$

**end while**

STEP 3 :

**if** TryDirectMethod = True **then**

We add  $\frac{P-SUM}{N+cT_i}$  to Discount Table

**else**

We use a Numerical Method To resolve  $\frac{P-SUM(x)}{N+cT_i} - x = 0$

We add x to Discount Table.

**end if**

STEP 4 :  $i \leftarrow i + 1$  ,Go to STEP 1

---

A la fin de l'algorithme, nous aurons un tableau de discount avec leurs maturités.

## 2.2 Application sous C#

L'algorithme de Bootstrapping présenté sera implémenté sous C#. La figure suivante montre bien les paramètres utilisés lors de l'exécution de cet algorithme.

Dans la partie "Settings", nous avons les champs suivants :

- **Base de Calcul** : la convention utilisée pour le décompte des jours.
- **Extrapolation** : Nous utilisons l'interpolation linéaire. Vu que nous cherchons des maturités qui sont supérieurs à la maturité maximale qui figure dans l'échantillon, nous serons amené à extrapoler pour remédier à l'insuffisance des données.
- **Interpolation** : Ce champ indique la méthode d'interpolation utilisée durant le bootstrapping.
- **Numeric Method** : Nous indiquons la méthode utilisée pour résoudre les équations.
- **Reconstruction Method** : Nous précisons quelle courbe nous voulons construire.
- **Smoothing Type** : Ce champ permet de préciser le type d'interpolation utilisé après le Bootstrapping.

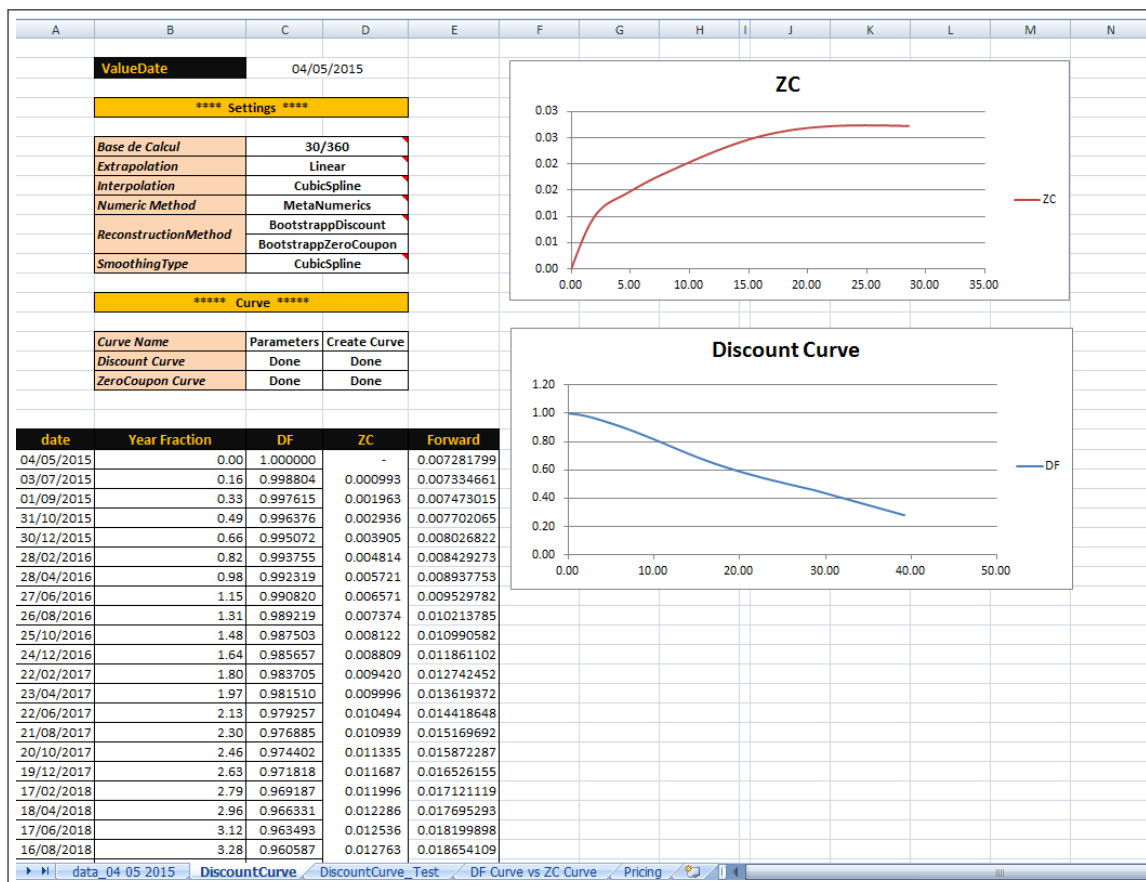


FIGURE 2.3 – Bootstrapping sous Excel

La construction de la courbe dépend de trois phases :

1. **Initialisation des paramètres** : Nous procédons à l'instantiation des classes correspondantes aux paramètres choisis.
2. **Construction de la table des zéro-coupons/discounts** : Durant cette partie, le bootstrapping nous fournit un tableau rempli de valeur de discount ou de zéro-coupon à des dates futurs.
3. **Lissage de la courbe** : Puisque nous voulons construire une courbe continue, la solution est d'utiliser l'interpolation Cubic Spline pour compléter la courbe.

