

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

INSEA

Projet de fin d'études

Modélisation de la courbe des taux et application à la gestion obligataire

Préparé par : Mlle Jihade MOUARAF

Sous la direction de : M. Fouad MARRI (INSEA)

M. Mohamed-Moâd EL ANGOUDI (SGMA)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- M. Fouad MARRI (INSEA)
- M. Mohammed El Haj TIRARI (INSEA)
- M. Mohamed-Moâd EL ANGOUDI (SGMA)

Jun 2018 / PFE n°17

Résumé

Le marché obligataire représente une part très importante du marché financier marocain. Une grande partie de l'activité obligataire au Maroc se concentre sur le trading et vente des Bons de Trésors, qui sont les obligations émises par l'Etat. Ces obligations ont la réputation d'être des actifs financiers sans risque. Toutefois, lorsque les taux évoluent, ces obligations peuvent présenter un risque très important. Par conséquent, la bonne gestion d'un portefeuille de trading obligataire nécessite de suivre en permanence la position par rapport au marché en prenant en considération les mouvements éventuels de la courbe des taux. Notre but est d'étudier l'impact de ces mouvements sur le rendement du portefeuille et d'envisager les swaps de taux comme moyen de couverture. L'étude de la courbe des taux et l'évaluation du portefeuille sont donc deux étapes primordiales à ce travail, accompagnées de l'élaboration des outils d'évaluation et d'aide à la décision en trading obligataire. Cette étude sera basée sur le modèle de Nelson Siegel et son extension dynamique, qui est un modèle à trois facteurs. La modélisation desdits facteurs ayant pour objectif d'expliquer la dynamique globale de la courbe des taux, permettra également de simplifier la simulation du portefeuille en réduisant le nombre de paramètres à choquer. Finalement, selon le scénario anticipé, le trader peut envisager de se couvrir contre le risque par un swap de taux.

Mots clés : courbe des taux, Nelson Siegel, trading obligataire, stress-tests, swaps de taux.

À mes parents
À mes petites sœurs

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réussite de mon projet de fin d'études. Je remercie Société Générale Maroc pour m'avoir accueillie pour mon projet de fin d'études.

Mes remerciements s'en vont spécialement à **M. MARRI Fouad**, professeur encadrant à l'INSEA, pour l'effort particulier qu'il fournit pour accompagner tous les étudiants de la filière Actuariat-Finance. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a déployé, pour sa disponibilité, ses conseils et son accompagnement tout au long de ma période de stage.

Je remercie particulièrement **M. El ANGOUDI Mohamed-Moâd**, Responsable trading et ventes obligataires à la salle des marchés de la SGMA, qui n'a pas épargné le moindre effort pour me mettre dans un cadre agréable. Je ne le remercierai jamais assez pour tout le savoir qu'il m'a transmis, pour sa réactivité, et pour son effort d'accompagnement et d'orientation.

Je remercie également **M. AJIL Ouahib**, responsable de la trésorerie, et toute l'équipe de la salle des marchés de la SGMA qui ont contribué à l'enrichissement de cette expérience sur le niveau professionnel et personnel.

Enfin je remercie **M. Mohammed El Haj TIRARI** d'avoir accepté de faire partie des membres du jury et pour le temps consacré à l'évaluation de ce travail.

Table des matières

Résumé.....	3
Remerciements.....	5
Liste des abréviations.....	8
Liste des figures.....	9
Introduction générale.....	11
CHAPITRE 1.....	13
MISE EN CONTEXTE ET NOTIONS DE BASES.....	13
I. Présentation de l'organisme d'accueil.....	14
II. La notion de taux d'intérêt.....	16
II.1. Types de taux d'intérêt.....	16
II.2. Convention de décompte des jours.....	17
II.3. Les marchés de taux d'intérêt.....	18
II.3. Le risque de taux.....	19
II.4. Les produits de taux.....	21
III. La courbe des taux.....	23
I.1. Définition.....	23
I.2. Formes de la courbe des taux.....	23
I.3. Faits stylisés de la courbe des taux.....	25
CHAPITRE 2.....	26
MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX.....	26
I. Construction de la courbe des taux de marché.....	27
I.1. Interpolation de la courbe BAM.....	27
I.2. Construction de la courbe zéro-coupon.....	28
I.3. Interface de calcul des taux.....	30
II. Modélisation de la courbe des taux :.....	32
II.1. Les modèles des taux d'intérêts.....	32
II.2. Modèle de Nelson Siegel.....	33
II.3. Modèle de Diebold et Li : Nelson-Siegel Dynamique.....	37
CHAPITRE 3.....	54
GESTION D'UN PORTEFEUILLE DE TRADING OBLIGATAIRE.....	54
I. Evaluation d'un portefeuille de trading obligataire :.....	55
I.1. Valorisation des obligations de l'État : Les Bons Du Trésor.....	55
I.1. Evaluation du portefeuille :.....	59

II. La gestion du risque de taux.....	65
II.1. Introduction.....	65
II.2. Mesure du risque de taux.....	66
II.2. Variations de la courbe de taux.....	67
II.3. Lien avec les indicateurs économiques.....	69
II.4. Simulation du portefeuille :.....	71
III. Couvertures par les Swaps de taux.....	75
III.1. Principe de fonctionnement d'un swap de taux.....	75
III.2. Caractéristiques d'un swap de taux.....	75
III.3. Construction de la courbe des taux forward.....	76
III.4. Valorisation d'un Swap de taux.....	80
III.5. Stratégie de couverture par un Swap de taux :.....	82
III.6. Elaboration d'un pricer de Swap :.....	83
Conclusion.....	85
Bibliographie:.....	86
Annexe : Test ADF sur les facteurs de NS.....	87

Liste des abréviations

SGMA	Société Générale Maroc
BAM	Bank Al-Maghrib
BDT	Bon de Trésor
NS	Nelson Siegel
NSD	Nelson Siegel Dynamique
MSE	Mean Square Error
RSS	Residual Sum of Squares
BPV	Basis Point Value
FRA	Forward Rate Agreement
TMP	Taux Moyen Pondéré
ZC	Zéro-Coupon
MCO	Moindres Carrés Ordinaires
VAR	Vectorel Autoregressif
VECM	Vectorel Error Correction Model
ADF	Augmented Dickey Fuller
AIC	Akaik's information criteria
P&L	Profit and Loss
PF	Portefeuille
PPC	Prix Pied de Coupon
PIB	Produit Intérieur Brut

Liste des figures

Figure 1- Courbe normale	24
Figure 2 - Courbe inversée	24
Figure 3 - Courbe plate.....	25
Figure 4 - Interface de calcul des taux	30
Figure 5 - Courbe des taux actuariels (19/04/2018)	31
Figure 6 - Courbe des taux ZC (19/04/2018).....	31
Figure 7 - Evolution des factor loadings en fonction de lambda	35
Figure 8 – Construction de la courbe ZC par Nelson Siegel	36
Figure 9 - Résidus du modèle NS.....	37
Figure 10 - Statistiques descriptives des taux.....	41
Figure 11 - Evolution des taux marocains depuis 2004	41
Figure 12 - Backtesting (Average curve).....	42
Figure 13 - Backtesting (Courbe du 12/06/2007).....	42
Figure 14 - Backtesting (Courbe du 01/06/2004).....	42
Figure 15 - Résidus des modèles	43
Figure 16 - Backtesting (Courbe du 15/02/2018).....	43
Figure 17 - Backtesting (Courbe du 21/07/2016).....	43
Figure 18 - Statistiques descriptives des taux estimés.....	43
Figure 19 - Dynamique du facteur de niveau (beta0)	44
Figure 20 - Dynamique du facteur de pente (beta1)	44
Figure 21 - Dynamique du facteur de courbure (beta2)	45
Figure 22 - Corrélations des facteurs avec les niveaux empiriques.....	45
Figure 23 - Procédure du test ADF	48
Figure 24 - Résultats du test ADF	48
Figure 25 - Lag length structure par Eviews	49
Figure 26 - test de cointegration.....	50
Figure 27 - test de cointégration.....	50
Figure 28 - Estimations output du VECM	51

Figure 29 - Interface du Pricer des BDT.....	59
Figure 30 - Onglet de traitement des deals.....	63
Figure 31 - Interface pour insertion des deals	63
Figure 32 - MtM du portefeuille.....	64
Figure 33 - Calcul de BPV.....	66
Figure 34 - Variations parallèles de la courbe.....	67
Figure 35 - Pentification de la courbe	68
Figure 36 - Aplatissement de la courbe.....	69
Figure 37 - Evolution des taux avec le TD	70
Figure 38 - Evolution de la pente avec l'inflation.....	71
Figure 39 - Courbe forward construite.....	80
Figure 40 - Interface du Pricer des swaps	84
Figure 41 - Flux du swap.....	84

Introduction générale

Au Maroc, le marché des taux d'intérêt constitue une composante fondamentale du marché financier, plus important que le marché des actions, non seulement en termes de volumes traités mais aussi en termes d'importance économique. En effet, il représente pour l'Etat et les entreprises privées un moyen de financement important via la dette privée lors de la dernière décennie. Il est également très prisé par les investisseurs, à savoir les banques d'investissement, les institutionnels et les OPCVM.

La gestion obligataire est une activité d'une grande importance dans le marché marocain. Un trader obligataire est amené à suivre régulièrement l'évolution des taux et à évaluer en permanence son portefeuille et gérer son exposition au risque, afin de booster le rendement de son portefeuille.

Tous les jours, les rendements des obligations tels que les bons du Trésor varient en fonction de leur échéance, et la relation entre rendement et maturité varie à son tour avec le temps. Cette relation est appelée structure par terme des taux d'intérêt et peut être résumée dans une courbe appelée la courbe des taux. Il s'agit de la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité, indique le niveau de taux d'intérêt associé.

Étant un passage obligé pour toute analyse ou gestion du risque de taux aboutissant à de nombreuses applications dans la gestion obligataire, l'étude de la courbe des taux d'intérêt est devenue incontournable pour chaque gestionnaire de portefeuille opérant sur les salles de marchés.

L'objectif du présent rapport est d'étudier l'impact des variations des taux sur la rentabilité en trading obligataire, en se basant sur des simulations, et ce afin de permettre au trader de mettre en place des stratégies de couvertures performantes pour s'immuniser contre le risque de taux.

Pour ce faire, nous étudierons dans un premier temps la courbe des taux, commençant par le traitement de la courbe du marché publiée quotidiennement par BAM et aboutissant à une modélisation de la courbe par l'un des modèles les plus répandus. Nous étudierons le modèle à trois facteurs de Nelson et Siegel ainsi que son extension dynamique, en mettant en lumière l'importance de cet aspect dynamique.

La deuxième partie sera consacrée à la gestion d'un portefeuille de trading obligataire, commençant par l'évaluation, puis la mesure du risque et finalement la couverture contre le risque de taux.

CHAPITRE 1

MISE EN CONTEXTE ET NOTIONS DE BASE

I. Présentation de l'organisme d'accueil

La Société Générale est l'un des tous premiers groupes européens de services financiers, fondé en 1864 par un groupe d'industriels et de financiers portés par des idéaux de progrès.

S'appuyant sur un modèle diversifié de banque universelle, le Groupe allie solidité financière et stratégie de croissance durable, afin de mettre sa performance au service du financement de l'économie et des projets de ses clients.

Avec un ancrage solide en Europe et une présence dans les géographies à fort potentiel, les 146000 collaborateurs du Groupe, présents dans 66 pays, accompagnent au quotidien 31 millions de clients particuliers, professionnels, entreprises, investisseurs institutionnels, dans le monde entier, en offrant une large palette de conseils et de solutions financières sur-mesure.

Société Générale Maroc (SGMA)

Présente au Maroc depuis 1913, la Société Générale est aujourd'hui le premier groupe financier privé du pays, ayant un actionnaire de référence internationale.

Avec plus de 4 000 collaborateurs, un réseau de plus de 400 agences et 13 filiales spécialisées, il opère dans tous les grands domaines d'activités (banque traditionnelle, assurance, leasing, gestion d'actifs, location longue durée de véhicules...). Une assise qui lui permet de tirer profit de toutes les expériences et de tous les effets de synergie entre la banque et ses filiales, mettant sa performance au service du financement de l'économie du pays et des projets de ses clients.

Salle des marchés de la SGMA

Le présent projet s'est déroulé au sein de la Salle De Marchés de la SGMA. Cette salle qui rassemble les opérateurs de marché intervenant sur les marchés financiers, est souvent désignée par le terme "Front Office". Avec l'effacement progressif de la cotation à la criée au profit des bourses électroniques, la salle de marchés devient le seul lieu de vie emblématique du marché financier. C'est aussi le lieu où sont mises en œuvre le plus souvent, les technologies de l'information les plus récentes avant d'être disséminées dans les autres secteurs de l'établissement financier.

La salle de marchés de la SGMA est organisée comme suit :

Le FrontOffice

Composé de traders et de sales, a pour objectif de maximiser le profit en vendant les produits offerts par la salle de marchés aux différentes contreparties. Le FrontOffice représente l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture et de financement, investissement, gestion de position, trading et arbitrage.

Le FrontOffice de la SGMA est composé de :

- **Desk change**
- **Desk taux et intermédiation**

Le Middle-Office

Le Middle-Office s'occupe de toutes les activités de contrôle et de suivi des opérations effectuées par le FrontOffice.

Le Middle effectue également un suivi d'activité et fournit aux responsables des desks les reportings de résultats P&L, par produit, par trader, par marché ou zone géographique; l'ensemble permettant d'orienter les décisions des Gérants et de la Direction Générale.

Le Back-Office

Le back office assure le suivi administratif et comptable des opérations effectuées sur les différents types d'opérations. Il vérifie que les transactions enregistrées par le négociateur FrontOffice (Trader ou Sales) correspondent à celles du vendeur, effectue le règlement et assure la livraison.

II. La notion de taux d'intérêt

II.1. Types de taux d'intérêt

II.1.1. Taux court/long

Le taux d'intérêt dépend du délai de remboursement accordé à l'emprunteur. En principe, plus que la durée du prêt est longue, plus le taux est élevé. Par conséquent, il est plus coûteux d'emprunter à dix ans qu'à un an, car le risque pris par le créancier est plus important.

Il est d'usage d'appeler :

- Taux court-terme : les taux appliqués aux opérations sur des périodes allant jusqu'à 2 ans ;
- Taux moyen-terme : les taux appliqués aux opérations de 2 à 5 ans ;
- Taux long-terme : les taux appliqués aux opérations au-delà de 5 ans.

II.1.2. Taux de rendement actuariel

Le rendement actuariel correspond à la rentabilité obtenue en conservant un actif financier jusqu'à son échéance (durée de vie restant à courir) et en réinvestissant les intérêts au même taux actuariel.

II.1.3. Taux monétaire

Le taux monétaire diffère du taux de rendement actuariel en termes de durée. Le taux monétaire est le taux d'intérêt appliqué aux produits dont la durée de vie est inférieure à un an. Il est calculé sur la base d'une année commerciale qui est équivalent à 360 jours. Tandis que les taux actuariels correspondent à une durée supérieure à un an. Ils sont calculés en base nombre de jours exacts. Le passage du taux monétaire au taux actuariel se fait de la manière suivante :

$$r_a = \left(1 + \frac{r_m \times n}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

Où :

- r_a : le taux actuariel
- r_m : le taux monétaire
- n : la durée en jours (maturité correspondante au taux monétaire)

Réciproquement, le passage du taux actuariel au taux monétaire se fait comme suit :

$$r_m = \frac{360}{n} \times \left((1 + r_a)^{\frac{n}{365}} - 1 \right)$$

Ces passages sont nécessaires pour l'interpolation de la courbe. En effet, lorsque le taux à calculer se situe entre un taux monétaire et un taux actuariel, il faut avoir une même base de calcul.

II.1.4. Taux zéro-coupon

C'est le taux actuariel des instruments zéro-coupon. Un instrument financier « zéro-coupon » est un instrument qui ne donne lieu à aucun flux intermédiaire d'intérêts. On dit qu'il n'y a pas de détachement de coupon intermédiaire.

Ce type d'instrument génère donc 2 flux :

- Un flux initial.
- Un flux final de remboursement.

II.1.5. Taux forward

Les taux *forward* sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. A titre d'exemple, le taux *forward* pour la seconde année, vu à l'instant, est le taux à un an qui devrait être observé au début de la deuxième année pour qu'un placement à deux années soit équivalent à la succession de deux placements.

II.2. Convention de décompte des jours

Les conventions de base sont exprimées sous forme de fraction d'année écoulée $f = \frac{n}{k}$, où :

- n exprime le nombre de jours pris en compte pour calculer les jours d'intérêt.
- k exprime le nombre de jours pris en compte pour déterminer la période d'intérêt.

Nous allons définir les deux types de bases que nous allons employer :

- **La base Exact/360** : Cette base est essentiellement utilisée pour les taux proportionnels sur les instruments monétaires, c'est-à-dire pour les durées inférieures à 1 an. Dans ce cas, k vaut 360, et n correspond au nombre de jours calendaires exact du placement.

- **La base Exact/Exact** : Elle sert essentiellement au calcul des intérêts courus sur les marchés des capitaux. Ici, k vaut 365 ou 366 s'il s'agit d'une année bissextile, et n est également le nombre de jours calendaires exact.

Ces conventions sont utilisées pour tout instrument financier comportant une composante d'intérêts.

II.3. Les marchés de taux d'intérêt¹

Les marchés de taux d'intérêt sont les marchés de capitaux les plus importants du monde, plus important que le marché des changes et celui d'actions, non seulement en termes de volumes traités mais aussi en termes d'importance économique.

Les marchés de taux d'intérêt sont séparés en fonction des maturités : marché monétaire pour le court terme et marché obligataire pour le moyen et long terme.

II.3.1. Le marché monétaire

Le marché monétaire est un marché financier où s'échangent des titres de courte durée contre des liquidités. Il est réservé aux institutions financières et entreprises qui peuvent prêter ou emprunter des liquidités sur des durées très courtes.

Le marché monétaire est organisé en **un marché interbancaire** réservé aux banques et **un marché de titres de créances** réservé aux investisseurs :

- **Le marché interbancaire** est le marché où les banques prêtent et empruntent des liquidités à très court terme sans création de titres en contrepartie (emprunt à blanc). La durée la plus fréquente est le jour le jour. Les prêts et emprunts garantis par des titres sont connus sous le terme pension. La pension consiste en un transfert simultané, entre deux parties, de titres contre une certaine somme d'argent, avec l'engagement des deux parties de procéder au transfert inverse à une date ultérieure.
- **Le marché des titres de créances** négociables TCN est un marché où les établissements de crédit empruntent par la création de Certificats de Dépôt CD ou Bons des Sociétés de Financement BSF, et les entreprises par la création de Billet de Trésorerie. Ce sont des titres de durées courtes ou moyennes.

¹ Source : AMMC.

II.3.2. Le marché obligataire

Le marché Obligataire est un marché financier où les entreprises peuvent emprunter des liquidités par création de titres de dette connu sous le terme obligations. C'est le marché où sont émises, vendues et achetées les obligations.

En tant qu'un instrument de placement, l'achat des obligations permet aux investisseurs particuliers de devenir créanciers de grandes entreprises nationales ou de l'Etat.

Les obligations cotées sont échangées au niveau de la Bourse. Les obligations non cotées sont échangées de gré à gré à travers les intermédiaires financiers.

Les obligations d'Etat ou Bons du Trésor ne sont pas cotées en Bourse. Leur placement se fait à travers des intermédiaires financiers appelés intermédiaires en valeurs du Trésor IVT.

L'émission des BDT prend lieu chaque mardi, et est organisée au long du mois comme suit :

1 ^{er} Mardi	2 ^{ème} Mardi	3 ^{ème} Mardi	4 ^{ème} Mardi
13 semaines 52 semaines 2 ans	26 semaines 52 semaines 5 ans 15 ans	13 semaines 52 semaines 2 ans	26 semaines 2 ans 10 ans 20 ans

II.3. Le risque de taux

Le risque de taux est le risque lié à une variation des taux d'intérêts dans un sens défavorable. Ce risque s'exprime généralement en termes de sensibilité, qui est la mesure d'exposition au risque la plus répandue parmi les gestionnaires de portefeuille.

Ainsi, la variation du taux d'intérêt a des incidences directes sur la valeur du résultat et du patrimoine des investisseurs.

Ce risque est alors mesuré en cherchant à estimer quel serait l'impact d'une variation de x% des taux d'intérêt sur le résultat et le patrimoine. Nous pouvons parler de l'impact d'un choc de taux sur la valeur de marché des titres financiers composant le portefeuille. C'est pourquoi la valorisation présente et future d'un portefeuille est essentielle au calcul du risque global de taux.

- Les mesures du risque de taux (indicateurs de sensibilité) :

- La sensibilité (modified duration) : La sensibilité d'une obligation représente la variation de son prix suite à une variation de x% du taux.

Elle est définie comme suit :

$$S = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$$

Étant donné que le prix d'une obligation est généralement donné par :

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

Alors la sensibilité est égale à :

$$S = -\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{i \cdot C_i}{(1+r)^{i+1}}$$

Les économistes considèrent cette grandeur comme une élasticité, puisqu'elle exprime une variation relative du prix (en %) par rapport au taux.

- **Basis Point Value (Valeur d'un point de base)** : La BPV ou PVBP (Price Variation per Basis Point) mesure la perte monétaire qui résulterait pour un investisseur d'une hausse de 0.01% des taux de rendement. La BPV est une mesure très importante, essentielle à toute l'activité des marchés des taux. Étant une sensibilité absolue et non relative, il faut la multiplier par le nominal de l'instrument et non par sa valeur.

La BPV est égale à la sensibilité de 0.01% multipliée par le prix actuel de l'obligation.

- **La duration** : La duration des obligations mesure le temps nécessaire, en années, pour qu'un investisseur rembourse le montant initial investi dans une obligation (prix d'achat) par les flux totaux générés par cette obligation. À mesure que la maturité augmente, la duration augmente également et le prix des obligations devient plus sensible aux variations des taux d'intérêt.

Mathématiquement, la duration est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \times \frac{F_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r)^{t_i}}}$$

La duration s'exprime en fonction de la sensibilité comme suit :

$$S = -\frac{D}{1+r}$$

- **La convexité** : La convexité est une notion qui traduit également la sensibilité du prix d'une obligation à une variation de son taux de rendement. Selon la convexité, le prix variera à la hausse, ou à la baisse, de manière plus ou moins rapide. Elle traduit la vitesse avec laquelle le prix d'une obligation évolue à mesure que les taux changent. En pratique, cela signifie que le prix de l'obligation augmentera plus vite suite à une baisse de taux, qu'il ne se tassera après une hausse de proportion équivalente. Habituellement, la convexité a une valeur positive. Entre deux obligations, il est donc préférable de donner la priorité à celles dont la convexité est la plus élevée.

