

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*_*

**INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**



*_*_*_*_*_*_*_*_*

Projet de Fin d'Études

*_*_*_*_*

*Le risque de mortalité et son impact sur l'exigence en capital
sous Solvabilité 2*

Préparé par : **MEJBAR Kenza**

Sous la direction de : **M. Arnauld CORLOUER (ALTIA)**

M. Fouad MARRI (INSEA)

Soutenu Publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'ingénieur d'Etat

Option : **Actuariat-Finance**

Devant le jury composé de :

M. Arnauld CORLOUER : Chef de missions expérimenté chez ALTIA

M. Driss EFFINA : Professeur à l'INSEA

M. Fouad MARRI : Professeur à l'INSEA

M. Mustapha LEBBAR : Président de l'Association Marocaine des actuaires

Dédicaces

Ce travail est destiné à toutes les personnes chères à mon cœur, à commencer par mes parents, auxquels je souhaite une longue et heureuse vie. Vient juste après le reste de la famille : Mon cher frère, ma chère sœur et son mari, ma petite nièce Sarah, mes grands-parents, mes tantes et mes oncles... C'est bien leur amour et leurs encouragements qui m'aident à tenir bon.

Au-delà du cadre familial, on rencontre des personnes qui elles aussi embellissent notre vie, ce sont nos amis et nos professeurs.

Le respect de l'autre et le partage de l'information, qu'on apprend à leurs côtés sont les règles de base d'une vie en communauté épanouie.

Chacune de ces personnes est une raison d'être pour moi, je leur souhaite santé, bonheur et prospérité.

Kenza MEJBAR

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier mon maître de stage, Monsieur **Arnauld CORLOUER** chef de mission expérimenté chez ALTIA qui n'a ménagé aucun effort pour le bon déroulement de mon stage et pour son encadrement.

Mes remerciements s'en vont également à l'endroit de monsieur **Gilles DEPOMMIER** directeur associé chez ALTIA qui m'a assisté et avec qui j'ai beaucoup appris.

Mes ardents remerciements s'adressent également à monsieur le professeur **Fouad Marri** pour ses précieuses directives et pour sa disponibilité et ce malgré la distance.

J'exprime ma gratitude et mes vifs sentiments de reconnaissance à l'Association Marocaine des Actuaires présidée par monsieur **Mustapha LEBBAR**, au Cabinet ALTIA présidé par monsieur **Hervé DOUARD** et à l'INSEA pour leur confiance.

Je tiens également à exprimer mes remerciements les plus sincères à tous les collaborateurs d'ALTIA, notamment, **Aude SERVIER**, **Fatou FALL**, **Soukaina Ftouhi**, **Nadia BENBARKA**, ainsi que tous les autres consultants d'ALTIA pour leur sympathie et leur bonne humeur.

Que tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail trouvent l'expression de nos remerciements les plus chaleureux.

RESUME

Aujourd'hui, une véritable révolution est en train de s'opérer celle de la perception des risques que peut encourir une société d'assurance. En particulier, le risque de mortalité pour l'assurance vie.

Face à l'allongement des durées de vie ainsi que l'évolution de la mortalité, les sociétés d'assurance peuvent supporter des pertes techniques importantes d'où l'intérêt de bien quantifier ce risque.

Ce rapport propose alors une analyse du risque de mortalité et de son impact sur l'exigence de capital sous solvabilité 2. Cette étude s'appuie tout d'abord sur les modèles classiques de construction de tables de mortalité prospectives pour l'anticipation de la mortalité future. Cette prévision de la mortalité future est indispensable dans un cadre de tarification et de provisionnement des contrats viager et à développement long. Pour prendre en compte l'incertitude sur les nombres de décès, un modèle stochastique a été développé.

Le but étant ensuite d'évaluer le SCR mortalité avec les deux approches standard et modèle interne et voir le plus adéquat pour répondre aux besoins des compagnies d'assurance.

Mots clés :

Solvabilité 2, table de mortalité, prospective, SCR, best estimate, standard, modèle interne, risque de mortalité.

Table des figures

Figure1 : Processus Lamfalussy.....	10
Figure2:Schéma illustratif des 3 piliers de solvabilité2.....	11
Figure 3 : Le bilan économique sous solvabilité 2.....	18
Figure 4 : Schéma de calcul du capital de solvabilité 2 requis (SCR)	22
Figure 5 : Aperçu du fichier de calcul de la provision	24
Figure 6 : Illustration de la méthode Newton-Raphson	34
Figure7 : Variation des alpha Lee-Carter en fonction de l'âge.....	36
Figure 8 : Variation des beta Lee-Carter en fonction de l'âge.....	37
Figure 9 : Estimation de K(t) Lee-Carter.....	37
Figure 10 : Variation temporelle obtenue par le modèle Lee-Carter.....	38
Figure 11 : Estimation des alpha log-poisson et comparaison avec alpha Lee-Carter.....	43
Figure 12 : Estimation des beta log-poisson et comparaison avec beta Lee-Carter.....	43
Figure 13 : Estimation des Kappa log-poisson.....	44
Figure 14 : Variance temporelle obtenue par le modèle log-poisson.....	45
Figure 15 : Variance des taux de décès bruts.....	46
Figure 16 : Algorithme général du test de stationnarité.....	50
Figure 17 : Test d'ADF pour le modèle général de la série Kappa	51
Figure 18 : Test d'ADF pour le modèle avec constante de la série Kappa	52
Figure 19 : La série de première différence de Kappa	53
Figure 20 : Test d'ADF pour le modèle général de la série de première différence de Kappa.....	53
Figure 21 : La série de deuxième différence de Kappa	54
Figure 22 : Test d'ADF du modèle sans constante et sans tendance de la série de deuxième différence de Kappa.....	54
Figure 23 : Le corrélogramme de la série de deuxième différence de Kappa	55
Figure 24 : L'estimation des paramètres du modèle ARIMA(1,2)	56
Figure 25 : Le corrélogramme des résidus du modèle ARIMA(1 ,2 ,2).....	56
Figure 26 : Le test de Jarque Bera sur les résidus.....	57
Figure 27 : Le teste d'Arch d'homoscédasticité.....	57

Figure 28 : Les projections de $K(t)$ de 2009 à 2030.....	58
Figure 29 : Table prospective obtenue par le modèle log-poisson et projection de la série ARIMA(1,2).....	59
Figure 30 : Résultat modèle de Brass sur la population d'expérience.....	63
Figure 31 : Calcul du best estimate déterministe.....	64
Figure 32 : Calcul du SCR standard.....	64
Figure 33 : Aperçu Excel de l'estimation de la moyenne de la loi de poisson.....	66
Figure 34 : Aperçu Excel sur les simulations de la loi de poisson pour l'année 2009	67
Figure 35 : Aperçu Excel sur le nombre de survivants obtenu par simulation de poisson.....	68
Figure 36 : Distribution de la provision totale.....	69
Figure 37 : Test de Kolmogrov Smirnov.....	69
Figure 38 : Le Q-Qplot pour l'adéquation de la provision totale à une loi normale.....	70

Liste des abréviations :

ADF	Augmented Dickey Fuller
BE	Best Estimate
EIOPA	European Insurance And Occupational Pensions Authority
MCR	Minimum Capital Requirement
QIS	Quantitative Impact Study
SCR	Solvency capital Requirement
VAN	Net Asset Value
ACP	Autorité de contrôle prudentiel
PB	Participation aux bénéfices
INED	Institut national d'études démographiques
DS	Differency stationary
TS	Trend stationary

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE :	10
Préliminaire : Présentation de l'organisme de stage & de la société étudiée.....	13
I. Présentation de l'organisme de stage	13
II. Présentation de la société étudiée	16
PARTIE 1 : SOLVABILITE 2.....	17
Chapitre I : Généralités sur Solvabilité 2.....	18
I. Les limites de solvabilité 1 :.....	18
II. La réforme Solvabilité 2	18
II.1 Pilier 1 : les exigences quantitatives.....	20
II.2 Pilier 2 : Activités de contrôle.....	21
II.3 Pilier 3: Exigences en matière d'information prudentielle et de publication	
	22
Chapitre II : les Études quantitatives d'impact (QIS):.....	23
Chapitre III : bilan prudentiel sous solvabilité 2.....	26
I. Le Best estimate.....	27
I.1 Définition:.....	27
I.2 Flux de prestations :	28
I.3 Flux de cotisations :	29
I.4 Flux de frais :	29
I.5 Participation au bénéfice future:.....	29
I.6 Actualisation des flux :	30
II. Calcul de la provision.....	30
Chapitre IV : Le SCR selon la formule standard.....	33
PARTIE 2 : CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES	36
Chapitre I : Présentation des données et hypothèses.	37
I. Présentation des données.....	37
II. Taux instantanés de mortalité.....	37
III. Méthode d'extrapolation aux âges élevés :	38
Chapitre II : le modèle Lee Carter	40
I. Présentation du modèle	40
II. Estimation des paramètres :.....	41

I.2	Estimation des α_x	41
II.2	Estimation des β_x et k_t	42
III.	Résultats	45
III.1	estimation des α_x	45
III.2	Estimation des β_x	46
IV.	Variance temporelle :	47
Chapitre III : Le modèle log-poisson		49
I.	Présentation du modèle :	49
II.	Estimation des paramètres :	50
III.	Résultats :	52
III.1	Le paramètre α_x	52
III.2	Paramètre β_x	52
III.3	Composante tendancielle K_t	53
IV.	Mesure de la qualité d'ajustement du modèle	54
Chapitre IV : Comparaison entre le modèle Lee Carter et log-poisson		55
I.	Modèle retenu entre celui de Lee-Carter et Log-poisson	55
II.	Test de khi 2	56
III.	Choix du modèle d'extrapolation :	57
I.3	Stationnarité de la série	59
III.2	Identification du modèle	64
IV.4	Estimation des paramètres	64
III.5	Prévisions :	67
PARTIES : CALCUL DES EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LE RISQUE DE		
MORTALITÉ	69	
Chapitre I : L'approche standard		70
I.	Des tables nationales aux tables d'expérience.	70
I.1	Le modèle de Brass	71
I.2	Application du modèle de Brass:	72
II.	Calcul du BE déterministe :	73
III.	Calcul du SCR mortalité standard	73

Chapitre II : Le modèle interne	74
I. Modélisation des tables de mortalité	74
II. Calcul du Best Estimate décès.....	78
III. Calcul du SCR mortalité.....	79
<i>Conclusion générale</i>	81
<i>Bibliographie</i>	83
Annexes.....	84
Annexe 1 : Courbe de taux EIOPA.....	85
Annexe 2 : Résultats détaillés	86
Calcul des Alpha	86
Calcul des beta	88
Calcul de $K(t)$.....	90

INTRODUCTION GENERALE :

La directive solvabilité 2 a pour but de fournir au niveau européen un cadre réglementaire unique pour la solvabilité des entreprises d'assurance. Par définition, une compagnie d'assurance est solvable, c'est à dire suffisamment solide financièrement pour respecter les engagements qu'elle a envers ses assurés et ses autres créanciers. Plus précisément, la solvabilité peut être définie sous deux angles :

- la possibilité qu'a une entreprise de respecter ses obligations financières en termes de paiement de prestations, d'intérêt et d'amortissement de dettes
- le fait de disposer d'un tampon financier suffisant pour couvrir les risques, frais et pertes imprévues sans mettre en péril la pérennité de l'entreprise.

Le projet est structuré en trois piliers (exigences quantitatives, qualitatives et activités de contrôle). Tout trois mettant l'accent sur la gestion des risques.

En particulier, le risque de mortalité est au cœur des problématiques liées à l'assurance vie. De ce fait, les compagnies d'assurance-vie ont tout intérêt à évaluer la mortalité de leurs assurés de façon à mieux cerner le risque de mortalité inhérent à leur portefeuille.

Le risque de mortalité ou le risque de la hausse des taux d'intérêt entre dans la catégorie des risques de modèles. Il vient de l'inadéquation de la table de mortalité à la sinistralité des assurés. Face à cette inadéquation, l'assureur peut être confronté à des pertes techniques importantes.

D'autant plus, actuellement les individus vivent de plus en plus nombreux jusqu'à des âges élevés. Les gains en espérance de vie au cours du 20^{ème} siècle en France ont été dus notamment à la maîtrise de la mortalité infantile, au traitement des

maladies bactériennes par les antibiotiques, et au recul des maladies cardiovasculaires. Le risque de mortalité, c'est-à-dire le risque que les assurés vivent plus longtemps que prévu par les tables de mortalité intéresse les assureurs.

Les compagnies d'assurance vie se prémunissent du risque mortalité propre à leur activité en construisant des tables de mortalité. Il existe deux types de tables de mortalité : les tables de mortalité périodiques et les tables de mortalité prospectives.

Les tables de mortalité classiques sont des tables de mortalité périodique, aussi appelées statiques ou du moment car elles n'anticipent pas l'allongement probable de la durée de la vie humaine. Elles sont basées sur l'observation d'une population pendant une période variant de un à cinq ans en général. Une table de mortalité classique revient implicitement à considérer que la mortalité est figée.

Les tables de mortalité prospectives anticipent l'évolution probable de la mortalité et répondent donc au risque de mortalité. Ces tables dépendent de l'âge et de l'année calendaire. Elles donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année. Elles sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité, et les extrapolant dans le futur. Ces tables de mortalité permettent de procéder à des projections de flux futurs en prenant en considération le temps qui passe.

Selon solvabilité 2, les assureurs doivent provisionner la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs de leurs comptes de résultat. Pour ce faire, les méthodes utilisées peuvent être :

- soit déterministes, avec l'évaluation de la sinistralité « moyenne » ou « la plus probable » permettant grâce aux taux de mortalité, de déduire la valeur actualisée des flux futurs.
- Soit stochastiques, indiquant l'évaluation de la distribution des flux futurs, dont la moyenne actualisée conduit à la définition du Best estimate.

Alors qu'un modèle déterministe ne fournit qu'une valeur moyenne, un modèle stochastique est capable de nous renseigner sur l'ensemble de la distribution de la quantité étudiée.

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la réglementation solvabilité 2. Il vise à donner une représentation fidèle du risque de mortalité propre aux contrats de garantie décès et à calculer le capital de solvabilité requis associé à ce risque.

Il s'articule autour de trois parties:

La première partie concerne le contexte de l'étude, à savoir solvabilité 2, les études d'impact ainsi qu'une introduction sur le calcul du best estimate et le SCR.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des deux modèles de création de table de mortalité prospective déterministe.

La troisième partie s'intéresse à l'évaluation du Best estimate et le capital de solvabilité requis (SCR) avec les deux approches : standard et stochastique. À la fin, une comparaison entre les deux méthodes de calcul du SCR ; celle s'appuyant sur la formule standard fournie par le CEIOPS et celle reposant sur le modèle interne est effectuée afin de présenter la pertinence d'une évaluation propre aux risques inhérents à la société d'assurance donnée.

Préliminaire : Présentation de l'organisme de stage & de la société étudiée

I. Présentation de l'organisme de stage

ALTIA est un cabinet français de conseil en actuariat fondé en mars 2003. Depuis cette date, ALTIA s'est agrandi et se compose actuellement d'une trentaine de collaborateurs dont six associés. Cette entreprise a aussi établi un réseau avec 'SPAC actuaires', pour former le groupe PYRAMIDES ACTUARIAT.

ALTIA, conseil en actuariat, se positionne comme un acteur de la mise en œuvre de la stratégie financière d'entreprise, avec notamment des expertises dans six domaines clés :

I.1 L'actuariat financier

- Allocation d'actifs et allocation stratégique d'actifs sous contraintes de passif
- Mesure et attribution de performance
- Allocation de fonds propres
- Organisation, pilotage et contrôle des délégations de gestion financière:
 - Organisation et réalisation des appels d'offres
 - Rédaction, suivi et contrôle du respect des mandats
 - Optimisation et contrôle des frais
 - Harmonisation et consolidation du reporting.
- Gestion Actif Passif en assurance non vie, vie, épargne, retraite et prévoyance :
 - Mise en place : organisation, tableaux de bord, outil
 - Etudes, réalisation des états réglementaires
- Outils de simulation :
 - Mise à disposition d'outils développés par ALTIA
 - Etudes préalables, réalisation et suivi d'appels d'offre
 - Assistance à la rédaction de cahier des charges
 - Audit de systèmes existants

I.2 Le conseil stratégique aux organismes d'assurance :

- Gestion de bilan : financement, fonds propres, transferts de risques
- Fusion/acquisition et restructuration d'organismes d'assurance
- Accompagnement dans les processus d'amélioration de la rentabilité ou de la productivité (optimisation de la gestion des engagements, refonte des offres produit)
- Passage aux normes IAS/IFRS
- Création de sociétés, préparation de dossiers d'agrément

I.3 Le conseil technique aux organismes d'assurance

- Calcul de provisions techniques
- Préparation d'états réglementaires
- Construction ou certification de tables d'expérience
- Migration de systèmes informatiques
- Formation d'équipes
- Remplacement de titulaire
- Etude de rentabilité : Profit testing

I.4 Le conseil actuariel aux comités de surveillance de PERP

- Formation des membres du comité au fonctionnement technique du PERP
- Mise à disposition de nos de modèles de projection
- Mise en évidence des principaux risques supportés par le PERP
- Recommandations de pilotage
- Mise en évidence des frais et commissions prélevés
- Projections démographiques
- Mesure et attribution de performance des supports en euros et en unités de comptes
- Réalisation de bilans actuariels
- Mesure de l'adéquation actif/passif et allocation stratégique d'actif

I.5 Le conseil actuariel aux caisses de retraite

- Conception et réalisation d'outils de projection démographique et de réserves
- Réalisation de bilans actuariels
- Mise en évidence de risques supportés par le régime
- Mise en place de tableaux de bord et d'indicateurs d'aide à la décision
- Intégration d'entreprises bénéficiant de régimes de retraite spéciaux dans le domaine parapublic lors de leur intégration aux régimes de droit commun
- Allocation stratégique d'actifs
- Mise en place, suivi et contrôle de la gestion financière

I.6 Le conseil actuariel aux entreprises

- Mise en place, audit et optimisation de régimes de retraite et/ou de prévoyance
- Identification et évaluation d'engagements sociaux (« Employee Benefits ») selon les différentes normes comptables (Recommandations CNC, IAS/IFRS et US GAAP)
- Accompagnement d'entreprises bénéficiant de régimes de retraite spéciaux dans le domaine parapublic lors de leur intégration aux régimes de droit commun
- Analyse critique des comptes des régimes de retraite et de prévoyance transmis par les organismes assureurs
- Formation des équipes pour limiter l'asymétrie d'information entre les l'organisme assureur et l'entreprise

II. Présentation de la société étudiée

La société qui sera étudiée tout au long de ce mémoire est une société de prévoyance, elle est agréée par les autorités de tutelle pour réaliser, au profit de ses membres participants, les opérations d'assurance suivantes : maladie (branche 2) ; vie-décès (branche 20) ; nuptialité-natalité (branche 21).

Les garanties maladie offertes sont tels que :

- l'incapacité de travail : En cas d'arrêt de travail de plus de 90 jours consécutif à une maladie ou à un accident de la vie courante, entraînant une réduction ou une perte de traitement ou de salaire, la mutuelle garantit au membre participant le versement d'indemnités journalières.
- aide aux aidants : En cas de congé de solidarité familiale, de congé de solidarité familiale, de congé de soutien familial ou de congé de présence parentale, la mutuelle garantit au membre participant le versement d'indemnités journalières.
- Dépendance : En cas de dépendance, la mutuelle garantit le versement d'une rente au membre participant âgé d'au moins 60 ans.
- intervention chirurgicale : En cas d'intervention chirurgicale , pratiquée dans le cadre d'une hospitalisation complète , la mutuelle garantit au membre participant le versement d'une indemnité journalière.

Les garanties vie offertes sont les garanties décès et temporaire décès.

La garantie nuptialité natalité : En cas de maternité, de paternité ou d'adoption par le membre participant âgé de moins de 60 ans, la mutuelle garantit le versement d'une allocation.

Elle dispose d'un dispositif d'écoulement de sinistres relativement étalé selon la branche.

Dans ce mémoire notre étude portera principalement sur la garantie décès.

PARTIE 1 : SOLVABILITE 2

Dans cette partie, il sera question de présenter le cadre de notre étude qui est solvabilité 2 et les études d'impact QIS, ainsi qu'une introduction du concept Best estimate et SCR mortalité.

Chapitre I : Généralités sur Solvabilité 2

I. Les limites de solvabilité 1 :

Le système Solvabilité I comporte des avantages. Il est peu coûteux et relativement simple car les calculs sont fondés sur des données comptables. Il comporte cependant de nombreux inconvénients.

Ces derniers peuvent être séparés en deux catégories. D'une part les critiques quantitatives et d'autre part les critiques qualitatives.