## Etapas d'implémentation :

Nous présenterons l'implémentation des trois phases en C# :

1. Sur une feuille Excel, nous récupérons les données sous cette forme :

29							
30	GB00B3Z3K594	1.0204	Eur	30/360			Fixed Rate Bond
31	Type	Start Date	End Date	Payement Date	Amount	Rate	spread
32	Coupon	19/08/2011	22/01/2012	22/01/2012	7.41848E-05	1.75	0.00
33	Coupon	22/01/2012	22/07/2012	22/07/2012	0.0000875	1.75	0.00
34	Coupon	22/07/2012	22/01/2013	22/01/2013	0.0000875	1.75	0.00
35	Coupon	22/01/2013	22/07/2013	22/07/2013	0.0000875	1.75	0.00
36	Coupon	22/07/2013	22/01/2014	22/01/2014	0.0000875	1.75	0.00
37	Coupon	22/01/2014	22/07/2014	22/07/2014	0.0000875	1.75	0.00
38	Coupon	22/07/2014	22/01/2015	22/01/2015	0.0000875	1.75	0.00
39	Coupon	22/01/2015	22/07/2015	22/07/2015	0.0000875	1.75	0
40	Coupon	22/07/2015	22/01/2016	22/01/2016	0.0000875	1.75	0.00
41	Coupon	22/01/2016	22/07/2016	22/07/2016	0.0000875	1.75	0.00
42	Coupon	22/07/2016	22/01/2017	23/01/2017	0.0000875	1.75	0.00
43	Redemption	22/01/2017	22/01/2017	23/01/2017	0.01	0	0.00
44							
45							
46	GB00BDV0F150	1.021625	Eur	30/360			Fixed Rate Bond
47	Type	Start Date	End Date	Payement Date	Amount	Rate	spread
48	Coupon	22/11/2013	22/01/2014	22/01/2014	2.90082E-05	1.75	0.00
49	Coupon	22/01/2014	22/07/2014	22/07/2014	0.0000875	1.75	0.00
50	Coupon	22/07/2014	22/01/2015	22/01/2015	0.0000875	1.75	0.00
51	Coupon	22/01/2015	22/07/2015	22/07/2015	0.0000875	1.75	0.00
52	Coupon	22/07/2015	22/01/2016	22/01/2016	0.0000875	1.75	0.00
53	Coupon	22/01/2016	22/07/2016	22/07/2016	0.0000875	1.75	0.00
54	Coupon	22/07/2016	22/01/2017	23/01/2017	0.0000875	1.75	0.00
55	Coupon	22/01/2017	22/07/2017	24/07/2017	0.0000875	1.75	0
56	Coupon	22/07/2017	22/01/2018	22/01/2018	0.0000875	1.75	0.00
57	Coupon	22/01/2018	22/07/2018	23/07/2018	0.0000875	1.75	0.00

FIGURE 2.4 – Extrait des données

2. Dans la zone Settings :

**** Settings ****		
Base de Calcul	30/360	
Extrapolation	Linear	
Interpolation	CubicSpline	
Numeric Method	MetaNumerics	
ReconstructionMethod	BootstrappDiscount	
	BootstrappZeroCoupon	
SmoothingType	CubicSpline	
***** Curve *****		
Curve Name	Parameters	Create Curve
Discount Curve	Done	Done
ZeroCoupon Curve	Done	Done

FIGURE 2.5 – Boite de configuration

nous choisissons la base de calcul, le type d'interpolation, le type d'extrapolation, le type de smoothing, la méthode numérique et le type de bootstrapping (discount ou zéro-coupon). Ensuite, chaque courbe est identifiée par une nomination que nous indiquons dans le champ Curve Name. En effet, une fois nous spécifions les paramètres, nous faisons appel à la fonction Setparameters qui instancie des classes pour chaque paramètre. Si l'initialisation des inputs est réussie, elle retourne Done, sinon il renvoie Error. La fonction n'indique pas le type d'erreur.

Cette Configuration est réalisé via une classe 'Config' :

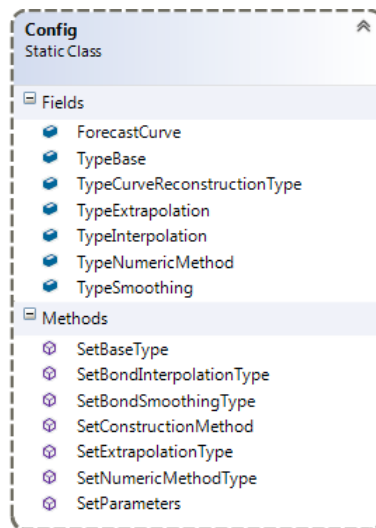


FIGURE 2.6 – Class Config

3. L'exécution de l'algorithme de Bootstrapping se fait en appelant la fonction SetDiscount. Elle se trouve dans la classe Program qui est l'intermédiaire entre Excel et les classes de la librairie. La fonction prend en paramètres la base de données, la base de calcul et la nomination de la courbe. La base de donnée sera utile pour instancier une nouvelle class Marketdata. Le comportement de celle-ci se diffère selon le type de produit.