Elle est donnée par la formule suivante :

$$C = \frac{(P' + P'' - 2P)}{P(\Delta y)^2} ;$$

Où :

- P' : Prix correspondant au taux de rendement plus un pb
- P'' : Prix correspondant au taux de rendement moins un pb
- $\Delta y = 1$ pb (0.01%)

II.4. Les produits de taux

Les produits de taux concernent tous ceux dont les revenus et la valorisation dépendent d'un taux et qui fluctuent donc en fonction de la courbe des taux de marché.

Nous allons citer deux grandes catégories :

1. **Obligation** : Les obligations sont des titres négociables permettant à l'entreprise d'obtenir des fonds pendant une durée déterminée et entraînant l'obligation de payer un intérêt (coupon) et de rembourser le principal selon des modalités de l'émission (à l'échéance ou par amortissement).
2. **Produits dérivés de taux**
 - **Future de taux** : Un contrat à terme, ou future, de taux d'intérêt est, comme tout contrat à terme ferme, un engagement de livrer, ou de prendre livraison, d'une quantité déterminée d'un produit connu, à une date stipulée dans le contrat et à un prix fixé lors de la transaction.

Les contrats Futures sur taux d'intérêts peuvent être divisés en deux grandes familles, aux caractéristiques distinctes : les contrats de taux d'intérêt court terme et les contrats de taux d'intérêt long terme.

- **FRA (Forward Rate Agreement) :** Un FRA est un accord de taux futurs, conclu entre deux contreparties, de gré à gré. L'un (acheteur) paiera un taux fixe, connu dès la date de signature du FRA. L'autre (vendeur) paiera le taux qui prévaudra au moment où commence le FRA (date de valeur), pour une période donnée (date d'échéance). Le FRA ne donnera lieu, de façon effective, qu'à un seul versement, en date de valeur : la différence entre les deux taux, et se fera en faveur de l'une ou l'autre des contreparties. Si le taux qui prévaut en date de valeur est supérieur au taux fixé en date de signature, c'est l'acheteur qui reçoit de l'argent. Si le taux qui prévaut en date de valeur est inférieur au taux fixé en date de signature, c'est le vendeur qui reçoit de l'argent.
- **Swap de taux :** Un swap de taux d'intérêt est un contrat bilatéral dans lequel les parties s'accordent pour échanger des flux d'intérêts fixes contre des flux variables, en général dans la même devise. Lorsqu'une l'une des deux parties s'engage dans un swap dit « payeur », elle s'engage à verser un taux d'intérêt fixe, appelé « taux de swap ». Elle obtient, en échange, le versement périodique de taux variables, indexés sur une référence telle que le LIBOR (London Inter Bank Offered Rate).

III. La courbe des taux

I.1. Définition

La structure par terme des taux d'intérêt est la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité, indique le niveau de taux d'intérêt associé. On la représente sur un espace dont l'axe des abscisses correspond à la maturité de l'obligation et l'axe des ordonnées au taux d'intérêt. On peut dissocier les maturités à court terme de la courbe (de 3 mois à 2 ans) et celles de long terme (au-delà de 2 ans et pouvant aller jusqu'à 50 ans).

Cette courbe change quotidiennement, les différents acteurs vont avoir besoin d'emprunter ou prêter, ils vont changer leurs anticipations, ils vont vendre ou acheter des obligations, et des événements peuvent survenir, alors cela va faire varier les taux en fonction de l'offre et de la demande. La courbe des taux est généralement construite à partir des obligations d'État qui présentent le risque de défaut le plus faible.

La courbe de taux dépend de la nature des taux d'intérêt qui la forment. Les taux *in fine* sont des données de marché alors que les taux zéro-coupon et les taux « forward » sont construits implicitement à partir des données de marché.

I.2. Formes de la courbe des taux

Généralement, les courbes de taux sont concaves et croissantes, surtout au niveau du segment [0-10 ans]. De manière précise, les taux à 3 mois d'un type d'instrument donné sont souvent les plus bas (et rarement plus haut) que ceux à 10 ans du même type d'instrument.

Cette structure vient d'une préférence naturelle des investisseurs pour la liquidité et donc pour les instruments de taux à court terme. Et contre une immobilisation plus longue de leur épargne, et une volatilité accrue des mouvements de prix de celle-ci, les investisseurs exigeraient une rémunération supplémentaire.

Toutefois, la forme de la courbe des taux n'est pas figée. Il se peut en effet qu'elle se modifie sensiblement en raison d'une évolution marquée de la situation monétaire ou budgétaire du pays émetteur.

La courbe des taux peut prendre plusieurs formes, on en cite les formes les plus courantes :

- **Croissante (normale)** : C'est la forme que prend la courbe des taux dans la majorité du temps. Les échéances longues sont plus rémunératrices (pour les placeurs) et plus coûteuses (pour les emprunteurs) que les échéances courtes. Plus elle est pentue,

plus les anticipations de croissance sont fortes, car les investisseurs demandent un rendement plus élevé à long terme pour compenser le risque inflationniste.

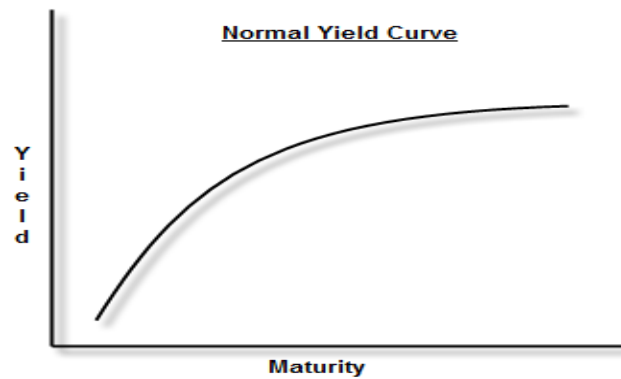


Figure 1- Courbe normale

- **Décroissante ou inversée** : Une courbe des taux inversée (où les maturités courtes sont plus élevées que les maturités longues) témoigne en général d'un affaiblissement anticipé de l'économie. Les investisseurs anticipent que les banques centrales vont baisser les taux directeurs pour soutenir l'économie. Ils achètent alors des obligations longues pour figer des taux jugés intéressants aujourd'hui, entraînant les taux longs à la baisse.

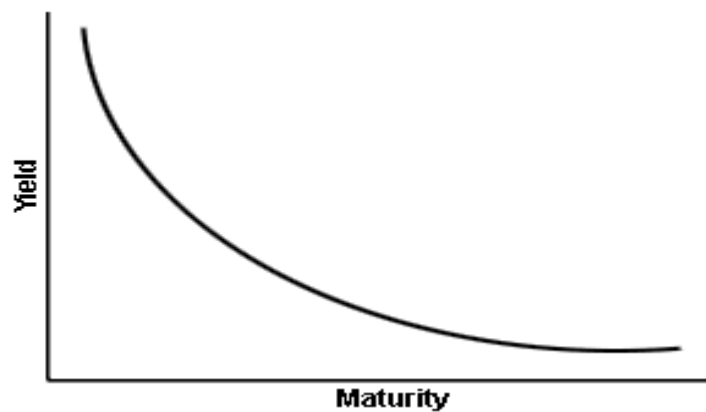


Figure 2 - Courbe inversée

- **Plate** : Une courbe des taux plate est un phénomène assez rare, souvent transitoire entre une courbe des taux normale et inversée. Il survient lorsque les investisseurs anticipent soit une récession ou une reprise économique.



Figure 3 - Courbe plate

I.3. Faits stylisés de la courbe des taux

Les faits stylisés sont des constats d'ordre empirique, généralement non quantifiés, mais jugés représentatifs du fonctionnement de l'économie.

Les faits stylisés les plus importants de la courbe des taux sont les suivants :

- En moyenne, la courbe des taux est croissante et concave.
- La courbe des taux peut prendre une variété de formes dans le temps : croissante, décroissante, bossue (u-shape) et bossue inversée (s-shape).
- La partie courte de la courbe est plus volatile que la partie longue.

Notons qu'un bon modèle de taux doit être en mesure de reproduire les différents faits historiques de la courbe des taux.

CHAPITRE 2

MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX

I. Construction de la courbe des taux de marché

Avant de procéder à la modélisation de la dynamique des taux d'intérêt, on s'intéresse aux différentes techniques qui permettent de construire une courbe des taux à partir des données de marché.

Afin de modéliser la courbe des taux, il faut d'abord construire cette courbe. Or les obligations à zéro-coupon sont moins liquides sur le marché que les obligations à coupons. Nous faisons ainsi appel à plusieurs méthodes de reconstitution de la structure par terme ou la courbe zéro-coupon.

Plusieurs méthodes existent pour cette fin, y compris la méthode du Bootstrapping. Cette dernière est une procédure qui permet de reconstituer une courbe zéro-coupon segment par segment de maturité. En pratique cela revient à calculer le taux équivalent aux maturités pleines et non pas aux maturités résiduelles correspondantes aux dates d'échéance. Surtout que les obligations émises et disponibles sur le marché n'ont pas de maturités exactement égales à 1 an ou 2 ans (maturités pleines).

Afin d'obtenir une courbe des taux continue, nous utiliseront la méthode d'interpolation linéaire. Cette méthode s'applique sur la courbe de référence quotidiennement publiée par Bank Al-Maghreb.

I.1. Interpolation de la courbe BAM

Au Maroc, Bank Al Maghrib publie quotidiennement une courbe des taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés, primaire et secondaire, les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les volumes. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an. Par conséquent, les calculs des taux in fine pour les maturités pleines comprennent l'interpolation et la transformation des taux.

- Interpolation :

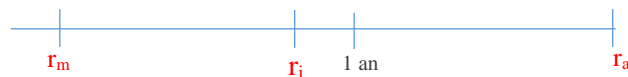
L'interpolation consiste à déterminer, pour chaque échéance T_i (de 13 semaines à 30 ans), le taux d'actualisation qui lui est associé. Si la période T_i ne coïncide pas avec les points d'intérêts (maturités figurant déjà dans la courbe), le taux r_i correspondant peut être

défini, à partir de la courbe des taux, par une interpolation linéaire de deux valeurs de taux avoisinantes par la formule suivante :

$$r_i = r_{i-1} + \left(\frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{T_{i+1} - T_{i-1}} \right) \times (T_i - T_{i-1})$$

- **Transformation** : La transformation consiste à homogénéiser la base de calcul des taux, dans le cas où le taux qu'on cherche à calculer est compris entre un taux court-terme et un taux long-terme.

Si ledit taux correspond à une durée courte, il faut transformer le taux actuariel.



$$r_m = \frac{360}{n} \times \left((1 + r_a)^{\frac{n}{365}} - 1 \right)$$

Sinon, on transforme le taux monétaire.



$$r_a = \left(1 + \frac{r_m \times n}{360} \right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

I.2. Construction de la courbe zéro-coupon

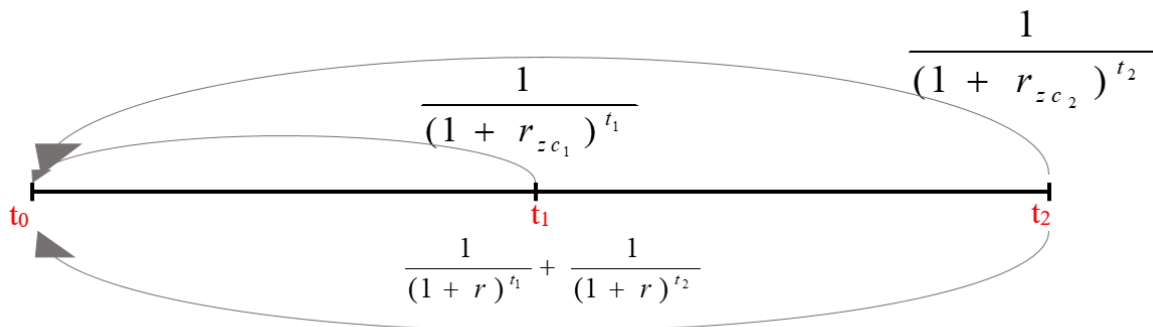
Étant donné qu'il n'existe généralement pas d'obligation coupon-zéro cotée pour chaque échéance ou, s'il en existe, qu'elles sont trop peu liquides pour que leur taux de rentabilité actuariel soit significatif, il faut reconstruire la courbe des taux coupon zéro à partir des obligations cotées et liquides. Pour ce faire, nous allons procéder par Bootstrapping.

La méthode de Bootstrap est une technique qui permet de construire une courbe de taux pas à pas, à partir d'éléments discontinus.

La méthode consiste à choisir une suite d'instruments financiers liquides à maturités croissantes, et à inverser les formules de valorisation de ces instruments pour obtenir les facteurs d'actualisation au fur et à mesure de notre avancement.

Pour le segment de la courbe inférieur à 1 an, les taux zéro-coupon sont les taux actuariels. Lorsque l'on raisonne sur le segment supérieur à un an, il intervient des versements d'intérêts intermédiaires, des coupons, généralement annuels. Il faudra alors reconstituer la courbe zéro coupon pas à pas, soit segment pas segment de maturité.

Illustration : Pour le segment de la courbe allant de 1 an à 2 ans, on choisit un titre de maturité 2 ans qui verse deux flux.



Où :

- r : le taux actuariel 2 ans.
- r_{zc_1} : le taux zéro-coupon 1 an.
- r_{zc_2} : le taux zéro-coupon 2 ans.

Le taux zéro-coupon 1 an est connu puisqu'il est égal au taux de rendement actuariel 1 an. Pour obtenir le taux zéro-coupon 2 ans, en supposant que le taux actuariel 2 ans est connu, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r_{zc_1})} + \frac{1}{(1+r_{zc_2})^2}$$

Nous obtenons ainsi le taux zéro-coupon 2 ans qui s'exprime comme suit :

$$r_{zc_2} = \left(\frac{1}{\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} - \frac{1}{(1+r_{zc_1})}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

De manière générale, le taux zéro-coupon n ans est donné par l'expression suivante :

$$r_{zc_n} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r_{zc_i})^i} \right) + \frac{1}{(1+r)^n}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Avec : r le taux actuariel correspondant à la maturité n ans.

I.3. Interface de calcul des taux

Afin de construire la courbe des taux, nous avons mis en place une application sous VBA qui nous permet de télécharger la courbe du marché directement du site de BAM, et ensuite de calculer les taux actuariels pour les maturités pleines (de 13 semaines à 30 ans) par interpolation de ladite courbe, et finalement construire la courbe zéro-coupon par Bootstrapping.

TAUX DE REFERENCE DU MARCHE SECONDAIRE DES BONS DU TRESOR				
19/04/2018				
Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur	Durée résid.
14/05/2018	97,21	2,225%	19/04/2018	25
11/06/2018	141,41	2,235%	19/04/2018	53
16/06/2018	31,75	2,225%	19/04/2018	58
22/08/2018	60,99	2,261%	19/04/2018	125
17/09/2018	60,99	2,270%	19/04/2018	151
05/12/2018	1015,56	2,280%	19/04/2018	230
20/05/2019	20,12	2,376%	19/04/2018	396
16/09/2019	82,23	2,404%	19/04/2018	515
18/05/2020	21,74	2,470%	19/04/2018	760
18/10/2021	34,11	2,550%	19/04/2018	1278
17/06/2024	47,4	2,828%	19/04/2018	2251
02/06/2025	102,4	2,828%	19/04/2018	2351
16/04/2029	43,1	2,828%	19/04/2018	2551
07/18/2031	198,3	2,828%	19/04/2018	2651
02/19/2035	367,3	2,828%	19/04/2018	2751
08/16/2038	104,8	2,828%	19/04/2018	2851
02/19/2046	108,4	2,828%	19/04/2018	2951

Calcul des taux

Calcul des taux
✕

Date de la courbe

Télécharger la courbe

Taux actuariels

Taux zéro-coupon

Valider

Figure 4 - Interface de calcul des taux

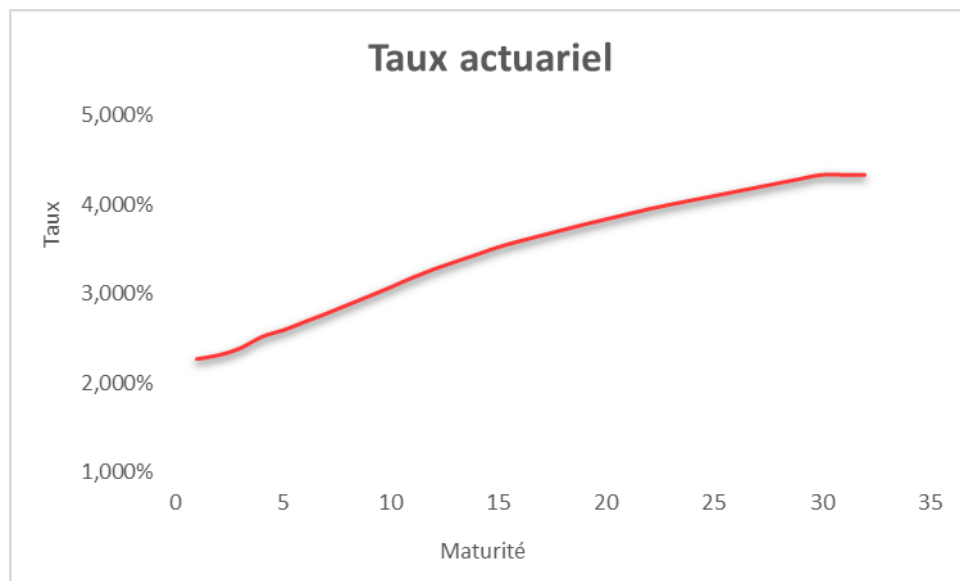


Figure 5 - Courbe des taux actuariels (19/04/2018)

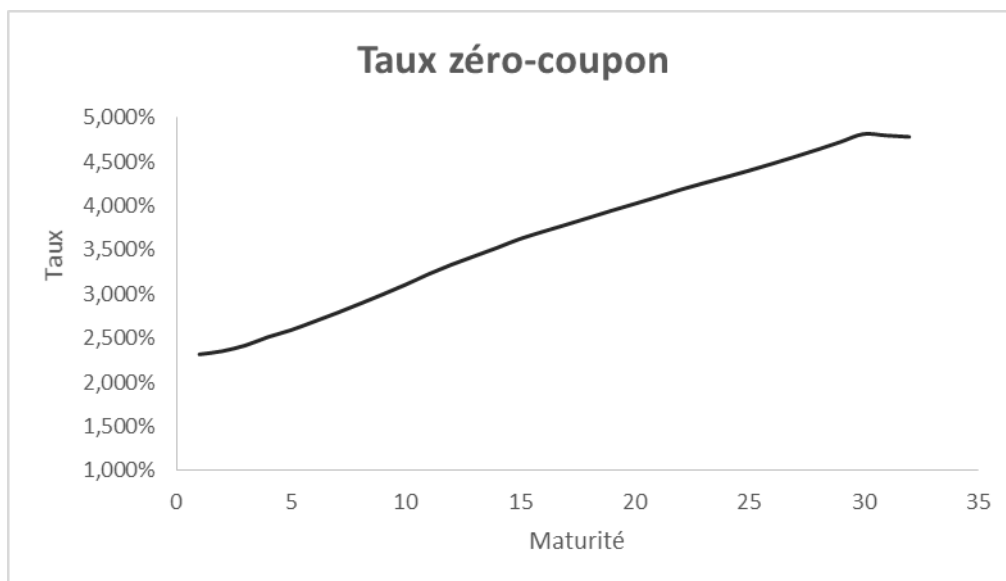


Figure 6 - Courbe des taux ZC (19/04/2018)

II. Modélisation de la courbe des taux :

II.1. Les modèles des taux d'intérêts

Il existe deux grandes approches concernant la modélisation de la dynamique des taux d'intérêts.

La première classe de modèles de taux d'intérêt constitue l'approche sans arbitrage. Les modèles de ce groupe décrivent l'évolution du taux court comme un processus stochastique avec des paramètres dépendant du temps. Ces paramètres sont ensuite calibrés afin que les prix des obligations estimés par le modèle correspondent exactement aux prix des obligations observées au moment de l'estimation. Parmi les plus importants les modèles de cette classe sont **Ho et Lee (1986)**, et **Heath-Jarrow-Morton, Heath et al. (1992)**.

L'inconvénient de cette approche est que ses propriétés dynamiques peuvent impliquer l'évolution des taux d'intérêt d'une manière qui n'est pas empiriquement justifiée. Cependant, puisque ces modèles correspondent avec précision aux rendements observés, ils sont largement utilisés, en particulier pour la tarification des produits dérivés à court terme.

D'une autre part, les modèles d'équilibre et les modèles de taux court ne sont pas conçus pour adapter la courbe actuelle avec précision. Ce sont des modèles paramétriques qui ont pour objectif de décrire l'impact de l'économie sur la courbe de rendement (modèle d'équilibre) ou de capturer l'évolution des taux d'intérêt dans le temps (modèles à taux court). Les paramètres de ces modèles sont généralement estimés à partir de données historiques puisqu'ils sont supposés être constants. Cela, toutefois, peut provoquer une mauvaise modélisation de la courbe, bien que les prix des actifs dans ces modèles évoluent également de manière libre d'arbitrage. Les modèles les plus célèbres de cette classe ont été proposés par **Vasiček (1977)** et **Cox, Ingersoll, Ross** (dorénavant CIR), **Cox et al. (1985)**. Ces deux modèles décrivent l'évolution du taux court avec un processus stochastique retour à la moyenne. Le processus utilisé par Vasiček est connu sous le nom de processus d'Ornstein-Uhlenbeck et celui utilisé dans CIR est connu sous le nom de processus de racine carrée de Bessel. Malheureusement, ces modèles sont principalement conçus pour prédire le taux d'intérêt instantané et montrent peu de succès dans la modélisation de la structure du terme entière.

Outre ces deux approches principales, il existe également une classe de modèles qui tentent d'identifier la structure par terme des taux d'intérêt en estimant uniquement les

paramètres de certaines formes fonctionnelles prédéterminées pour la courbe des taux. Leur seul but est de fournir un bon ajustement aux rendements observés et ils ne nous donnent aucune information sur la dynamique temporelle de la courbe des taux.

Pour les autorités monétaires, ces modèles aident à analyser la politique monétaire. Pour les traders d'obligations, ces modèles sont utilisés pour identifier les obligations surévaluées ou sous-évaluées.

Finalement, l'une des classes les plus populaires est la classe de modèles qui construisent la courbe des taux forward comme une combinaison d'exponentielles et de polynômes. À cette classe de modèles appartient également le modèle proposé par Nelson et Siegel, qui est le modèle de notre intérêt dans cette étude.