Limites quantitatives :

- Solvabilité I prend comme référence le passé. Il est donc supposé que le passé est représentatif du futur. La vision uniquement rétrospective de cette réglementation est remise en cause.

- Le calcul de l'exigence de marge de solvabilité ne pénalise pas les compagnies qui ne provisionnent pas assez alors qu'il pénalise la prudence de tarification et de provisionnement.

- Tous les risques auxquels l'entreprise est exposée ne sont pas pris en compte. De plus, Solvabilité I ne tient pas compte du profil de risque des compagnies.

Limites qualitatives :

- Il n'y a pas de surveillance sur le contrôle interne (méthodes de gestion...).

- Le système s'est révélé insuffisant vis-à-vis d'autres systèmes de solvabilité internationaux (Swiss Solvency Test en Suisse par exemple).

II. La réforme Solvabilité 2

Solvabilité II devrait modifier en profondeur les règles de solvabilité qui s'appliquent dans le secteur des assurances. Le nouveau régime prudentiel, qui entrera en vigueur le 1^{er} Janvier 2014, a pour objectifs principaux de renforcer la protection des assurés, de favoriser la compétitivité des assureurs sur le marché international, améliorer la législation. Elle met en effet l'accent sur la connaissance par l'organisme d'assurance de son profil de risque et sur l'adaptation des exigences de capital à ce profil de risque. Cela conduit à renforcer la gestion des risques et la gouvernance ainsi que le contrôle des groupes.

L'élaboration des normes de solvabilité 2 s'est déroulée en deux phases :

- Phase 1 : Réflexions sur la forme générale que doit prendre le système de solvabilité européen .cette phase est terminée depuis le 9 avril 2003 .Elle a conduit au souhait d'un système cohérent avec l'approche Lamfalussy .C'est le processus employé pour mettre en place les réglementations du secteur financier, qui est utilisé pour la première fois dans le secteur de l'assurance. Il est composé de 4 niveaux à savoir l'élaboration de la législation, l'élaboration des mesures d'exécution, la coopération des régulateurs, le contrôle du respect du droit. Ce processus permet d'élaborer des réformes plus adaptées à la réalité, car les textes de loi sont préparés après consultation des acteurs du marché et l'élaboration d'une structure à trois grands piliers pour être également en phase avec les règles du secteur bancaire (Bâle 2).

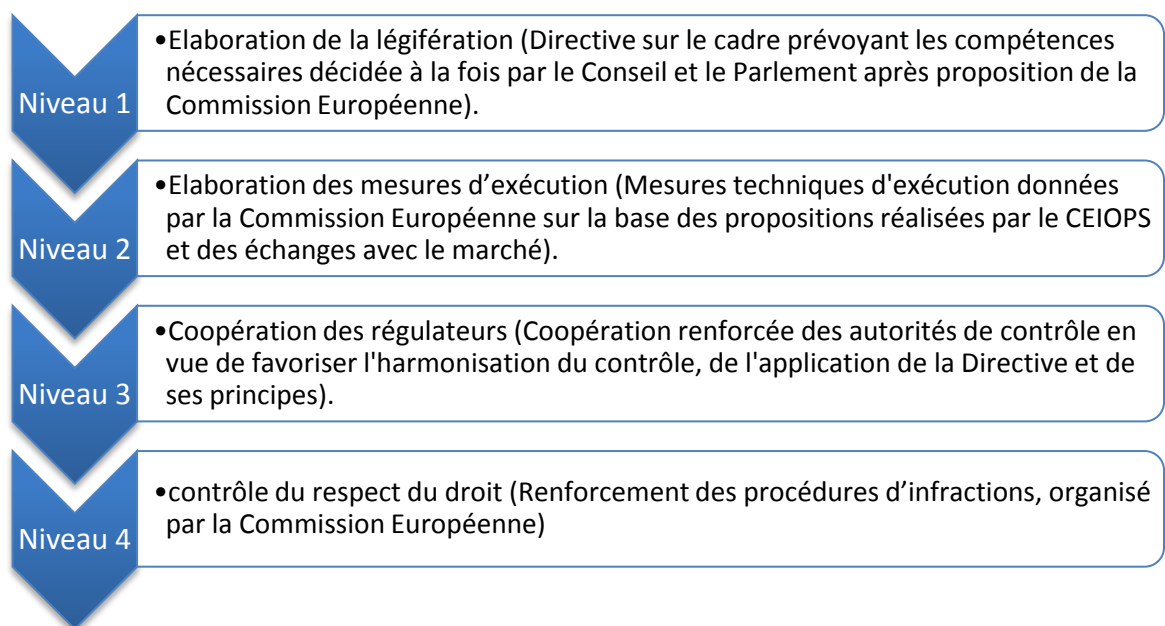


Figure 1 : le Processus Lamfalussy

- Phase 2 : Mise en place des méthodes de prise en compte des différents risques.

Ainsi, solvabilité 2 constitue une révolution dans la régulation et la supervision du secteur des assurances , qu'il s'agisse des provisions techniques, des obligations financières définies dans le premier pilier des pratiques de gestion et de supervision

qui font l'objet du deuxième pilier, ou de l'information et les disciplines de marché dans le troisième pilier.

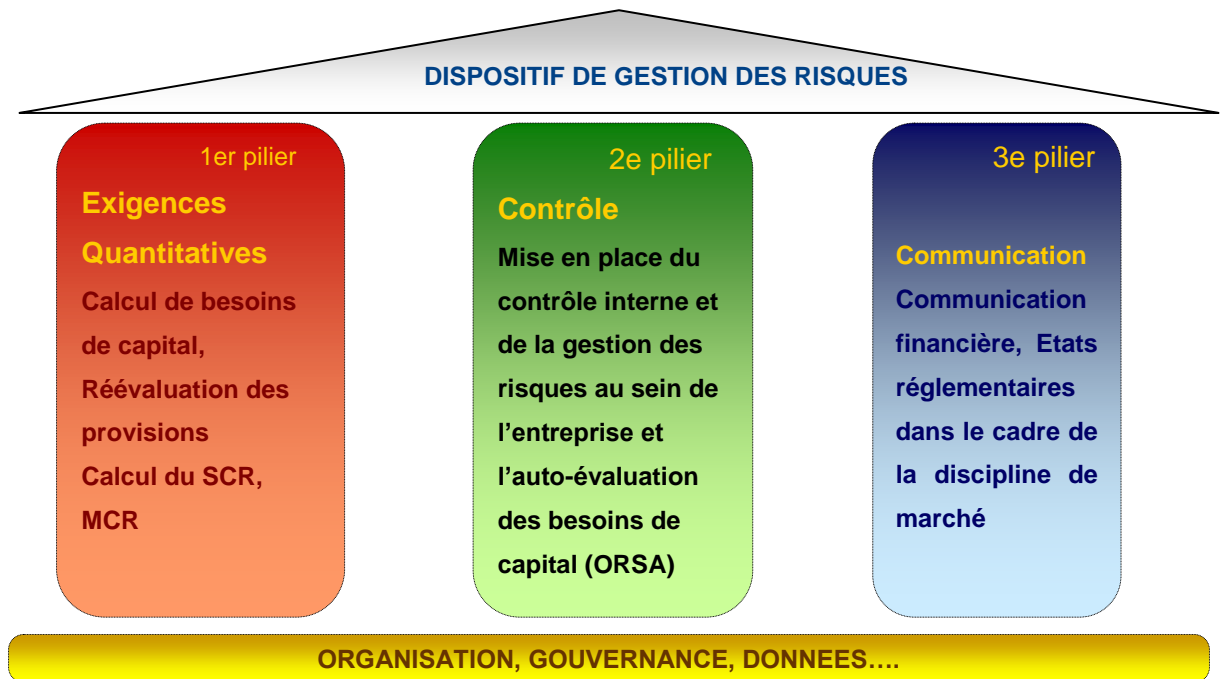


Figure 2: Schéma illustratif des trois piliers de Solvabilité II

II.1 Pilier 1 : les exigences quantitatives

Le premier pilier définit des règles quantitatives de calcul pour les provisions techniques et les fonds propres. Cette approche implique que le montant des ressources financières disponibles couvre le total des engagements de l'entreprise. Il résulte que les fonds propres éligibles devront être supérieurs au capital de solvabilité requis.

En ce qui concerne les provisions techniques, le but principal est d'harmoniser leur valorisation.

Le premier pilier définit deux niveaux de fonds propres : le MCR Minimum Capital Requirement et le SCR Solvency Capital Requirement.

Le MCR représente un niveau minimum de fonds propres que les compagnies ne doivent pas franchir. D'un point de vue statistique, il correspond à la valeur en risque « Value at Risk » des fonds propres de base d'une entreprise d'assurance ou de réassurance avec un niveau de confiance de 80 % sur un horizon d'un an. Si une compagnie a un niveau de fonds propres inférieur au MCR, les autorités de contrôle interviennent et cela peut même entraîner un retrait d'agrément en cas de transgression du seuil sans rectification après un an.

Le MCR est déterminé par un calcul simplifié et est identique pour toutes les compagnies.

Le SCR est un indicateur basé sur l'exposition aux risques des compagnies d'assurance. C'est le niveau de fonds propres permettant à une entreprise d'absorber des pertes imprévues importantes et d'offrir une sécurité raisonnable aux assurés, sur la base d'une probabilité de ruine de 0,5% (V aR99;5%) à un horizon d'un an.

Il prend en compte tous les risques liés à l'activité de la compagnie. Son calcul repose sur une formule standard ou sur l'utilisation d'un modèle interne total ou partiel propre à la compagnie d'assurance après approbation des autorités de contrôle.

Pour la formule standard, le niveau du SCR sera défini en agrégeant les exigences au titre des risques de souscription, de marché, de défaut de contrepartie et des risques opérationnels. Dans les spécifications techniques, le capital de solvabilité requis global (SCR global) est la somme du SCR opérationnel et du Basic SCR auquel on déduit la réduction pour participation au bénéfice.

II.2 Pilier 2 : Activités de contrôle

Le deuxième pilier a pour but de fixer des normes qualitatives à l'ensemble du marché de l'assurance.

Ces normes concernent le processus de suivi des risques des compagnies, la gouvernance, le risk management ainsi que la mise en place de la surveillance par les autorités de contrôle. L'objectif est d'harmoniser les processus de contrôle, au sein des compagnies ainsi que l'activité des superviseurs.

Les entreprises sont incitées à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à les gérer. Elles doivent pouvoir contrôler en interne le suivi de leurs risques. Pour se faire, l'article 45 de la Directive introduit un processus d'évaluation des risques, l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment).

L'ORSA est un processus complet qui permet de suivre en continu le besoin en capital d'une entreprise en fonction de sa stratégie commerciale notamment. C'est un outil de gestion des risques et une source d'information pour les autorités de contrôle. Son rôle est de faire en sorte que les entreprises ne se limitent pas aux calculs réglementaires mais aillent plus loin dans le processus de gestion de leurs risques.

II.3 Pilier 3: Exigences en matière d'information prudentielle et de publication

Ce pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées que les autorités de contrôle jugeront nécessaires pour exercer leur pouvoir de surveillance, rassemble les mesures de publication et de communication de l'information relative aux deux autres piliers. Cette information se subdivise entre les éléments à destination du public et ceux fournis aux fins du contrôle. Les informations destinées aux autorités de contrôle doivent contenir :

- un rapport sur la solvabilité,
- un rapport sur la situation financière,
- une description du système de gestion des risques,
- une fiche descriptive des différentes méthodes appliquées pour l'évaluation des actifs, des provisions techniques;
- une fiche descriptive du système de gouvernance de l'entreprise en indiquant le degré d'exposition et le niveau de concentration pour chaque type de risque ainsi que les mesures qu'elle envisage d'appliquer.

Quant aux informations destinées au public, les autorités de contrôle permettent aux entreprises d'assurance et de réassurance de ne pas publier certaines informations jugées dommageables au secret des affaires afin de garder leur confidentialité.

Chapitre II : les Études quantitatives d'impact (QIS):

Afin de préparer le passage à Solvabilité II, la Commission européenne a demandé au CEIOPS d'évaluer l'impact des mesures sur le marché. Les QIS permettent tout d'abord de fournir des informations sur l'impact quantitatif de la réforme. Ces études permettent également de préparer le marché à la réforme en fournissant un point de départ pour un dialogue permanent entre assureurs, réassureurs et superviseurs. La participation au QIS se fait sur la base du volontariat.

Avant d'aboutir à QIS 5 on est passé par plusieurs QIS à savoir :

- QIS 1 : C'est la première étude menée par le CEIOPS, qui s'est déroulée durant l'automne 2005. Le but principal de cette étude quantitative d'impact était de pouvoir évaluer le niveau de prudence des provisions techniques et de recueillir des informations qualitatives sur les méthodes et modèles utilisés par les compagnies. Le CEIOPS a pu acquérir des informations sur l'impact du *Best Estimate* et de la marge de risque sur les provisions techniques et sur la capacité des entreprises à effectuer les calculs.

Il s'est avéré que le marché était sur-provisionné; le niveau de marge de solvabilité requis était en général inférieur au niveau de provisions déjà constitué par les compagnies.

- QIS2 : La deuxième étude d'impact a été lancée en mai 2006. L'objectif principal de cette étude était l'évaluation du besoin en capital, à travers le calcul du SCR et du MCR. L'approche était méthodologique et non axée sur la calibration.

Cette deuxième étude est marquée par une plus forte participation des acteurs de l'assurance qui ont demandé des simplifications des méthodes de calculs. Les petites entreprises ont désiré des méthodes simplifiées, adaptées à la nature et à la complexité des risques auxquels elles sont exposées. Le principe de proportionnalité a commencé à se profiler.

De façon générale, le besoin de capital est réduit par rapport au QIS1 et la plupart des entreprises sont solvables selon les critères avancés.

- QIS 3 : La troisième étude d'impact s'est déroulée en avril 2007. Cette étude a marqué un tournant car elle n'était plus seulement qualitative mais également quantitative.

L'étude d'impact a été marquée par une forte participation, ceci s'explique du fait que cette troisième étude soit la première à caractère réellement quantitatif.

La comparaison des montants de provisions techniques sous Solvabilité I et Solvabilité II montre que les montants requis sont plus faibles avec le QIS3. Ce résultat peut s'expliquer par la prise en compte de la diversification des groupes.

- QIS 4 : Cette quatrième étude d'impact s'est déroulée du mois d'avril au mois de juillet 2008. Cette étude tournait autour de quatre points principaux :

- L'évaluation de l'impact quantitatif de l'exigence en capital sur le bilan des assureurs et réassureurs, y compris des effets de la diversification et de la transférabilité des fonds propres.

- L'introduction de simplifications dans les calculs de l'exigence de capital ainsi que l'utilisation des paramètres spécifiques des compagnies.

- La conception et le calibrage du MCR.

- La comparaison des résultats obtenus par la formule standard et par les modèles internes dans le calcul du besoin en capital.

- QIS 5 : a pour finalité de mesurer l'impact du nouveau calibrage sur la formule standard, d'évaluer la faisabilité des calculs ainsi que l'état d'avancement des acteurs du marché et de collecter des données.

Première étude à tenir compte des leçons de la crise financière, c'est un « état des lieux » qui ne préjuge en rien du calibrage final. Le QIS5 est la dernière étude d'impact complète mais il est possible qu'un QIS6 ait lieu, avec un champ d'application limité.

Des simplifications pourraient être apportées à la formule standard-dont la complexité se rapproche de plus en plus d'un modèle interne- suite aux retours du QIS5.

A la suite de cette étude, l'ACP éclairent les acteurs du marché français sur certaines dispositions qui ne paraissent pas suffisamment précises dans les spécifications techniques qui concernent notamment:

- le calcul du Best Estimate (horizon de projection, rachats conjoncturels et structurels);
- la prise en compte de la réserve de capitalisation ;
- les fonds cantonnés ;
- les impôts différés.

Chapitre III : bilan prudentiel sous solvabilité 2

Le projet Solvabilité II va introduire un changement radical dans la vision du Bilan. En effet, dans solvabilité II on abandonne complètement la vision comptable qui existe dans solvabilité 1, les actifs sont uniquement évalués en valeur marché. De même, les provisions techniques y sont évaluées selon une approche économique. L'évaluation des provisions techniques occupe une place prépondérante en assurance dans la mesure où elle permet de faire le point sur l'engagement qu'a un assureur vis-à-vis de ses assurés (ou des bénéficiaires) et a un impact très important sur le résultat de la compagnie.

Les provisions techniques correspondent en effet aux charges à prévoir pour faire face à la sinistralité déclarée et celle non encore déclarée mais prévisible des contrats en cours. En principe, ces provisions doivent être déterminées de sorte qu'elles puissent permettre le règlement intégral de l'ensemble des sinistres.

Les provisions techniques sont en fait calculées comme la somme de deux composantes :

- BE_t : Le Best Estimate de la valeur des engagements d'assurance est défini dans la directive cadre comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents .
- RM_t : La marge de risque qui correspond au montant que l'on doit ajouter au Best Estimate pour qu'un autre assureur accepte de reprendre le passif .Il s'agit du montant qui sert à dédommager le repreneur d'avoir à immobiliser du capital pour supporter les engagements d'assurance qu'il va récupérer, et ce, jusqu'à leur extinction .En moyenne , le Best Estimate doit ainsi permettre de payer les prestations et les frais ,tandis que la marge pour risque pourra être consommée de manière à garantir un rendement de 6%, en plus du taux sans risque à ceux qui financent l'activité en apportant les fonds propres nécessaires à la couverture du SCR année après année.

Les autres composantes du bilan prudentiel sont :

- A_t : l'actif de l'assureur en valeur de marché.
- NAV_t (Net Asset Value) : les fonds propres économiques qui sont définies en utilisant l'équation d'équilibre du bilan $NAV_t = A_t - BE_t - RM_t$.

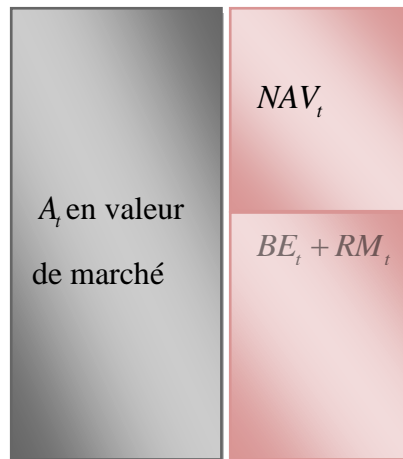


Figure 3: Le bilan économique sous solvabilité II

I. Le Best estimate

I.1 Définition:

Le best Estimate est la valeur actualisée de l'ensemble des flux « cash flow » futurs entrants et sortants (prestations, frais, cotisations ...) estimés sans marge de prudence sur les contrats engrangés à la fin de l'exercice.

$$BE = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec CF_t = Les flux de trésorerie non actualisés des engagements d'assurance Vie.

r_t = taux d'intérêt

n = Horizon choisi de façon à couvrir la durée de vie totale du portefeuille d'assurance.

Le Best Estimate couvre toute la période où il y a des cash flow entrants et sortants correspondant aux obligations nées du contrat .Il ne prend pas en compte les cash flow au-delà de la date à la quelle l'assureur a la possibilité :

- De résilier le contrat,
- Et /ou de refuser la prime,
- Et /ou de réviser la prime de manière illimitée ou de réviser les garanties.

Par exemple, la durée de projection sera d'une année pour un contrat annuel (résiliable et révisable annuellement) ou viagère pour un contrat de type « vie entière » (couverture et tarifs garantis jusqu'au décès de l'adhérent sans possibilité de révision ou résiliation de la part de la société d'assurance).

Les provisions mathématiques sont la différence entre la somme des flux probabilisés et actualisés de l'assureur (prestations, frais, et commissions) et ceux de l'assuré (cotisations).

$$BE\ vie = prestations + frais - cotisations$$

La méthode de calcul adoptée pour déterminer la provision mathématique est la suivante :

- À partir des caractéristiques du contrat, les montants des flux élémentaires sont établis ;
- Chaque flux élémentaire est probabilisé puis actualisé ;
- La somme des flux probabilisés et actualisés donne la provision mathématique.

Le calcul des flux suivant est sous l'hypothèse que tous les décès sont considérés survenir en milieu d'année, la prestation étant versée immédiatement. Par conséquent, l'effectif survivant verse 12 mois de cotisations et les décédés versent 6 mois de cotisations.

I.2 Flux de prestations :

Le BE de prestations est la projection des flux futurs annuels de prestations brute sur toute la durée de vie résiduelle des contrats en cours.