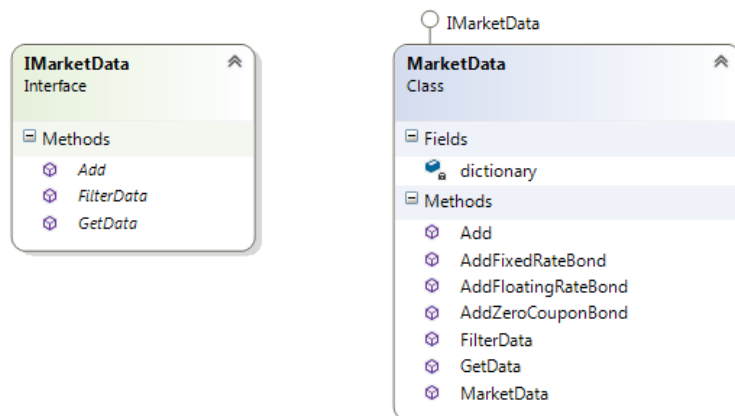


FIGURE 2.7 – Class Market Data

Une fois la méthode SetDiscount est appelée, nous adapterons les données via la classe bootstrappingadapter, puis nous lançons l'algorithme de bootstrapping qui se trouve dans la classe Bootstrapping . Enfin, nous créerons une classe courbe . La classe curve contient un tableau à deux dimensions, la première ligne est composée des maturités des obligations, la deuxième ligne comprend les facteurs d'actualisations de chaque date.

#### Avantages de Cette implémentation :

L'algorithme utilisé pour le bootstrapping a plusieurs avantages :

- L'algorithme peut prendre en input n'importe quelle base de données sans émettre des hypothèses sur la périodicité des coupons ou sur la distribution des maturités.
- Nous pouvons ajouter d'autres méthodes d'interpolation sans altérer le fonctionnement de Bootstrapp.
- Nous pouvons modifier l'implémentation des paramètres sans affecter le Bootstrapp.
- L'algorithme donne les mêmes résultats soit en générant la courbe discount soit en construisant la courbe zéro coupon.

**Limites de Cette implémentation :**

La structure de code est limité :

- L'utilisation d'une méthode numérique peut induire une erreur dans les résultats.
- Le temps d'exécution dépend de cette méthode numérique et de la structure des données.

### 2.3 Implémentation de Cubic Spline

Nous envisageons de reconstituer la courbe par le biais de l'interpolation Cubic spline. Pour cela, nous avons besoin de n+1 points .Ainsi, nous constituons n intervalles, ce qui nécessite l'estimation des paramètres de n polynome.

$$d(t) = \begin{cases} d_1(t) & t \leq t_1 \\ \dots & \\ d_n(t) & t \geq t_n \end{cases}$$

Avec :

$$d_i(t) = d + c * (t - t_{i-1}) + b * (t - t_{i-1})^2 + a * (t - t_{i-1})^3$$

Cette méthode d'interpolation est mise en oeuvre durant le bootstrapping. Cela signifie que nous calculons les paramètres de chaque spline au fur et à mesure de l'exécution de bootstrapp.

Dans la figure ci-dessous, nous signalons que nous choisissons le CubicSpline pour la case d'interpolation ainsi que pour la case de Smoothing : Le premier case indique la méthode d'interpolation mise en oeuvre lors de bootstrapping et la deuxième mentionne la méthode d'interpolation utilisée pour compléter la courbe.

Lors de bootstrapping, nous faisons appel à une méthode d'interpolation. Supposons que nous avons trois discounts issus de cette opération et nous cherchons à obtenir un discount de maturité supérieure aux autres. La première étape consiste à estimer les paramètres de la courbe de Cubic Spline à partir de ces 3 points. Ensuite, nous l'utilisons pour déterminer les facteurs d'actualisations des coupons. Par la suite, nous obtenons la valeur de quatrième discount via la formule d'égalité entre le prix et les flux actualisés.Nous recalculons à chaque ajout d'un nouveau point les paramètres des splines.

Une fois l'étape de bootstrapping est terminé. Nous pouvons faire appel à la fonction GetDiscount qui retourne le discount à n'importe quelle date.