II.2. Modèle de Nelson Siegel

Le modèle de Nelson Siegel, introduit en 1987, est l'un des plus populaires modèles paramétriques utilisés dans la modélisation de la courbe des taux. Il est à la fois simple et flexible, et fournit des résultats statistiquement précis et économiquement significatifs.

Nelson et Siegel ont observé que les fonctions, qui génèrent les différentes formes et mouvements de la courbe des taux, sont liées à des solutions d'équations différentielles. Ils ont donc suggéré d'ajuster la courbe des taux à terme instantanés, à une date donnée, par des fonctions approximatives qui sont solutions d'une équation différentielle du second ordre. L'expression du taux *forward* instantané est défini comme suit :

$$f_t(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda m}$$

A partir de la relation entre taux forward et taux ZC donnée par :

$$R_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du$$

Nous obtenons l'expression du taux ZC :

$$R_t(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m} \right)$$

Où λ , β_0 , β_1 et β_2 sont les paramètres du modèle, et m représente la maturité.

Ce modèle est devenu rapidement populaire parmi les praticiens du marché. Non seulement pour sa capacité de représenter les formes les plus courantes des courbes de

rendement mais, contrairement à certains modèles sophistiqués sans arbitrage, il se distingue par sa bonne qualité d'ajustement aux données du marché et son aisance d'interprétation. D'ailleurs, l'avantage majeur du modèle de Nelson et Siegel se présente dans l'interprétation économique de ses paramètres.

II.2.1. Interprétation des paramètres

Le paramètre λ reflète la vitesse du déclin du facteur exponentiel, ou la vitesse de convergence vers le taux à long terme ; de faibles valeurs de λ produisent une lente décroissance et modélisent mieux à la partie long terme de la courbe, tandis que des valeurs élevées de λ produisent une décroissance rapide et représentent mieux la partie courte. Ce paramètre représente également la valeur qui maximise la courbure au moyen terme.

Les paramètres β_0, β_1 et β_2 sont considérés comme des facteurs latents. La variable associée à β_0 est la constante, égale à 1, qui ne tend en aucun cas vers zéro ; par conséquent, ce paramètre peut être interprété comme un facteur à long terme. D'ailleurs, nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} R_z(m) = \beta_0.$$

La variable associée à β_1 , qui est égale à $\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m}$, est une fonction qui prend la valeur 1 lorsque $m=0$ et décroît monotoniquement et rapidement vers zéro ; ainsi β_1 peut être considéré comme un facteur à court terme. Nous avons : $\beta_1 = R_i(0) - R_i(\infty)$

La variable associée à β_2 , qui est égale à $\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m}$, prend la valeur 0 lorsque $m=0$ (ce qui ne correspond pas au cas du court terme), accroit puis décroît vers zéro pour des valeurs élevées de m (ce qui ne correspond non plus au cas du long terme). Et donc, ce dernier paramètre peut être interprété comme un facteur à moyen terme.

Nous représentons dans le graphique ci-dessous les variables du modèle. Nous pouvons constater l'évolution de ces variables, « factor loadings », comme nous l'avons décrite plus haut.

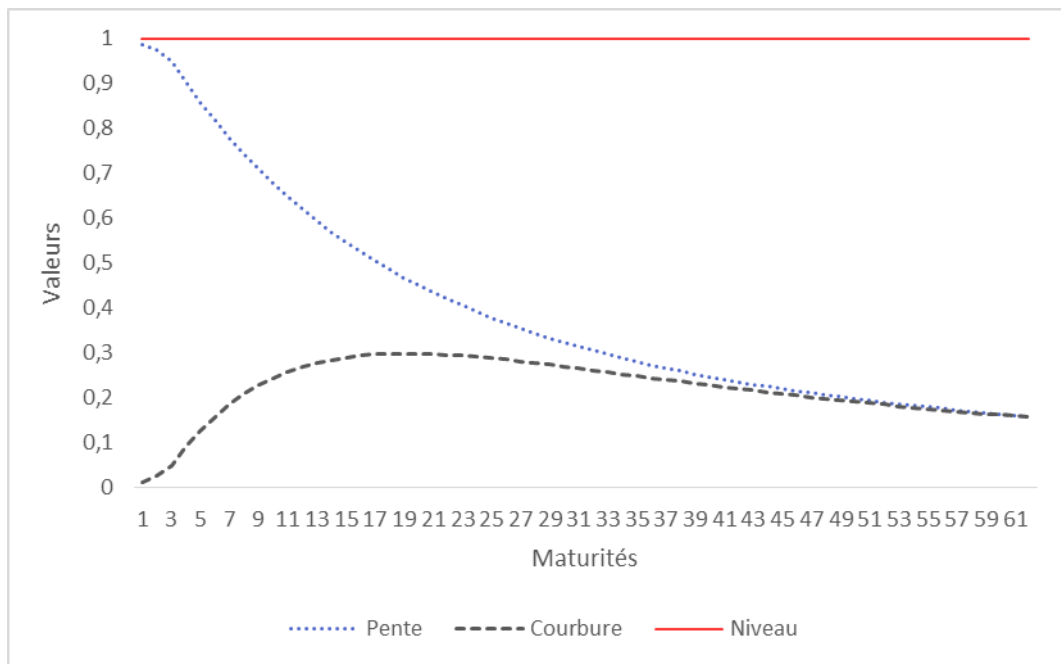


Figure 7 - Evolution des factor loadings en fonction de lambda

II.2.2. Estimation du modèle

Pour estimer les paramètres du modèle, nous allons suivre une procédure à deux étapes.

La première étape consiste à fixer une valeur de λ . En fixant λ , le modèle devient linéaire et nous pouvons estimer les paramètres restants par la méthode des MCO.

Nous effectuons ainsi une régression linéaire des taux zéro-coupon du marché sur les variables explicatives X_1 et X_2 associées respectivement à β_1 et β_2 , que nous avons définies précédemment comme suit :

$$X_1 = \frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} ; \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m}$$

Ensuite, nous faisons varier le paramètre λ , et pour chaque valeur, tel que $0 < \lambda \leq 30$, nous réestimons par MCO les paramètres β_0, β_1 et β_2 , de façon à minimiser la somme des carrés des résidus :

$$RSS = \sum_{i=0}^n (R_i(m) - \hat{R}_i(m))^2 ;$$

Finalement, nous déterminons la valeur de λ pour laquelle cette quantité est minimale. C'est-à-dire nous trouvons les paramètres optimaux du modèle.

	Bêta2	Bêta1	Bêta0	Lambda
Coeff.	-0,03032754	-0,04884346	0,07178114	0,10198169

Après avoir estimé les paramètres, nous avons construit la courbe zéro-coupon de Nelson Siegel. Ci-dessous, une représentation graphique qui permet de comparer les taux du marché avec ceux estimés par le modèle.

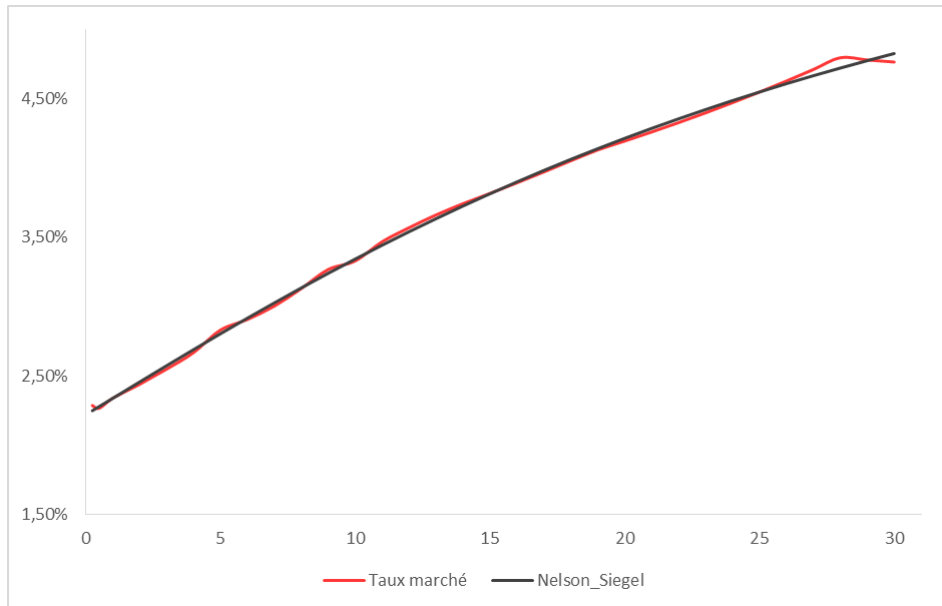


Figure 8 – Construction de la courbe ZC par Nelson Siegel

La courbe construite par NS correspond à la courbe du marché au niveau de plusieurs maturités. Des écarts très faibles sont constatés dans les segments de maturités inférieures à 25 ans. A partir de 25 ans, les écarts sont moins faibles : la courbe de NS corrige la bosse de la courbe du marché sur ce segment.

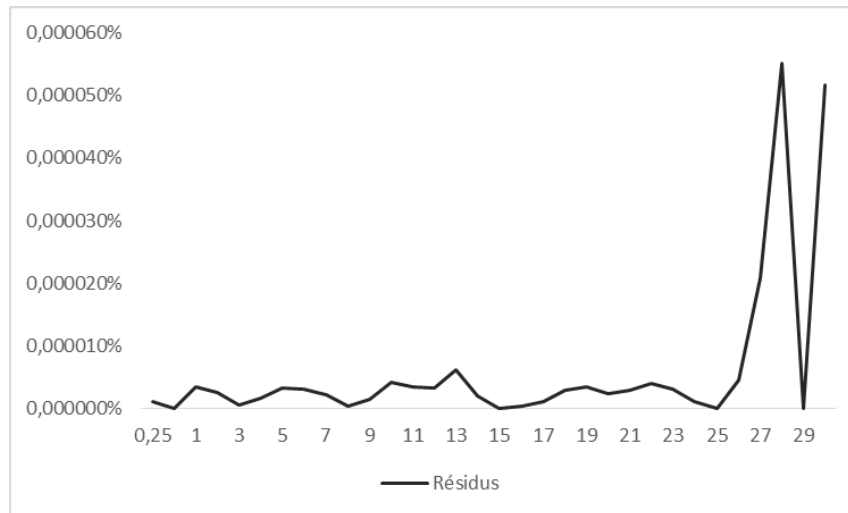


Figure 9 - Résidus du modèle NS

Le graphe ci-dessus représente les résidus du modèle. Nous remarquons qu'effectivement à partir de 25 ans les écarts augmentent. Toutefois ils restent faibles.

II.3. Modèle de Diebold et Li : Nelson-Siegel Dynamique

II.3.1. Introduction du modèle :

Bien que le modèle de Nelson et Siegel réussisse à adapter la structure par terme des taux d'intérêt, à une date donnée, il ne dit rien sur l'évolution de la courbe des taux au cours du temps. Diebold et Li ont examiné les performances de prévision des modèles de structure par terme et ils ont utilisé le cadre de Nelson-Siegel comme leur point de départ.

Diebold et Li (2006) ont introduit la structure dynamique aux bêtas du modèle original de NS, aboutissant à la spécification suivante :

$$R_t(T) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} \right) + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} - e^{-\lambda(T-t)} \right)$$

Comme avant, nous posons $m=T-t$ et on réécrit :

$$R_t(m) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} \right) + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m} \right)$$

Comme le modèle NS ayant été essentiellement conçu pour être un modèle statique, ne tenant pas compte de l'évolution temporelle de la structure des termes, Diebold et Li (2006) introduisent une nouvelle interprétation des paramètres du modèle. Les auteurs

montrent que le niveau, la pente et la courbure sont des appellations appropriées pour ces facteurs.

En effet, le paramètre β_0 régit le niveau de la courbe des taux. D'ailleurs, une augmentation de ce paramètre augmenterait tous les rendements également, toute chose égale par ailleurs, modifiant ainsi le niveau de la courbe. Ce paramètre est donc considéré comme un facteur de niveau.

Le facteur à court terme, β_1 , est étroitement lié à la pente de la courbe, qui est généralement définie comme le rendement long terme moins le rendement court terme ($R(\infty) - R(0)$), ce qui est exactement égal à $-\beta_1$. Notons ainsi qu'une augmentation de ce facteur augmenterait les taux courts beaucoup plus que les taux longs, car nous avons vu que la variable associée à ce facteur décroît rapidement avec la maturité. Par conséquent, la pente de la courbe diminuerait.

Finalement, le facteur à moyen terme reflète la courbure de la courbe. Une augmentation de ce paramètre augmenterait les taux moyen terme plus que les taux courts et longs, et ceci peut être justifié par la forme de la variable qui lui est associée. Ainsi, une variation de ce facteur mènerait à une courbure au niveau de la partie moyen terme de la courbe. Notons que la courbure de la courbe est définie comme 2 fois le rendement de deux ans moins la somme des rendements de dix ans et 3 mois ($2 * R_{2y} - R_{3m} - R_{10y}$).

II.3.2. Estimation du modèle :

Dans le modèle de NS, le paramètre λ est fixé au départ car cela simplifie nettement le calcul, permettant l'utilisation des moindres carrés ordinaires. De leur part, Diebold et Li (2006) ont suivi la même logique d'un λ exogènement prédéterminé, en menant leur étude sur la courbe des taux zéro-coupon américaine.

Selon eux, cette procédure améliore non seulement la simplicité et la commodité, mais aussi la fiabilité numérique, en permettant de remplacer des centaines d'optimisations numériques potentiellement complexes avec les moindres carrés triviaux.

Rappelons que λ détermine la maturité pour laquelle la courbure atteint le maximum. Les maturités de deux ans et trois ans sont couramment utilisées à cet égard. Ainsi, la valeur de

λ a été fixée en maximisant la fonction $c(m) = \left(\frac{1 - e^{-\lambda m}}{\lambda m} - e^{-\lambda m} \right)$, qui représente la courbure,

et ce en choisissant une maturité moyenne de deux ans et demi² :

$$\hat{\lambda} = \max \left(\frac{1 - e^{-2.5\lambda}}{2.5\lambda} - e^{-2.5\lambda} \right)$$

De ce fait, et à l'instar du modèle de NS, le modèle NSD devient linéaire et les facteurs latents peuvent être estimés par MCO pour chaque observation t .

Dans notre étude, nous allons suivre le même raisonnement que Diebold et Li en fixant tout d'abord une valeur pour λ , et ensuite estimer les paramètres par MCO.

Pour une meilleure lecture, réécrivons le modèle en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_t(m_1) \\ \vdots \\ R_t(m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\lambda m_1}}{\lambda m_1} & \frac{1 - e^{-\lambda m_1}}{\lambda m_1} - e^{-\lambda m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda m_n}}{\lambda m_n} & \frac{1 - e^{-\lambda m_n}}{\lambda m_n} - e^{-\lambda m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{0t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(m_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(m_n) \end{pmatrix}$$

Où :

- $m_i, i=1, \dots, n$ représentent les 33 ténors : 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, ..., jusqu'à 30 ans.
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ représentent les erreurs du modèle pour $t=1, \dots, T$; T étant le nombre total d'observations.

La première étape de l'estimation consiste à déterminer une valeur optimale de λ . Cette valeur devrait fournir une base d'estimation raisonnable pour les bêtas, afin d'assurer l'efficacité du modèle.

Dans un premier temps, nous estimons le modèle en fixant λ dans la valeur originale proposée par les auteurs, à savoir 0,7308. Ensuite, nous cherchons une nouvelle valeur optimale qui correspondrait au cas de notre étude. Et ce dans le but de comparer entre les résultats obtenus par les deux approches. Nous allons donc, dans un deuxième temps, déterminer une valeur qui fournit la meilleure estimation possible. Idéalement, la meilleure

² Dans la littérature, cette valeur est égale à 0.0609 pour des maturités exprimées en mois, et à 0.7308 pour des maturités en années.

valeur serait celle qui minimise les moyennes des carrés des résidus (MSE_t) de toutes les observations simultanément,

$$\text{Où } MSE_t(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (R_t(m_i) - \hat{R}_t(m_i))^2}{n} ; t=1, \dots, T.$$

Sachant que : $\hat{R}_t(m) = X \hat{\beta}_t$ et $\hat{\beta}_t = (X'X)^{-1} X' R_t(m)$

Alors :

$$MSE_t(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left([R_t(m)]_i - [X(X'X)^{-1} X' R_t(m)]_i \right)^2$$

Nous allons donc déterminer λ tel que :

$$\hat{\lambda} = \min \left(\sum_{t=1}^T \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left([R_t(m)]_i - [X(X'X)^{-1} X' R_t(m)]_i \right)^2 \right)$$

En déterminant cette valeur, nous estimons les bêtas du modèle par MCO.

II.3.2. Modélisation :

Dans cette partie, nous estimons les paramètres et nous procédons à un backtesting du modèle. Commençons par introduire les données.

Données :

Nous utilisons les données du marché marocain (courbe BAM) depuis 2004 jusqu'à 2018. A partir de ces données, nous avons extraits les taux actuariels pour 33 ténors allant de 3 mois à 30 ans. Ensuite, nous avons calculé les taux zéro-coupons. Nous disposons de 3452 observations de la courbe des taux zéro-coupon.

Nous entamons d'abord une étude de l'historique de la courbe. Nous nous intéressons aux niveaux des taux pour les différents segments de maturités, ainsi qu'aux formes historiques de la courbe, qui sont reflétées par la pente et la courbure. Nous représentons ci-dessous l'évolution des taux depuis 2004 pour les maturités 3 mois, 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans et 30 ans, ainsi que des statistiques des taux.

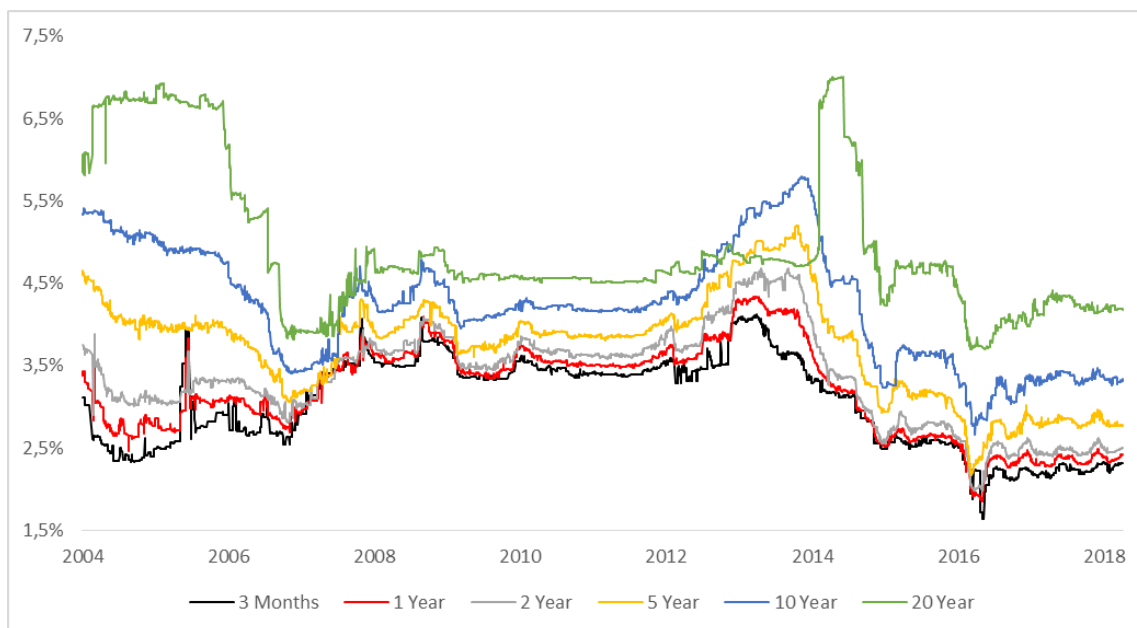


Figure 11 - Evolution des taux marocains depuis 2004

Ténors	Moyenne	Maximum	Minimum	Ecart-type	Coeff. De var
3 Months	2,949%	4,147%	1,600%	5,31E-03	18,00%
6 Months	3,013%	4,150%	1,701%	5,45E-03	18,10%
1 y	3,133%	4,284%	1,830%	5,58E-03	17,81%
2 y	3,339%	4,672%	1,980%	5,89E-03	17,65%
3 y	3,477%	4,845%	2,074%	5,96E-03	17,14%
5 y	3,713%	5,152%	2,166%	6,11E-03	16,45%
7 y	3,902%	5,321%	2,376%	6,28E-03	16,09%
10 y	4,156%	5,630%	2,639%	6,65E-03	16,00%
15 y	4,505%	5,954%	3,158%	6,92E-03	15,37%
20 y	4,683%	6,099%	3,488%	6,90E-03	14,74%
30y	4,611%	5,689%	4,124%	2,75E-03	5,96%
Pente	1,030%				
Courbure	-0,345%				

Figure 10 - Statistiques descriptives des taux

Les niveaux moyens des ténors, ainsi que la pente et courbure moyennes correspondent à une courbe croissante et concave, qui est la forme générale de la courbe des taux. Nous pouvons également constater qu'en général les taux suivent la même tendance sauf pour la partie longue de la courbe qui présente souvent des anomalies. Ces anomalies sont généralement dues au manque de liquidité sur ce segment. Le coefficient de variation montre que la volatilité des taux augmente avec la maturité, ce qui confirme que la partie courte de la courbe est la plus volatile.

Backtesting :

Avec un λ figé, nous appliquons les moindres carrés ordinaires pour chaque observation, nous obtenons une série d'estimations pour chaque paramètre.

Nous comparons ci-dessous la courbe moyenne observée avec la courbe moyenne du modèle, ensuite nous testons la capacité du modèle à ajuster la courbe pour certaines dates. Nous notons « modèle 1 » le modèle correspondant à λ égale à 0.7308 qui est la valeur proposée par les auteurs, et « modèle 2 » celui qui correspond à la valeur que nous avons trouvée, qui est égale à 0.0967. Nous comparons les résultats obtenus.