La prestation brute correspondant à l'année N et à l'âge x a la formule suivante :

$$\text{Prestation brute } N_{\text{âge } x} = \text{décès } N_{\text{âge } x} \times \text{montant prestation } N_{\text{âge } x}$$

Pour ce calcul on aura comme inputs l'effectif tête par tête à la date d'inventaire et comme paramètres, la table de mortalité d'expérience ainsi que les taux de sortie annuels prévisionnels.

I.3 Flux de cotisations :

Le BE cotisations est la projection des flux futurs annuels de cotisations sur toute la durée de vie résiduelle des contrats en cours.

La cotisation brute correspondant à l'année N et à l'âge x a la formule suivante :

$$\text{Cotis brute } N_{\text{âge } x} = (\text{effectif } 31/12/N_{\text{âge } x+1} \times \text{cotis}_{\text{âge } x+N-2011} \times 12) + (\text{décès } N_{\text{âge } x} \times \text{cotis}_{\text{âge } x+N-2011} \times 6)$$

Ce calcul nécessite alors la connaissance des effectifs exposés tête par tête, et en paramètres les barèmes des cotisations ainsi que les taux de résiliation annuels prévisionnels.

I.4 Flux de frais :

Les frais de règlement de sinistres ne sont pas totalement proportionnels aux règlements. Les frais seront donc projetés pour partie proportionnellement aux prestations et cotisations et pour partie en frais fixes.

I.5 Participation au bénéfice future:

La participation aux bénéfices correspond à la partie des bénéfices réalisés par l'assureur qui sont reversés aux assurés.

Ce compte de PB doit donc être projeté sur toute la durée des engagements, cela suppose de projeter les montants de PM d'ouverture et de clôture de chaque exercice.

Le compte de PB devrait présenter des excédents dans le futur. La règle à appliquer serait de distribuer l'excédent revenant aux assurés tous les 5 ans. Cette distribution entrera dans la composition du BE.

Pour être cohérent avec les flux de passif, le taux de rendements des actifs retenu pour projeter les rendements financiers est issu de la même courbe des taux sans risque auquel on applique la même prime d'illiquidité qu'au passif.

I.6 Actualisation des flux :

Flux de prestations, PB, cotisations et frais sont actualisés par la courbe EIOPA¹, en prenant en compte une prime d'illiquidité de 75% afin d'obtenir le BE hors marge de prudence figurant au passif du bilan.

II. Calcul de la provision

Un fichier de calcul Excel est mis en œuvre pour calculer la provision au client, il contient deux onglets : « Paramètres et inputs » et « Calculs et résultats ».

L'onglet « paramètres et inputs » contient :

- La table de mortalité d'expérience 2007 certifiée.
- Courbe des taux fournie par l'EIOPA
- Le nombre d'effectif exposé au risque
- Le montant des prestations versé par la mutuelle en fonction de l'âge atteint par le membre participant au moment de son décès.
- Le montant des cotisations qui est également en fonction de l'âge atteint par le membre participant.
- Les frais de gestion des contrats
- Taux de sortie.

Dans l'onglet « Calcul et résultat » nous avons calculé pour chaque âge atteint du membre participant la cotisation brute, la prestation brute et les frais de contrat, ensuite nous avons projeté ces flux sur un horizon correspondant à l'extinction du passif. Cet horizon correspond pour notre calcul à l'année 2088.

La projection se fait à l'aide des formules introduites dans la partie précédente.

L'étape suivante consiste à actualiser les flux brutes annuellement de l'année 2012 jusqu'à 2088 avec la formule suivante :

$$\text{Valeur actuelle } N_{\text{âge } x} = \text{valeur brute } N_{\text{âge } x} * (1 + \text{taux})^{-(N+2012-0,5)}$$

¹ EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority.

Age	Années	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2085	2086	2087	2088
	Cotis_actu		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Prest_actu		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Frais_actu		0,029971412	0,02961052	0,02901628	0,02824794	0,02729977	0,02624744	0,02514822	0,0240432	0,02296064	0,02191882	0,02092864	0,00182086	0,00175365	0,00168892	0,00168892
34	Prestations		2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	500	500	500	500
	Effectifs	1	0,999107668	0,99829331	0,99745434	0,99663094	0,99576081	0,99493216	0,99393833	0,99283987	0,99163072	0,99027245	0,98874606	5,4275E-05	2,7137E-05	0	0
	Décès		0,000892332	0,00081436	0,00083897	0,0008234	0,00087013	0,00082864	0,00099384	0,00109846	0,00120914	0,00135827	0,0015264	5,4275E-05	2,7137E-05	0	0
	Cotis_théorique		0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
	Cotis_brute		10,19544911	10,186745	10,178313	10,1698349	10,1611979	10,1525341	10,1432395	10,1325688	10,1208	10,1077662	10,0929944	0,0008304	0,0004152	0,0001384	0
	Prest_brute		1,784664057	1,62871434	1,67794212	1,64680421	1,74026435	1,65728115	1,96767606	2,19692226	2,41828565	2,7165365	3,05279289	0,02713734	0,01356867	0,01356867	0
	Frais		0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	Cotis_actu		10,18573349	10,054493	9,84456068	9,5758976	9,24861219	8,88260219	8,5028132	8,1206462	7,7460026	7,38496703	7,0410892	5,0402E-05	2,4271E-05	7,7916E-06	0
	Prest_actu		1,782963386	1,60756915	1,6229215	1,55062777	1,58362722	1,44997977	1,66621701	1,76070143	1,85084647	1,98477598	2,12969374	0,00164711	0,00079316	0,00076388	0
	Frais_actu		0,029971412	0,02961052	0,02901628	0,02824794	0,02729977	0,02624744	0,02514822	0,0240432	0,02296064	0,02191882	0,02092864	0,00182086	0,00175365	0,00168892	0,00168892
35	Prestations		2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	500	500	500	500
	Effectifs	3	2,997554747	2,99503559	2,99256317	2,98995044	2,9874623	2,98447813	2,9811798	2,97754913	2,97347069	2,96888741	2,96384064	8,1485E-05	0	0	0
	Décès		0,002445253	0,00251916	0,00247241	0,00261273	0,00248814	0,00298418	0,00329833	0,00363067	0,00407844	0,00458328	0,00504677	8,1485E-05	8,1485E-05	0	0
	Cotis_théorique		0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88
	Cotis_brute		31,66708906	31,640677	31,6145214	31,5878719	31,5607393	31,5316455	31,4986738	31,4620888	31,4213846	31,3756507	31,3248041	0,00129072	0,00043024	0	0
	Prest_brute		4,890506983	5,03832222	4,94482506	5,2254559	4,97628394	5,96835394	6,59665317	7,26133647	8,15688815	9,16655827	10,0935433	0,04074237	0,04074237	0	0
	Frais		0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	Cotis_actu		31,63691235	31,2300914	30,5778643	29,742893	28,7202008	27,5876777	26,404517	25,2149773	24,0485067	22,9239099	21,8528546	7,8341E-05	2,515E-05	0	0
	Prest_actu		4,885846642	4,97291095	4,7826816	4,92027953	4,52838024	5,22180108	5,52980235	5,8195257	6,24291329	6,69733857	7,04147212	0,00247287	0,0023816	0	0
	Frais_actu		0,029971412	0,02961052	0,02901628	0,02824794	0,02729977	0,02624744	0,02514822	0,0240432	0,02296064	0,02191882	0,02092864	0,00182086	0,00175365	0,00168892	0,00168892
36	Prestations		2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	500	500	500	500
	Effectifs	2	1,998319189	1,99666957	1,99492633	1,99326622	1,99127514	1,98907446	1,98665204	1,98393086	1,98087285	1,97750559	1,97373494	0	0	0	0
	Décès		0,001680811	0,00164962	0,00174324	0,00166011	0,00199107	0,00220068	0,00242242	0,00272118	0,00305801	0,00336726	0,00377066	5,4367E-05	0	0	0
	Cotis_théorique		0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91
	Cotis_brute		21,83082277	21,8126386	21,7941136	21,7755313	21,7555958	21,7327088	21,7074667	21,6793827	21,6478283	21,6127463	21,5773733	0,00029685	0	0	0
	Prest_brute		3,361621488	3,2992392	3,48647904	3,3202289	3,98214841	4,40135626	4,84483993	5,44236142	6,11602393	6,73451808	7,54131238	0,02718373	0	0	0
	Frais		0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	Cotis_actu		21,81001939	21,5294506	21,0794729	20,5037997	19,7974254	19,0142682	18,1968033	17,374725	16,5682687	15,7908645	15,0503266	1,8017E-05	0	0	0
	Prest_actu		3,358418077	3,256406	3,37215553	3,12632134	3,62372453	3,85081165	4,06130299	4,36172628	4,68092811	4,92042338	5,26098113	0,00164993	0	0	0
	Frais_actu		0,029971412	0,02961052	0,02901628	0,02824794	0,02729977	0,02624744	0,02514822	0,0240432	0,02296064	0,02191882	0,02092864	0,00182086	0,00175365	0,00168892	0,00168892
75	Prestations		1250	1100	950	800	650	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Figure 5 :Aperçu du fichier de calcul de la provision.

Finalement, la provision totale est la somme des prestations et des frais actualisés diminués des cotisations actualisées et ceci pour chaque âge.

Selon solvabilité 2, cette provision ainsi calculée ne peut pas être considérée comme Best estimate car le best estimate est la meilleure estimation de la provision. Comme nous sommes en présence d'un risque long et viager et il y a évolution de la mortalité, il faut le prendre en compte et l'intégrer dans le calcul du BE.

En effet, pour ce qui concerne la mortalité, en toute rigueur il faudrait utiliser des tables de mortalité prospectives quel que soit le risque, mortalité ou survie.

Dans la construction de tables de mortalité prospective, on tient compte non seulement de l'âge des individus mais aussi du temps : la loi de mortalité du groupe étudié est caractérisée par un modèle bidimensionnel. Les données disponibles doivent donc être plus détaillées : il est nécessaire de connaître le nombre de décès observé parmi les assurés pour différents âges et différents années(ou suivant différentes générations).il faut de plus que l'ajustement des taux de mortalité passés puisse être projeté dans le futur afin de tenir compte dans la modélisation de l'évolution potentielle de la mortalité au cours du temps.

Il existe un bon nombre de techniques pour établir une table de mortalité prospective. Il est assez fréquent d'appliquer une approche paramétrique. Mais les actuaires utilisent surtout la méthode de Lee-Carter et sa version améliorée modèle

log-poisson qui sont devenues un standard dans l'élaboration des tables prospectives.une présentation ainsi que leur application fera l'objet de la partie suivante.

Chapitre IV : Le SCR selon la formule standard

Sous Solvabilité II, les assureurs et réassureurs seront contraints de bien mesurer leurs risques et de s'assurer qu'ils ont suffisamment de fonds propres pour les couvrir. L'agrégation de ces risques permet d'obtenir le Solvency Capital Requirement (SCR) ou Capital de Solvabilité Requis.

Pour la formule standard, le niveau du SCR sera défini en agrégeant les exigences au titre des risques de souscription, de marché, de crédit et des risques opérationnels.

Dans les spécifications techniques de l'étude d'impact QIS 5, le capital de solvabilité requis global (SCR global) est la somme du SCR opérationnel et du *Basic SCR* auquel on déduit la RPS. Il se calcule selon le schéma suivant :

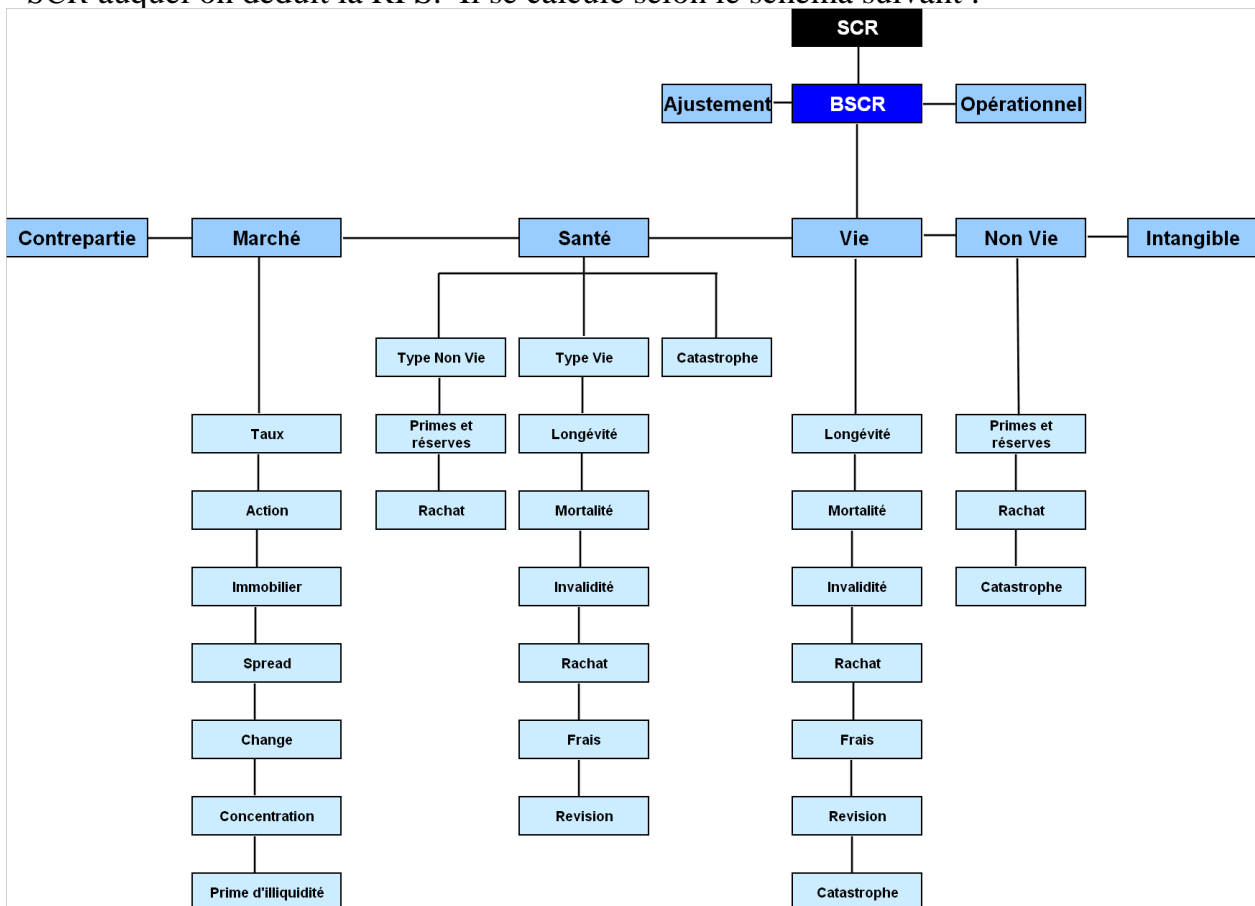


Figure 4: Schéma de calcul du capital de Solvabilité requis (SCR)

L'expression générale matérialisant ce schéma est la suivante :

$$SCR = BSCR - RPS + SCR_{Op}$$

La structure est modulaire c'est-à-dire le calcul se fait par « module » ou « boîte » de risque lui-même découpé en sous-modules. Chaque « boîte » fait l'objet d'un calcul de perte, qui contribue à l'exigence.

Le principe de calcul est de modifier un ensemble de paramètres de risques (mortalité, maintien, frais, rachats...) et de recalculer le Best Estimate.

Autant de calculs de BE que des chocs sont réalisés. la variation du BE sous l'impact d'un choc constitue une exigence de solvabilité. Les exigences obtenues unitairement pour chacun des chocs sont ensuite agrégées avec application d'une matrice de corrélation.

Étant le risque de mortalité l'objet de la présente étude, on s'intéresse plus particulièrement au SCR souscription vie où figure le module mortalité.

Le SCR de souscription (besoin de fonds propres) correspond à la perte en capital maximale survenant une fois tous les 200 ans évaluée sur les engagements de l'assureur et sur la souscription de l'année t qui suit celle du calcul :

L'estimation des provisions pour sinistres survenus en t-1 non encore connus ou connus ; erreur d'estimation des provisions pour sinistres survenus en t-1

Sinistre futurs plus élevés que prévus

Mauvaise estimation du volume de primes futures

Le module du risque de mortalité est calculé pour les contrats garantissant des prestations en cas de décès, c'est-à-dire pour les contrats pour lesquels une augmentation des taux de mortalité conduit à une augmentation des provisions techniques.

Le choc de mortalité est un choc, supposant une augmentation annuelle (permanente) des taux de mortalité de 15% pour chaque âge.

Ce choc est censé refléter l'incertitude sur les paramètres de la mortalité : le niveau, la tendance et la volatilité de la mortalité.

Pour ce risque deux calculs sont à effectuer : l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc, l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé.

En effet, le choc proposé peut modifier la situation économique ou technique de l'assureur et peut justifier la modification de la participation aux bénéfices dans l'avenir (modification des placements). Cela revient à faire porter tout ou partie de l'effet du choc aux assurés.

Ainsi par exemple, l'application du choc de mortalité va dégrader le résultat technique et donc la PB va diminuer. De fait le BE après choc et son atténuation par la PB peut être plus bas que celui avant atténuation.

Pour prendre en compte la capacité d'atténuation de la PB d'un choc à l'actif, une modélisation ALM doit être réalisée. On pourrait raisonner sans effet d'atténuation sur les chocs à l'actif ; le SCR résultant serait alors un majorant.

D'une manière générale, le SCR est la différence entre la valeur centrale de la situation nette (NAV-Net Asset Value) et la valeur de la situation nette après application du choc défini pour le module.

$$SCR \text{ mortalité} = \Delta NAV \text{ (choc mortalité de 15\%)}$$

$$\text{Avec : } \Delta NAV \text{ (choc)} = NAV(\text{avant choc}) - NAV(\text{après choc})$$

$$= (\text{actif} - BE)_{\text{avant choc}} - (\text{actif} - BE)_{\text{après choc}}$$

Dans le cas d'un choc sur la durée de vie, la valeur de marché de l'actif reste la même, de sorte que : $SCR \text{ mortalité} = BE(\text{après choc}) - BE(\text{avant choc})$

Dans la suite de ce mémoire, on considère que l'actif ne varie pas et que tout mécanisme de participation aux bénéfices ou de revalorisation est négligé.

PARTIE 2 : CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES

L'objectif de cette partie est de présenter les deux modèles de construction des tables de mortalité prospectives à savoir le modèle Lee Carter et le modèle Log-poisson, qui serviront de base au modèle stochastique de la troisième partie.

Nous présenterons d'abord les données sur lesquelles nous travaillons, qui proviennent de l'INED et couvrent la population générale française. la méthode de fermeture de table employée sera détaillée. Après avoir effectué des tests sur la qualité d'ajustement des deux modèles, nous opterons pour un modèle entre celui de Lee-carter et celui de Log-poisson. Nous extrapolons enfin la composante temporelle suivant un processus ARIMA identifié.

Chapitre I : Présentation des données et hypothèses.

I. Présentation des données

Ne disposant que d'un faible historique des données sur les décès pour la mutuelle étudiée, il est difficile de trouver de bonnes estimations des paramètres du modèle. Par conséquent, nous avons préféré utiliser les données de la population nationale fournies par l'institut national d'études démographiques (INED). Cette base de données démographique regroupe des indicateurs comme le nombre de survivants, de décès et l'espérance de vie à la naissance.

Les paramètres de nos modèles sont donc déterminés à partir des tables de mortalité de l'INED d'historique 15 ans, à savoir de 1995 à 2009.

II. Taux instantanés de mortalité

Les modèles de Lee-Carter et de poisson pour la construction de tables de mortalité prospectives se basent sur le taux de mortalité instantané. Il serait donc intéressant de définir cette notion et de faire une hypothèse sur la répartition des décès afin de le calculer explicitement.

Appelé aussi force de mortalité, noté $\mu(x)$, le taux de mortalité à l'âge x est la probabilité qu'un nouveau né décède à un âge x précis sachant qu'il a survécu jusqu'à cet âge. Il s'écrit sous la formule suivante : $\mu(x) = \frac{f_x(x)}{1 - F_x(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)}$,

$x \geq 0$

Avec $F_x(x)$ = la fonction de répartition associée à x

$S(x)$ = la fonction de survie associée à x

On déduit alors que $\mu_{x+s}(t+s)$ est la mesure de risque pour un individu d'âge x à l'instant t de mourir instantanément à l'âge $x+s$ et s'écrit sous la formule :

$${}_k P_x(t) = \frac{S(x+k)}{S(x)} = \exp\left(-\int_0^k \mu_{x+s}(t+s) ds\right)$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous considérons l'hypothèse suivante qui permet d'établir un lien entre les quotients $q_x(t)$ pour chaque année t , et les taux instantanés correspondants $\mu_x(t)$

$$S(x+k) = [S(x)]^{1-k} [S(x+1)]^k \quad 0 \leq k \leq 1$$

Sous cette hypothèse, on a la constance par morceaux des taux de mortalité instantanés $\mu_x(t)$. Cela se traduit par : $\forall x, t \in \mathbb{N}$ et $0 \leq u, s \leq 1$ $\mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t)$

En final on obtient : $\mu_x(t) = -\ln(1 - q_x(t))$

III. Méthode d'extrapolation aux âges élevés :

A partir d'un certain âge, il est difficile d'interpréter les données des quotients bruts de mortalité vu le peu d'observations disponibles ; on constate en effet de chute de la mortalité soudaine

Le lissage aux grands âges et une fermeture de table demeure la principale méthode afin d'atténuer la forte variabilité des taux de mortalité aux âges avancés.