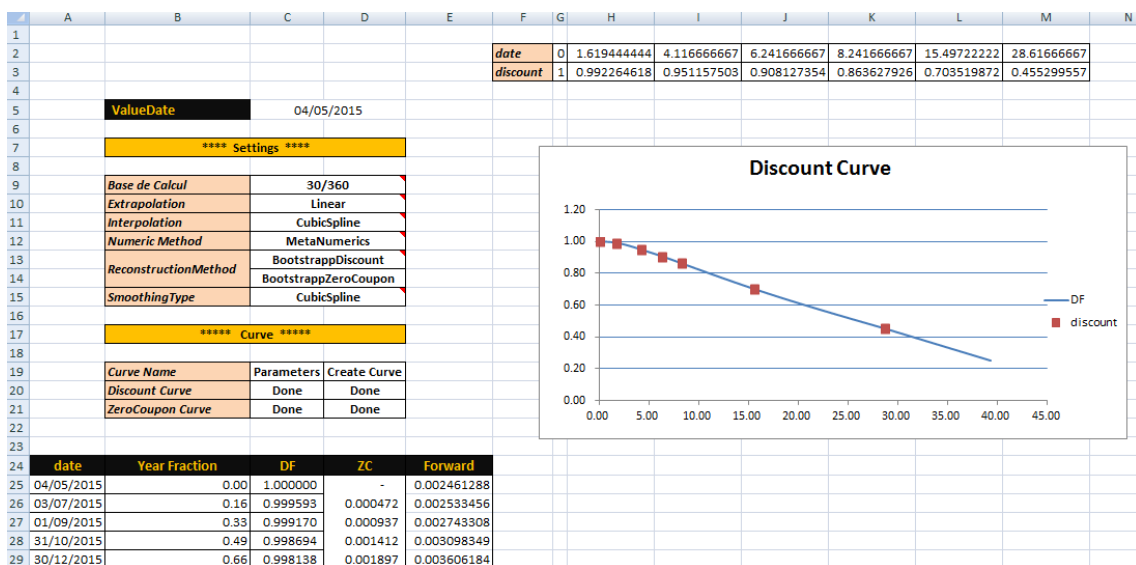


FIGURE 2.8 – Feuille Excel de Cubic Spline

Dans la feuille Excel, la colonne date représente les maturités.Elles seront converties en des fractions d'années selon la convention spécifiée dans le champ 'Base de Calcul'.Les discounts sont calculés à la colonne 'DF' via la fonction GetDiscount().

La courbe discount passe par les points de bootstrapping, elle est continue et décroissante. Nous pouvons améliorer le résultat en augmentant le nombre de point.

# modèle stochastique

## Introduction

On se propose de construire la courbe de taux en se basant sur des modèles financiers. Ce chapitre traitera deux modèles financiers, il s'agit des modèles les plus utilisés dans la modélisation de la courbe des taux. En fait, ces modèles découlent de la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Les deux parties de ce chapitre seront consacrées respectivement aux modèles de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross. Ainsi, dans chacune de ces parties, nous détaillerons les différentes étapes par lesquelles on passe pour obtenir la structure des taux. Ensuite, nous procéderons à l'estimation des paramètres de ces modèles.

### 3.1 Application de Vasicek

#### Introduction

Dans ce chapitre, nous implémentons le modèle de Vasicek. D'abord, nous exposons la méthodologie d'estimation des paramètres. Ensuite, nous construisons la courbe afin de la comparer avec les autres modèles.

#### 3.1.1 Méthodologie d'estimation

La dynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour le taux court est décrite par le processus suivant :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz(t)$$

La solution discrétisée de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$r_t - r_{t-1} = b(1 - \exp(-a)) + (\exp(-a) - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec  $\varepsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)))$

Nous pourrions alors, en utilisant les données discrètes du taux court, estimer à l'aide de la Méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO) les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck via l'équation suivante :

$$r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec  $\alpha = b(1 - \exp(-a))$  ,  $\beta = \exp(-a)$

Cette formule indique que le taux court suit un auto régressif d'ordre 1. Cela va être examiné dans la prochaine étape. Après estimation des paramètres de régression  $\alpha$  et  $\beta$ , nous pouvons récupérer aisément les paramètres de modèle de Vasicek.

$$a = -\log(\beta) \quad b = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

#### 3.1.2 Présentation et analyse des données utilisées

Pour estimer les paramètres désirés, nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire. Nous nous sommes référées dans notre étude à la base données journalières du TMP s'étalant du 1er Janvier 2006 au 14 juin 2012, soit 2357 observations. Ces données sont représentées sur le graphe suivant :

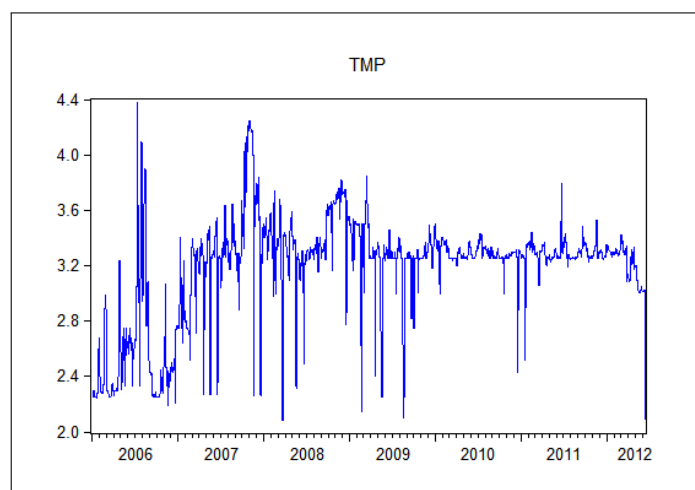


FIGURE 3.1 – Graph de TMP.