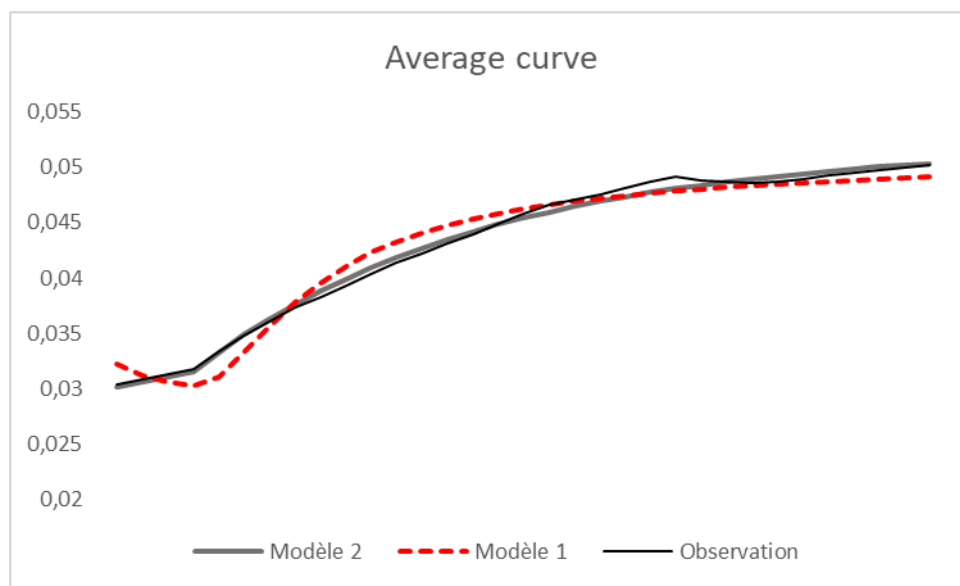


Figure 12 - Backtesting (Average curve)

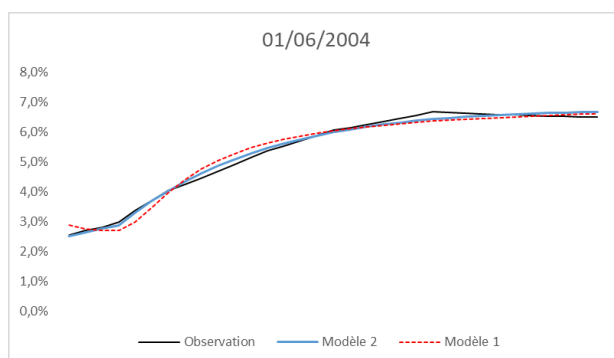


Figure 14 - Backtesting (Courbe du 01/06/2004)

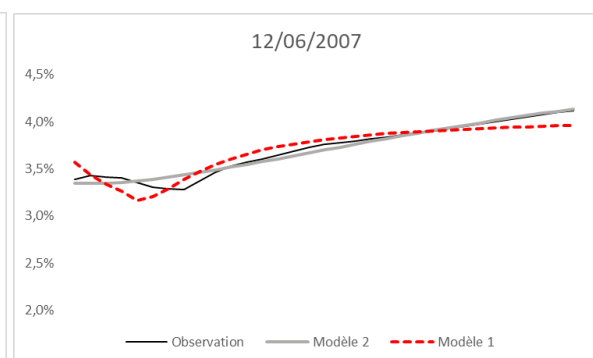


Figure 13 - Backtesting (Courbe du 12/06/2007)

Chapitre 2 : Modélisation de la courbe des taux

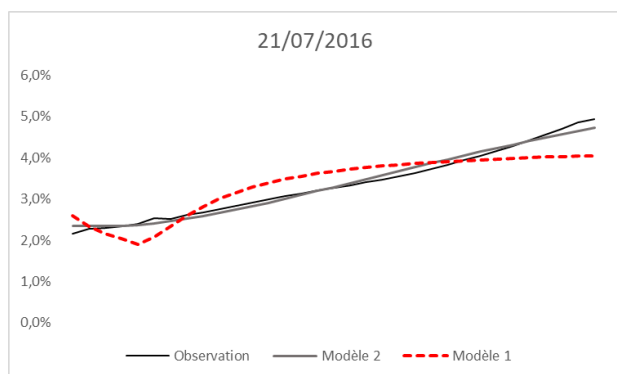


Figure 18 - Backtesting (Courbe du 21/07/2016)

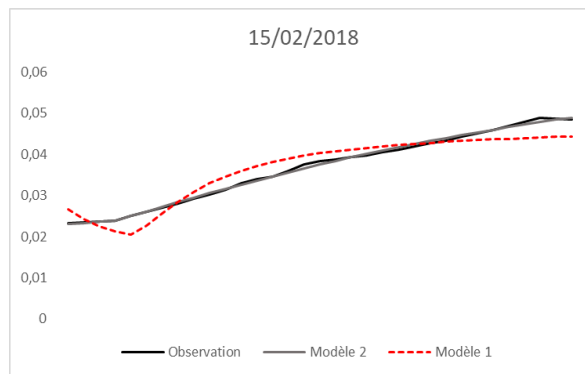


Figure 17 - Backtesting (Courbe du 15/02/2018)

Ténors	Moyenne		Min.		Max.		Ecart type	
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 1	Modèle 2
3 mois	0,2380%	0,0864%	1,766E-06	2,033E-07	0,7577%	0,7182%	0,1500%	0,0948%
6 mois	0,0583%	0,0629%	7,517E-07	1,483E-08	0,3403%	0,4036%	0,0467%	0,0668%
1 an	0,1853%	0,0488%	7,155E-06	1,658E-07	0,8087%	0,6334%	0,1127%	0,0452%
2 ans	0,3055%	0,0436%	3,896E-07	6,391E-08	0,8947%	0,5328%	0,1900%	0,0473%
5 ans	0,0681%	0,0771%	1,193E-07	4,131E-08	0,3794%	0,5257%	0,0627%	0,0856%
10 ans	0,2781%	0,0734%	1,534E-06	1,548E-09	0,9054%	0,4779%	0,1857%	0,0761%
15 ans	0,2464%	0,0997%	3,355E-07	5,916E-08	1,2900%	0,8558%	0,2550%	0,1475%
20 ans	0,1943%	0,1855%	4,960E-08	1,956E-07	1,9285%	1,8848%	0,3167%	0,3075%
30 ans	0,3078%	0,1524%	6,209E-07	7,563E-07	2,2832%	1,0828%	0,3641%	0,1449%

Figure 16 - Statistiques descriptives des taux estimés

La courbe moyenne est concave et croissante dans les trois cas. Nous remarquons que pour toutes les dates, et pour la courbe moyenne également, les courbes obtenues par le 2ème modèle sont les plus proche à celles observées. Les écarts sont beaucoup plus faibles par rapport au 1er modèle, surtout pour les dates récentes. D'ailleurs l'analyse des résidus ci-dessous le confirme.

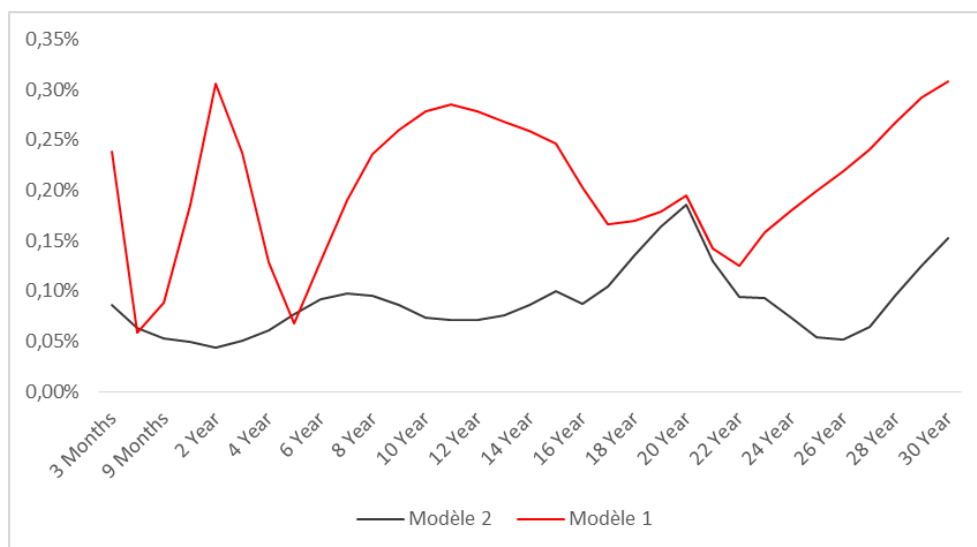


Figure 15 - Résidus des modèles

Le graphe montre que les résidus du modèle 2 sont considérablement plus faibles que ceux du 1^{er} modèle. On peut ainsi conclure que la 2^{ème} valeur de lambda, que nous avons calculé en prenant en compte l'ensemble des observations, donne de meilleurs résultats au niveau de la modélisation de la courbe.

Dynamique des facteurs :

Nous représentons ci-dessous la dynamique des trois facteurs obtenus par chaque modèle, tout en les comparant avec le niveau, la pente et la courbure empiriques.

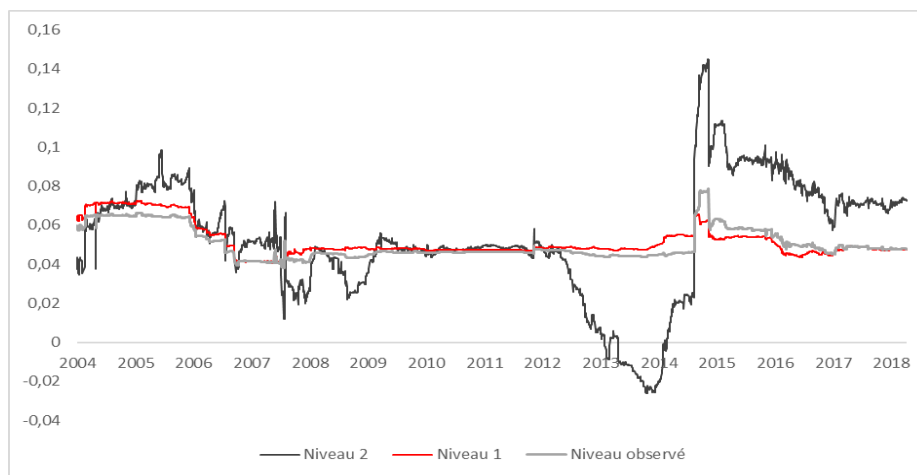


Figure 19 - Dynamique du facteur de niveau (beta0)

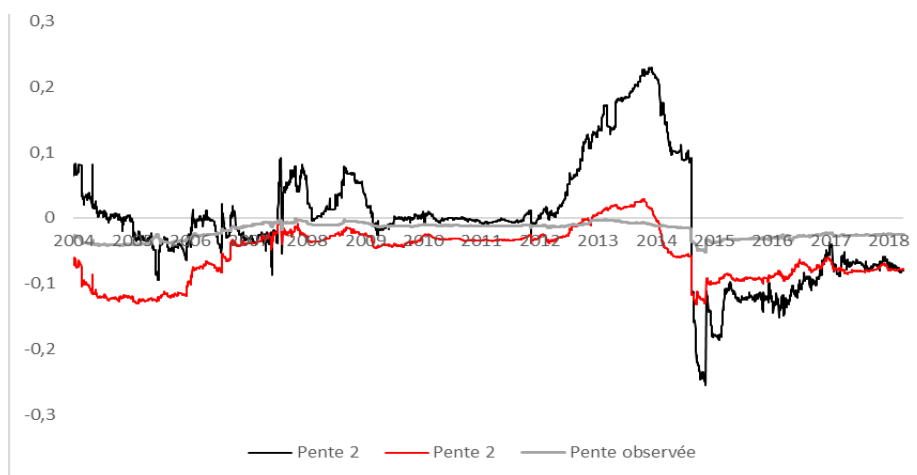


Figure 20 - Dynamique du facteur de pente (beta1)

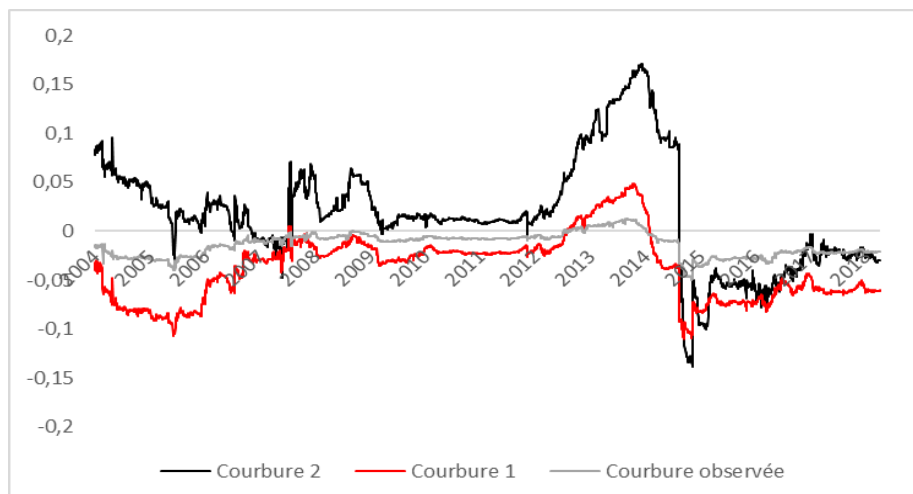


Figure 21 - Dynamique du facteur de courbure (beta2)

Les résultats obtenus par le modèle 1 sont plus proches des observations. Toutefois en étudiant les corrélations entre les estimations et les valeurs empiriques, pour chaque modèle, nous constatons que ces dernières sont assez significantes pour les 2 modèles.

Facteurs	Moyenne		Corr. avec les observations	
	1	2	1	2
Niveau	5,33%	5,17%	0,881	0,691
Pente	-0,61%	-5,58%	0,948	0,640
Courbure	1,75%	-3,79%	0,977	0,719

Figure 22 - Corrélations des facteurs avec les niveaux empiriques

Les corrélations entre les valeurs empiriques et les estimations du modèle 2 ne sont pas négligeables (≈ 0.7). Comme ce modèle fournit de meilleurs résultats au niveau de la modélisation, nous allons retenir les séries d'estimations obtenus par ce modèle pour étudier la dynamique des facteurs dans la partie suivante.

Faits stylisés :

Un bon modèle des taux doit être capable de reproduire les faits stylisés historiques de la courbe des taux. Ces faits concernent en général la forme moyenne de la courbe des taux, la variété des formes que peut prendre la courbe à différents moments, la volatilité de la partie courte de la courbe, etc.

Rappelons les faits stylisés les plus importants que nous avons vu dans le premier chapitre, et vérifions la capacité de notre modèle à les reproduire.

- La courbe est croissante et concave : Dans notre étude, la courbe des taux moyenne est celle correspondant aux valeurs moyennes de β_0, β_1 et β_2 , et nous avons vu lors du backtesting qu'elle est effectivement croissante et concave.
- La courbe des taux peut prendre plusieurs formes. En effet, les courbes construites par le modèle (Modèle 2) reproduisent les différentes formes de la courbe.
- La partie courte de la courbe est plus volatile que la partie longue. En analysant les statistiques des taux estimés par le 2^{ème} modèle, nous retrouvons ce fait.

II.3.3. Modélisation de la dynamique des facteurs de Nelson Siegel :

Dans la section précédente, nous avons estimé le modèle de NS dynamique en fixant le paramètre lambda. Cette estimation nous a fourni pour chacun des facteurs une série d'estimations sur le long de la période que nous avons considéré. Dans leur article, Diebold et Li ont conclu que la modélisation de ces facteurs permet de prévoir la forme de la courbe des taux pour une date donnée, puisque selon leur interprétation, ces facteurs résument l'ensemble des mouvements de la courbe.

Dans cette partie, nous allons étudier la dynamique des facteurs par une représentation vectorielle. La représentation vectorielle permet d'étudier la dynamique jointe de plusieurs séries. Lorsque les séries traitées sont stationnaires, le modèle VAR, qui est une généralisation des processus autorégressifs, est utilisé. Lorsque celles-ci ne sont pas stationnaires mais cointégrées, on opte pour les modèle à correction d'erreur (VECM).

1. Formulation du modèle :

Le modèle VAR que nous étudierons est représentée sous forme matricielle comme suit :

$$\beta_t = A_0 + A_1\beta_{t-1} + \dots + A_p\beta_{t-p} + \varepsilon$$

Avec :

- β_t : le vecteur des bêtas du modèle (3x1)
- A_0 : vecteur des constantes (3x1)
- A_i : matrice des coefficients associé aux variables retardées d'ordre i
- p : nombre des retards du modèle

Pour simplifier, supposons p=2, alors ce modèle peut s'écrire en différence première comme suit :

$$\Delta\beta_t = A_0 + (A_1 - I)\beta_{t-1} + A_2\beta_{t-2} + \varepsilon$$

En ajoutant et soustrayant $A_2\beta_{t-2} - \beta_{t-2}$, puis en regroupant les termes en $\Delta\beta_{t-1}(\beta_{t-1} - \beta_{t-2})$, nous obtenons :

$$\Delta\beta_t = A_0 + (A_1 - I)\Delta\beta_{t-1} + (A_1 + A_2 - I)\beta_{t-2} + \varepsilon$$

Afin de mettre en lumière les relations de cointégration entre les variables, nous cherchons à écrire le modèle en fonction de β_{t-1} de la manière suivante :

$$\Delta\beta_t = A_0 + B_1\Delta\beta_{t-1} + \pi\beta_{t-1} + \varepsilon$$

Avec : $B_1 = -A_2$, et $\pi = (A_1 + A_2 - I)$.

Cette représentation est généralisée pour un modèle d'ordre p comme suit :

$$\Delta\beta_t = A_0 + B_1\Delta\beta_{t-1} + B_2\Delta\beta_{t-2} + \dots + B_{p-1}\Delta\beta_{t-p+1} + \pi\beta_{t-1} + \varepsilon$$

La matrice π peut s'écrire sous la forme $\pi = \alpha\beta'$ où le vecteur α est la force de rappel vers l'équilibre et β le vecteur dont les éléments sont les coefficients des relations de long terme des variables. Chaque combinaison linéaire représente donc une relation de cointégration.

2. Estimation du modèle

Stationnarité des variables

Pour déterminer quel modèle convient à notre cas, nous devons d'abord étudier la stationnarité des variables. Pour ce faire, nous utilisons le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF). La construction de ce test se base sur trois modèles : Modèle avec tendance déterministe et avec constance [3], modèle avec constante et sans tendance déterministe [2], et modèle sans tendance et sans constante [1]. La procédure du test est présentée dans la figure suivante :

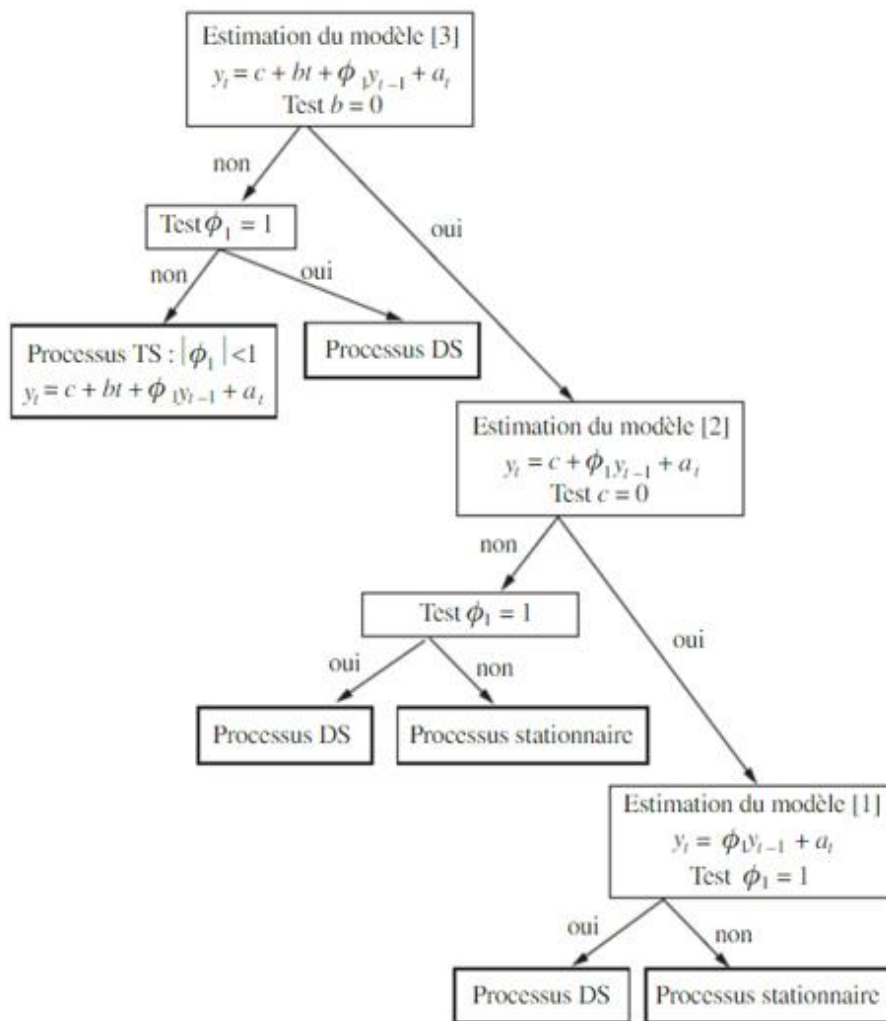


Figure 23 - Procédure du test ADF

En effectuant ce test (voir sorties en annexe), nous avons trouvé que toutes les variables sont non stationnaires. Puisque ce cas suggère que nous utilisons un modèle VECM, nous devons donc tester la cointégration des variables.

Variables	Niveau	Différence première
Beta0	Non stationnaire	Stationnaire
Beta1	Non stationnaire	Stationnaire
Beta2	Non stationnaire	Stationnaire

Figure 24 - Résultats du test ADF

Test de cointégration

Pour effectuer le test de cointégration, les variables doivent être de même ordre d'intégration.

Une série est dite intégrée d'ordre d si on est amené à la différencier d fois pour la rendre stationnaire.

Nous testons par le test d'ADF la stationnarité des variables en différence première. Les résultats du test (en annexe) montrent que toutes les variables sont stationnaires en différence première, nous concluons qu'elles sont toutes intégrées d'ordre 1. Il y a donc risque de cointégration et on peut envisager l'estimation d'un modèle VECM. Pour ce faire, nous devons commencer par déterminer le nombre de retards (p) du modèle VAR.

- **Nombre des retards optimal** : Cette étape consiste à identifier le nombre de retard du modèle VAR, le choix du nombre de retard à retenir est très important car il influence à la fois les résultats de l'estimation et le nombre de relations de cointégration. Généralement on retient l'ordre qui minimise les critères AIC ou SC.