La méthode présentée ci-dessous se sert de données disponibles pour estimer la mortalité aux grands âges. Ainsi cela a pour effet de gonfler l'information contenue dans les données que nous avons initialement.

La technique utilisée est celle proposée par Coale et kisker qui travaille sur les taux bruts de mortalité μ_x . elle propose de recalculer ces valeurs à partir de 65ans et de les extrapoler pour les grands âges (jusqu'à $x=110$ ans) en se basant sur la formule :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} \cdot \exp(g_x(x-65))$$

Où g_x représente le taux moyen de croissance de μ_x entre 65 et x ans.

Le but de la méthode est donc de calculer les coefficients g_x jusqu'à un certain âge et de les extrapoler afin de pouvoir recomposer les taux μ_x .

Les auteurs, après avoir examiné différents graphiques relatifs aux pays d'Europe occidentale, ont remarqué que les courbes des g_x possèdent en général un pic aux alentours de 80 ans, avant de décroître linéairement. Ils ont par conséquent proposé l'équation :

$$g_x = g_{80} + s(x-80) \quad x \geq 80$$

Coale et Kisker fixent arbitrairement le taux de mortalité pour un âge ultime (110ans) ; $\mu_{110} = 1$

$$\begin{aligned} \text{On doit alors résoudre l'équation : } \hat{\mu}_{110} &= \hat{\mu}_{79} \cdot \exp\left(\sum_{x=80}^{110} g_x\right) \\ &= \hat{\mu}_{79} \cdot \exp\left(\sum_{x=80}^{110} g_{80} + s(x-80)\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31 \cdot g_{80})}{465}$$

On calcule alors les taux de mortalité au-delà de 80 ans de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{79} \cdot \exp\left(\sum_{x=80}^x g_{80} + s(y-80)\right) \quad , x \in 80, 81, \dots, 109$$

$$\text{Ou encore } \hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \cdot \exp(g_{80} + s(x-80)) \quad , x \in 80, 81, \dots, 109$$

On remarque que les taux au-delà de 80 ans sont uniquement déterminés par

$$\mu_{79} \text{ et } g_{80} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15} .$$

Chapitre II : le modèle Lee Carter

I. Présentation du modèle²

Le modèle de Lee Carter consiste à décomposer la mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle, et ensuite à extrapoler celle relative au temps. Il est intéressant de préciser que la méthode de Lee et Carter possède les avantages et les inconvénients de l'objectivité : elle n'incorpore pas d'avis d'expert sur l'évolution présumée de la mortalité, sur les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies ou encore l'évolution du style de vie. De plus, la méthode se borne à extrapoler dans le futur les tendances constatées dans le passé.

L'idée est de décomposer le logarithme du taux instantané de mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle. Le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ln(\mu_x(t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Pour ajuster le modèle, on a les données suivantes :

Des années d'observations : $\{ t_{\min}, \dots, t_{\max} \}$

D'une plage d'âge : $\{ x_{\min}, \dots, x_{\max} \}$

α_x : est la valeur moyenne temporelle des $\ln \hat{\mu}_x(t)$ pour l'âge x .

β_x : est la sensibilité pour chaque âge x des logarithmes des taux de mortalité par rapport à la composante temporelle k_t , soit formellement :

$$\frac{\partial \ln \hat{\mu}_x(t)}{\partial k_t} = \beta_x$$

En particulier, les âges x pour lesquels les β_x sont importants seront plus sensibles à l'évolution générale de la mortalité.

k_t : est la composante qui décrit l'évolution de la mortalité à travers le temps.

² DELWARE M. et DENUIT A. 2006, Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives. *Economica*.

$\varepsilon_{x,t}$: est un terme d'erreur qui reflète les particularités propres à l'âge x ou à la date t qui ne sont pas capturées par le modèle. Par hypothèse, ce terme est de moyenne nulle.

II. Estimation des paramètres :

On peut alors trouver une estimation des paramètres du modèle en utilisant un critère des moindres carrés ordinaire. L'objectif est de minimiser la somme des carrés des résidus. Cependant, la spécificité de ce modèle réside dans le fait qu'il n'y a pas de variable explicative exogène. α_x et β_x , les k_t sont des paramètres du modèle qu'il va falloir estimer.

Par ailleurs, ce modèle n'est pas identifié car, si les vecteurs α , β et k sont solutions du problème de minimisation, alors, pour n'importe quel scalaire c , les vecteurs $\alpha - \beta.c$, b et $k+c$ sont également solutions. Pour s'assurer de l'identifiabilité du modèle, il est nécessaire de rajouter les contraintes suivantes sur les paramètres β_x et k_t .

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} k_t = 0$$

Les paramètres du modèle sont ainsi la solution du problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k}) &= \arg \min_{\alpha, \beta, k} L(\alpha, \beta, k) \\ &= \arg \min_{\alpha, \beta, k} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \alpha_x - \beta_x k_t)^2 \end{aligned}$$

La solution de ce problème est unique grâce aux deux contraintes précédentes.

I.2 Estimation des α_x

Après avoir calculé $\mu_x(t)$ par la formule $\mu_x(t) = -\ln(1 - q_x(t))$, les estimations des α_x sont obtenues grâce à

$$\alpha_x = \frac{1}{T} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln(\hat{\mu}_x(t))$$

Avec $T = t_{\max} - t_{\min} + 1$

$$\begin{aligned}
\text{En effet, } \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} \ln \hat{\mu}_x(t) &= \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} (\alpha_x + \beta_x k_t) \\
&= \alpha_x N + \beta_x \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} k_t \\
&= \alpha_x N \quad \text{sous la contrainte } \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} k_t = 0
\end{aligned}$$

II.2 Estimation des β_x et k_t

La méthode utilisée ici pour estimer β_x et k_t est l'algorithme de Newton Raphson, il est à noter qu'une autre méthode classique existe, celle de la décomposition en valeurs singulières.

Les paramètres $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})$ annulent les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})}{\partial \alpha_x} = 0 \Leftrightarrow L_1(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t) = 0$$

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})}{\partial k_t} = 0 \Leftrightarrow L_2(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \sum_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \hat{\beta}_x (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t) = 0$$

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})}{\partial \beta_x} = 0 \Leftrightarrow L_3(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} \hat{k}_t (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t) = 0$$

Afin de calculer la racine d'une fonction réelle, on peut avoir recours à la méthode itérative de Newton Raphson. En effet, cette méthode est basée sur l'utilisation de la tangente en un point de la courbe d'une fonction f . Partant d'une valeur approximative d'un zéro x_0 d'une fonction f , on approche la fonction par sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe qui sera considéré comme un premier point de tangence. Cette tangente est une fonction affine d'équation $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ et son intersection avec l'axe des abscisses permet de trouver l'unique zéro que l'on appellera x_1 . Ce zéro sera considéré comme une deuxième valeur approchée du zéro à localiser. A son tour, cette valeur permettra de considérer

un deuxième point de tangence $(x_1, f(x_1))$. A nouveau, l'abscisse x_2 du point d'intersection de la deuxième tangente avec l'axe des abscisse sera considérée comme une troisième valeur approchée du zéro. En poursuivant ce procédé itérativement on obtiendra une séquence de valeur x_0, x_1, \dots qui vont se rapprocher de plus en plus d'un zéro réel de la fonction f .

Ainsi, à partir d'un point x_n , on cherche x_{n+1} tel que :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

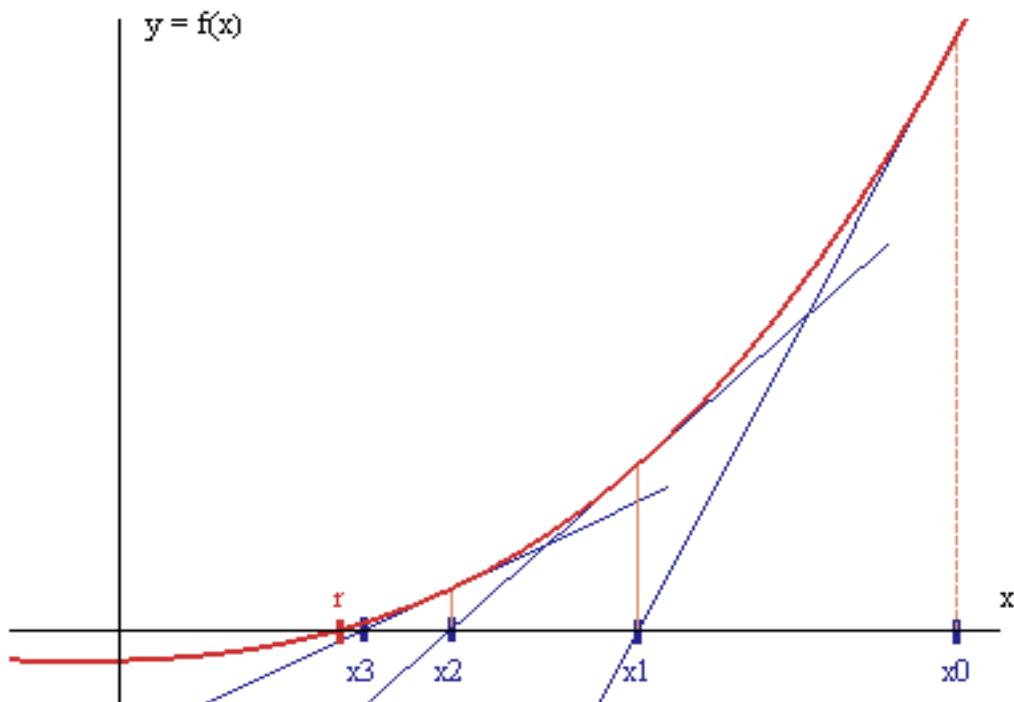


Figure 6 : Illustration de la méthode de Newton-Raphson

L'application de l'algorithme de Newton raphson dans le cas de Lee-Carter est la suivante :

$$\hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} - \frac{L_1(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\frac{\partial L_1(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\partial \hat{\alpha}_x^{(k)}}}$$

$$\hat{k}_t^{(k+1)} = \hat{k}_t^{(k)} - \frac{L_2(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\frac{\partial L_2(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\partial \hat{k}_t^{(k)}}}$$

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{L_3(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\frac{\partial L_3(\hat{\alpha}_x^{(k)}, \hat{\beta}_x^{(k)}, \hat{k}_t^{(k)})}{\partial \hat{\beta}_x^{(k)}}}$$

On en déduit

$$\hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}{N}$$

$$\hat{k}_t^{(k+1)} = \hat{k}_t^{(k)} - \frac{\sum_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \hat{\beta}_x^{(k)} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})}{\sum_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} (\hat{\beta}_x^{(k)})^2}$$

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} \hat{k}_t^{(k+1)} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)})}{\sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} (\hat{k}_t^{(k+1)})^2}$$

Cet algorithme nécessite une initialisation .le choix des paramètres initiaux est libre sauf pour $\hat{\beta}_a^{(0)}$ qui ne peut pas prendre la valeur 0 pour ne pas engendrer une division par 0 dans le calcul de $\hat{k}_t^{(1)}$.

L'algorithme est arrêté lorsque la somme des carrés des erreurs devient assez petite relativement à l'étape précédente .Formellement, cela revient à arrêter l'algorithme à l'itération k lorsque :

$$\frac{e^{(k-1)} - e^{(k)}}{e^{(k-1)}} < \varepsilon \quad \text{avec} \quad e^{(k)} = \sum_{a=a_{\min}}^{a=a_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} (\ln \hat{\mu}_a(t) - \hat{\alpha}_x^{(k)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)})$$

Les estimateurs issus de cet algorithme ne satisfont naturellement pas les contraintes mises dans le paragraphe précédent, d'où la nécessité de faire les transformations suivantes pour que l'estimation des taux instantanés de mortalité restent invariables :

$$\hat{\alpha}_a \leftarrow \hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \bar{k}$$

$$\hat{k}_t \leftarrow (\hat{k}_t - \bar{k}) \hat{\beta}_a$$

$$\hat{\beta}_a \leftarrow \frac{\hat{\beta}_a}{\hat{\beta}_a}$$

Avec $\hat{\beta}_t$ la somme des $\hat{\beta}_a$ initiaux et \bar{k} la moyenne des \hat{k}_t initiaux.

III. Résultats

α_x est obtenu en considérant la moyenne logarithmique des taux instantanés de mortalité.

β_x et k_t Sont obtenus grâce au processus itératif du Solveur Excel.

III.1 estimation des α_x

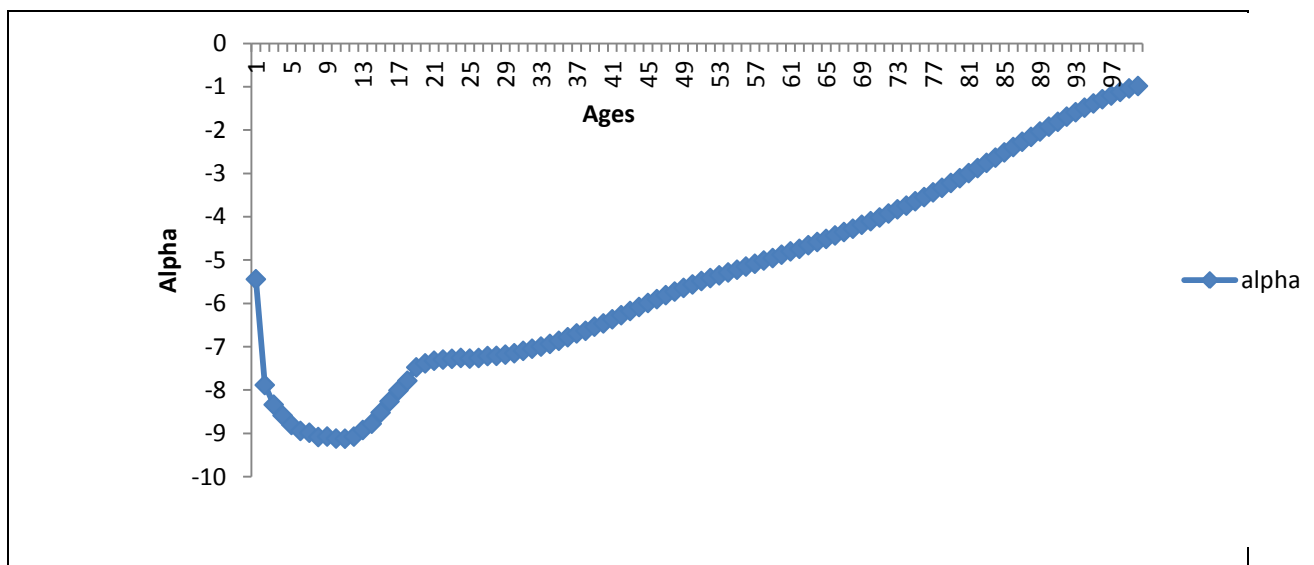


Figure 7 : Variation des alpha Lee-Carter en fonction de l'âge

On constate que les logarithmes moyens des taux de mortalité instantanés croissent aux bas âges ce qui illustre très bien la mortalité infantile. A la tranche d'âge comprise entre 17 ans et 21 ans, on observe un pic ce qui traduit la croissance de la mortalité due aux accidents, puis une croissance quasi-linéaire en fonction des âges.

III.2 Estimation des β_x

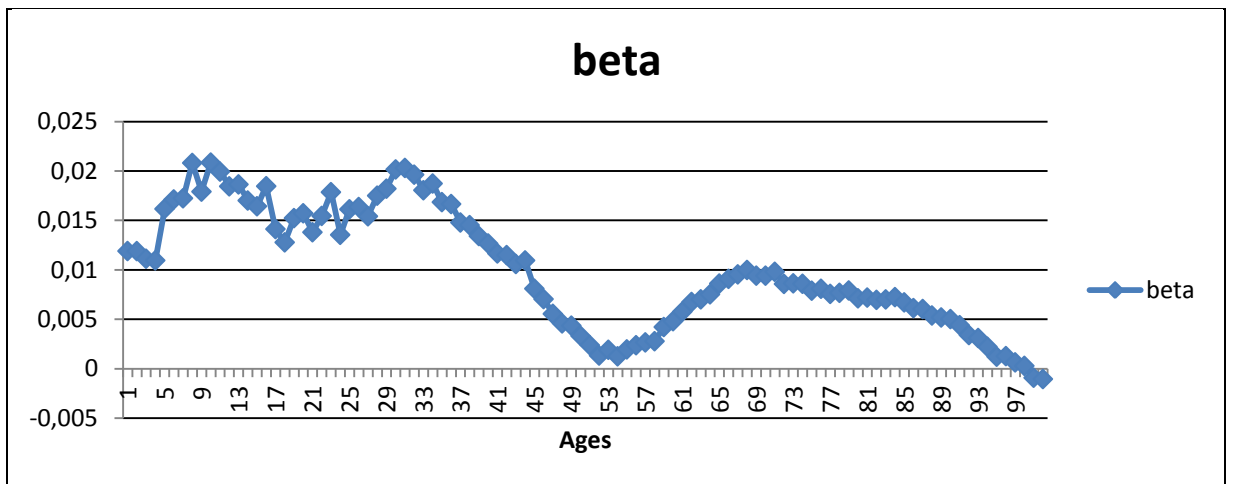


Figure 8 :Variation des beta Lee-Carter en fonction de l'âge

Comme $\beta_x = \frac{\partial \ln \hat{\mu}_x(t)}{\partial k_t}$, Avec un k_t décroissant, plus β_x est grand et positif, et plus les taux de mortalité instantané logarithmique diminuent ce qui traduit une mortalité améliorée pour ces âges. Par contre, un β_x petit et négatif avec une tendance décroissante de k_t conduit à une croissance de la mortalité.

D'après l'allure de la courbe de β_x , on constate que le risque de mortalité s'améliore pour les enfants ainsi que pour les personnes âgés entre 50 et 69 ans. A l'inverse, on observe une fluctuation de β_x ainsi qu'une décroissance de la mortalité de moins en moins forte avec l'âge.

II.3 La tendance k_t

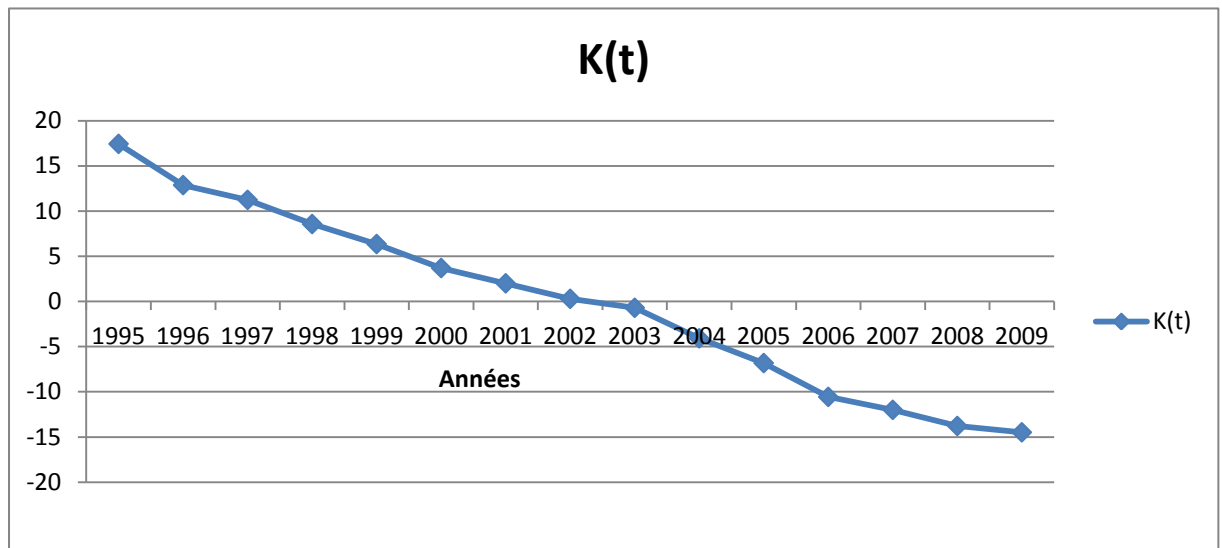


Figure 9 :L'estimation des $K(t)$ par le modèle Lee-Carter

On observe que la composante temporelle a une tendance décroissante ce qui indique une mortalité décroissante avec le temps.