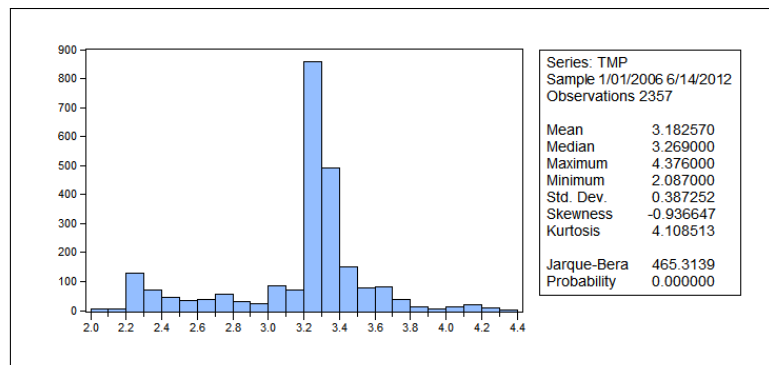


FIGURE 3.2 – Historamme de TMP.

Ce dernier résume les différentes statistiques relatives à la statistique tmp. Le Skewnes renseigne sur l'asymétrie de la distribution. Le Kurtosis indique la normalité des données. Pour notre cas, nous remarquons que le skewnes est négatif ce qui signifie que les données se concentre à droite de la moyenne. Le kurtosis est un peu éloigné de 3 qui représente la valeur de cette indice pour la loi normale. La valeur obtenue pour la statistique de Jarque & Bera est largement supérieur à la valeur critique, ainsi nous rejetons l'hypothèse de la normalité de TMP.

### Analyse des données

Nous commençons par tester la stationnarité de la série TMP, nous choisissons d'effectuer le test de racine unitaire. Ainsi, nous testons le troisième modèle, c'est-à-dire l'existence d'une constante et d'une tendance.

- **modèle 3** : Nous testons le modèle avec tendance .

Null Hypothesis: TMP has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Lag Length: 9 (Automatic - based on SIC, maxlag=26)		
	t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>	<b>-5.530235</b>	<b>0.0000</b>
Test critical values:	1% level	-3.961955
	5% level	-3.411723
	10% level	-3.127742
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

FIGURE 3.3 – Tableau Modèle 3.

La statistique de Dickey-Fuller affiche une valeur de -5.5302 qui est inférieur au niveau critique à 5%. Ainsi, La série ne suit pas de tendance.

- **modèle 2** :

Nous testons le modèle avec constante.

Null Hypothesis: TMP has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 9 (Automatic - based on SIC, maxlag=26)		
	t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>	<b>-5.305685</b>	<b>0.0000</b>
Test critical values:	1% level	-3.432941
	5% level	-2.862571
	10% level	-2.567364
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

FIGURE 3.4 – Tableau Modèle 2.

La valeur de test est inférieure à la valeur critique au niveau 5%. Ainsi, nous pouvons affirmer que la constante est nulle.

### - modèle 1 :

Ce dernier test a pour hypothèse 'série non stationnaire'.

Null Hypothesis: TMP has a unit root Exogenous: None Lag Length: 13 (Automatic - based on SIC, maxlag=26)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.343742	0.5615
Test critical values:		
1% level	-2.565949	
5% level	-1.940959	
10% level	-1.616609	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

FIGURE 3.5 – Tableau Modèle 1.

D'après le résultat de Test : ADF=-0.3437 est inférieur à la valeur critique -1.9409 au niveau 5%. Ainsi, nous rejetons l'hypothèse, ce qui revient à affirmer la stationnarité de la série au niveau 5%.

### - Ordre AR(p)

Included observations: 2357

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.934	0.934	2058.2	0.000
		2 0.872	0.002	3855.1	0.000
		3 0.818	0.027	5437.1	0.000
		4 0.772	0.035	6846.2	0.000
		5 0.730	0.013	8106.5	0.000
		6 0.691	0.009	9236.3	0.000
		7 0.668	0.112	10293.	0.000
		8 0.656	0.086	11312.	0.000
		9 0.651	0.072	12315.	0.000
		10 0.650	0.069	13316.	0.000
		11 0.649	0.037	14316.	0.000
		12 0.651	0.053	15321.	0.000
		13 0.652	0.038	16328.	0.000
		14 0.653	0.053	17341.	0.000
		15 0.646	-0.021	18333.	0.000
		16 0.638	0.026	19300.	0.000
		17 0.628	0.006	20236.	0.000
		18 0.617	0.012	21141.	0.000
		19 0.600	-0.035	21996.	0.000
		20 0.584	0.010	22807.	0.000
		21 0.570	0.001	23580.	0.000
		22 0.561	0.034	24330.	0.000
		23 0.560	0.057	25077.	0.000
		24 0.561	0.024	25827.	0.000
		25 0.567	0.052	26593.	0.000

FIGURE 3.6 – Correlogramme.

Notons que les coefficients (PAC) suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à  $1/n = 1/2357 = 4.24 \cdot 10^{-4}$ . Désignons par  $PAC_i$ , le coefficient d'auto corrélation partielle d'ordre  $i$  et testons l'hypothèse :

$$H_0, PAC_i = 0 \text{ pour tout } i = 1 \dots 26$$

L'intervalle de confiance correspondant à ce test avec un niveau de confiance de 95% est le suivant :

$$\left[ +/ - 1.96 \sqrt{\frac{1}{n}} \right]$$

Nous remarquons que pour un niveau de confiance de 95%, tous les PAC d'ordre 2 jusqu'à l'ordre 7 ne rentrent dans l'intervalle de confiance. Donc nous ne rejetons pas l'hypothèse de la nullité des PAC. Ainsi, notre processus se rapproche d'un processus auto régressif d'ordre 1.