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	34635.62	NA	6.17e-13	-19.59967	-19.59443	-19.59780
1	65236.75	61133.00	1.87e-20	-36.91271	-36.89176	-36.90523
2	65275.81	77.96204	1.84e-20	-36.92972	-36.89305*	-36.91664*
3	65282.23	12.80307	1.84e-20	-36.92826	-36.87588	-36.90957
4	65310.75	56.83226	1.82e-20	-36.93931	-36.87121	-36.91502
5	65324.39	27.15865	1.82e-20	-36.94193	-36.85813	-36.91204
6	65341.54	34.10020	1.81e-20	-36.94654	-36.84702	-36.91104
7	65351.43	19.66985	1.81e-20	-36.94705	-36.83181	-36.90594
8	65364.43	25.80281*	1.80e-20*	-36.94931*	-36.81836	-36.90260

* indicates lag order selected by the criterion

Figure 25 - Lag length structure par Eviews

Selon les résultats ci-dessus, nous retenons, pour simplifier le modèle et les estimations, l'ordre $p=2$ qui minimise le critère SC. Le retard optimal que nous venons d'identifier est celui qu'on utilisera pour effectuer le test de cointégration. Ce test a pour but de déterminer le nombre de relations de cointégration entre les variables du modèle. Dans les estimations, la détermination du nombre de relations de cointégration, est nécessaire pour identifier la forme du modèle VECM à utiliser. En effet, il existe cinq types de relations ou modèles de cointégration dont :

- Modèle sans tendance et sans constante (modèle 1) ;
- Modèle sans tendance et avec constante (modèle 2) ;
- Modèle linéaire sans tendance et avec constante (modèle 3) ;
- Modèle linéaire avec tendance et constante (modèle 4) ;

- Modèle quadratique avec tendance et constante (modèle 5) ;

- **Relations de cointégration :**

Data Trend:	None	None	Linear	Linear	Quadratic
Test Type	No Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept Trend	Intercept Trend
Trace	2	2	2	2	3
Max-Eig	2	2	2	2	3

*Critical values based on MacKinnon-Hauq-Michelis (1999)

Figure 26 - test de cointegration

Les résultats du test de cointégration montrent qu'ils existent 2 relations de cointégration selon les quatre premières spécifications. Le tableau suivant nous permet de déterminer quelle spécification choisir pour l'estimation du modèle :

Data Trend:	None	None	Linear	Linear	Quadratic
Rank or No. of CEs	No Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept Trend	Intercept Trend
Log Likelihood by Rank (rows) and Model (columns)					
0	65325.45	65325.45	65327.50	65327.50	65327.86
1	65339.18	65339.61	65339.98	65341.56	65341.91
2	65347.64	65351.70	65351.76	65353.43	65353.78
3	65347.88	65353.23	65353.23	65357.17	65357.17
Akaike Information Criteria by Rank (rows) and Model (columns)					
0	-36.90195	-36.90195	-36.90141	-36.90141	-36.89992
1	-36.90632	-36.90599	-36.90507	-36.90540	-36.90447
2	-36.90771	-36.90887*	-36.90834	-36.90815	-36.90779
3	-36.90445	-36.90578	-36.90578	-36.90631	-36.90631
Schwarz Criteria by Rank (rows) and Model (columns)					
0	-36.88626*	-36.88626*	-36.88049	-36.88049	-36.87377
1	-36.88017	-36.87810	-36.87369	-36.87228	-36.86786
2	-36.87109	-36.86877	-36.86650	-36.86282	-36.86071
3	-36.85738	-36.85348	-36.85348	-36.84878	-36.84878

Figure 27 - test de cointegration

Le AIC minimal (-36.90887) correspond à la 2^{ème} spécification (No deterministic trend in data ; intercept (no trend) in CE – no intercept in VAR).

L'hypothèse de cointégration est acceptée et nous pouvons passer à l'estimation du modèle.

Estimation du modèle :

Puisque nous avons trouvé 2 retards pour le modèle VAR, nous allons estimer un VECM d'ordre 1 car les variables seront prises en différence première.

Cointegrating Eq:	CointEq1	CointEq2
BETA0(-1)	1.000000	0.000000
BETA1(-1)	0.000000	1.000000
BETA2(-1)	-0.210846 (0.08327) [-2.53195]	-0.916752 (0.06520) [-14.0616]
C	-0.054158 (0.00420) [-12.8853]	0.016746 (0.00329) [5.08906]

Error Correction:	D(BETA0)	D(BETA1)	D(BETA2)
CointEq1	-0.006957 (0.00148) [-4.68715]	0.034639 (0.00736) [4.70325]	0.034287 (0.00718) [4.77260]
CointEq2	-0.007632 (0.00191) [-3.99285]	0.043974 (0.00948) [4.63654]	0.045096 (0.00925) [4.87447]
D(BETA0(-1))	-0.075631 (0.05570) [-1.35788]	0.299537 (0.27636) [1.08386]	0.193001 (0.26958) [0.71594]
D(BETA1(-1))	-0.015375 (0.02513) [-0.61177]	0.126205 (0.12470) [1.01209]	0.160284 (0.12164) [1.31774]
D(BETA2(-1))	0.024960 (0.01887) [1.32255]	-0.174230 (0.09364) [-1.86063]	-0.224728 (0.09134) [-2.46033]

Figure 28 - Estimations output du VECM

Les équations générales du modèle sont les suivantes :

$$\Delta\beta_t^0 = -0.0069(\beta_{t-1}^0 - 0.21\beta_{t-1}^2 - 0.054) - 0.0076(\beta_{t-1}^1 - 0.92\beta_{t-1}^2 + 0.017) - 0.076\Delta\beta_{t-1}^0 - 0.015\Delta\beta_{t-1}^1 + 0.025\Delta\beta_{t-1}^2$$

$$\Delta\beta_t^1 = 0.035(\beta_{t-1}^0 - 0.21\beta_{t-1}^2 - 0.054) + 0.044(\beta_{t-1}^1 - 0.92\beta_{t-1}^2 + 0.017) + 0.299\Delta\beta_{t-1}^0 + 0.126\Delta\beta_{t-1}^1 + 0.174\Delta\beta_{t-1}^2$$

$$\Delta\beta_t^2 = 0.034(\beta_{t-1}^0 - 0.21\beta_{t-1}^2 - 0.054) + 0.045(\beta_{t-1}^1 - 0.92\beta_{t-1}^2 + 0.017) + 0.193\Delta\beta_{t-1}^0 + 0.16\Delta\beta_{t-1}^1 + 0.225\Delta\beta_{t-1}^2$$

Validation du modèle :

Autocorrélation des résidus :

VEC Residual Serial Correlation LM T...
 Null Hypothesis: no serial correlation ...
 Date: 06/14/18 Time: 01:39
 Sample: 2/18/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540

Lags	LM-Stat	Prob
1	11.12880	0.2670
2	15.53296	0.0773

Probs from chi-square with 9 df.

L'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation est acceptée.
 La valeur de la Prob indiquée est égale à 0.0773, supérieure à 0.05, donc nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle, d'où l'absence de l'autocorrélation des erreurs.

Test d'hétéroscédasticité :

VEC Residual Heteroskedasticity Tests: No Cross Terms
 Date: 06/18/18 Time: 13:29
 Sample: 2/18/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540

Joint test:

Chi-sq	df	Prob.
40.4659	60	0.4192

L'hypothèse nulle est acceptée donc il n'y pas d'hétéroscédasticité.

Test de normalité :

VEC Residual Normality Tests
 Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)
 Null Hypothesis: residuals are multivariate normal
 Date: 06/18/18 Time: 13:35
 Sample: 2/18/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540

Component	Skewness	Chi-sq	df	Prob.
1	-0.308529	0.698062	1	0.4034
2	-0.295188	0.638998	1	0.4241
3	-0.151265	0.167795	1	0.6821
Joint		1.504855	3	0.1133

Les résultats du test montrent que l'hypothèse nulle est acceptée (Prob. > 5%).

Les résidus suivent une loi normale

Component	Kurtosis	Chi-sq	df	Prob.
1	2.802681	0.071381	1	0.7893
2	2.753190	0.111677	1	0.7382
3	2.206433	1.154540	1	0.2826
Joint		1.337598	3	0.3165

Component	Jarque-Bera	df	Prob.
1	0.769442	2	0.6806
2	0.750676	2	0.6871
3	1.322335	2	0.5162
Joint	2.842453	6	0.1398

Résultats et interprétations :

CointEq1 (2^{ème} bloc) est le vecteur associé à la relation de cointégration contenant des coefficients des termes à correction d'erreur. Ces coefficients représentent des forces de rappel, c-à-d la vitesse de retour à l'équilibre. Ces coefficients doivent être significativement négatifs. Nous remarquons que dans les trois équations du modèle, seul le premier coefficient vérifie cette condition. Ceci montre qu'à long terme le facteur de niveau marque un retour en équilibre. Beta0 prend environ 142 jours ($1/0.006$) pour reprendre sa situation d'équilibre après un choc. Les coefficients des relations long terme étant tous significatifs, nous déduisons qu'à long terme les variations des facteurs sont interdépendantes. Ce résultat est compatible à la littérature empirique, puisque des études ont montré qu'historiquement les grands changements du niveau de la courbe sont souvent accompagnés de changements de la pente et la courbure également.

La dynamique du court terme (2^{ème} bloc) montre que les facteurs beta1 et beta2 dépendent chacun de leurs valeurs retardées. Le coefficient de $D(\text{Beta1}(-1))$ est significatif à 10% et celui de $D(\text{Beta2}(-1))$ à 5%. Le facteur beta0 quant à lui est indépendant de sa valeur passée et des autres facteurs.

CHAPITRE 3

GESTION D'UN PORTEFEUILLE DE TRADING OBLIGATAIRE

I. Evaluation d'un portefeuille de trading obligataire :

I.1. Valorisation des obligations de l'État : Les Bons Du Trésor

La valorisation d'une obligation est le processus de détermination de son juste prix en ajustant le rendement de cette obligation par rapport à celui d'autres titres, généralement d'autres obligations, dont le rendement est connu, et avec lesquels on peut la comparer.

Le prix d'une obligation est la valeur actuelle des flux qui seront générés par ce titre. Le prix d'une obligation est donc la somme des flux actualisés en utilisant le taux d'actualisation approprié.

Les Bons du Trésor (BDT) sont des titres émis exclusivement par le Trésor pour répondre à ses besoins de financement sur une durée déterminée, moyennant un rendement qui dépend de la durée du placement et qui obéit aux lois de l'offre et de la demande sur un marché de gré à gré.

I.1.1. Caractéristiques d'un Bon De Trésor

- **Le nominal** : Il est égal au capital de départ emprunté par l'émetteur de l'obligation divisé par le nombre de titres émis. Le nominal d'un bon de trésor est égal à 100.000 MAD.
- **Le taux nominal ou facial** : C'est le taux appliqué au nominal pour le calcul des coupons. Les BDT sont des obligations à taux fixe.
- **La maturité** : La maturité d'un titre financier est l'espace de temps qui sépare aujourd'hui de la date d'échéance finale de ce titre, date à laquelle il disparaîtra définitivement : A partir de 26 semaines jusqu'à 30 ans pour les BDT.
- **La date d'émission** : Il s'agit de la date effective de la souscription et de la libération du titre. C'est aussi la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- **La date de jouissance** : Les dates d'anniversaire de cette date sont les dates de versement des coupons. Les dates de jouissance et de règlement ne sont pas forcément simultanées.
- **Le taux de rendement** : le taux de rendement actuariel calculé à partir de la courbe des taux.
- **La périodicité** : Annuelle pour les BDT.
- **Les modalités de remboursement** : in-fine, c'est-à-dire que la totalité du capital de l'emprunt est remboursée au terme de sa durée de vie.

1.1.2. Valorisation d'un Bon De Trésor

Avant de valoriser un BDT, il est nécessaire de distinguer les titres de maturités courtes (< 1 an) de ceux de maturités longues (>1 an). Notons que les coupons des BDT sont réglés à l'échéance pour les bons de maturité inférieure ou égale à 52 semaines, et annuellement, aux dates d'anniversaire de la date de jouissance, pour les bons d'une durée supérieure à 52 semaines. De ce fait, nous devrions également distinguer entre deux types de BDT dans le marché : **ligne simple** et **ligne atypique**. Lorsque la date de jouissance est différente de la date d'émission, la ligne est dite atypique.

Les formules de valorisation³ incluront les notations suivantes :

- P : Prix de l'obligation (Prix Dirty⁴)
 - N : Nominal
 - C : Coupon (Coupon plein)
 - C_c : Coupon couru
 - r_f : Taux facial
 - r : Taux de rendement
 - D_{mat} : Date de maturité
 - D_{em} : Date d'émission
 - D_{val} : Date de valorisation
 - D_{jouis} : Date de jouissance
 - M_i : Maturité initiale = $D_{mat} - D_{em}$
 - M_r : Maturité résiduelle = $D_{mat} - D_{val}$
 - D_{1c} : Date du premier coupon
 - D_{dc} : Date du dernier coupon
 - n_j : $D_{val} -$ Date du prochain coupon
 - A : Nombre de jours exact de l'année écoulée, égal à 366 si cette dernière inclut un 29 février.
- **Valorisation d'un BDT de maturité initiale inférieure ou égale à 52 semaines :**
- Coupon plein : $C = N \times r_f \times \frac{M_i}{360}$;

³ Source : Circulaire de l'AMMC

⁴ Prix Dirty = Prix Pied de Coupon (PPC ou Prix Clean) – Coupons Courus

- Prix Dirty :
$$P = \frac{N + C}{1 + r \times \frac{M_r}{360}}$$
- Coupons courus :
$$C_c = N \times r_f \times \frac{M_i - M_r}{360}$$

- Valorisation d'un BDT de maturité initiale supérieure à 52 semaines :

1^{er} Cas : Si la maturité résiduelle est inférieure ou égale à 1 an, alors on devra distinguer entre ligne atypique à un seul flux, et ligne simple ou ligne atypique à plusieurs flux.

- Ligne simple, ou ligne atypique à plusieurs flux :

- Coupon plein : $C = N \times r_f$;
- Prix Dirty :
$$P = \frac{N + C}{1 + r \times \frac{M_r}{360}}$$
 ;
- Coupons courus :
$$C_c = N \times r_f \times \frac{D_{val} - D_{dc}}{A}$$

- Ligne atypique à un seul flux

- Coupon plein : $C = N \times r_f \times \frac{M_i}{A}$;
- Prix Dirty :
$$P = \frac{N + C}{1 + r \times \frac{M_r}{360}}$$
 ;
- Coupons courus :
$$C_c = N \times r_f \times \frac{D_{val} - D_{EM}}{A}$$

2^{ème} Cas : Si la maturité résiduelle est supérieure à 1 an, alors on devra distinguer entre ligne simple, ligne atypique à un seul flux, et ligne atypique à plusieurs flux.

- Ligne simple

- Coupon plein : $C_i = N \times r_f$
- Prix Dirty :
$$P = \frac{1}{(1+r)^A} \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}} + \frac{N}{(1+r)^{n-1}} \right) (*)$$
- Coupons courus :
$$C_c = N \times r_f \times \frac{D_{val} - D_{dc}}{A}$$

- Ligne atypique à un seul flux

- Coupon plein : $C = N \times r_f \times \frac{M_i}{A}$

- Prix Dirty : $P = \frac{N + C}{(1+r)^{\frac{n_j}{A}}}$ (Dans ce cas, n_j coïncide avec M_r)
- Coupons courus : $C_c = N \times r_f \times \frac{D_{val} - D_{EM}}{A}$
- Ligne atypique à plusieurs flux
 - **Si : Date d'évaluation < Date du détachement du premier coupon**
 - Premier coupon plein : $C_1 = N \times r_f \times \frac{D_{1c} - D_{EM}}{A}$
 - Les autres coupons pleins : $C_j = N \times r_f ; j=2, \dots$
 - Prix Dirty : $P = \frac{1}{(1+r)^{\frac{n_j}{A}}} (C_1 + \sum_{i=2}^n \frac{C_i}{(1+r)^{i-1}} + \frac{N}{(1+r)^{n-1}})$
 - Coupons courus : $C_c = N \times t_f \times \frac{D_{val} - D_{EM}}{A}$
 - **Sinon, on utilise la formule (*)**

Rappelons que les formules de valorisation précédentes calculent des prix unitaires, c'est-à-dire le prix d'un seul BDT où le nominal est égal à 100.000 MAD.

1.1.2. Pricer de BDT

Sous VBA, nous avons élaboré un pricer qui nous permet de valoriser les BDT suivant les formules précédentes. Notons que chaque ligne du marché est caractérisée par son code MaroClear (AMC). Ce code AMC nous permet, dans une première étape, de récupérer les caractéristiques de la ligne à valoriser, à partir d'une base des données contenant tous les BDT du marché. Ensuite, à partir de ces données, et en précisant la date de valorisation et la quantité des bons de l'emprunt, le pricer détermine en premier lieu le rendement de ce BDT, puis calcule son prix unitaire (prix dirty), le prix global de l'emprunt, les coupons courus et le PPC.

Date de valorisation		Code MaroClear		Quantité	
23/03/2018		201339		500	
Caractéristiques			Valorisation		
Taux facial	3,9	Prix dirty unitaire	103825,12		
Date d'émission	21/10/2014	Prix dirty global	51912560		
Date de jouissance	21/10/2014	Coupon couru	1634,79		
Date d'échéance	21/10/2019	PPC	102190,33		
Taux de rendement	2,463				

Figure 29 - Interface du Pricer des BDT

I.1. Evaluation du portefeuille :

L'évaluation d'un portefeuille de trading consiste à calculer les profits et pertes générés par les positions prises sur le marché. Ce portefeuille doit faire l'objet d'un calcul de résultat économique appelé « P&L ». Il s'agit donc d'évaluer la marge dégagée sur le portefeuille. Toutes les opérations réalisées par le trader sont comptabilisées en instantané (en « mark-to-market »), cela signifie que tant que la position n'est pas échu, le P&L calculé reste potentiel.

Le but de cette partie est d'élaborer un outil qui permet au trader de faire le suivi du portefeuille par le calcul du P&L « Year-to-date » (YTD), et du P&L quotidien. Nous utilisons les données quotidiennes du marché, qui sont dans notre cas la courbe des taux publiée par BAM.

Avant de passer au calcul, définissons les différentes notions que nous aborderons dans cette partie :

- **Le P&L :**

En trading, le P&L ou Profit and Loss désigne le carnet de profits et de pertes du trader. Ainsi, ce carnet recense les revenus et pertes quotidiennes du trader et recense les positions prises par ce dernier. L'analyse du P&L apporte notamment des informations de marché utiles pour savoir s'il faut maintenir une position ou bien la liquider.

Le P&L YTD représente le résultat du portefeuille depuis le début de l'année comptable (01/01/N) jusqu'au jour J.

- **Le Mark-to-Market :**

Le mark-to-market consiste à évaluer régulièrement une position en se basant sur sa valeur observée sur le marché au moment de l'évaluation. Le suivi de la valeur en MtM du portefeuille indique le montant dont disposerait le trader s'il soldait sa position immédiatement.

- **Le portage :**

Il s'agit des intérêts rapportés par le titre en tenant compte du financement de l'achat.

1.1.1. L'analyse du P&L :

Généralement le P&L YTD se décompose comme suit :

- i. **Le latent :** le calcul du latent se base sur la valorisation en MtM de l'ensemble des titres constituant le portefeuille.
- ii. **Le profit :** correspond au réalisé des opérations, notamment le rachat des positions contenues dans le portefeuille, et les intérêts tombés.
- iii. **Le portage :** est calculé en prenant compte le coût de financement de l'achat et le réinvestissement des coupons.

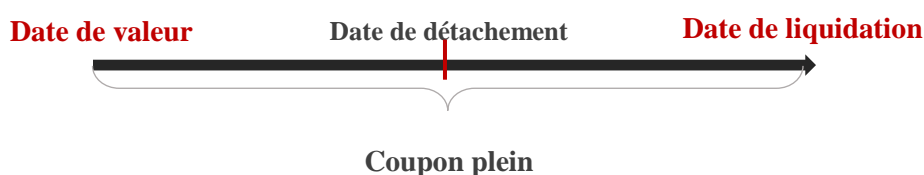
Pour un portefeuille obligataire, le calcul du P&L se base sur les éléments suivants :

- **Coupons :**

Les coupons pleins sont les intérêts annuels fixes que verse un bon de trésor à chaque date d'anniversaire.

Le profit généré en termes de coupons est calculé selon deux cas de figure :

- **Si : Date de valeur < Date de détachement < Date de liquidation :**



Le coupon plein encaissé est alors réinvesti, et le profit qui résulte de cet investissement s'ajoute au résultat. Le coupon plein fait partie du réalisé des opérations, les intérêts que rapporte son investissement font partie du portage.

Rappelons qu'en général, on a : $C = N \times r_f$, où C est le coupon plein, r_f le taux facial et N le nominal. Un coupon réinvesti génère :

$$I = C \times \text{taux de financement} \times n / 360 ;$$

Où n le nombre de jours entre la date du détachement et la date de liquidation.

- **Sinon**, la variation des coupons est calculée par la différence entre les coupons courus versés à l'acquisition et ceux encaissés à la liquidation. Comme les coupons courus sont inclus dans les prix dirty, la variation des coupons fait partie du latent pour les positions ouvertes, et du réalisé pour les rachats de position.



- Coût de portage (« Cost of carry ») :

Pour financer les opérations d'achat, les traders font appel au Desk trésorerie. Un trésorier garantit le prêt d'argent pour le financement des opérations et l'emprunt de titres. Le CoC d'un titre représente le coût de financement de son achat, et est calculé comme suit :

$$\text{CoC} = t \times P \times n / 360$$

Où :

- t : le taux de financement ;
- P : le prix d'acquisition ;
- n : la durée de l'emprunt.

Le CoC est inclus dans le portage.

- Le latent (non-réalisé) :

Le non-réalisé se base sur la valorisation en MtM de l'ensemble des BDT constituant le portefeuille. Il est calculé par la formule suivante :

$$\text{Non-réalisé} = \text{Position} \times (\text{MtM} - \text{Prix d'acquisition})$$

- Le réalisé :

Le profit réalisé par le rachat des positions est calculé comme suit :

$$\text{Réalisé} = \text{Position} \times (\text{Prix de vente} - \text{Prix d'acquisition})$$

Finalement, en calculant chacun de ses éléments, nous obtenons le P&L par la formule suivante :

$$\text{P\&L} = \text{Latent} + \text{Réalisé} + \text{Coupons réinvestis} - \text{CoC}$$

Où : - Coupons réinvestis = C + I.

1.1.2. Méthode du Coût Moyen Pondéré :

Les coûts d'acquisition d'un BDT (taux, prix, coupons courus) sont déterminés par la méthode du CMP. Il s'agit d'une méthode de valorisation des stocks, qui permet de valoriser le stock et également les sorties de stocks. Dans le cas de notre portefeuille de BDT, l'application de cette méthode consiste à faire une moyenne pondérée par les volumes pour les prix des obligations qui sont entrées en stock.

La méthode CMP est généralement utilisée pour les obligations ayant une longue conservation. Cette méthode permet une gestion simple qui évite de conserver un historique et lisse les variations de prix dans le temps.