IV.Variance temporelle :

La variance temporelle à l'âge x est un indicateur parmi d'autres de la qualité d'un modèle, V_t lie la variance de l'erreur sur la variance des taux bruts.

Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$V_t = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (\theta_x(t))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \theta_x(t) \right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (\hat{\mu}_x(t))^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{\mu}_x(t) \right)^2}$$

Avec $\theta_x(t) = \hat{\mu}_x(t) - \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t)$

Plus cet indicateur est proche de 1, meilleur est le modèle.

La figure ci-dessous donne les parts de variance expliquées par le modèle Lee-Carter pour chaque âge.

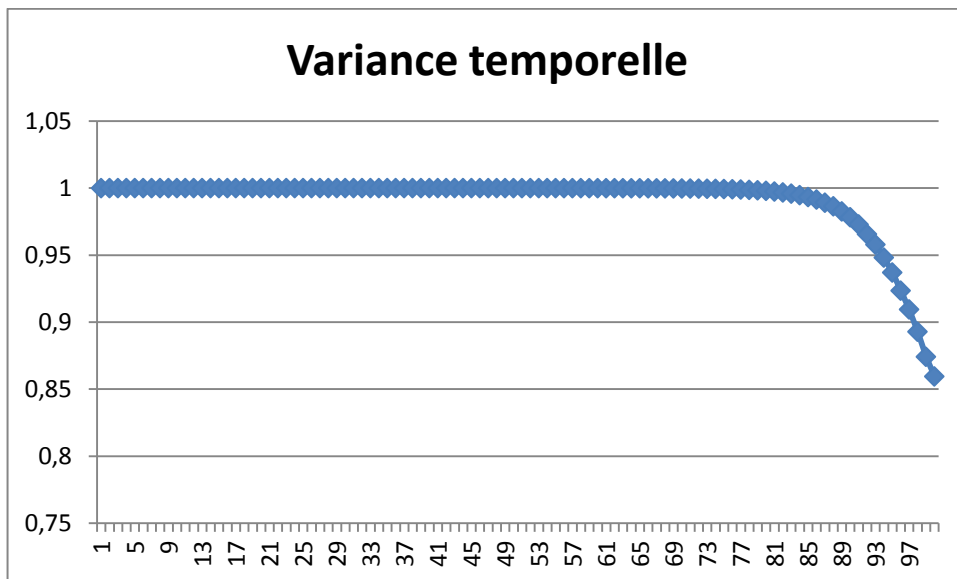


Figure 10 : Variance temporelle obtenue par le modèle Lee-Carter.

On constate que la part de la variance expliquée par le modèle lee-Carter atteint 100% jusqu'à l'âge 85 ans, où elle décroît vers 80%.

Chapitre III : Le modèle log-poisson

Le modèle log Poisson est une reformulation du modèle de Lee Carter. L'expression des taux instantanés de décès, ainsi que les contraintes rendant le modèle identifiable, restent identiques au modèle Lee Carter. L'interprétation des paramètres α_x , β_x et K_t est également la même.

I. Présentation du modèle³ :

Le modèle de Poisson propose de modéliser le nombre de décès $D_{x,t}$ à l'âge x durant l'année t par une loi Poisson :

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(L_{x,t} \mu_x(t))$$

Tout en gardant la spécification du modèle Lee Carter $\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x K_t)$

Soit $D_{x,t} \sim \text{Poisson}(L_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x K_t))$ avec les mêmes contraintes d'identification que Lee Carter .

La forme log-bilinéaire des taux de mortalité instantané de mortalité reste donc la même que Lee-Carter mais la structure de l'erreur n'est plus la même : le bruit vient directement de la loi de Poisson. L'interprétation des paramètres α_x , β_x et K_t reste la même que celle du modèle de Lee Carter .

Nous introduisons la variable $\lambda_{x,t}$ qui rend le nombre attendu de décès à l'âge x durant l'année t , c'est-à-dire : $\hat{\lambda}_{x,t} = L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)$

Rappelons que le nombre de décès peut naturellement être modélisé par une loi binomial :

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(n, q_x(t))$$

Ainsi, le nombre de décès à l'âge x et à l'instant t se produit avec une probabilité $q_x(t)$ et peut être au maximum égal au nombre de vivants en début de période, c'est-à-dire n .

³ DELWARE M. et DENUIT A. 2006, Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives. Economica.

Rappelons que la loi de Poisson $Poisson(np)$ est souvent utilisée comme approximation de la loi binomiale $Binomiale(n,p)$ lorsque n est grand et p est petit. Ainsi, le modèle $D_{x,t} \sim Poisson(L_{x,t}, \mu_x(t))$ peut être vu comme une bonne approximation du modèle binomial lorsque $L_{x,t}$ est grand et $q_x(t)$ est faible.

II. Estimation des paramètres :

Un grand avantage du modèle Log-poisson est qu'il est aisé d'en estimer les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\alpha, \beta, K) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} P(D_{x,t} = d_{x,t}) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{(L_{x,t} \mu_x(t))^{d_{x,t}} \exp(-L_{x,t} \mu_x(t))}{d_{x,t} !}$$

La fonction de log-vraisemblance vaut donc :

$$\begin{aligned} \ln(L(\alpha, \beta, K)) &= \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (d_{x,t} \ln(L_{x,t} \mu_x(t)) - L_{x,t} \mu_x(t) - \ln(d_{x,t} !)) \\ &= \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (d_{x,t} \ln(L_{x,t} \mu_x(t)) - L_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x K_t) + C) \end{aligned}$$

Les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres α_x , β_x et K_t sont les valeurs qui maximisent la vraisemblance, c'est-à-dire qui rendent les statistiques de mortalité dont nous disposons les plus vraisemblables dans le modèle.

$$\frac{\partial \ln(L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{K}))}{\partial \alpha_x} = 0 \Leftrightarrow L_1(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{K}_t)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{K}))}{\partial K_t} = 0 \Leftrightarrow L_2(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{K}_t)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{K}))}{\partial \beta_x} = 0 \Leftrightarrow L_3(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{K}_t)$$

$$\text{On déduit alors } \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (d_{x,t} - L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)) = 0 \text{ avec } x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$$

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (d_{x,t} \hat{\beta}_x - L_{x,t} \hat{\beta}_x \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)) = 0 \text{ avec } t = t_{\min}, \dots, t_{\max}$$

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (d_{x,t} \hat{\beta}_x - L_{x,t} \hat{\beta}_x \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)) = 0 \text{ avec } x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$$

L'estimation des paramètres α_x, β_x et K_t est réalisée par un algorithme itératif, l'algorithme de Newton-Raphson. A chaque itération, chaque ensemble de paramètres est mis à jour en fixant les autres à leur valeur courante.

$$\hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (d_{x,t} - L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)}))}{\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (-L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)}))} \text{ avec } \hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} \text{ et}$$

$$\hat{K}_t^{(k+1)} = \hat{K}_t^{(k)}$$

$$\hat{K}_t^{(k+1)} = \hat{K}_t^{(k)} - \frac{\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (d_{x,t} \hat{\beta}_x^{(k)} - L_{x,t} \hat{\beta}_x^{(k)} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)}))}{\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (-L_{x,t} \hat{\beta}_x^{(k)2} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k)}))} \text{ avec } \hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} \text{ et}$$

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)}$$

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (d_{x,t} \hat{K}_t^{(k+1)} - L_{x,t} \hat{K}_t^{(k+1)} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)}))}{\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} (-L_{x,t} \hat{K}_t^{(k+1)2} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{k}_t^{(k+1)}))} \text{ avec } \hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} \text{ et}$$

$$\hat{K}_t^{(k+1)} = \hat{K}_t^{(k)}$$

L'initialisation du modèle peut être la même que pour Lee Carter, il ne reste qu'à fixer un critère d'arrêt. Il convient de stopper les itérations lorsque l'augmentation relative de la fonction de log-vraisemblance n'excède plus une borne inférieure fixée.

Pour respecter les contraintes du modèle, il est nécessaire de modifier les estimateurs ainsi obtenus. Il y a donc lieu d'effectuer la transformation :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_a &\leftarrow \hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \bar{k} \\ \hat{k}_t &\leftarrow (\hat{k}_t - \bar{k}) \hat{\beta}_\bullet \\ \hat{\beta}_a &\leftarrow \frac{\hat{\beta}_a}{\hat{\beta}_\bullet} \end{aligned}$$

Avec $\hat{\beta}_\bullet$ la somme des $\hat{\beta}_a$ initiaux et \bar{k} la moyenne des \hat{k}_t initiaux.

III. Résultats :

Les estimations de α_x , β_x et K_t par maximum de vraisemblance avec l'algorithme de Newton est faite sous le logiciel IEM input files.

III.1 Le paramètre α_x

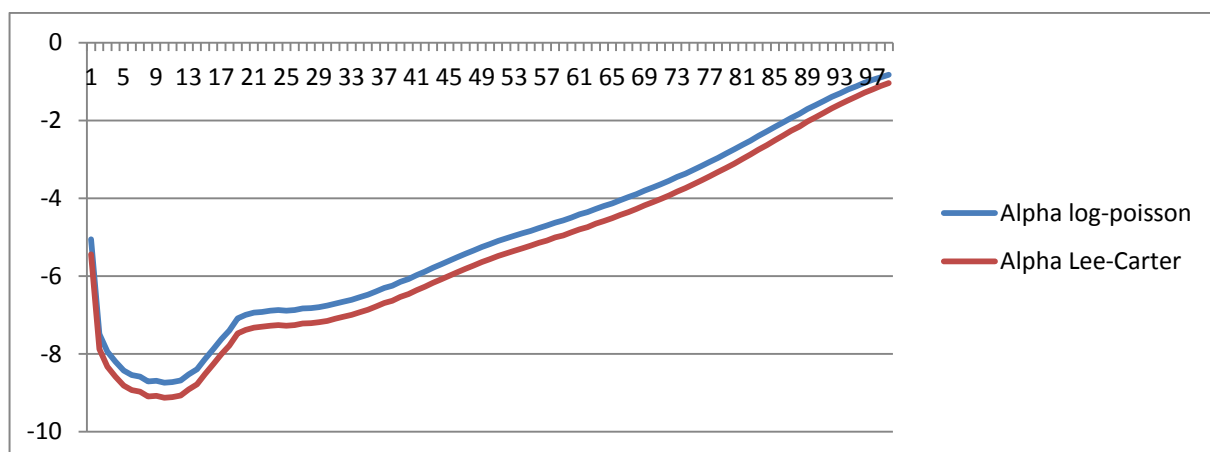


Figure 11 : Estimation de alpha log-poisson et comparaison avec alpha Lee-Carter.

On constate que Alpha garde la même allure pour les deux modèles ; Lee Carter et log poisson.

III.2 Paramètre β_x

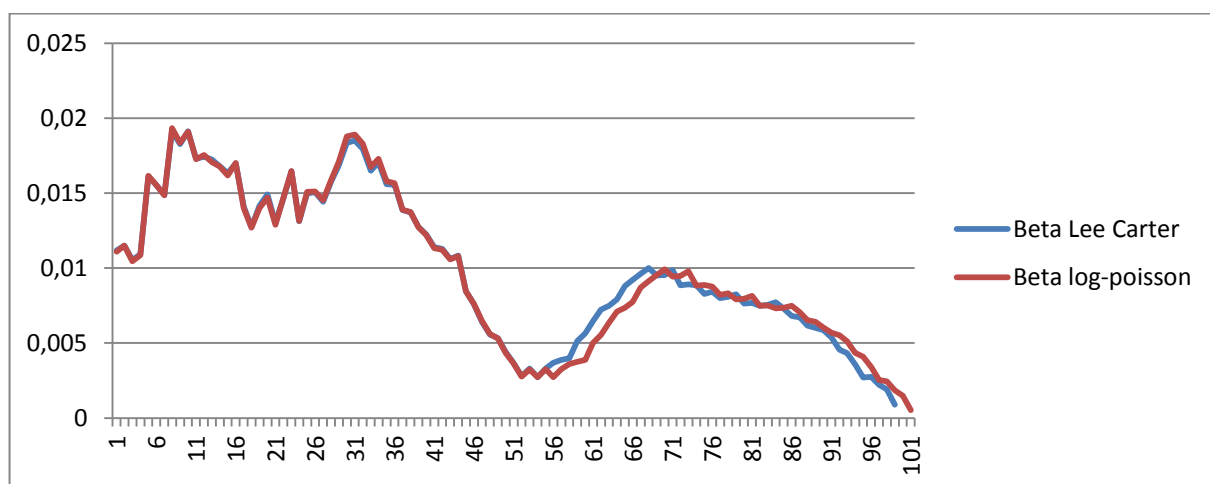


Figure 12 : Estimation des beta log-poisson et comparaison avec beta Lee-Carter

Comme le montre la figure ci-dessus, les deux courbes représentant le paramètre β_x se superposent quasiment sauf pour les âges compris entre 55 ans et 70 ans et à partir de 90 ans. Pour les âges entre 55 et 70 ans, le modèle log poisson trouve des β_x inférieurs à ceux de Lee Carter, ce qui traduit un risque de mortalité accru pour ces âges, contrairement qu'aux âges supérieurs à 90 ans où il trouve des β_x supérieurs, ce qui veut dire une mortalité inférieure.

III.3 Composante tendancielle K_t

D'après la tendance obtenue par les deux modèles, on déduit que le risque de mortalité selon log-poisson est inférieur à celui de Lee-Carter au fil de temps.

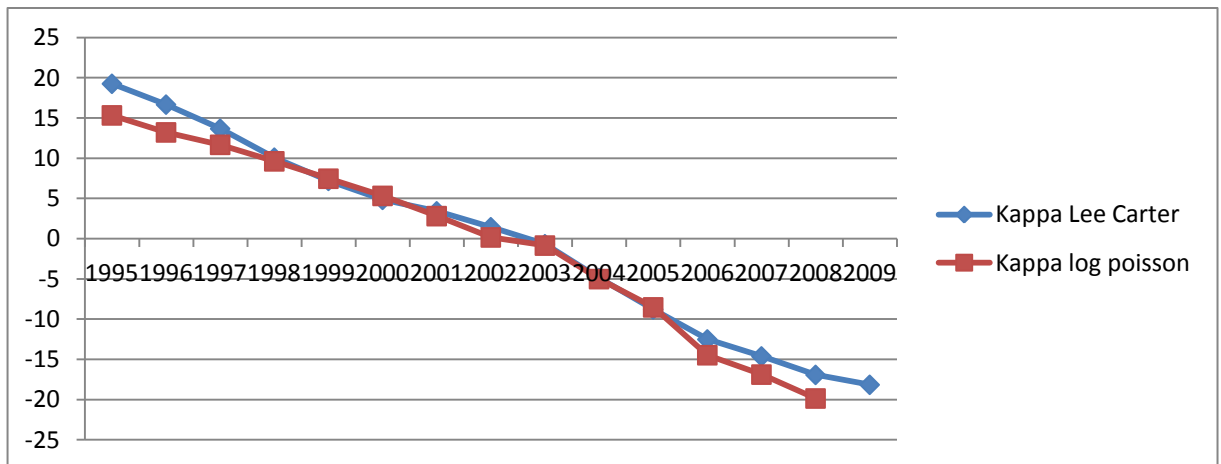


Figure 13 : Estimation de Kappa log-poisson et comparaison avec Kappa Lee-Carter.

IV. Mesure de la qualité d'ajustement du modèle

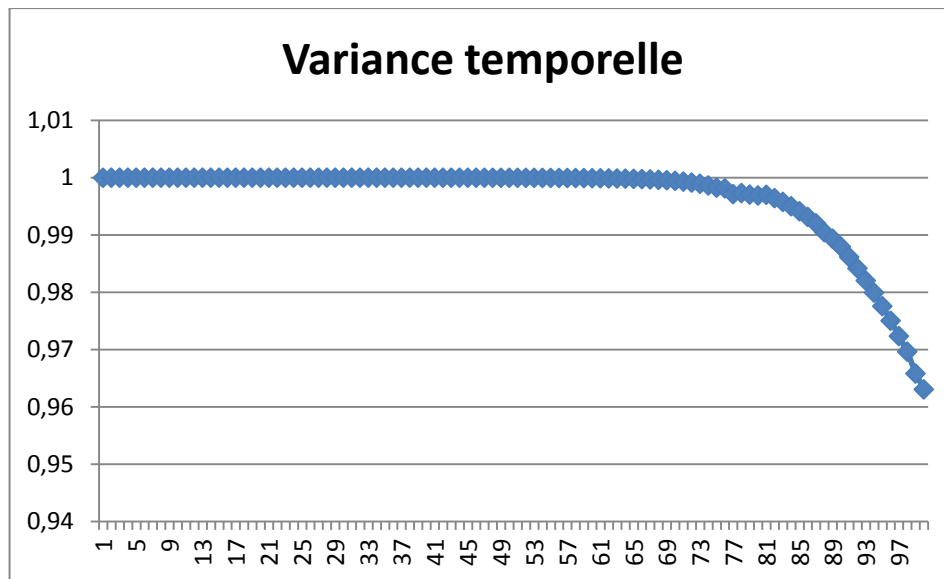


Figure 14 : Variance temporelle obtenue par le modèle Log-poisson.

Nous constatons que la partie de la variance expliquée par le modèle log-poisson atteint 96% pour les grands âges, supérieure à celle obtenue par le modèle Lee carter, ce qui prouve que le modèle log-poisson est plus adapté à nos données.

Chapitre IV : Comparaison entre le modèle Lee Carter et log-poisson

I. Modèle retenu entre celui de Lee-Carter et Log-poisson

Le modèle Lee Carter présente certaines limites, il repose sur une hypothèse forte d'homoscédasticité des taux de mortalité voire leur normalité. A titre d'exemple, pour estimer les paramètres on a eu recours à la méthode des moindres carrés ordinaires, et à ce titre, il faut pour que l'estimateur soit optimal que les résidus vérifient l'hypothèse d'homoscédasticité. Ceci n'est pas très réaliste dans la mesure où les taux de mortalité sont beaucoup plus variables chez les personnes âgées, en raison du nombre plus faible de décès (à cause d'effectifs très restreints). On note effectivement une très forte variabilité de la variance des taux de décès à partir de l'âge 80 ans, comme le montre le graphique ci-dessous sur la population étudiée.

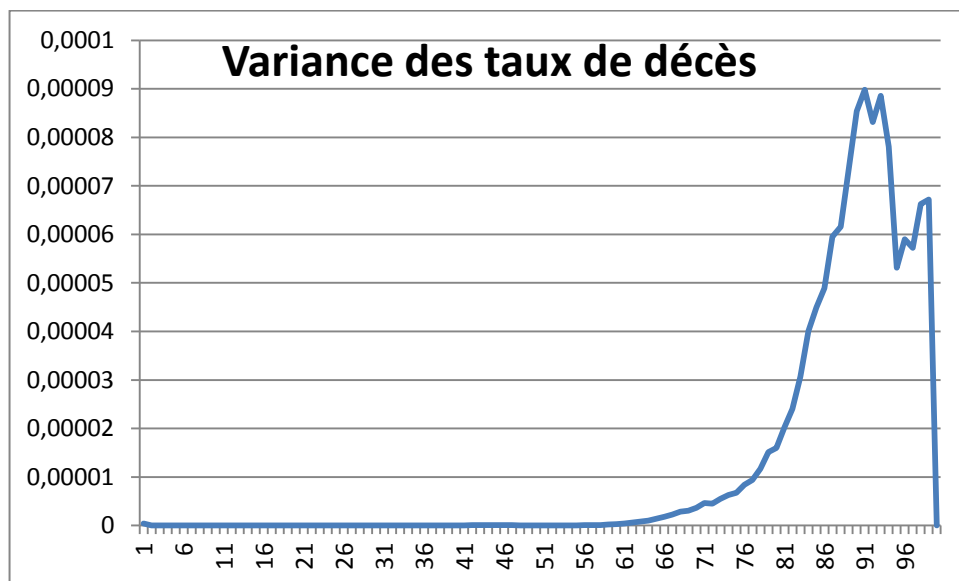


Figure 15 : Variance des taux de décès bruts.

Afin de pallier à ce problème, on a proposé le modèle de Poisson qui présente plusieurs avantages par rapport à celui de Lee-Carter :

- il modélise le nombre de décès par un nombre entier, ce que ne faisait pas Lee-Carter ;

- l'hypothèse d'homoscédasticité est levée, ce qui permet de reconnaître la variabilité plus importante des taux bruts selon les âges ;
- Un critère de détermination des paramètres de type « maximum de vraisemblance » a une justification probabiliste et bénéficie de « bonnes propriétés » (convergence, efficacité asymptotique, normalité asymptotique, etc.).