### 3.1.3 Estimation

Les résultats de l'estimation sont les suivants :

Dependent Variable: TMP				
Method: Least Squares				
Date: 06/05/15 Time: 03:50				
Sample (adjusted): 1/02/2006 6/14/2012				
Included observations: 2356 after adjustments				
TMP=C(1)+C(2)*TMP(-1)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.200279	0.023170	8.643723	0.0000
C(2)	0.937056	0.007226	129.6736	0.0000
R-squared	0.877199	Mean dependent var		3.182961
Adjusted R-squared	0.877147	S.D. dependent var		0.386868
S.E. of regression	0.135599	Akaike info criterion		-1.157382
Sum squared resid	43.28315	Schwarz criterion		-1.152489
Log likelihood	1365.396	Hannan-Quinn criter.		-1.155600
F-statistic	16815.24	Durbin-Watson stat		1.947185
Prob(F-statistic)	0.000000			

FIGURE 3.7 – Tableau estimation des paramètres.

Nous avons des statistiques de Student de respectivement 8.64 et 129.67 qui sont largement supérieures à la valeur critique de Student qui est de 1.96 (pour un niveau de confiance de 95% et un degré de liberté de 2356). Donc on rejette l'hypothèse de la nullité des coefficients  $a$  et  $b$ . De plus, la statistique de Fisher permet de rejeter la nullité de tous les coefficients estimés simultanément. La statistique de Durbin-Watson est de 1.94, proche de 2, informe que les résidus sont significativement indépendants.

$$a = -\log(\beta)$$

$$b = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

Ainsi,

$$a = 0.028234$$

$$b = 3.18186$$

### Estimation de prime de risque

Le rendement,  $R(t, T)$ , d'une obligation zéro-coupon, de maturité  $T$ , à la date  $t$  est donné pour le modèle de Vasicek sous la forme suivante :

$$R(t, T) = R_{\infty} + \frac{1}{(T-t)a} \cdot (1 - \exp(-(T-t)a))(r(t) - R_{\infty}) + \frac{\sigma^2}{4(T-t)a^3} (1 - \exp(-(T-t)a))^2$$

$$\text{Avec } R_{\infty} = b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a}$$

Le seul paramètre restant à estimer est la prime de risque de marché. Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant cette obligation. Plusieurs méthodes existent pour approcher cette valeur. Dans notre modèle, nous proposons de minimiser l'écart entre les prix de marchés et le prix estimé qui dépend de ce paramètre.

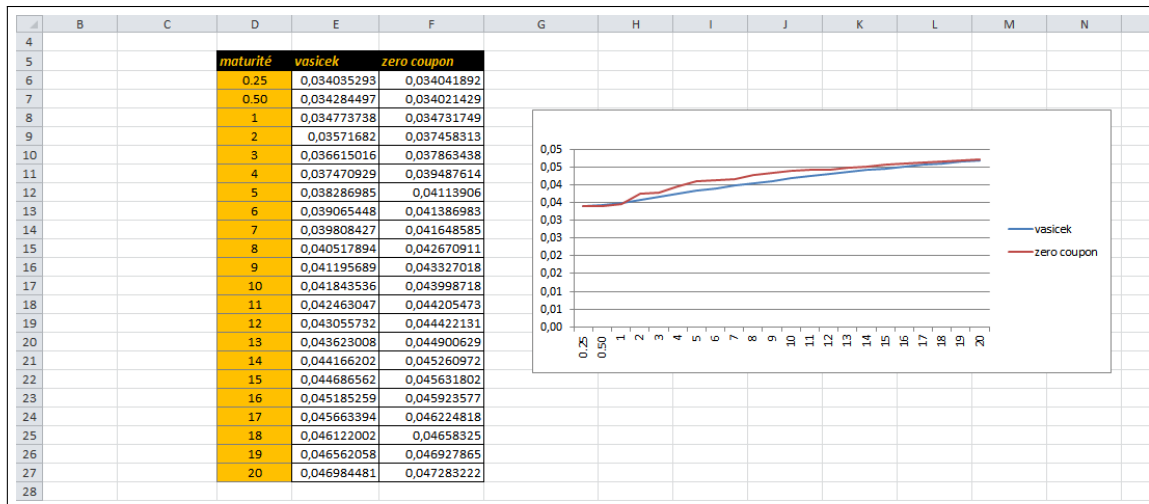


FIGURE 3.8 – Feuille excel de Vasicek.

Dans la feuille excel, les taux de rendements estimés et ceux de marché sont très proche l’un de l’autre. Ainsi, ce modèle ajuste bien les données.

### 3.2 Application de CIR

Dans ce chapitre, nous implémentons le modèle CIR. D’abord, nous exposons la méthodologie d’estimation des paramètres. Ensuite, nous construisons la courbe afin de la comparer avec les autres modèles.