Exemple d'application :

Considérons une ligne d'un total de 350 bons acquis le 15/03/2018 à un prix unitaire de 103 459,75 MAD. Supposons que nous avons conservé ce titre jusqu'au 20/04/2018, et qu'à ce moment-là nous décidons d'acheter une nouvelle quantité de cette ligne : 120 bons à 102 980,23 MAD.

Après l'insertion de l'opération, le prix d'acquisition pour cette ligne sera calculé par la méthode du CMP comme suit :

$$\text{PMP} = (350 * 103\,459,75 + 120 * 102\,980,23) / 470$$

1.1.3. Elaboration d'un outil de gestion de portefeuille :

Sous VBA, nous avons mis en place un outil qui nous permet de faire le suivi quotidien du P&L.

- Traitement des opérations

La première phase est le traitement des opérations exécutées. En se basant sur l'historique des opérations traitées depuis le début de l'année, nous avons élaboré une application qui permet d'insérer les nouvelles opérations et d'appliquer au fur et à mesure la méthode du CMP pour chaque ligne, en calculant les nouveaux taux et prix moyens après

Chapitre 3 : Gestion d'un portefeuille de trading obligataire

chaque opération insérée. Nous calculons ensuite pour chaque opération : la variation des coupons et le CoC (depuis la date d'acquisition jusqu'au moment de la clôture de la position), le réalisé et le coupon réinvesti.

Nous représentons ci-dessous l'interface de traitement des opérations.

Position	Quantité traitée	Disponible	Nominal	Date_acq	Yield	Avg yield	PPC	Coupons courus	Avg PPC	Avg Accr	Coupons courus	Coc	Carry	Realized	Coupon cumulé	Coupon réinvesti
Buy	700	700	70000000	03/01/2018	2,365%	2,365%	99950,94	959,32	99950,94	959,32	4506,85	4392,29	114,56		0	0,00
Buy	500	1200	120000000	04/01/2018	2,370%	2,367%	99947,5	965,75	99949,507	961,999	0	0,00	0,00		0	0,00
Sell	700	500	50000000	04/01/2018	2,355%	2,367%	99958,08	965,75	99949,507	961,999	3219,18	3137,30	81,88	8627	0	0,00
Buy	50	50	5000000	04/01/2018	2,390%	2,390%	102192,28	630,14	102192,28	630,14	0	0,00	0,00		0	0,00
Buy	1238	1288	128800000	04/01/2018	2,390%	2,390%	102192,28	630,14	102192,28	630,14	1058630,14	495782,44	562847,70		0	0,00
Sell	500	0	0	05/01/2018	2,368%	2,367%	99949	972,19	99949,507	961,999	0	0,00	0,00	4842	0	0,00
Buy	500	500	50000000	08/01/2018	2,550%	2,550%	99730,82	407,67	99730,82	407,67	0	0,00	0,00		0	0,00
Buy	500	1000	100000000	08/01/2018	2,550%	2,550%	99730,82	407,67	99730,82	407,67	65753,42	62608,79	3144,63		0	0,00
Buy	491	491	49100000	08/01/2018	2,437%	2,437%	99900,15	540,82	99900,15	540,82	116965,62	113934,51	3031,11		0	0,00
Buy	500	500	50000000	09/01/2018	2,930%	2,930%	99541,69	882,33	99541,69	882,33	136643,84	109357,61	27286,23		0	0,00
Buy	1500	1500	150000000	12/01/2018	2,895%	2,895%	99464,14	2071,23	99464,14	2071,23	34520,55	28098,62	6421,93		0	0,00
Sell	500	1000	100000000	15/01/2018	2,893%	2,893%	99474,52	2094,25	99464,14	2071,23	23013,7	18732,41	4281,29	16700	0	0,00
Sell	1000	0	0	18/01/2018	2,580%	2,550%	99682,04	473,42	99730,82	407,67	0	0,00	0,00	16970	0	0,00
Buy	250	1250	125000000	18/01/2018	2,970%	2,910%	99107,87	2117,26	99392,886	2080,436	0	0,00	0,00		0	0,00
Buy	250	1500	150000000	18/01/2018	2,970%	2,920%	99107,87	2117,26	99345,383	2086,573	0	0,00	0,00		0	0,00
Sell	350	1150	115000000	18/01/2018	2,968%	2,920%	99117,4	2117,26	99345,383	2086,573	0	0,00	0,00	-69054	0	0,00
Sell	150	1000	100000000	18/01/2018	2,968%	2,920%	99117,4	2117,26	99345,383	2086,573	306849,32	249467,30	57382,02	-29594	0	0,00
Buy	500	500	50000000	22/01/2018	2,538%	2,538%	99810,09	0	99810,09	0	26301,37	25063,42	1237,95		0	0,00
Buy	427	427	42700000	24/01/2018	2,550%	2,550%	99829,6	1141,1	99829,6	1141,1	97449,59	90985,47	6464,12		0	0,00

Figure 30 - Onglet de traitement des deals

Insert Deal

Quantité traitée	Disponible	Nominal
700	700	70000000
500	1200	120000000
700	500	50000000
50	50	5000000
1238	1288	128800000
500	0	0
500	500	50000000
500	1000	100000000
491	491	49100000
500	500	50000000

Deals ✕

Code

Quantité

Taux

Value_date

Sell Buy

Figure 31 - Interface pour insertion des deals

- **Valorisation du portefeuille en MtM :**

Dans l'onglet suivant, nous regroupons l'ensemble des positions ouvertes du portefeuille, et nous calculons la market value pour chaque ligne. Nous obtenons le P&L ligne par ligne, ainsi que le latent global du portefeuille.

Market Value

Disponible	Taux marché	Market Value	Var. Accr	Cost of Carry	Global carry	Realized	Unrealized	Cpn reinvesti	P/L
0	2,270%	0,00	837 182,47	752 940,64	84 241,83	62 393,00	0,00	0	-690 547,64
1160	2,308%	120 517 478,82	45 776,71	44 639,17	1 137,54	50 394,18	-9 479,18	0	-3 724,17
1391	2,304%	140 798 265,33	2 424 383,56	1 133 315,48	1 291 068,08	1 215 538,76	178 914,97	0	261 138,25
200	2,290%	20 299 188,79	400 813,14	382 963,28	17 849,86	176 131,38	80 081,59	0	-126 750,31
1900	2,356%	191 668 521,19	830 805,48	810 106,96	20 698,52	793 179,55	353 417,19	0	336 489,78
727	2,444%	74 178 174,40	1 244 054,79	1 186 985,23	57 069,56	1 088 940,00	348 417,13	0	250 371,90
1639	2,460%	171 027 759,27	610 298,36	570 674,49	39 623,87	313 000,67	348 196,40	0	90 522,58
969	2,505%	100 524 465,16	764 870,14	459 173,15	305 696,99	44 560,87	267 122,41	0	-147 489,88
1000	2,528%	100 867 855,56	0,00	0,00	0,00	772 772,27	109 305,56	3452290,2	4 334 368,04
1000	2,548%	103 848 027,15	1 234 481,92	711 053,82	523 428,10	772 772,27	187 559,15	0	249 277,61
1110	2,556%	110 875 124,58	443 767,12	332 288,73	111 478,39	0,00	-10 606,47	0	-342 895,20

Figure 32 - MtM du portefeuille

- **Calcul du P&L :**

Finalement, nous arrivons à calculer le P&L YTD quotidiennement et déterminer le P&L Daily du portefeuille.

Conclusion :

Les composantes du P&L représente l'effet de la courbe, l'effet du temps et l'effet des exécutions. Lorsque aucune opération est traitée, les variations du P&L sont dues au mouvement de la courbe et au portage (coupons et CoC). Selon ses anticipations des mouvements de la courbe et son exposition au risque, le trader peut liquider certaines positions qui engendraient des pertes importantes si des scénarios défavorables se produisent.

II. La gestion du risque de taux

II.1. Introduction

Comme nous l'avons défini précédemment, le risque de taux est le risque auquel sont exposés tous les produits ayant une composante de taux. Un portefeuille obligataire est constamment exposé à ce risque, vu que la moindre variation des taux aura un impact sur la valeur et le résultat de ce portefeuille. Afin de quantifier l'exposition du risque, les gestionnaires des portefeuilles obligataires surveillent constamment les indicateurs de sensibilité. Toutefois, une bonne gestion de risque des taux (IRR management) nécessite non seulement l'observation des indicateurs de risque mais aussi l'anticipation des fluctuations éventuelles des taux, et ce en identifiant les facteurs de risque qui agissent sur la courbe des taux, ainsi que les indicateurs économiques qui peuvent impacter ces facteurs.

Etant donné que différents changements dans la forme de la courbe des taux sont observés dans la pratique, la qualité et l'efficacité de la gestion du risque de taux dépendent de la capacité à générer des scénarios de stress pertinents sur la courbe des taux. En effet, pour estimer leur exposition au risque, les gestionnaires devraient utiliser plusieurs scénarios de stress, qui prennent en compte les variations des différents facteurs de risque impactant la courbe. Par conséquent, mesurer l'exposition au risque exige la spécification un très grand nombre de perturbations des taux d'intérêt.

En fait, dans le deuxième chapitre de ce rapport, nous avons vu que les mouvements des taux d'intérêt sont fortement corrélés et que de nombreuses études ont montré que les changements de forme de la courbe des taux sont attribuables à trois facteurs non observables, souvent appelés niveau, pente et courbure, d'où notre choix de modéliser la courbe par un modèle à trois facteurs. Le modèle de NSD nous a permis d'estimer ces facteurs et de déterminer la structure de leurs dynamiques temporelles. L'interprétation de ces facteurs décrit comment la courbe de rendement change ou change de forme en réponse à un « choc » sur un facteur. D'ailleurs, ces facteurs se sont avérés extrêmement utiles pour réfléchir aux forces motrices de la courbe des taux et qu'ils ont d'importants fondements macroéconomiques⁵.

⁵ Diebold, Rudebush and Aruoba (2006)

II.2. Mesure du risque de taux

Dans le premier chapitre, nous avons défini les différents indicateurs de sensibilité généralement utilisés pour mesurer le risque lié à la variation des taux.

Dans notre cas, nous nous baserons sur la mesure de sensibilité la plus courante qui est la BPV. Cet indicateur mesure la variation de prix qui résultera d'une hausse de 0.01% des taux de rendements, et s'exprime comme suit :

$$\text{BPV} = - 0.01\% \times N \times \text{Sensibilité}$$

Elle permet de mesurer la perte totale que générera une variation de 0.01% des taux. Cette mesure ne prend en compte que des mouvements parallèles de la courbe, c'est-à-dire des variations égales des rendements de toutes les maturités. Certes, le changement de niveau des taux est le changement le plus fréquent de la courbe, et explique d'ailleurs 50% des mouvements⁶. Cependant, une bonne gestion de risque nécessite de prendre en considération tous les facteurs de risques, et donc tous les déplacements éventuels de la courbe.

Nous avons calculé ci-dessous la BPV pour chaque titre du portefeuille. Si les taux augmentent simultanément de 0.01%, la perte globale engendrée sera de 118 781,50 MAD.

Disponible	Nominal	Taux marché	Market Value	BPV
1160	116 000 000	2,303%	120 458 992,10	-5 354,45
400	40 000 000	2,310%	40 466 590,45	-2 020,00
1191	119 100 000	2,325%	120 794 550,21	-7 274,60
1900	190 000 000	2,371%	191 542 742,81	-18 095,90
727	72 700 000	2,438%	74 144 593,32	-9 036,65
1639	163 900 000	2,448%	170 964 139,03	-21 716,35
969	96 900 000	2,487%	100 500 117,83	-16 284,24
1000	100 000 000	2,503%	100 861 040,76	-18 971,06
500	50 000 000	2,514%	51 930 826,41	-20 028,23

Figure 33 - Calcul de BPV

⁶ Litterman and Scheinkman, 1991.

II.2. Variations de la courbe de taux

Les scénarios de stress que nous élaborons porteront sur des chocs de la courbe des taux. De ce fait, pour assurer la pertinence de ces scénarios, il est nécessaire d'étudier les différents mouvements de la courbe des taux, qui reflètent la manière dont varient les taux au cours du temps, et de déterminer les principaux facteurs, économiques, responsables de ces déformations.

Dans un environnement normal des taux d'intérêt, la courbe des taux est concave et croissante. Cependant, la courbe change lorsque les taux d'intérêt en vigueur sur les marchés changent. Lorsque les taux changent de la même ampleur entre les maturités, nous appelons le changement une variation parallèle. Lorsque les rendements changent dans des amplitudes différentes selon les échéances, le changement qui en résulte dans la courbe est une variation non parallèle. Une variation non parallèle des taux d'intérêt peut conduire à un mouvement de pentification ou un mouvement de torsion.

II.2.1. Variations parallèles

Le déplacement en parallèle de la courbe survient lorsqu'il y a une variation identique des taux pour toutes les maturités. Généralement, les gestionnaires de portefeuille ne prennent en considération que ce mouvement pour mesurer leur exposition au risque. Un déplacement en parallèle reflète une hausse ou une baisse des taux d'intérêt simultanément.

Nous avons vu, dans le deuxième chapitre, que le premier paramètre (β_0) de NS est interprété comme le facteur reflétant le niveau de la courbe.

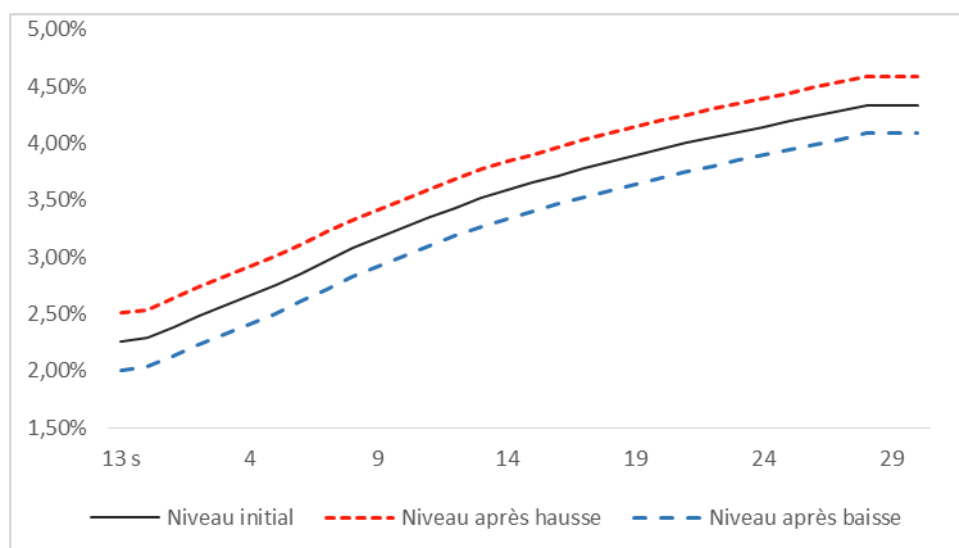


Figure 34 - Variations parallèles de la courbe

II.2.2. Variations non parallèles

Les variations non-parallèles sont des changements de la forme de la courbe. En général, on distingue deux types de variations non parallèles : les mouvements de pentification (twist) et les mouvements de torsion (butterfly).

i. Les mouvements de pentification

Lorsque la courbe se déplace en twist, nous constatons un changement dans sa forme. Cette déformation de la courbe résulte des variations non identiques des taux court et long terme, c'est-à-dire une variation des spreads entre les taux, ce qui mène à un changement de la pente de la courbe. Nous avons vu dans le cadre de NS que le paramètre β_1 reflète la pente de la courbe. Le sens de variation de ce facteur détermine s'il s'agit d'un mouvement de pentification ou s'il s'agit d'un aplatissement de la courbe.

Rappelons que :

$$\beta_1 = R_i(0) - R_i(\infty) ;$$

- Pentification :

Si la courbe des taux se pentifie, cela signifie que l'écart entre les taux d'intérêt à long et à court terme se creuse. En d'autres termes, les rendements des obligations à long terme augmentent plus rapidement que les rendements des obligations à court terme. En d'autres termes, la pente de la courbe augmente, c'est-à-dire que β_1 diminue.

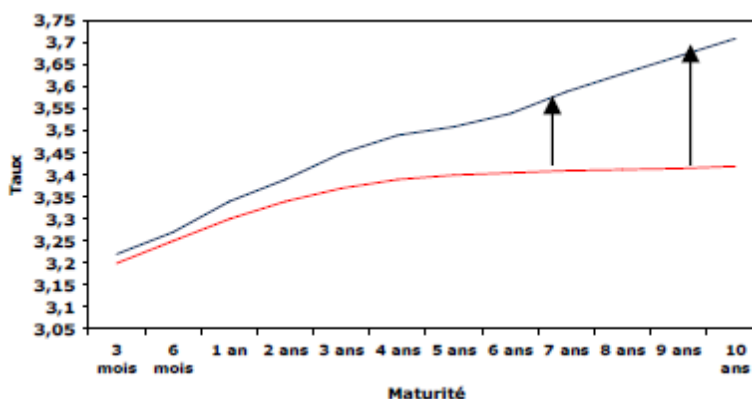


Figure 35 - Pentification de la courbe

- **Aplatissement**

Lorsque les taux d'intérêt convergent, la courbe de rendement s'aplatit. Une courbe de rendement aplatie est définie comme le rétrécissement de l'écart de rendement entre les taux d'intérêt à long et à court terme. L'aplatissement est traduit par une diminution de la pente, c'est-à-dire une augmentation de β_1 .

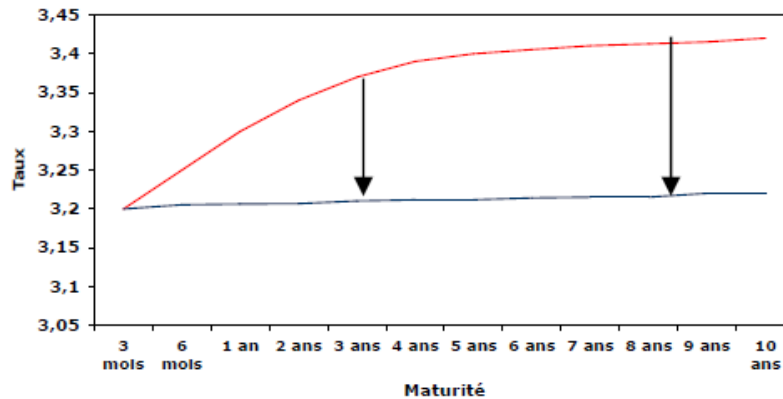


Figure 36 - Aplatissement de la courbe

ii. **Les mouvements de torsion :**

Les mouvements de torsion peuvent conduire à un papillon négatif ou positif, qui sont des termes utilisés pour décrire la forme de la courbe après son déplacement. Rappelons que ces mouvements sont liés au 3ème facteur de NS (β_2).

Le papillon négatif se produit lorsque les taux d'intérêt à court et à long terme diminuent plus que les taux à moyen terme, ce qui accentue le creux de la courbe.

Un papillon positif se produit lorsque les taux d'intérêt à court et à long terme augmentent à un taux plus élevé que les taux à moyen terme. En d'autres termes, les taux à moyen terme augmentent à un rythme moins élevé que les taux à court et à long termes, ce qui entraîne un déplacement non parallèle de la courbe qui réduit la courbe, c'est-à-dire moins courbue.

II.3. Lien avec les indicateurs économiques

Les mouvements de la courbe des taux sont fortement liés à l'économie. Dans la partie précédente, nous avons vu la relation entre les variations des paramètres et les mouvements de la courbe des taux. Dans cette partie, nous essayons d'identifier les principaux facteurs économiques qui affectent la courbe.

Généralement, la partie courte de la courbe des taux, basée sur les taux d'intérêt à court terme, est fortement liée aux anticipations de la politique monétaire. Les taux courts augmentent lorsque l'on prévoit que la banque centrale augmentera ses taux et baissera lorsque les taux d'intérêt devraient être réduits. La partie longue de la courbe des taux est influencée par des facteurs tels que les perspectives d'inflation, la demande et l'offre des investisseurs, la croissance économique, etc.

Pour étudier le cas de la courbe des taux marocaines, nous nous baserons sur 2 indicateurs qui impactent le plus la courbe des taux.

Les variations en parallèle de la courbe marocaine sont liées au changement du taux directeur. Nous pouvons confirmer cela en étudiant l'historique de la courbe et voir comment les niveaux des taux changent avec le TD. Une hausse de ce dernier fait monter simultanément tous les rendements.

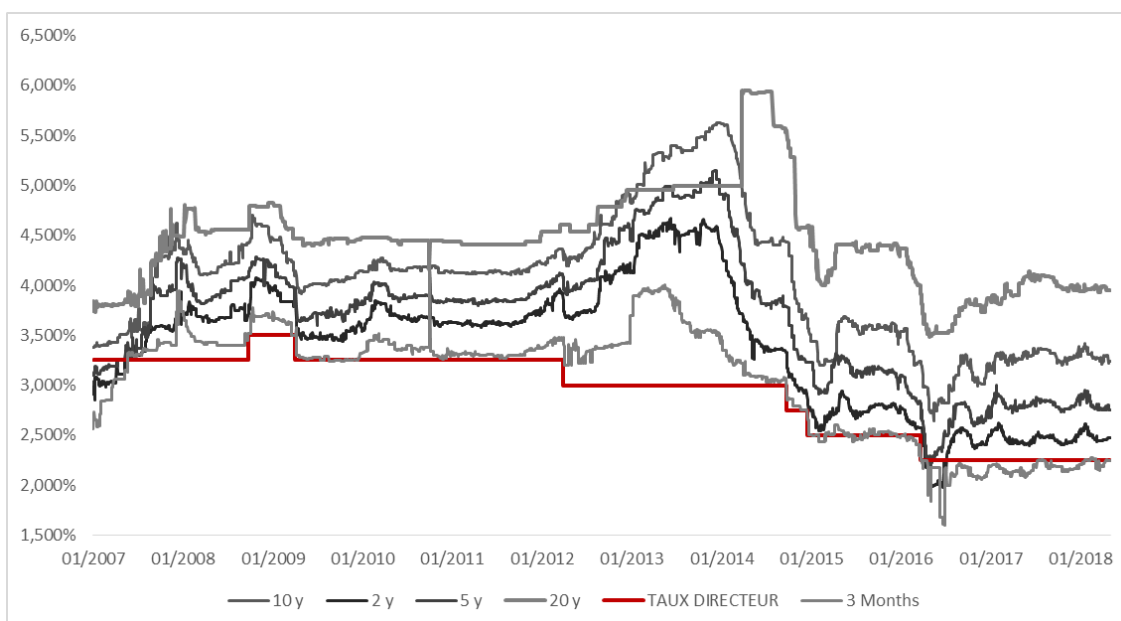


Figure 37 - Evolution des taux avec le TD

Les corrélations entre le taux directeur et les différentes maturités confirment l'impact de cet indicateur sur les niveaux des taux.