Pour retenir un modèle de calcul stochastique du Best Estimate du risque de mortalité, nous mesurons la qualité de l'ajustement par un critère de fidélité aux taux bruts jusqu'à 100 ans.

On trace alors $\Delta(t)$ tel que $\Delta(t) = \sum_{x=0}^{100} (q_x(t) - q_x^{\text{modèle}}(t))^2$ pour les deux modèles de 1995 à 2009 pour la population étudiée.

On constate que l'ajustement est assez mauvais pour le modèle Lee Carter, avec un écart compris entre 3% et 5% contrairement au modèle log-poisson où l'écart ne dépasse pas 1,8%. Ceci prouve que la version améliorée du modèle Lee Carter est adéquate pour nos données, pour confirmer notre choix, on procède à un test d'ajustement de khi2.

II. Test de khi 2

Une fois le modèle ajusté (l'estimation de maximum de vraisemblance des paramètres est obtenue), il est primordial d'en évaluer la qualité, c'est-à-dire son habileté à décrire le nombre de décès touchant les individus observés.

Il existe plusieurs façons de mesurer la qualité du modèle. La plus classique, quand on travaille avec un modèle de Poisson, est d'utiliser la déviance, qui peut s'exprimer dans le cas particulier du modèle choisi :

$$Dev(d, \hat{\delta}) = 2 \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \left[d_{x,t} \ln \frac{d_{x,t}}{\hat{\delta}_{x,t}} \right]$$

Où $\hat{\delta}_{x,t} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)$

La déviance permet alors d'exprimer le pseudo- R^2 dont une valeur proche de 1 induira une bonne adéquation du modèle aux données :

$$pseudoR^2 = 1 - \frac{Dev(d, \hat{\delta})}{Dev(d, \delta^*)}$$

Où $Dev(d, \delta^*)$ est la déviance du modèle de base, qui est usuellement spécifié par $\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x)$, d'où l'on peut déduire :

$$\delta_{x,t}^* = L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x)$$

Une autre alternative à la déviance est d'utiliser la statistique généralisée de Pearson, notée X^2 , est définie par
$$X^2 = \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{(D_{x,t} - \hat{D}_{x,t})^2}{\hat{D}_{x,t}}$$

Où $D_{x,t}$ représente le nombre de décès observés (issus directement des taux bruts) à l'âge x et pour l'année t et $\hat{D}_{x,t}$ représente les décès théoriques par application de la méthode de lissage de Log poisson.

La statistique X^2 est asymptotiquement distribuée selon la loi de khi-deux à un degré de liberté qui est égal à la différence entre le nombre des composantes de base utilisées dans le calcul de la statistique et le nombre de relations (paramètres) qui lient celles-ci.

Le test de khi-deux permet d'accepter ou de rejeter le modèle étudié par comparaison de X^2 et de $X^2_{\text{théorique}}$.

Si $X^2 > X^2_{\text{théorique}}$ alors l'hypothèse d'ajustement est acceptée.

Pour l'exemple étudié dans ce mémoire, on trouve X^2 observé est égale à 1307 supérieur à $X^2_{\text{théorique}}$ à 1287 de degré de liberté ce qui confirme que le modèle log poisson ajuste bien les taux instantanés de mortalité.

III. Choix du modèle d'extrapolation :

Le modèle log-poisson présenté ci- dessus possède la propriété de synthétiser dans la série

$\{ K_t, t=t_{\min}, \dots, t_{\max} \}$ toute l'information relative à l'évolution de la mortalité dans le temps.

L'objectif est de modéliser cette série temporelle afin d'être en mesure d'effectuer des prévisions sur les indices de mortalité des années futures.

Cette manière de procéder possède les avantages et les inconvénients de l'objectivité : aucune attention n'est accordée à l'avis d'expert sur l'évolution présumée de la mortalité, sur les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies ou encore l'évolution présumée de la mortalité, sur les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies ou encore l'évolution du style de vie. Le but est donc de se borner à extrapoler dans le futur les tendances observées dans le passé. Cette démarche a été critiquée car elle est incapable de prévoir des variations subites de la mortalité (par exemple la découverte d'un nouveau traitement médical).néanmoins, la mortalité étant influencée par l'interaction complexe de facteurs sociaux et biologiques difficiles à modéliser, la prédiction par extrapolation est en fait la technique par défaut.

L'une des approches standard pour l'extrapolation d'une série temporelle réside dans la modélisation ARIMA.

Adoptons les notations suivantes :

- B est l'opérateur de retard, c'est-à-dire
- ∇_d est l'opérateur de différence d'ordre d, c'est-à-dire $\nabla_d = (1 - B)^d$.

K_t est alors un processus ARIMA (p,d,q) si :

$$X_t = \nabla_d K_t$$

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \mu + a_t + \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}$$

Avec $a_t \sim Nor(0, \sigma^2)$ des erreurs indépendantes et identiquement distribuées.

Un tel ajustement peut être réalisé à l'aide de la désormais célèbre méthodologie Box et Jenkins. Cela nous permet d'effectuer des projections de la mortalité dans le futur.

Les principales étapes de la méthodologie Box & Jenkins sont :

- Stationnarisation de la série ;
- Identification du modèle ;
- Estimation des paramètres ;
- Analyse des résidus ;
- Prévission

I.3 Stationnarité de la série

Le test de stationnarité que nous avons utilisé est le test de Dickey- Fuller dont l'algorithme est le suivant :

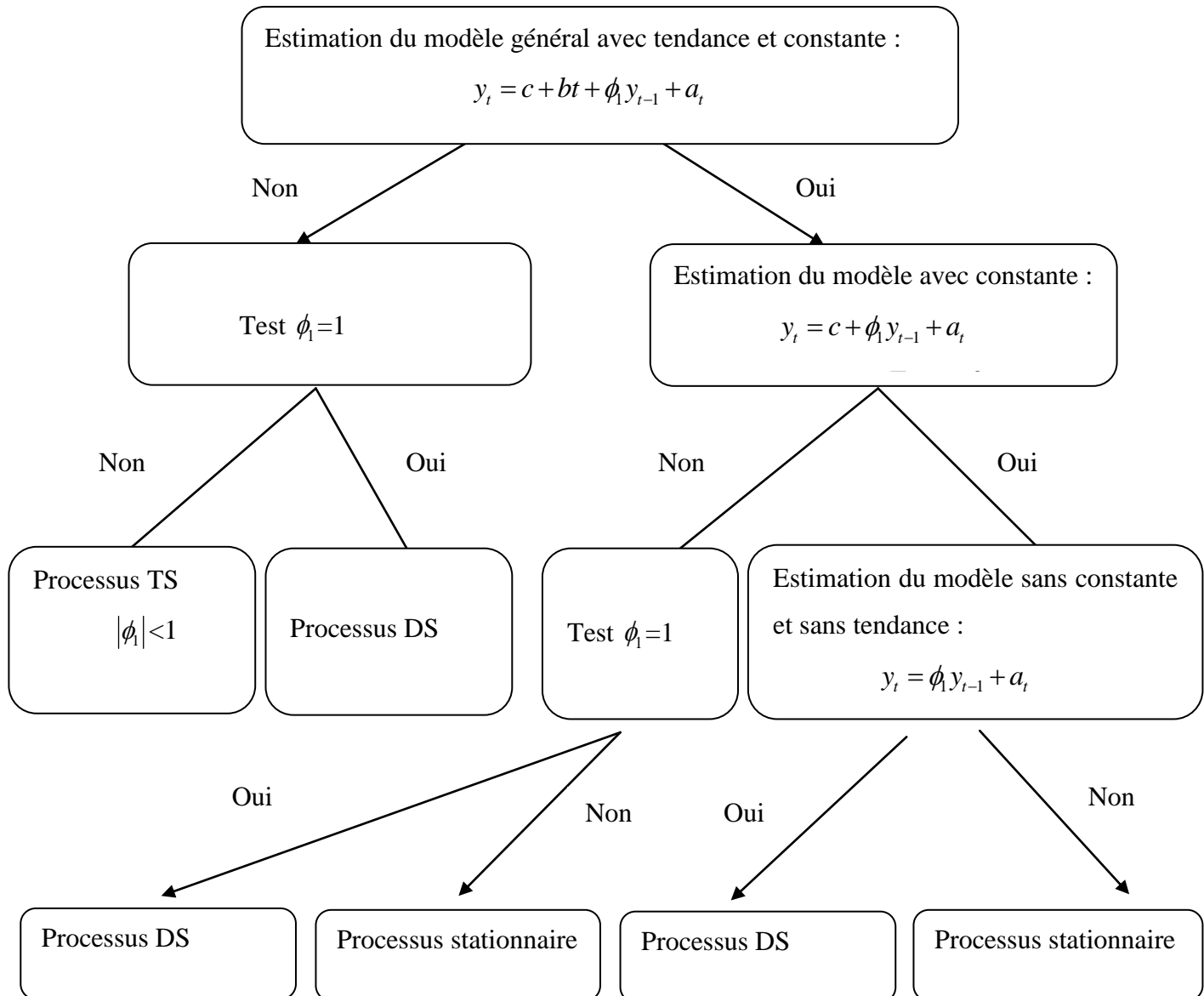


Figure 16 : Algorithme général du test de stationnarité

- Application du test de Dickey-Fuller
- Estimation du modèle avec tendance et constante : $y_t = c + bt + \phi_1 y_{t-1} + a_t$

H0 : b=0

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on KAPPA				
Null Hypothesis: KAPPA has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=0)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-1.435026	0.8022
Test critical values:	1% level		-4.800080	
	5% level		-3.791172	
	10% level		-3.342253	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 14				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(KAPPA)				
Method: Least Squares				
Date: 05/26/12 Time: 14:22				
Sample (adjusted): 1996 2009				
Included observations: 14 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
KAPPA(-1)	-0.361270	0.251751	-1.435026	0.1791
C	5.031487	5.582694	0.901265	0.3868
@TREND(1995)	-0.964679	0.700299	-1.377523	0.1957
R-squared	0.181097	Mean dependent var		-2.671929
Adjusted R-squared	0.032206	S.D. dependent var		0.918131
S.E. of regression	0.903225	Akaike info criterion		2.821720
Sum squared resid	8.973979	Schwarz criterion		2.958661
Log likelihood	-16.75204	Hannan-Quinn criter.		2.809044
F-statistic	1.216302	Durbin-Watson stat		0.985927
Prob(F-statistic)	0.333257			

Figure17 :Test d'ADF pour le modèle avec tendance pour la série Kappa

La p-value associée au coefficient de la tendance est supérieure à tous les seuils 1%,5%et 10% .Par conséquent, on accepte l'hypothèse nulle b=0. Le modèle général n'est pas adapté puisque la présence d'une tendance est rejetée, on passe donc au 2ème modèle avec constante : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + a_t$.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on KAPPA				
Null Hypothesis: KAPPA has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=0)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-0.705549	0.8142
Test critical values:				
	1% level		-4.004425	
	5% level		-3.098896	
	10% level		-2.690439	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.				
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 14				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(KAPPA)				
Method: Least Squares				
Date: 05/26/12 Time: 14:46				
Sample (adjusted): 1996 2009				
Included observations: 14 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
KAPPA(-1)	-0.015746	0.022318	-0.705549	0.4939
C	-2.651516	0.251929	-10.52485	0.0000
R-squared	0.039831	Mean dependent var		-2.671929
Adjusted R-squared	-0.040183	S.D. dependent var		0.918131
S.E. of regression	0.936396	Akaike info criterion		2.838007
Sum squared resid	10.52205	Schwarz criterion		2.929301
Log likelihood	-17.86605	Hannan-Quinn criter.		2.829556
F-statistic	0.497799	Durbin-Watson stat		1.011718

Figure 18 : Test d'ADF pour le modèle avec constante

La p-value associée au coefficient de la constante est inférieure à tous les seuils 1%,5%,10% et par suite on refuse l'hypothèse nulle $c=0$.

On passe au test $\phi_1=1$ pour le deuxième modèle comme exige l'algorithme de dickey-fuller

On trouve alors que p-value associé à t-statistic du test est supérieure à tous les seuils 1%,5%,10% et ainsi l'hypothèse nulle est acceptée.

On conclut donc que la série est un processus DS, il convient de la stationnariser par passage aux différences selon l'ordre d'intégration $I=d$ (c'est-à-dire le nombre de fois qu'il faut différencier la série pour la rendre stationnaire. La série différenciée est alors étudiée selon la méthodologie de Box-Jenkins.

- Application du test Dickey Fuller pour la série de 1^{ère} différence :

La série de première différence est représentée dans le graphe suivant :

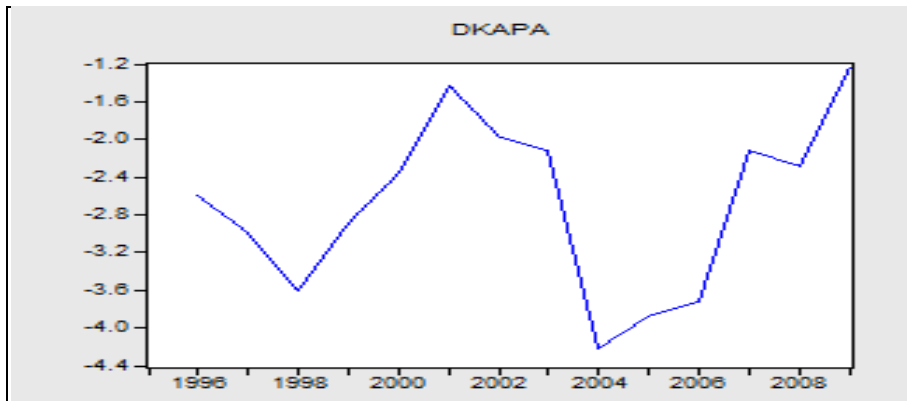


Figure 19 : la série de première différence de kappa.

- Estimation du modèle avec tendance et constante

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DKAPPA				
Included observations: 13 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DKAPPA(-1)	-0.476548	0.305408	-1.560364	0.1497
C	-1.652604	1.015562	-1.627281	0.1347
@TREND(1995)	0.053869	0.066896	0.805272	0.4394
R-squared	0.242373	Mean dependent var		0.104361
Adjusted R-squared	0.090848	S.D. dependent var		0.945583
S.E. of regression	0.901608	Akaike info criterion		2.829901
Sum squared resid	8.128976	Schwarz criterion		2.960274
Log likelihood	-15.39436	Hannan-Quinn criter.		2.803104
F-statistic	1.599554	Durbin-Watson stat		1.680785
Prob(F-statistic)	0.249619			

Figure 20 :test d'ADF pour le modèle générale de la série de première différence.

La p-value associée au coefficient de la tendance est supérieure à tous les seuils 1%,5%et 10% .Par conséquent, on accepte l'hypothèse nulle $b=0$. Le modèle général n'est pas adapté puisque la présence d'une tendance est rejetée, on passe donc au 2ème modèle avec constante de la série différenciée.

On trouve également que la p-value associée au coefficient de la constante est égale à 0,1785 et est supérieure à tous les seuils 1%,5%,10% et par suite la constante est significativement nulle.

En passant alors au 1^{er} modèle sans tendance et sans constante, on trouve une p-value associée au t-statistic du test est égale à 0,3372 supérieure à tous les seuils 1%,5%,10% et ainsi l'hypothèse nulle $\phi_1=1$ est acceptée.

On conclut donc que même la série de 1^{ère} différence est un processus DS, on applique de nouveau le test de dickey fuller à la série de 2^{ème} différence.

- Application du test dickey fuller à la série de 2^{ème} différence.

On représente la série de 2^{ème} différence comme suit :

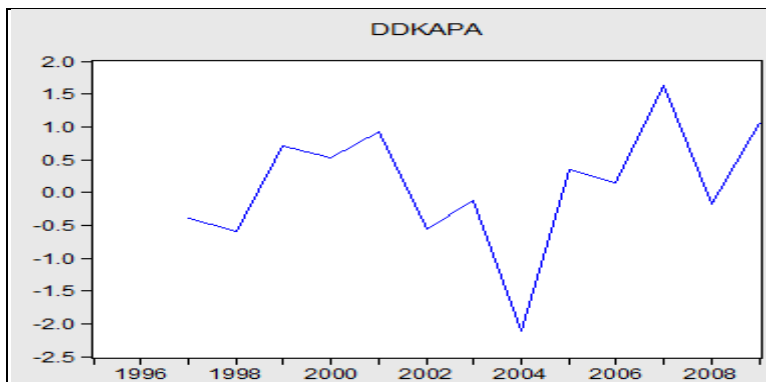


Figure 21 :la série de deuxième différence de kappa.

En appliquant le test d'ADF à la série de deuxième différence on trouve que le modèle générale ainsi que le modèle ave constante ne sont pas adapté, on passe alors au modèle sans constante et sans tendance.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DDKAPPA		
Null Hypothesis: DDKAPPA has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=0)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.297460	0.0034
Test critical values:	1% level	-2.771926
	5% level	-1.974028
	10% level	-1.602922
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

Figure 22 : test d'ADF du modèle sans constante et sans tendance de la série de deuxième différence.

On trouve une p-value associée au t-statistic du test est supérieure à tous les seuils 1%,5%,10% et ainsi l'hypothèse nulle $\phi_1=1$ est acceptée.

Donc on conclut que la série Y_t de 2^{ème} différence est stationnaire définie telle que $Y_t=(1-B)^2*K_t$.

III.2 Identification du modèle

En se basant sur le corrélogramme de la série différenciée, on peut déterminer l'ordre p et q de notre modèle.

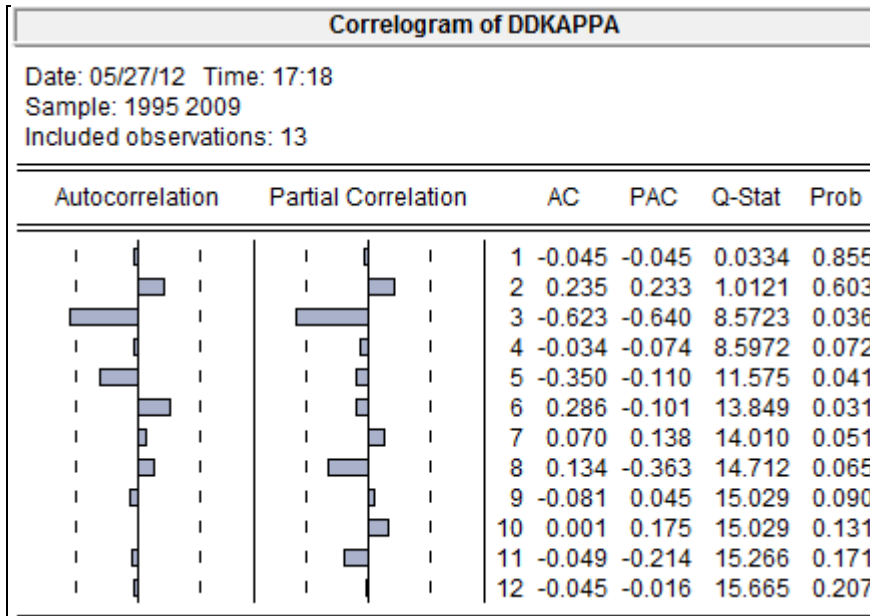


Figure 23 :Le corrélogramme de la série de deuxième différence.

Nous remarquons que le corrélogramme partiel et le corrélogramme simple ont seulement le troisième terme différent de 0, nous pouvons anticiper un processus de type **ARMA (p,q)**, avec $p \leq 3$ et $q \leq 3$.

IV.4 Estimation des paramètres

Après avoir estimé les paramètres des différents modèles possibles, on retiendra que ceux dont tous les coefficients ont un $|t_{student}| > 1,96$ (risque de 5%).

On déduit que le modèle **ARIMA(1,2)** sans constante est le modèle convenable pour la série étudiée.