#### 3.2.1 Méthodologie d’estimation

##### Rappel

La dynamique du processus de CIR pour le taux court est décrite par le processus suivant :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

La solution de l’équation différentielle s’écrit sous la forme :

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s}dW(s)$$

Nous utilisons la discrétisation d’Euler qui consiste à approximer le processus continu  $r_t$  par le processus discret  $\hat{r}_t$  :

$$\hat{r}_{t+\delta} = \hat{r}_t + a(b - \hat{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\hat{r}_t} * \delta\epsilon$$

avec  $\epsilon$  est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Nous voulons estimer les paramètres de modèles. Ainsi, nous utilisons la régressions suivantes :

$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{a * b}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1 - a)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma\epsilon_t$$

Les étapes à suivre lors de l’implémentation de modèle de CIR :

1. Nous étudierons les propriétés statistiques de la série des TMP : stationnarité et normalité.
2. Nous réalisons la régression avec l’outil Eviews.
3. Nous testons la normalité et l’indépendance des résidus.
4. Nous exécutons le modèle sur Excel.

#### 3.2.2 Estimation des paramètres

Nous utilisons Eviews pour trouver les paramètres, les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Dependent Variable: MODX				
Method: Least Squares				
Date: 06/09/15 Time: 17:53				
Sample (adjusted): 1/02/2006 6/14/2012				
Included observations: 2356 after adjustments				
Convergence achieved after 11 iterations				
MODX=C(1)*C(2)*INVTX+(1-C(1))*RCTX				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.064500	0.007088	9.099314	0.0000
C(2)	3.181890	0.045909	69.30918	0.0000
R-squared	0.593829	Mean dependent var	1.781469	
Adjusted R-squared	0.593656	S.D. dependent var	0.126424	
S.E. of regression	0.080589	Akaike info criterion	-2.198065	
Sum squared resid	15.28820	Schwarz criterion	-2.193171	
Log likelihood	2591.320	Hannan-Quinn criter.	-2.196283	
Durbin-Watson stat	1.958644			

FIGURE 3.9 – Résultats de la régression

Nous récupérons les estimations :

- a=0.064500
- b=3.181890
- $\sigma(estim) = 0.080589$

La statistique de Durbin-Watson est comprise entre 0 et 4. Une valeur proche de 2 signifie une absence d'auto-corrélation entre les résidus de régression. Nous pouvons maintenant exécuter le modèle de CIR, Nous utilisons le solveur pour trouver la valeur de lambda qui minimise l'écart entre la courbe estimée et celle théorique.

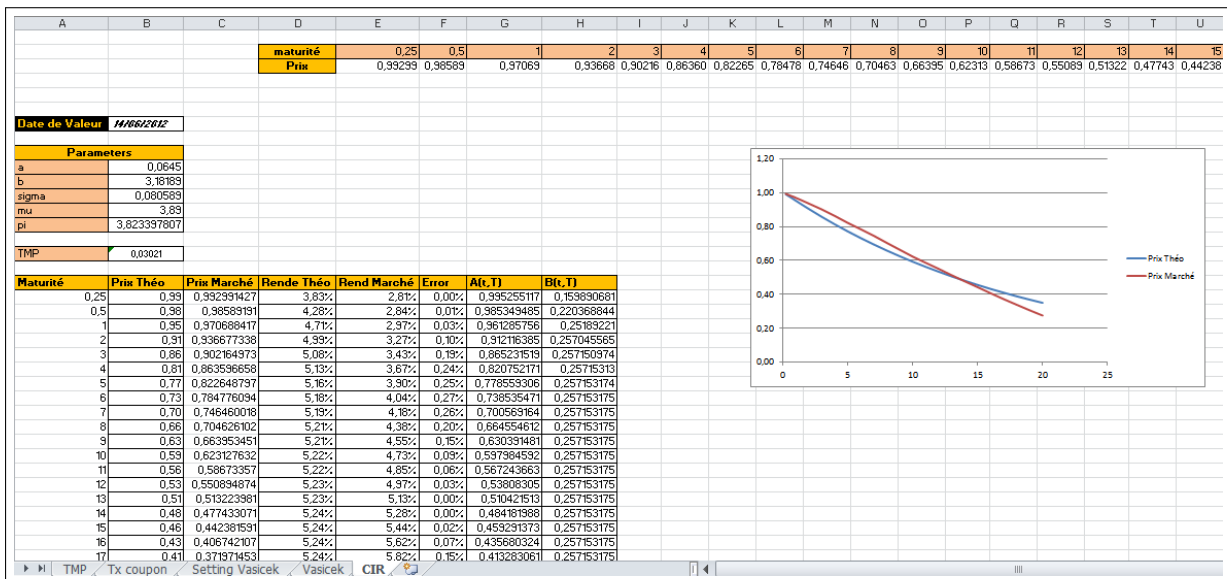


FIGURE 3.10 – Résultats de l'application de CIR sur Excel

Nous remarquons que la courbe des prix s'écarte de la courbe de marché. Or, les deux courbes suivent la même tendance.

### 3.3 Interprétation et validation des résultats

La validation des résultats est fait en réévaluant les obligations à taux fixe en utilisant les courbes reconstruites. Si la courbe reproduit exactement les tendances de marché, les prix seront les mêmes. Pour le moment, nous utilisons la comparaison des figures pour interpréter les outputs des modèles.