Ténors	2 ans	5 ans	10 ans	15 ans
Corr. avec le taux directeur	0,810	0,730	0,661	0,583

Les mouvements de pentifications souvent liées aux anticipations d'inflation futures. Si elles sont en hausse, les investisseurs exigent des taux à long terme plus élevés pour compenser la valeur perdue parce que l'inflation réduit la valeur future d'un investissement.

Dans ce cas, la courbe se pentifie. Cette prime diminue lorsque l'inflation est moins préoccupante.

Ces mouvements sont également liés aux prévisions de la croissance économique. La courbe s'aplatie lorsqu'on prévoit un ralentissement de l'économie.

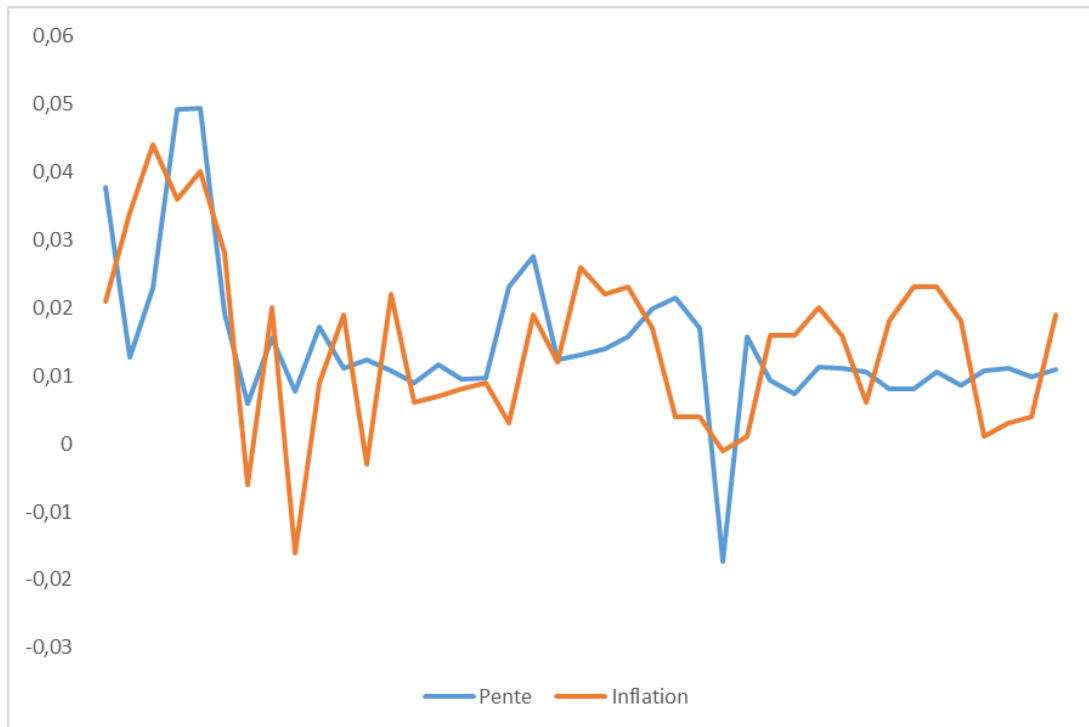


Figure 38 - Evolution de la pente avec l'inflation

Ci-dessus, la variation de la pente avec l'inflation, avec une corrélation égale à 0.551.

II.4. Simulation du portefeuille :

Pour que les traders puissent maîtriser et suivre les risques liés à leur activité, ils sont amenés à contrôler et à mesurer à tout moment les risques associés aux positions et leur impact sur le résultat du portefeuille. Dans ce cadre, il est intéressant d'effectuer des stress tests sur le portefeuille, qui permettent au trader d'évaluer son exposition selon les scénarios macroéconomiques qu'il anticipe.

Un stress test est un exercice qui consiste à simuler des conditions économiques et financières extrêmes ou défavorables mais probables afin d'en étudier les conséquences sur les performances d'un portefeuille. Un stress test permet d'identifier les vulnérabilités d'une stratégie de gestion et de préparer opérationnellement un scénario défavorable. Les stress tests peuvent ainsi être des outils de gestion des risques et d'aide à la décision, à la fois lors de l'acquisition d'un titre et pendant toute la durée de vie du portefeuille.

Sous VBA, nous avons mis en place une application qui nous permet de simuler le portefeuille. Cette application est composée de 2 onglets. Le premier onglet permet de choquer la courbe par un scénario personnalisé, c'est-à-dire qu'on choisit, pour chaque maturité, le nombre de points par lequel on veut choquer le taux correspondant à cette maturité. Ceci permet au trader d'estimer, selon ses anticipations, la perte qui résulterait de ce scénario. Ceci lui permet également d'estimer la perte au cas d'acquisition d'une nouvelle position.

Market Value	BPV
0 458 992,10	-5 354,45

Simulation

Stress tests

Stress test | Stress test NS

52 semaines*

2 ans*

5 ans*

10 ans*

20 ans*

* en points de base

Calcul

Sensibilité

Ce scénario va générer une perte de **1 526 120 MAD**. Cette perte est calculée par la différence entre la valeur MtM initiale et la valeur après choc du total du portefeuille, qui correspond également à la valeur de la BPV multipliée par le nombre de points de base.

Le deuxième onglet de cette application consiste à simuler des scénarios en utilisant les facteurs de NS. Cette simulation nécessite le passage par une étape intermédiaire qui est la valorisation par NS.

Valorisation des BDT par NS :

Pour valoriser les BDT avec les taux NS, qui sont des taux zéro-coupon, nous actualisons chaque flux par le taux ZC qui correspond à sa maturité.

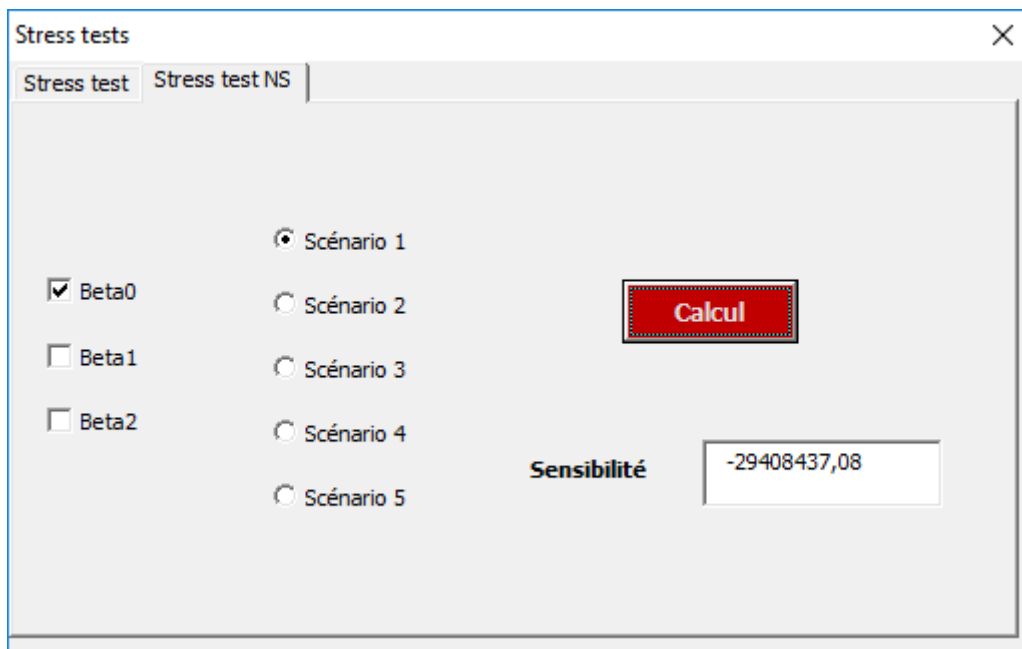
Formule générale :

$$P_{NS} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + r_{NS_i})^{t_i}}$$

Où :

- r_{NS_i} : taux ZC de NS
- n : nombre de flux restants
- t_i : maturité du flux F_i

Le deuxième onglet permet de réaliser des simulations en se basant sur les facteurs de NS. Ces scénarios peuvent être des chocs individuels sur chacun des paramètres et qui dépendent de l'anticipation du trader et de la partie de la courbe qu'il veut choquer, ou des chocs combinés. Nous avons vu dans la partie « modélisation de la dynamique des facteurs » qu'à long terme le choc d'un paramètre est accompagné d'un choc des deux autres. Ainsi si on anticipe un scénario extrême, on peut envisager de choquer les trois paramètres simultanément.



Chaque scénario consiste à choquer le facteur choisi par un certain nombre de points de base, allant de 10 jusqu'à 50. Si le trader anticipe un scénario qui fera monter les taux longs plus que les taux courts, un choc sur Beta1 est approprié. A titre d'exemple, **si Beta1**

diminue de 10 pbs, le taux 10 ans augmenterait de 9 pbs alors que le taux 52 semaines augmenterait d'environ 6 pbs.

Résultats de quelques scénarios :

Scénario	Perte
Beta0 + 25pbs ⁷	29 408 437 MAD
Beta0 + 50pbs	58 825 574 MAD
Beta1 + 25pbs	1 262 942 MAD

Conclusion :

Les facteurs de NS sont avérés très utiles dans cette partie, dans la mesure où ils ont permis de faire des simulations ciblées et selon différents degrés. Les simulations sont très importantes dans le trading car elles nous donnent des idées sur notre exposition au risque et sur les pertes que nous pouvons subir si un scénario défavorable se produit. Ainsi, selon ses anticipations, le trader se base sur les résultats des simulations pour élaborer une stratégie de couverture.

⁷ Pour les taux marocains, ce scénario traduit la hausse du TD par 25 pbs.

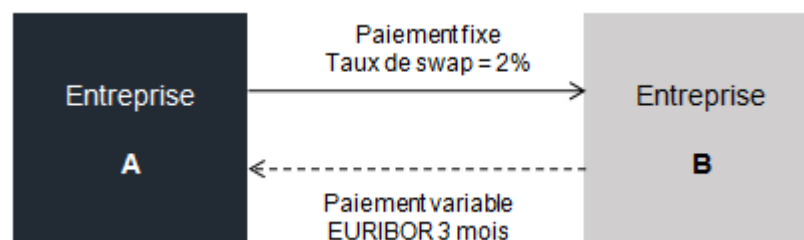
III. Couvertures par les Swaps de taux

III.1. Principe de fonctionnement d'un swap de taux

Un Swap de taux d'intérêt est un contrat qui permet d'échanger un emprunt à taux fixe contre un emprunt à taux variable. Il s'agit d'un produit dérivé négocié de gré à gré. Les Swaps sont très utilisés pour couvrir et gérer le risque de taux sur les marchés obligataires, d'où l'intérêt de ce produit dans notre travail.

Nous nous intéressons aux Swaps d'échange de flux d'intérêts. Le taux variable du Swap sera basé sur les taux zéro-coupon du marché marocain.

Pour mieux comprendre le principe du Swap, prenons deux contreparties A et B, A ayant souscrit à un emprunt à taux fixe et B à un emprunt à taux variable de même nominal. Ces deux parties décident d'échanger leurs dettes et contractent alors un Swap de taux, où A payera le taux variable et B payera le taux fixe. Le payeur du taux fixe est dit vendeur de Swap, et le payeur du taux variable est l'acheteur. Le nominal étant identique pour les deux emprunts, l'échange portera sur le différentiel entre les deux taux.



III.2. Caractéristiques d'un swap de taux

Pour contracter un Swap de taux, nous avons besoin de déterminer ses principales caractéristiques, à savoir :

- **Date de valeur** : C'est la date où le Swap est contracté.
- **Date de maturité** : C'est la date où le Swap prend fin.
- **Date de valorisation** : C'est la date où le Swap est valorisé. Elle est égale à la date de valeur.
- **Nominal du Swap** : C'est le montant emprunté par les 2 contreparties. Le nominal n'intervient pas dans l'échange, il est utile pour les calculs uniquement.
- **Le taux Swap** : Il s'agit du taux fixe qui sera payé par le vendeur du Swap.

Il est déterminé de telle sorte que la valeur de la jambe fixe soit égale à celle de la jambe variable.

Comme nous l'avons défini, le Swap est constitué une partie fixe, généralement appelée jambe fixe, et d'une partie variable, dite jambe variable. Les caractéristiques du Swap comprennent les caractéristiques de ses jambes.

- **Caractéristiques de la jambe fixe du SWAP :**

La jambe fixe du Swap est caractérisée par les éléments suivants :

- **Le taux fixe** : C'est le taux fixe par lequel sont calculés les flux fixe versé par l'acheteur.
- **La périodicité des coupons fixes** : C'est la période au bout de laquelle sont payés les coupons fixes. Généralement, les périodicités sont annuelles, semestrielles ou trimestrielles.
- **La base de calcul** : La base généralement utilisée pour la jambe fixe est : « **Exact/Exact** ».

- **Caractéristiques de la jambe variable du Swap :**

La jambe variable du Swap est caractérisée par les éléments suivants :

- **La périodicité des coupons variables** : C'est la période au bout de laquelle sont payés les coupons variables. Elle est souvent plus petite que la périodicité des coupons fixes.
- **La base de calcul** : Généralement, on utilise la base « **Exact/360** »
- **Le taux variable** : Chaque flux variable est calculé par le taux forward qui correspond à sa maturité.

III.3. Construction de la courbe des taux forward

Un taux forward est un taux portant sur une période future. C'est le taux zéro-coupon à t_1 , calculé à un instant t_0 , et qui correspond à la maturité $t_2 - t_1$, où : $t_0 < t_1 < t_2$.

A l'instant initial t_0 , nous ne disposons que des taux zéro-coupon de ce jour. Or, nous souhaitons connaître le taux zéro-coupon correspondant à une maturité T débutant à un instant ultérieur t_1 . Pour ce faire, nous devons calculer, à t_0 , le taux forward qui débute en t_1 et prend fin à t_2 .

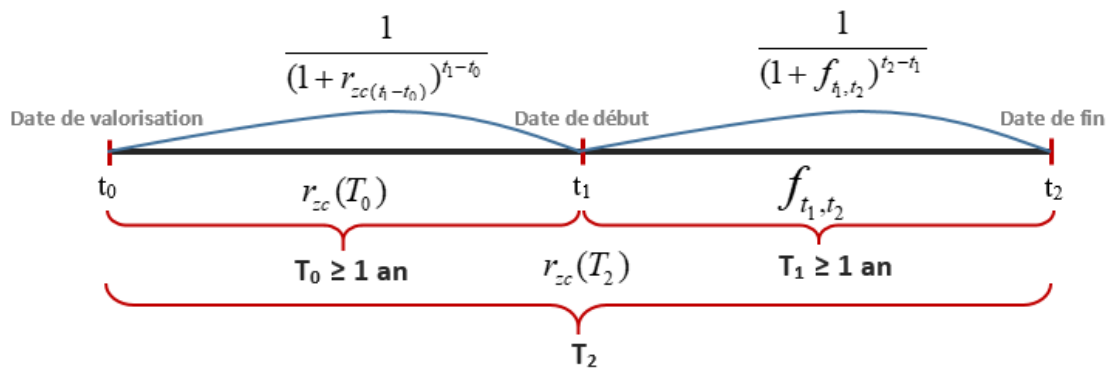
On distingue entre cinq cas de figures pour le calcul des taux forward, selon que les périodes de calcul ($[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ et $[t_0, t_2]$) sont inférieures ou supérieures à 1 an. Cette condition intervient dans les formules d'actualisation pour déterminer si nous sommes en base monétaire ou base actuarielle. Nous explicitons ci-dessous les étapes de calcul. Nous noterons les trois périodes d'intérêt comme suit :

- $T_0 \approx [t_0, t_1]$
- $T_1 \approx [t_1, t_2]$
- $T_2 \approx [t_0, t_2]$

Plaçons-nous à l'instant t_0 et supposons que deux flux unitaires sont versés aux instants successifs t_1 et t_2 . A t_0 , les taux zéro-coupon correspondant, respectivement aux maturités T_0 et T_2 , sont connus. Nous cherchons donc à calculer le taux zéro-coupon correspondant à la maturité T_1 , qu'on notera f_{t_1, t_2} . Il s'agit du taux forward de maturité T_1 (qui débute à t_1 et prend fin à t_2).

• **Cas 1 : $t_1 - t_0 \geq 1$ an et $t_2 - t_1 \geq 1$ an :**

Dans ce cas nous utilisons les formules d'actualisation correspondantes à la base actuarielle.



Pour calculer le taux forward f_{t_1, t_2} , nous allons ramener nos flux en t_1 et t_2 à la date t_0 .

Le flux unitaire en t_2 vaut en t_0 :

$$F_1 = \frac{1}{(1 + r_{zc}(T_2))^{t_2 - t_0}}$$

D'autre part, ce même flux unitaire en t_2 vaut en t_1 :

$$F_1 = \frac{1}{(1 + f_{t_1, t_2})^{t_2 - t_1}}$$

Ce dernier vaut en t_0 :

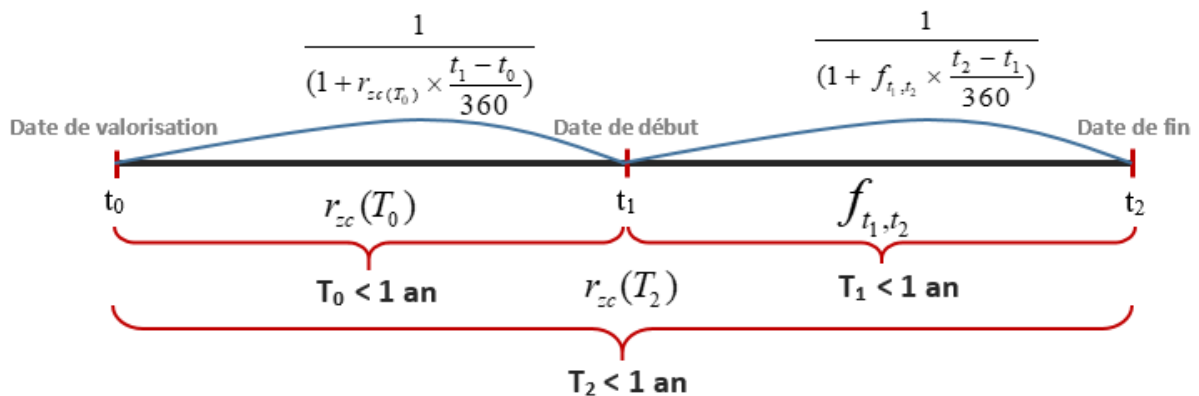
$$F_1 = \frac{1}{(1 + f_{t_1, t_2})^{t_2 - t_1}} \times \frac{1}{(1 + r_{zc(t_1 - t_0)})^{t_1 - t_0}}$$

En égalisant les deux flux, on obtient le taux forward :

$$f_{t_1, t_2} = \left(\frac{(1 + r_{zc(t_2 - t_0)})^{t_2 - t_0}}{(1 + r_{zc(t_1 - t_0)})^{t_1 - t_0}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1$$

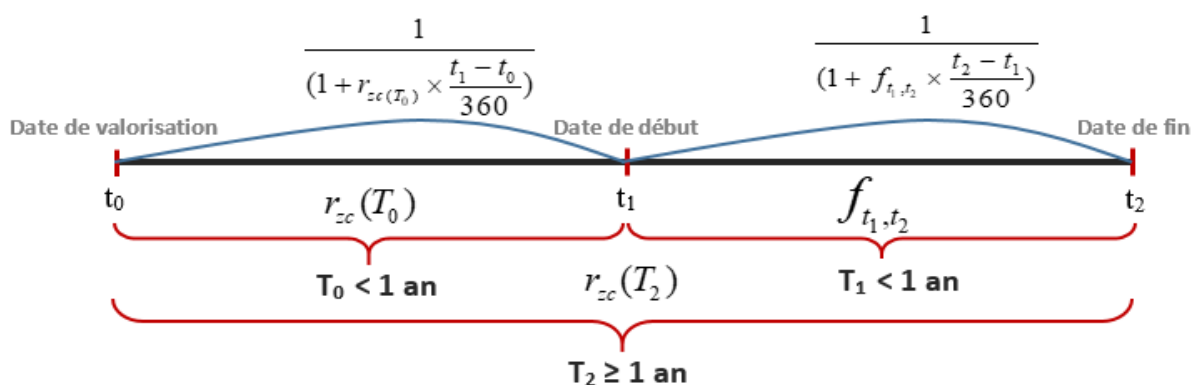
Pour tous les cas qui restent, nous allons suivre le même raisonnement. Nous obtenons :

- **Cas 2** : $t_1 - t_0 < 1$ an, $t_2 - t_1 < 1$ an, et $t_2 - t_0 < 1$ an :



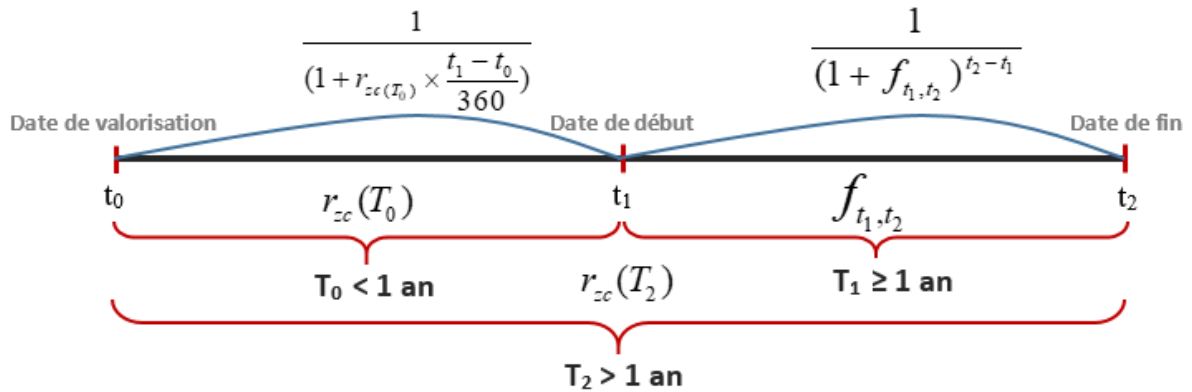
$$f_{t_1, t_2} = \left(\frac{1 + r_{zc(t_2 - t_0)} \times \frac{t_2 - t_0}{360}}{1 + r_{zc(t_1 - t_0)} \times \frac{t_1 - t_0}{360}} - 1 \right) \times \frac{360}{t_2 - t_1}$$