Dependent Variable: DDKAPPA				
Method: Least Squares				
Date: 05/27/12 Time: 17:50				
Sample (adjusted): 1998 2009				
Included observations: 12 after adjustments				
Convergence achieved after 14 iterations				
MA Backcast: 1996 1997				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-1.073307	0.044352	-24.19985	0.0000
MA(1)	1.834834	0.078053	23.50754	0.0000
MA(2)	0.862372	0.070556	12.22254	0.0000
R-squared	0.722670	Mean dependent var	0.146636	
Adjusted R-squared	0.661041	S.D. dependent var	0.974713	
S.E. of regression	0.567480	Akaike info criterion	1.917096	
Sum squared resid	2.898303	Schwarz criterion	2.038323	
Log likelihood	-8.502575	Hannan-Quinn criter.	1.872213	
Durbin-Watson stat	1.308907			

Figure 24 :L'estimation des paramètres du modèle ARMA (1,2)

II.5 Analyse des résidus

- Le corrélogramme des résidus

Correlogram of Residuals						
Date: 05/27/12 Time: 18:13						
Sample: 1996 2009						
Included observations: 14						
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.230	0.230	0.9151	
		2	0.340	0.303	3.0781	
		3	-0.139	-0.306	3.4691	
		4	-0.017	-0.040	3.4754	0.062
		5	-0.425	-0.335	7.9813	0.018
		6	-0.311	-0.247	10.693	0.014
		7	-0.280	0.071	13.208	0.010
		8	-0.039	0.055	13.266	0.021
		9	-0.014	-0.019	13.274	0.039
		10	0.063	-0.124	13.494	0.061
		11	0.004	-0.248	13.496	0.096
		12	0.063	-0.080	13.944	0.124

Figure 25 :Le corrélogramme des résidus du modèle ARIMA(1,2)

On remarque, d'après le corrélogramme des résidus, que tous les résidus se trouvent à l'intérieur des deux intervalles de confiance. On peut donc dire que les résidus se comportent comme un bruit blanc.

- Test de normalité des résidus

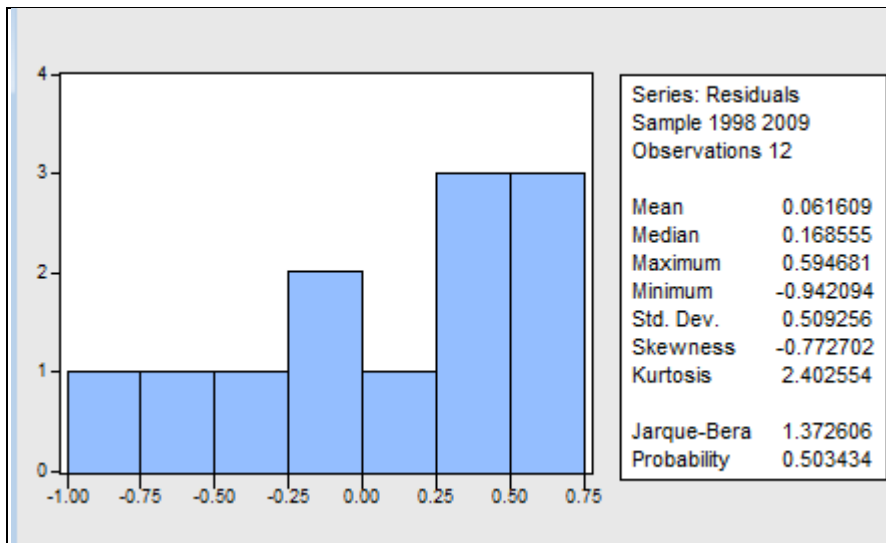


Figure 26 :Le test de Jarque-Bera sur les résidus.

On constate que la probabilité critique est supérieur à 0.05 alors on accepte l’hypothèse nulle de normalité des résidus.

Donc la série des résidus constitue un bruit blanc gaussien.

- Homoscédasticité des erreurs

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	0.589898	Prob. F(1,11)	0.4586
Obs*R-squared	0.661669	Prob. Chi-Square(1)	0.4160

Figure 27 :Le test d’ARCH d’homoscédasticité des résidus.

La probabilité critique est supérieure à 5% poussant à accepter H_0 , d’où les résidus sont homoscédastiques.

Après avoir effectué les tests sur la variable résiduelle, on peut dire que l’estimation du modèle ARIMA(1,2) est validée.

Alors la série Y_t de 2^{ème} différence peut s’écrire de la sorte $y_t + 1,07y_{t-1} = \mu + a_t + 1,83a_{t-1} + 0,86a_{t-2}$ avec $\forall t \geq 3$

Avec a_t est un bruit blanc.

Or $y_t = (1-B)^2 k_t$

Donc $k(t)$ suit un processus ARIMA(1,2,2) et s'écrit :

$$k_t = -2,07k_{t-2} + 0,93k_{t-1} + 2,14k_{t-3} + \mu + a_t + 1,83a_{t-1} + 0,86a_{t-2} \text{ avec } t \geq 4$$

III.5 Prévisions :

Finalement, nous pouvons projeter les valeurs de $K(t)$ dans le futur. On peut voir à la figure ci-dessous la projection de $k(t)$ à l'horizon 2030.

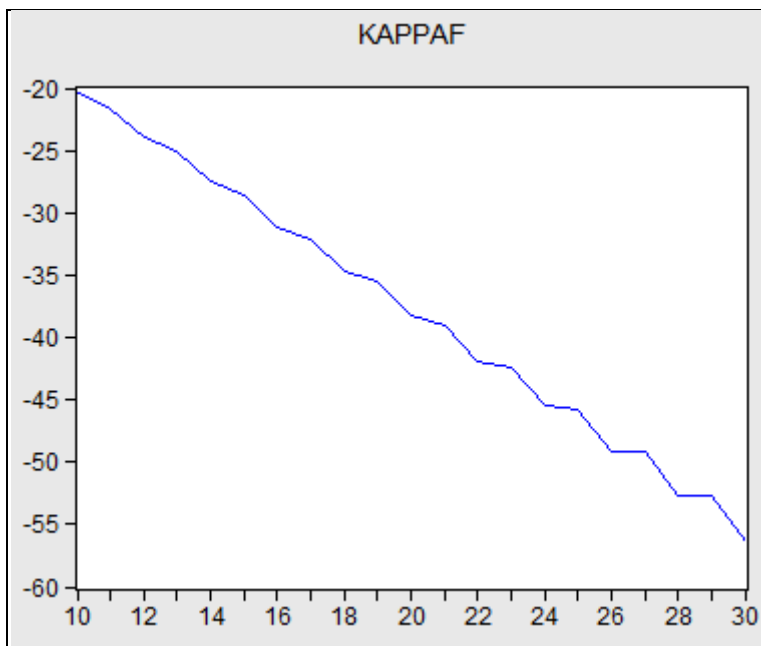


Figure 28 :Les projections de $K(t)$ de 2009 à 2030

Il suffit alors d'utiliser les projections des $k(t)$ pour obtenir les tables de mortalité prospectives. Une fois la projection $\{\hat{k}_{2009+t}, t = 1, 2, \dots\}$ obtenue on en déduit

$$\hat{\mu}_x(2009+t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_{2009+t}), t = 1, 2, \dots$$

il convient ici d'insister sur le fait que nos 15 années d'observation ne nous autorisent pas normalement à effectuer des projections à un horizon lointain, mais que le calcul des provisions relatives à la garantie décès nécessite la projection à long terme de $k(t)$.

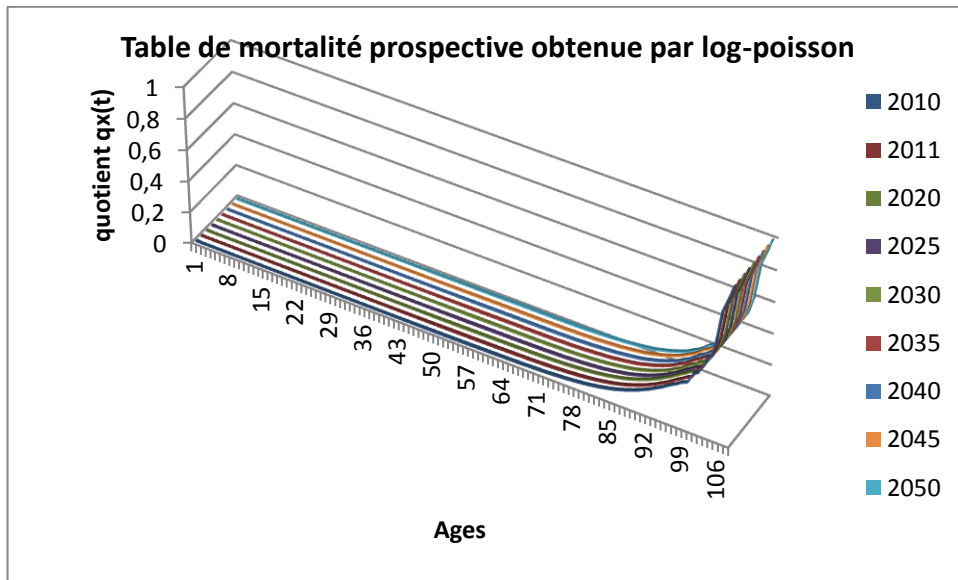


Figure 29 :Table prospective obtenue par le modèle log-poisson et projection de la série ARIMA

K(t)

PARTIES : CALCUL DES EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LE RISQUE DE MORTALITÉ

A ce stade, nous avons construit une table de mortalité prospective classique, déterministe puisqu'elle n'envisage pas qu'une trajectoire de la mortalité.

Dans cette partie, nous allons calculer le montant du best estimate ainsi que le SCR risque mortalité avec deux méthodes l'une est standard et se base sur la table prospective déterminée dans la partie précédente .l'autre méthode est dans le cadre d'un modèle interne afin de tenir compte de la déviation de la mortalité par rapport à celle attendue par la table déterministe. Ensuite, nous allons faire une comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

Chapitre I : L'approche standard

I. Des tables nationales aux tables d'expérience.

Dans le cadre de solvabilité 2, les assureurs sont appelés à évaluer leurs engagements d'assurance à partir d'hypothèses réalistes et fines, dans le but d'évaluations *best estimate*. A ce titre les tables de mortalité modélisées par le modèle log-poisson qu'on obtient à base d'un historique de la population nationale, ne peuvent pas correspondre à la mortalité du portefeuille des assurés.

Une solution pour résoudre cette problématique est de lier les taux de mortalité sur population d'expérience aux taux de mortalité sur population nationale. Il sera alors possible de déduire les taux de mortalité d'expérience des taux de mortalité nationaux.

$$\underbrace{q_{\text{exp}}(x, t)}_{\text{Mortalité d'expérience}} = f\left(\underbrace{q_{\text{nat}}(x, t)}_{\text{Mortalité nationale}}\right)$$

Fonction liant les deux indicateurs de mortalité

Ces méthodes ou modèles relationnels peuvent être adaptés assez simplement sur des tailles de portefeuille raisonnables ou sur des populations assez récemment assurées.

Ainsi, on peut distinguer entre deux familles de modèles relationnels :

- Modèles relationnels paramétriques (exemples : modèles de Cox, Brass, Hannerz)
- Les modèles relationnels non paramétriques (exemple : modèle de Loess)

Pour cette étude, on a opté pour les modèles paramétriques qui sont faciles à appliquer et donnent de bons résultats.

Un modèle relationnel paramétrique nécessite la spécification d'une forme paramétrique permettant d'exprimer la mortalité d'expérience en fonction de la

mortalité nationale. Il est alors nécessaire d'estimer les paramètres du modèle afin d'obtenir la relation explicite souhaitée.

Certains modèles requièrent la connaissance des taux de mortalité instantanés, d'autres celle des taux de mortalité annuels. Nous rappelons qu'il existe une relation entre ces deux grandeurs, permettant selon le type de données de se placer dans le contexte requis pour l'estimation du modèle : $q_{x,t} = 1 - \exp(-\mu_{x,t})$.

Le modèle de Cox, proposé en 1972, s'intéresse aux taux instantanés de mortalité par âge. Il s'agit d'un modèle simple, supposant que les taux de mortalité instantanés d'expérience sont proportionnels aux taux de mortalité instantanés nationaux. Ce modèle fait donc l'hypothèse que le facteur de proportionnalité entre taux de mortalité est indépendant de l'âge. Cette hypothèse pouvant être trop restrictive et assez vite rejetée, nous nous intéresserons ici à des modèles plus généralistes comme les modèles de Brass.

I.1 Le modèle de Brass

Le modèle de Brass s'intéresse aux taux de mortalité annuels.

Prenant acte des limites du modèle Cox (les taux instantanés de mortalité ne sont pas constants avec l'âge), Brass propose de lier les *logit* des taux de mortalité d'expérience aux *logit* des taux de mortalité nationaux à partir de la relation linéaire suivante :

$$\log it(q_{\text{exp}}(x,t)) = \theta_0 + \theta_1 \times \log it(q_{\text{nat}}(x,t)), x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$$

Où la fonction *logit* est définie par $\log it(q) = \ln\left(\frac{q}{1-q}\right)$

Le recours à la fonction *logit* permet d'obtenir des quantités non contraintes. En effet, comme $q \in [0,1]$, considérer une régression fondée directement sur le taux de mortalité annuel pourrait nous conduire à des valeurs incohérentes en terme de taux de mortalité estimés par la relation paramétrique. Au contraire, la fonction *logit* est à valeurs dans R et permet donc d'éviter cette situation.

Les paramètres sont estimés par régression linéaire de l'ensemble des $\log it(q_{\text{exp}}(x,t))$ sur l'ensemble des $\log it(q_{\text{nat}}(x,t))$:

- θ_0 désigne l'ordonnée à l'origine de la droite de régression,

- θ_1 désigne la pente de la droite de régression.

Sur base de plusieurs études empiriques, le paramètre θ_1 dans le modèle s'avère très proche de 1.

$$\text{Il vient } \mu_{\text{exp}}(x) = \frac{\exp(\theta_1)\mu_{\text{nat}}(x)}{1 - (1 - \exp(\theta_0))q_{\text{nat}}(x)}$$

Aux âges élevés, le taux de mortalité d'expérience se rapproche du taux de mortalité national.

I.2 Application du modèle de Brass:

Les résultats de la régression linéaire sont :

	paramètres estimés
Theta 0	-0,1
Theta 1	1,05

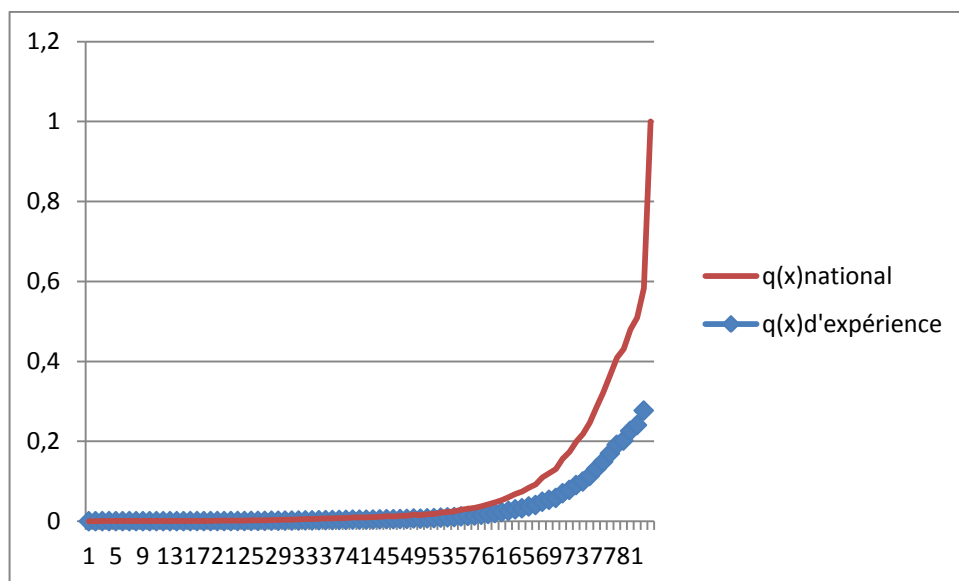


Figure 30 : Résultat Modèle de Brass sur population d'expérience.

II. Calcul du BE déterministe :

A ce stade nous avons construit une table déterministe prospective propre au portefeuille étudié, on peut ainsi évaluer la provision totale qui sera un best estimate.

Un nouveau fichier de calcul est mis en œuvre qui correspond à notre besoin .Il contient les mêmes onglets que celui précédent en changeant dans l'onglet « paramètres et input » la table de mortalité déterministe par la table de mortalité prospective à deux entrées l'âge et l'année.

Aussi, le calcul afin de calculer les flux de prestations, cotisations et frais de l'année n, on utilise la table de mortalité de l'année n obtenue par la projection de $k(t)$ à l'aide du processus ARIMA (1,2,2).

Le tableau ci-dessous présente les résultats des flux projetés et actualisés ainsi que le Best Estimate déterministe.

Cotisations actualisées	4742224
Prestations actualisées	5194104
Frais actualisées	31,4264
Best Estimate	451912

Figure 31 :Calcul du best estimate déterministe.

III. Calcul du SCR mortalité standard

Rappelons la formule du SCR mortalité standard en considérant que l'actif ne varie pas :

$$SCR \text{ mortalité} = BE(\text{après choc}) - BE(\text{avant choc})$$

Le calibrage proposé dans les spécifications techniques du QIS 5 pour la mesure du risque de mortalité suggère d'appliquer une augmentation de 15% des taux de mortalité pour chaque âge. Ainsi, on trouve un SCR mortalité qui s'élève à 590088€.

BE(avant choc)	451912
BE(après choc)	1042000
SCR mortalité standard	590088

Figure 32 :Calcul su SCR mortalité strandard.

Chapitre II : Le modèle interne

I. Modélisation des tables de mortalité

La méthode proposée par la suite pour introduire l'incertitude sur le nombre de décès est de générer 1000 tables de mortalité déterministes qui correspondent à l'année $t=2009$, la dernière année de notre historique.

A partir de chaque table déterministe, on fait des projections de $k(t)$ selon le processus ARIMA pour déduire des tables prospectives. Ainsi, nous aurons à la fin 1000 jeux de tables qui correspondent à n années de projection.

- 1^{ère} étape : estimation de la moyenne de la loi de poisson

Rappelons que le nombre de décès dans le cadre d'un modèle log-poisson, suit une loi de poisson de paramètre $\lambda_{x,t}$

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(\lambda_{x,t}) \text{ avec } \lambda_{x,t} = L_{x,t} \mu_x(t)$$

$$\text{L'estimateur de } \lambda_{x,t} \text{ est } \hat{\lambda}_{x,t} = L_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t).$$

On applique le modèle pour la dernière année de notre historique $t=2009$.

À travers nos estimations des paramètres de la loi log poisson, nous calculons pour chaque âge x l'estimation du nombre de décès.

D	E
Age x	lambda estimé
0	342,5813186
1	29,68573877
2	19,26688804
3	14,89466981
4	10,65042197
5	9,561275618
6	9,317439312
7	7,518976763
8	7,818530337
9	7,338935836
10	7,691417741
11	8,009060604
12	9,469838934
13	10,78272442
14	14,215212
15	18,1421385
16	24,74612652
17	31,83406569
18	42,18893695
19	45,62024418
20	50,23459103
21	49,12514106
22	48,85323399
23	53,23686102
24	50,33892036
25	51,17897445
26	53,85173841
27	52,89718059
28	52,90003668
29	52,90352325
30	55,55870124

Figure 33 :Aperçu excel de l'estimation de la moyenne de la loi de poisson

- 2ème étape : génération de nombre de décès selon la loi de poisson

Afin de simuler une variable aléatoire X selon la loi de poisson ; on a recours à cette relation :

$$\prod_{i=1}^X U_i \geq \exp(-\lambda) \geq \prod_{i=1}^{X+1} U_i$$

On l'obtient en considérant que si les événements se produisent à des intervalles de temps T_i distribués selon une loi exponentielle, le nombre X d'événements qui se réalisent durant un intervalle de temps est distribué selon une loi de poisson.