Nous notons que le modèle de vasicek ainsi que celui de CIR sont très proche de la courbe de marche. Cela montre que les deux approches représentent la réalité de marché. Dans le cadre de ces approches, nous modélisons le taux zéro-coupon spot. En outre, nous utilisons des méthodes numériques pour minimiser l'écart entre les deux

courbes. Hormis le fait que ces modèles permettent de faire des prévisions et d'anticiper l'évolution de la courbe, l'utilisation de cubic spline reste mieux adaptée pour l'évaluation des produits de taux (obligation à taux fixe et à taux variable, swap de taux). Cela est motivé par les points suivants :

- Ces modèles permettent de mettre en place des scénarios pour la déformation de la courbe de taux.
- le modèle de Vasicek autorise les taux à devenir négatifs avec une probabilité non nulle.
- Il est fréquent de remarquer un mauvais calage de ces deux modèles sur les données de marché.

## **Conclusion**

Dans un premier point de cette partie ont été traitées la méthode de Cubic Spline pour interpoler la courbe des taux. Cette méthode a abouti à des résultats concluants puisqu'elle lisse parfaitement la courbe des taux. Dans un deuxième point, nous avons traité les modèles financiers de la courbe des taux. Les courbes construites sont très proches de la courbe de marché.

## Conclusion Générale

Au terme de ce mémoire, il serait utile de rappeler que la structure par terme des taux d'intérêts figure parmi les questions financières les plus complexes et auxquelles il a été très difficile de trouver des réponses complètes. Il s'agit en fait, d'une problématique qui a fait couler beaucoup d'encre depuis les années 30.

Nous avons donné un aperçu large sur les différentes approches de modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt en explicitant quelques modèles appartenant à chacune des approches. Ce travail vise à développer un outil pour la construction de la courbe d'actualisation à partir des obligations à taux fixe qui sera utilisé pour évaluer d'autres produits : obligation, swap.

Dans la première partie, nous avons présenté le contexte de l'étude ainsi que la problématique traitée dans ce rapport.

Dans la deuxième partie, nous avons introduits les notions nécessaires pour comprendre la méthodologie utilisée. Ensuite, nous avons présenté un chapitre sur la forme empirique de la courbe, puis, nous avons introduits les deux approches de construction à savoir les méthodes directes et les modèles stochastiques.

Dans la troisième partie, nous avons implémenté les approches vues précédemment. Ensuite, Nous avons présenté la méthodologie de Bootstrapping et d'interpolation Cubique Spline. Puis, nous avons exposé la structure de code proposé. En outre, nous avons envisagé d'utiliser des modèles stochastiques pour constituer la courbe.

Au terme de ce travail, on aimerait dire que la problématique de structure par terme des taux d'intérêt pourrait être étendue en choisissant de la modéliser par d'autres méthodes d'interpolation.

Il est également possible de développer un outil de gestion et de valorisation des produits de taux d'intérêt : les options et les swaps.

# Bibliographie

- [1] Albahari, J. B. Albahari, 2012,  
« *C# 5.0 IN A NUTSHELL* », 5<sup>th</sup> Edition, O'REILLY.
- [2] JOHN C. HULL, 2007,  
« *OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVES* », 6<sup>th</sup> Edition, Prentice – Hall of India.
- [3] BRUCE TUCKMAN, ANGEL SERRAT, 2011,  
« *FIXED INCOME SECURITIES* », 3<sup>th</sup> Edition, Wiley Finance.
- [4] Pierre-Alain Patard,  
« *Essais sur les méthodes de simulation numérique et sur la modélisation des données de marché.* », Cambridge University Press.
- [5] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, 1992, « *Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing* », 2<sup>th</sup> Edition, UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1, ISFA.
- [6] Fayçal HITMI, 2002 « *Estimation de la structure par terme des Taux d'intérêt* », INSEA.
- [7] Institute for Theoretical Physics,  
« <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/NumMethoden/WS0910/ScriptPDE/Appendix.pdf> ».
- [8] Fouad Marri, « *cours série chronologiques* ».

# Webographie

[w1] [www.tradingtechnologies.com](http://www.tradingtechnologies.com)

[w2] [www.yats.com](http://www.yats.com)

[w3] [www.algosystems.gr](http://www.algosystems.gr)

[w4] [www.leblogpatrimoine.com/cat/bourse/obligataire](http://www.leblogpatrimoine.com/cat/bourse/obligataire)

[w5] [www.riskmathics.com/files/PODCAST/Cox-Ingersoll-Ross-CIR-interest-rate-model-1985-Wojciech-Szatzschneider.pdf](http://www.riskmathics.com/files/PODCAST/Cox-Ingersoll-Ross-CIR-interest-rate-model-1985-Wojciech-Szatzschneider.pdf)

[w6] [www3.ul.ie/wlee/ms6021\\_thomas.pdf](http://www3.ul.ie/wlee/ms6021_thomas.pdf)

[w7] [www.africa-technologies-services.sgcib.com/](http://www.africa-technologies-services.sgcib.com/)

# Annexes