- **Cas 3** : $t_1 - t_0 < 1$ an, $t_2 - t_1 < 1$ an, et $t_2 - t_0 \geq 1$ an :



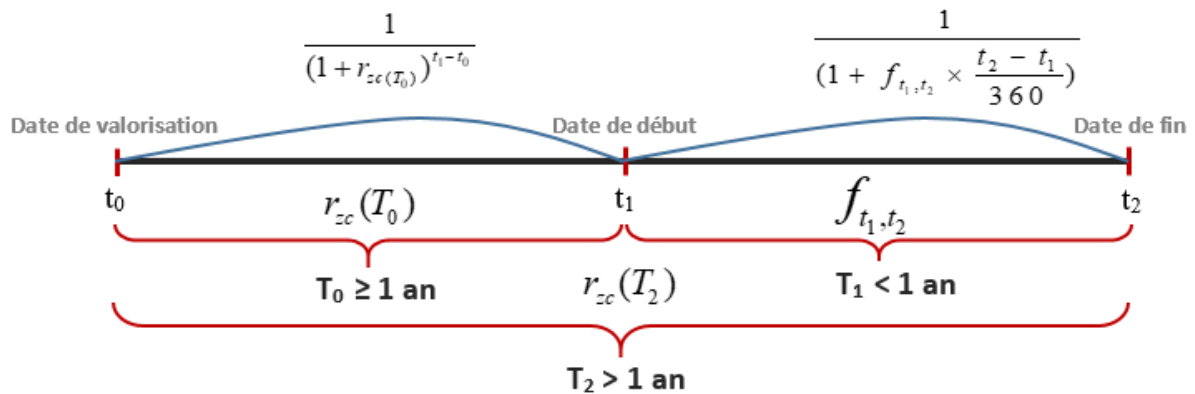
$$f_{t_1, t_2} = \left(\frac{(1 + r_{zc(t_2 - t_0)})^{t_2 - t_0}}{1 + r_{zc(t_1 - t_0)} \times \frac{t_1 - t_0}{360}} - 1 \right) \times \frac{360}{t_2 - t_1}$$

- **Cas 4** : $t_1 - t_0 < 1$ an et $t_2 - t_1 \geq 1$ an :



$$f_{t_1, t_2} = \left(\frac{(1 + r_{zc(t_2 - t_0)})^{t_2 - t_0}}{1 + r_{zc(t_1 - t_0)} \times \frac{t_1 - t_0}{360}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}}$$

- **Cas 5** : $t_1 - t_0 \geq 1$ an et $t_2 - t_1 < 1$ an :



$$f_{t_1, t_2} = \left(\frac{(1 + r_{zc(t_2 - t_0)})^{t_2 - t_0}}{(1 + r_{zc(t_1 - t_0)})^{t_1 - t_0}} - 1 \right) \times \frac{360}{t_2 - t_1}$$

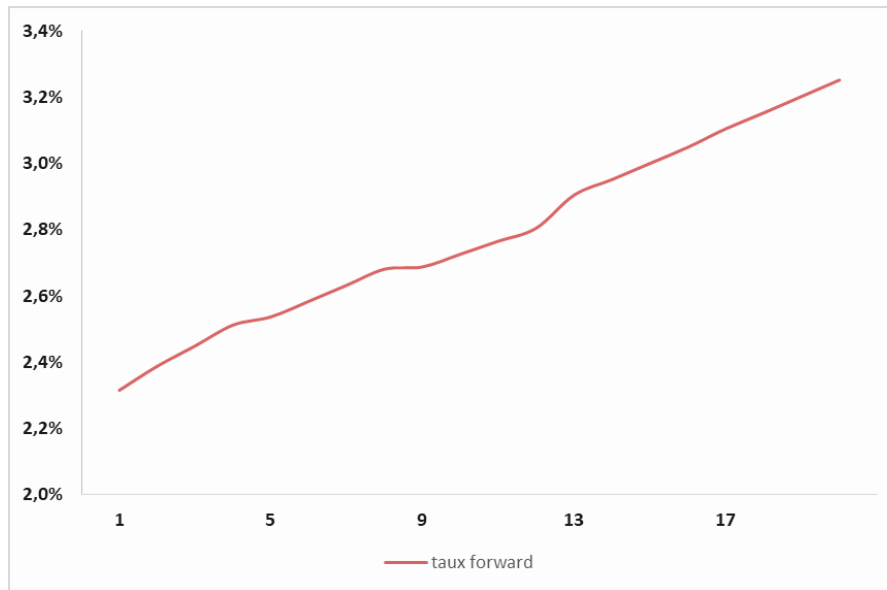


Figure 39 - Courbe forward construite

III.4. Valorisation d'un Swap de taux

Nous passons maintenant à l'évaluation des swaps de taux d'intérêt. Un swap de taux d'intérêt vaut zéro lorsqu'il est initié. Après avoir existé pendant un certain temps, sa valeur peut être positive ou négative. Il existe deux approches d'évaluation. La première considère le swap comme la différence entre deux obligations ; le second le considère comme un portefeuille de FRA.

- **L'approche obligataire** : Un Swap peut être vu comme la différence entre deux obligations de même maturité, la première à taux variable et la seconde à taux fixe ;
- **L'approche FRA** : Un contrat FRA peut être vu comme un swap. La différence est qu'un contrat FRA correspond à un échange de flux à une date unique tandis que les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Ainsi, un swap peut être considéré comme un portefeuille de FRAs.

Dans notre cas, nous utilisons l'approche obligataire pour évaluer un swap payeur de taux fixe.

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

- F : flux fixe à chaque date de paiement ;
- V : flux variable à la prochaine date de paiement ;
- V_i : $i^{\text{ème}}$ flux variable ;
- N : notionnel du swap ;

- T_i : durée de la date de valorisation jusqu'à la $i^{\text{ème}}$ date de paiement (tenant compte la base de calcul considérée) ;
- n_i : nombre de jour entre les versements des flux, ou entre la date de valorisation et la date de versement s'il s'agit du premier flux
- N_v : nombre total des prochains flux variables ;
- N_f : nombre total des prochains flux fixe ;
- $r_{zc}(T)$: taux zéro-coupon de maturité T ;
- f_{t_{i-1}, t_i} : taux forward entre t_{i-1} et t_i vu depuis la date de valorisation ;
- B_{fixe} : valeur de l'obligations à taux fixe ;
- B_{var} : valeur de l'obligation zéro-coupon à taux variable.

Pour actualiser les flux, nous utilisons le facteur d'actualisation.

- **Le facteur d'actualisation**, connu par « Discount factor », est le facteur par lequel un flux financier futur doit être multiplié afin d'obtenir sa valeur actuelle. Ces facteurs sont calculés à partir des taux zéro-coupon comme suit :

$$df = e^{-r_{zc}(T) \times T}$$

Avant de valoriser le swap, nous devons déterminer le taux du Swap.

- Calcul du taux de swap :

C'est le taux d'intérêt fixe qui sera versé par le vendeur du Swap. Il est exigé par l'acheteur du Swap en échange de l'incertitude liée aux variations du taux variable qu'il sera amené à payer.

Le taux Swap est déterminé en égalisant les flux d'intérêts fixes actualisés et les flux d'intérêts variables actualisés à la date de valorisation du Swap, où :

$$\text{Flux variable à } t_0 = \sum_{j=1}^{N_v} V_j e^{-r_{zc}(T_j) T_j}$$

$$\text{Flux fixe à } t_0 = \sum_{i=1}^{N_f} F e^{-r_{zc}(T_i) T_i}$$

Avec :

$$F = r_{\text{Swap}} \times N \times \frac{n_i}{365} ; \text{ et } V_i = f_{t_{i-1}, t_i} \times N \times \frac{n_i}{360}$$

Le taux de swap est donc solution de l'équation :

$$\sum_{j=1}^{N_v} f_{t_{j-1}, t_j} \times \frac{n_j}{360} \times e^{-r_{zc}(T_j)T_j} = \sum_{i=1}^{N_f} r_{swap} \times \frac{n_i}{365} \times e^{-r_{zc}(T_i)T_i}$$

- Evaluation du swap par l'approche obligataire :

Considérons un swap payeur de taux fixe. La jambe fixe de ce swap sera assimilée à l'obligation à taux fixe, tandis que la jambe variable sera assimilée à l'obligation zéro-coupon à taux variable. Les coupons fixes seront versés annuellement, et les flux variables seront versés chaque 3 mois.



La valeur de la jambe fixe est égale à la somme des flux actualisés y compris le nominal, soit :

$$B_{fixe} = \sum_{i=1}^{N_f} F e^{-r_{zc}(T_i)T_i} + N e^{-r_{zc}(T)T} ;$$

Où : T est la maturité résiduelle de l'obligation, soit la durée entre la date de valorisation et la maturité du swap.

Etant assimilée à une obligation zéro-coupon, la valeur de la jambe variable est égale à la somme du prochain flux variable et du nominal actualisés, soit :

$$B_{var} = (V + N) e^{-r_{zc}(T)T} ;$$

Où : T est la durée entre la date de valorisation et la date du versement du prochain coupon variable.

Finalement la valeur d'un Swap de taux est donnée par la différence entre les valeurs des deux jambes. Le swap que nous avons considéré est payeur de taux fixe, donc la valeur de ce swap est donnée par :

$$V_{swap} = B_{var} - B_{fix}$$

III.5. Stratégie de couverture par un Swap de taux :

L'objectif de contracter des swaps de taux est très souvent la couverture contre le risque de taux. Nous avons vu que notre portefeuille obligataire est exposé en permanence

au risque de taux. Une hausse des taux par uniquement 0.01% peut engendrer des pertes considérables surtout si on dispose des maturités long terme. Selon nos objectifs, nous pouvons contracter un swap de taux pour couvrir le risque d'une seule obligation, d'une partie du portefeuille, ou de tout le portefeuille.

Comme nous disposons d'un portefeuille de produits à taux fixe, l'idéal serait de contracter un swap qui nous verse du taux variable. Ainsi, si les taux montent nous devons être en mesure de compenser la perte au niveau du portefeuille par la soulte du swap.

Pour couvrir une position donnée par un swap de taux, nous devons prendre en considération la duration de l'obligation ou les obligations qu'on cherche à couvrir. Ensuite, le nominal du swap doit être déterminée de façon à ce qu'il y ait équilibre entre la sensibilité du swap et celle de l'obligation. Nous devons avoir :

$$\text{Nominal (swap)} \times \text{Sensi (swap)} = \text{Nominal (oblig)} \times \text{Sensi (oblig)}$$

Cette propriété de pondération des sensibilités garantit, lors d'une variation des taux, que la variation de la valeur du swap compensera la variation du prix de l'obligation. Ainsi, la perte est évitée. Une fois le nominal du SWAP déterminé, on calcule le taux swap de la même manière que dans la section précédente.

III.6. Elaboration d'un pricer de Swap :

Sous VBA, nous avons élaboré un pricer qui nous permet de valoriser les Swap de taux selon les formules précédentes. Après le calcul des taux forward, nous devons spécifier les caractéristiques de chaque jambe pour pouvoir calculer tous les flux futurs. Ensuite, en actualisant ces flux par le biais des discount factors (DF), nous parvenons à déterminer le taux fixe de ce Swap en égalisant les flux actualisés. Ce qui nous permet au final de calculer la soulte à n'importe quelle date donnée à partir de la date de valeur.

Date de valeur	19/02/2018	
Date de maturité	19/02/2023	
Notional	1 000 000 DH	
Flux fixes		
Taux de Swap	3,532%	Calcul des flux
Périodicité	12	
Base calendaire	Actual/365	
Jambe fixe	1 000 113,11	
Flux variables		
Périodicité	3	Pricer
Base calendaire	Actual/360	
Jambe variable	1 000 113,11	
Valeur du Swap		0,00
<u>19/02/2018</u>		

Figure 40 - Interface du Pricer des swaps

Flux variable						Flux fixe					
Value date	Maturity date	Rate	Cash-Flows	DF	CF Discounted	Value date	Maturity date	Rate	Cash-Flows	DF	CF Discounted
19/02/2018	19/05/2018	2,316%	5 724,65	0,994	5 692,71	19/02/2018	19/02/2019	3,532%	35 323,64	0,976	34 480,16
19/05/2018	19/08/2018	2,388%	6 103,09	0,968	6 032,73	19/02/2020	19/02/2021	3,532%	35 420,42	0,925	32 771,97
19/08/2018	19/11/2018	2,449%	6 259,19	0,982	6 148,86	19/02/2021	19/02/2022	3,532%	35 323,64	0,898	31 728,97
19/11/2018	19/02/2019	2,512%	6 420,70	0,976	6 265,28	19/02/2022	19/02/2023	3,532%	1035 323,64	0,870	901 132,02
19/02/2019	19/05/2019	2,537%	6 272,27	0,970	6 081,71						
19/05/2019	19/08/2019	2,584%	6 603,61	0,963	6 361,24						
19/08/2019	19/11/2019	2,633%	6 727,57	0,957	6 436,64						
19/11/2019	19/02/2020	2,681%	6 851,55	0,950	6 511,32						
19/02/2020	19/05/2020	2,688%	6 719,93	0,944	6 344,76						
19/05/2020	19/08/2020	2,726%	6 967,28	0,938	6 532,39						
19/08/2020	19/11/2020	2,766%	7 067,48	0,931	6 579,36						
19/11/2020	19/02/2021	2,805%	7 168,08	0,924	6 624,96						
19/02/2021	19/05/2021	2,905%	7 180,68	0,918	6 589,53						
19/05/2021	19/08/2021	2,952%	7 542,89	0,911	6 870,11						
19/08/2021	19/11/2021	3,000%	7 667,11	0,904	6 930,15						
19/11/2021	19/02/2022	3,049%	7 791,39	0,897	6 988,09						
19/02/2022	19/05/2022	3,105%	7 675,34	0,890	6 831,76						
19/05/2022	19/08/2022	3,153%	8 056,39	0,883	7 113,84						
19/08/2022	19/11/2022	3,202%	8 182,86	0,876	7 167,11						
19/11/2022	19/02/2023	3,252%	1008 309,55	0,869	875 928,87						

Figure 41 - Flux du swap

Conclusion :

Dans cette partie, nous avons mis en lumière l'importance du swap de taux en tant que moyen de couverture. Et bien que ces produits soient très répandus parmi les traders au niveau international, ils se font cependant rares sur le marché marocain. Il serait donc important pour la salle des marchés SGMA de considérer ces produits dans le but d'améliorer la performance de leur activité au niveau du desk taux.

Conclusion

Notre travail s'est basé sur deux étapes principales, la première étant la modélisation de la courbe des taux et la deuxième a porté sur la gestion d'un book de trading obligataire. L'objectif principal était de relier les mouvements de la courbe des taux à la performance du portefeuille. Nous avons envisagé l'un des modèles les plus répandus et connu pour sa performance de modéliser et prévoir le comportement des taux.

Le modèle de Nelson et Siegel statique permet de construire la courbe des taux zéro-coupon d'une manière plus sophistiquée et améliore de ce fait la valorisation des produits. Nous nous sommes intéressés dans cette étude à l'extension dynamique de ce modèle. Ce deuxième modèle, dit Nelson Siegel dynamique, propose de modéliser non seulement la courbe des taux mais le comportement des trois paramètres. Cette modélisation s'avère très utile pour expliquer l'ensemble des mouvements des taux puisque ces derniers se résument dans les mouvements des facteurs en question.

L'analyse du comportement de ses paramètres permet de comprendre le comportement général des taux à long et à court terme. Nous avons mis en place un modèle VECM qui nous a permis de dresser les différentes relations entre les paramètres à long et à court terme. L'objectif de cette analyse est de réaliser des simulations sur le portefeuille de manière précise et efficace en se basant sur nos trois facteurs d'intérêt. En effet, cette stratégie permet de réduire le nombre des paramètres à choquer (les taux de différentes maturités), et de choquer la partie cible de la courbe selon les anticipations du trader.

Pour aboutir à cette partie, une étape intermédiaire a été très importante, qui est l'évaluation du portefeuille. Cette partie a porté en premier lieu sur la valorisation des bons de trésors en élaborant un pricer sous VBA, et ensuite sur l'évaluation de la performance globale du portefeuille en élaborant un outil qui permet de faire le suivi du P&L. Cette étape est importante dans la mesure où le P&L représente l'indicateur le plus important pour le trader.

D'ailleurs, par le biais des stress tests réalisés, nous avons cherché principalement à voir l'impact des mouvements des taux sur le P&L du portefeuille. Les résultats du stress testing doivent ensuite conduire à l'élaboration d'une stratégie de couverture contre le risque selon le ou les scénarios anticipés. Les swaps de taux ont été choisis à cet égard. Ces produits sont connus par leur utilisation pour se couvrir contre le risque de taux. Nous avons élaboré sous VBA un pricer de swaps. Le choix des caractéristiques du swap se fait selon la partie qu'on cherche à couvrir (une obligation, une partie du portefeuille ou la totalité du portefeuille). Le principe de cette stratégie est d'éviter une perte potentielle au cas d'une hausse de taux en échangeant des flux fixes contre des flux variables.

Bibliographie:

- [1] HULL, J. Options, futures and other derivatives (8th edition).
- [2] DIEBOLD, F & Li, C. Forecasting the term structure of government bond yields, Journal of Econometrics 130, 2006.
- [3] BOURBONNAIS, R. Econométrie, Dunod, 2004.
- [4] DIEBOLD, F & RUDEBUSCH, D & ARUOBA, S. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach, Journal of Econometrics 131, 2006.
- [5] STANDER, Y. Yield curve modeling, Palgrave Macmillan, 2005.
- [6] AMMC, Circulaire d'OPCVM, n°02/04.

Webographie :

- [1] <https://www.investopedia.com/>
- [2] <http://www.bkam.ma/>
- [3] <http://www.ammc.ma/>
- [4] <https://www.fimarkets.com/>

Annexe : Test ADF sur les facteurs de NS

Test de stationnarité de Beta0 :

Null Hypothesis: BETA0 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.664148	0.7670
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA0)
Method: Least Squares
Date: 06/14/18 Time: 00:31
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA0(-1)	-0.001707	0.001025	-1.664148	0.0962
D(BETA0(-1))	-0.110859	0.016651	-6.657696	0.0000
C	8.88E-05	6.19E-05	1.435136	0.1513
@TREND("2/18/2004")	-3.04E-09	8.38E-09	-0.362974	0.7166

Null Hypothesis: BETA0 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.692630	0.4350
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA0)
Method: Least Squares
Date: 06/14/18 Time: 00:32
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA0(-1)	-0.001531	0.000905	-1.692630	0.0906
D(BETA0(-1))	-0.110993	0.016645	-6.668172	0.0000
C	7.43E-05	4.74E-05	1.569456	0.1166

Null Hypothesis: BETA0 has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.898034	0.3272
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Test de stationnarité de Beta1 :

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.454425	0.8447
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1)
Method: Least Squares
Date: 06/14/18 Time: 00:36
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA1(-1)	-0.001393	0.000958	-1.454425	0.1459
D(BETA1(-1))	-0.097719	0.016701	-5.851057	0.0000
C	-6.45E-05	9.62E-05	-0.670161	0.5028
@TREND("2/18/2004")	-9.90E-09	3.69E-08	-0.268320	0.7885

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.490938	0.5383
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1)
Method: Least Squares
Date: 06/14/18 Time: 00:37
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA1(-1)	-0.001420	0.000952	-1.490938	0.1361
D(BETA1(-1))	-0.097668	0.016698	-5.849155	0.0000
C	-8.35E-05	6.50E-05	-1.284732	0.1990

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.765215	0.3850
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Test de stationnarité de Beta2 :

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.679436	0.7604
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(BETA2)
 Method: Least Squares
 Date: 06/14/18 Time: 00:42
 Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA2(-1)	-0.001832	0.001091	-1.679436	0.0932
D(BETA2(-1))	-0.101091	0.016703	-6.052155	0.0000
C	-6.62E-05	8.54E-05	-0.774840	0.4385
@TREND("2/18/2004")	-6.63E-09	3.58E-08	-0.185148	0.8531

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.689187	0.4367
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(BETA2)
 Method: Least Squares
 Date: 06/14/18 Time: 00:43
 Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA2(-1)	-0.001841	0.001090	-1.689187	0.0913
D(BETA2(-1))	-0.101070	0.016701	-6.051833	0.0000
C	-7.82E-05	5.51E-05	-1.419555	0.1558

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.944923	0.3076
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Test de stationnarité de Beta0 en différence première :

Null Hypothesis: D(BETA0) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-66.77418	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA0,2)
Method: Least Squares
Date: 06/18/18 Time: 17:46
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA0(-1))	-1.111675	0.016648	-66.77418	0.0000
C	-1.10E-05	1.51E-05	-0.730153	0.4653
@TREND("2/18/2004")	3.52E-09	7.40E-09	0.475963	0.6341

Null Hypothesis: D(BETA0) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-66.77995	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA0,2)
Method: Least Squares
Date: 06/18/18 Time: 17:47
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA0(-1))	-1.111600	0.016646	-66.77995	0.0000
C	-4.81E-06	7.56E-06	-0.636226	0.5247

Null Hypothesis: D(BETA0) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-66.78259	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Test de stationnarité de Beta1 en différence première :

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-65.79028	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1,2)
Method: Least Squares
Date: 06/18/18 Time: 17:49
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA1(-1))	-1.098445	0.016696	-65.79028	0.0000
C	2.32E-05	7.50E-05	0.308765	0.7575
@TREND("2/18/2004")	-1.55E-08	3.67E-08	-0.422966	0.6723

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-65.79667	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1,2)
Method: Least Squares
Date: 06/18/18 Time: 17:50
Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA1(-1))	-1.098387	0.016694	-65.79667	0.0000
C	-4.32E-06	3.75E-05	-0.115318	0.9082

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-65.80577	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Test de stationnarité de Beta2 en différence première :

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-65.99818	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.960632	
5% level	-3.411075	
10% level	-3.127358	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(BETA2,2)
 Method: Least Squares
 Date: 06/18/18 Time: 17:51
 Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA2(-1))	-1.102042	0.016698	-65.99818	0.0000
C	7.76E-06	7.32E-05	0.106006	0.9156
@TREND("2/18/2004")	-9.22E-09	3.58E-08	-0.257512	0.7968

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-66.00648	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432010	
5% level	-2.862159	
10% level	-2.567143	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(BETA2,2)
 Method: Least Squares
 Date: 06/18/18 Time: 17:52
 Sample (adjusted): 2/20/2004 5/24/2018
 Included observations: 3540 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA2(-1))	-1.102019	0.016696	-66.00648	0.0000
C	-8.57E-06	3.66E-05	-0.234287	0.8148

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=29)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-66.01490	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565615	
5% level	-1.940913	
10% level	-1.616639	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