D'après cette relation, le processus de génération d'un nombre X, distribué selon une loi de poisson λ , est comme suit :

- 1 Initialiser $X \leftarrow 0, p \leftarrow 1$
- 2 Générer $U \sim U(0,1)$, $p \leftarrow p * U$

3 Si $\exp(-\lambda) > p$, retourner X ; sinon $X \leftarrow X+1$ et reprendre à l'étape 2.

Pour chaque âge x, nous simulons 1000 nombre de décès suivant la loi de poisson de paramètre λ_x estimé par le modèle log-poisson

A	B	C	D	E	F	G	H	I	Y	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	CF	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT	CU	CV	CW
simulation	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D24	D28	D29	D30	D31	D32	D33	D34	D35	D36	D37	D38	D39	D83	D84	D85	D86	D87	D88	D89	D90	D91	D92	D93	D94	D95	D96	D97	D98	D99	D100
1	403	26	21	20	20	12	18	11	50	56	53	62	74	49	59	62	75	73	86	88	128	3039	3084	3310	3599	3885	3868	4038	4092	4119	3984	3862	3699	2837	2590	2166	1762	1313	3365
2	374	34	20	20	20	4	11	8	56	62	57	50	42	58	59	73	59	84	96	105	106	3006	3004	3236	3443	3679	3888	4062	4105	3984	3883	3903	3521	2940	2598	2126	1826	1352	3208
3	358	38	23	23	14	20	10	9	49	48	60	46	48	60	64	84	67	102	99	105	103	2829	3064	3395	3495	3824	3939	3927	4126	4061	3846	3895	3643	2973	2636	2235	1798	1427	3286
4	344	30	20	25	25	11	10	9	39	60	61	53	46	62	56	88	66	85	84	109	109	2872	3131	3304	3405	3764	3940	4047	4127	4024	3937	3864	3617	3098	2650	2169	1801	1429	3232
5	357	32	19	11	11	9	12	6	51	60	52	58	55	54	55	76	81	70	91	96	111	2938	3144	3290	3500	3663	3799	4048	3960	3863	4064	3807	3615	2981	2567	2189	1797	1405	3335
6	368	34	17	21	21	9	11	15	49	58	61	54	52	53	57	64	69	87	77	74	104	2869	3204	3269	3537	3739	3872	4038	4070	3915	3971	3826	3623	3061	2597	2114	1663	1410	3401
7	350	29	23	13	13	10	11	4	49	69	53	50	62	61	64	73	68	91	93	105	108	2841	3077	3286	3621	3835	3847	3977	4151	4011	3905	3943	3650	2951	2558	2229	1752	1440	3313
8	358	34	22	19	19	10	9	15	50	65	52	68	39	65	53	81	88	87	69	100	90	2829	3156	3345	3542	3857	3899	3950	4148	4119	3964	3824	3499	3017	2507	2239	1764	1406	3336
9	368	28	13	21	21	10	7	12	48	66	73	57	54	55	59	80	73	83	95	95	106	2862	3003	3304	3448	3693	3866	4168	4066	4085	3874	3870	3679	2963	2562	2143	1754	1437	3416
10	356	34	27	21	21	14	5	8	40	51	61	59	62	49	51	74	63	89	77	104	107	2851	3167	3332	3436	3855	3922	4066	4084	4006	3951	3907	3650	2952	2600	2206	1740	1490	3360
11	351	28	21	17	17	13	4	5	68	63	74	46	58	46	52	60	65	71	76	91	96	2865	3172	3268	3483	3783	3985	3948	4154	3895	4001	3771	3564	3023	2603	2230	1806	1477	3314
12	341	35	28	19	19	5	13	6	48	58	61	50	68	69	49	72	70	83	68	106	101	2903	3161	3335	3424	3638	3968	3976	4080	3970	3941	3691	3588	2895	2611	2165	1867	1444	3381
13	373	26	16	24	24	11	5	8	48	63	55	63	65	69	63	63	83	66	80	90	106	2901	3066	3275	3529	3844	3809	4043	4128	4032	3965	3801	3612	2979	2598	2235	1656	1348	3350
992	351	29	17	17	17	12	20	9	51	68	51	57	54	64	72	58	67	69	91	109	113	2889	3211	3316	3453	3727	3836	3959	4115	4164	3912	3798	3623	3117	2579	2070	1732	1429	3310
993	326	29	16	18	18	12	9	8	51	65	69	62	58	68	56	62	66	85	82	103	77	2812	3097	3208	3522	3720	3832	3987	4127	3974	3940	3855	3736	2995	2598	2178	1875	1446	3364
994	356	31	15	21	21	12	12	15	53	61	72	70	70	45	82	69	76	77	70	94	119	3030	3111	3376	3461	3751	3900	4263	4046	4017	3948	3870	3615	3126	2616	2217	1784	1421	3369
995	351	29	20	17	17	10	11	7	54	57	62	59	46	58	50	60	77	101	92	110	116	2868	3089	3356	3503	3776	3966	4096	4016	4068	3954	3807	3554	3057	2695	2152	1716	1406	3325
996	367	34	22	23	23	8	13	5	51	55	60	53	63	51	53	89	69	79	94	92	100	2969	3057	3335	3546	3749	3869	3982	3974	4011	4048	3859	3589	3044	2547	2114	1720	1465	3284
997	349	34	20	23	23	6	18	10	52	68	59	65	61	70	77	75	66	71	98	91	98	2887	3149	3402	3422	3699	3789	4050	4074	4154	3947	3872	3602	2978	2646	2245	1791	1402	3283
998	361	22	19	25	25	12	6	7	53	66	65	51	68	59	66	81	88	85	84	87	114	2985	3111	3408	3604	3765	3867	3991	4133	4167	3896	3864	3548	3010	2585	2120	1822	1395	3300
999	366	29	13	12	12	10	17	7	48	52	60	49	62	60	64	69	75	69	79	88	96	2938	3004	3319	3638	3775	3945	4021	4095	4141	3888	3775	3577	2967	2576	2113	1789	1367	3405
1000	367	35	28	12	12	15	13	5	43	67	68	61	71	55	62	74	63	72	87	97	110	2979	3083	3387	3536	3813	3904	3966	4098	4103	3913	3863	3656	2958	2672	2191	1739	1401	3319

Figure 34 :Aperçu sur les simulations de loi de poisson pour l'année 2009.

Une fois les simulations des décès faites, nous recalculons 1000 nombres de survivants en partant d'une population d'un million de personnes et en ayant recours à la relation suivante :

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

A	B	C	D	E	F	G	H	ALH	ALI	ALI	ALK	ALL	ALM
Age(simul(x))	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L995	L996	L997	L998	L999	L1000
1	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
2	99597	99626	99642	99656	99663	99672	99680	99689	99699	99709	99719	99729	99739
3	99571	99592	99604	99626	99611	99598	99621	99620	99599	99617	99617	99605	99598
4	99550	99572	99581	99606	99592	99581	99598	99600	99577	99597	99598	99592	99570
5	99530	99552	99558	99581	99581	99560	99585	99583	99554	99574	99573	99580	99558
6	99510	99532	99535	99556	99570	99539	99572	99566	99531	99551	99548	99568	99546
7	99498	99528	99521	99545	99561	99530	99562	99556	99523	99545	99536	99558	99531
8	99480	99517	99501	99535	99549	99519	99551	99545	99510	99527	99530	99541	99518
9	99469	99509	99491	99526	99543	99504	99547	99538	99505	99517	99523	99534	99513
10	99458	99500	99485	99521	99536	99497	99540	99525	99501	99506	99519	99530	99506
11	99453	99492	99473	99511	99521	99489	99530	99518	99490	99497	99508	99521	99497
12	99446	99490	99460	99506	99515	99479	99521	99504	99485	99487	99502	99514	99485
13	99435	99481	99450	99498	99508	99470	99502	99493	99478	99480	99496	99509	99476
14	99428	99472	99439	99489	99498	99462	99496	99486	99471	99476	99491	99506	99470
15	99421	99459	99429	99473	99489	99445	99488	99477	99460	99468	99486	99493	99464
16	99412	99443	99420	99463	99478	99437	99482	99467	99451	99454	99465	99486	99453
86	51941	52268	52106	52575	52121	52269	51896	52415	51727	51988	52241	52101	52364
87	48342	48825	48611	49170	48621	48732	48275	48912	48181	48566	48637	48463	48828
88	44457	45146	44787	45406	44958	44993	44440	45136	44432	44867	44872	44688	45015
89	40589	41258	40848	41466	41159	41121	40593	41170	40563	41078	41005	40743	41111
90	36551	37196	36921	37419	37111	37083	36616	37074	36581	37028	37014	36722	37145
91	32459	33091	32795	33292	33151	33013	32465	33058	32607	32954	32881	32627	33047
92	28340	29107	28734	29268	29288	29098	28454	28990	28596	28800	28714	28486	28944
93	24356	25224	24888	25331	25224	25127	24549	25036	24548	24853	24818	24598	25031

Figure 35 : Aperçu sur le nombre de survivants obtenu par simulation de poisson.

- 3^{ème} étape : calcul de tables de mortalité prospectives

Dans cette étape, on projette chaque table de mortalité déterministe générée par la loi de poisson à travers les projections de $k(t)$.

En effet, on calcule de nouvelles estimations des taux de mortalité pour chaque âge x et spécifique à l'année de projection t . Ceci à l'aide des estimations $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$ et les projections de $k(t)$.

$$\hat{\mu}_{x,t} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{K}_t)$$

Par la suite, on déduit les quotients de mortalité à partir de la relation suivante :

$$\hat{\mu}_x(t) = -\ln(1 - \hat{q}_x(t)).$$

$$\text{C'est-à-dire } \hat{q}_x(t) = 1 - \exp(-\hat{\mu}_x(t))$$

Finalement, en multipliant les quotients de mortalité par le nombre de survivants, on obtient les nouveaux nombres de décès $d_{x,t}$ avec $t=2010, \dots, 2030$.

On refait ces étapes pour chacune des 1000 tables simulées de nombres de survivant de l'année 2009.

II. Calcul du Best Estimate décès

Nous souhaitons obtenir une distribution de la provision totale. Pour ce faire, nous avons calculé pour chaque 1000 jeux de n tables générées le montant de la provision, on obtient les résultats suivants :

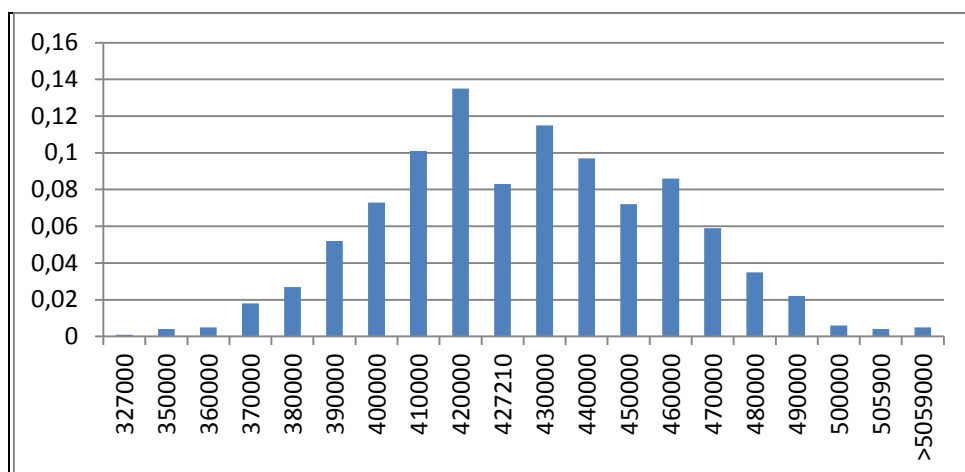


Figure 36 :Distribution de la provision totale.

Le test de Kolmogorov-smirnov de cette distribution au seuil 0,05 nous renvoie une p-value de 0,594. Nous accepterons l'hypothèse de normalité de la distribution.

		Prov_Tot
N		1000
Paramètres normaux	Moyenne	427184,0581
	Ecart-type	29788,49799
Z de Kolmogorov-Smirnov		,594
Signification asymptotique (bilatérale)		,872

Figure 37 :Test de Kolmogorov smirnov.

Afin d'étudier plus finement cette adéquation à la loi normale, nous traçons le Q-Qplot de la distribution, on obtient :

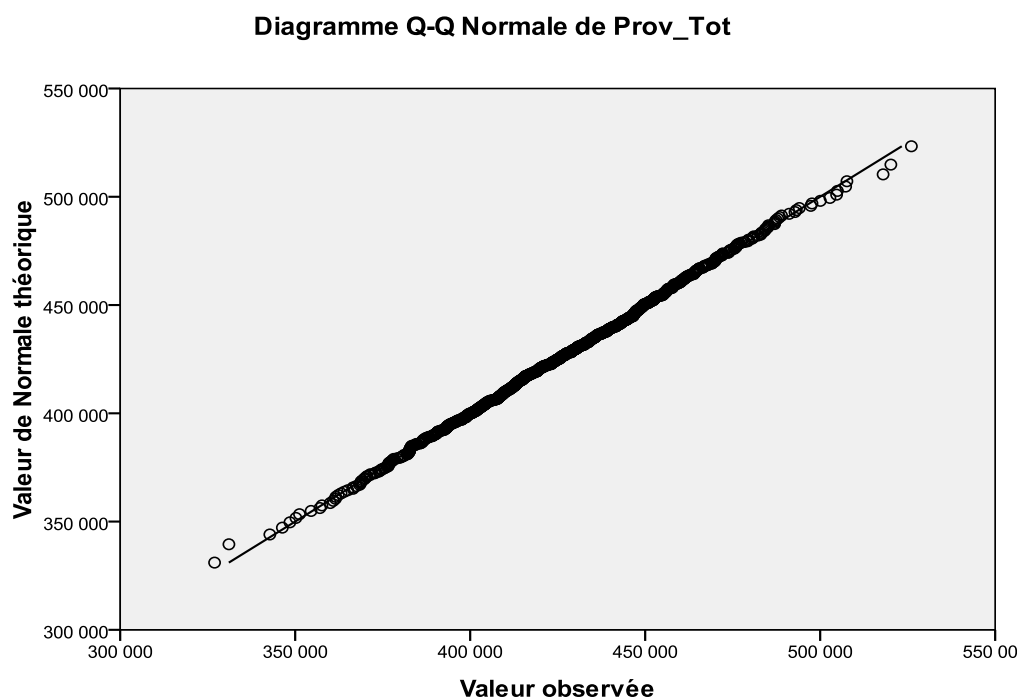


Figure 35 :Le Q-Plot pour l'adéquation de la provision totale à une loi normale

Le Q-Qplot confirme la normalité de la distribution.

Solvabilité 2 définit le best estimate dans une approche modèle interne comme étant le quantile à 50% de la distribution des engagements.

$$BE_{\text{décès}} = q_{50\%}(\text{engagements})$$

On trouve qu'il s'élève à 427 000€.

Il apparait logique de trouver un BE inférieur à celui obtenu par la méthode standard puisque les taux instantanés de mortalité ont la tendance de baisser.

III. Calcul du SCR mortalité.

Le principe posé par la directive est que l'exigence de capital(SCR) doit permettre d'absorber une perte probable(Value-at-risk) au niveau de confiance de 99,5% de la Net Asset Value en 1 actualisé diminué de la Net Asset Value en 0. Rappelons que la Net Asset Value est défini comme la valeur de marché de l'actif diminué de la provision de la best estimate et de la risk margin. Le SCR doit être tel que si on le détient aujourd'hui alors la Net Asset Value dans 1 an restera positive dans 99,5%.

$$\begin{aligned} SCR &= NAV_0 - P(0,1) \times q_{0,5\%}(NAV_1) \\ &= -q_{0,5\%} \left(\frac{NAV_1}{1+r(0,1)} - NAV_0 \right) \end{aligned}$$

Or pour une variable X continue, on a $-q_\alpha(x) = q_{1-\alpha}(-x)$

En supposant que l'actif ne varie pas et que tout mécanisme de participation aux bénéfices ou de revalorisation est négligé, on trouve que

$$\begin{aligned} SCR_{mortalité}^{\text{modèle interne}} &= q_{99,5\%}(\text{engagements}) - q_{50\%}(\text{engagements}) \\ &= 505\,900 - 427\,000 = 78\,900, \end{aligned}$$

Le montant du SCR mortalité dans le cadre d'un modèle interne s'élève à 78900€.

À titre de synthèse, le SCR mortalité dans le modèle interne présente un montant plus petit que celui du modèle standard. Ceci est dû plus particulièrement à un historique de base très restreint d'autant plus que notre travail s'est basé sur un portefeuille choisi de façon à faciliter les calculs et diminuer les temps de simulations, qui ne représente pas le portefeuille global de la mutuelle.

Nous ne pouvons donc pas affirmer que le modèle interne est plus intéressant que le modèle standard.

Une amélioration du modèle peut être envisagée en considérant que $k(t)$ est aléatoire et ceci soit en tirant de façon aléatoire dans la loi du bruit blanc, ce qui permettra de prendre en compte les oscillations de $k(t)$ autour de sa moyenne.

Soit en rendant aléatoires les paramètres du modèle log-poisson, ce qui permettra de prendre en compte l'incertitude sur leur estimation.

Conclusion générale

Dans ce rapport, nous avons étudié deux modèles de construction de tables de mortalité prospectives. La première, celle proposée par Lee et Carter (1992,2000), ne prend pas en compte l'hétéroscédasticité des résidus. La seconde, développée par Brouhns et al (2002), permet de s'affranchir de l'hypothèse d'homoscédasticité. Cependant, après avoir comparé les deux modèles, nous avons trouvé que la méthode log-poisson est plus adéquate à nos données et modélise bien l'évolution de la mortalité globale.

Grâce aux projections réalisées, nous avons pu construire une table de mortalité prospective correspondante à notre portefeuille étudié. A partir de cette table nous avons quantifié le montant des provisions techniques comme l'exige la directive de solvabilité 2, Ce montant correspond au best estimate. Logiquement, il apparait que le best estimate est inférieur lorsque nous utilisons les projections obtenues avec la méthode de log-Poisson puisque les taux instantanés de mortalité baissent avec le temps. L'intérêt de cette étude a également résidé dans le calcul du SCR au titre du risque de mortalité avec deux méthodes à savoir la méthode standard et le modèle interne.

La réforme européenne Solvabilité 2 est ambitieuse au moins à deux égards : son périmètre d'application et les moyens techniques à envisager. Dans le cadre de l'évaluation des provisions, l'EIOPS offre aux compagnies d'assurances le choix d'utilisation de la formule standard ou la mise en œuvre d'un modèle interne. Le débat largement entamé à ce jour sur les formules standard et les modèles internes, principalement sur la manière de les mettre en œuvre au niveau national, n'est pas tranché, il est cependant probable que les modèles internes constituent une formidable opportunité pour les assureurs.

Toutefois, les assureurs se trouvent face à un dilemme. La mise en œuvre des formules standard conduit les compagnies à baisser leur coûts d'application de la directive mais induit des coûts en terme de besoins en capital bien supérieurs à ceux obtenus avec un modèle interne. La bonne stratégie est donc de mettre en relation les deux options et de déterminer celle qui leur sera le plus bénéfique.

Bibliographie

Articles, bulletins, Formations :

- QIS 5 technical specification CEIOPS
- Formation ALTIA : Solvabilité 2 Cas pratiques Vie, G.DEPOMMIER , Avril 2010
- Les Tables de mortalité, optimind , juin 2007
- Risque de longévité et rentes viagères II. Tables prospectives pour la population belge, N. BROUHNS et M.DENUIT.
- Utilisation des méthodes de Lee Carter et log-poisson pour l'ajustement de tables de mortalité pour le cas de petits échantillons, F.PLANCHET.
- A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables, N.BROUHNS, M.DENUIT, J.K.VERMUNT.

Cours:

- Fouad MARRI, Séries chronologiques , INSEA 2012

Mémoires:

- YANNiC Aurélie, Modélisation stochastique du passif en assurance vie, EURIA 2009
- JAFFAL Hanan, Impact du risque de mortalité, Université libanaise 2008
- Création de tables de mortalité prospectives en France, 2007
- Candy N.WENDJA, Construction d'une table de mortalité prospective à partir d'un échantillon réduit, EURIA 2007.

Ouvrages :

- DELWARE M. et DENUIT A. 2006, Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives. *Economica*.
- PLANCHET,F et THEROND,P.2006, Modèles de durée. *Economica*.

Annexes

Annexe 1 : Courbe de taux EIOPA

	2011 IA		2011 IA
2012	0,19086%	2062	3,83254%
2013	0,87499%	2063	3,83254%
2014	1,34254%	2064	3,83254%
2015	1,73420%	2065	3,83254%
2016	2,11810%	2066	3,83254%
2017	2,45937%	2067	3,83254%
2018	2,75117%	2068	3,83254%
2019	2,99525%	2069	3,83254%
2020	3,19608%	2070	3,83254%
2021	3,35888%	2071	3,83254%
2022	3,48880%	2072	3,83254%
2023	3,59069%	2073	3,83254%
2024	3,66893%	2074	3,83254%
2025	3,72747%	2075	3,83254%
2026	3,76979%	2076	3,83254%
2027	3,79896%	2077	3,83254%
2028	3,81763%	2078	3,83254%
2029	3,82808%	2079	3,83254%
2030	3,83225%	2080	3,83254%
2031	3,83254%	2081	3,83254%
2032	3,83254%	2082	3,83254%
2033	3,83254%	2083	3,83254%
2034	3,83254%	2084	3,83254%
2035	3,83254%	2085	3,83254%
2036	3,83254%	2086	3,83254%
2037	3,83254%	2087	3,83254%
2038	3,83254%	2088	3,83254%
2039	3,83254%	2089	3,83254%
2040	3,83254%	2090	3,83254%
2041	3,83254%	2091	3,83254%
2042	3,83254%	2092	3,83254%
2043	3,83254%	2093	3,83254%
2044	3,83254%	2094	3,83254%
2045	3,83254%	2095	3,83254%
2046	3,83254%	2096	3,83254%
2047	3,83254%	2097	3,83254%
2048	3,83254%	2098	3,83254%
2049	3,83254%	2099	3,83254%
2050	3,83254%	2100	3,83254%
2051	3,83254%	2101	3,83254%
2052	3,83254%	2102	3,83254%
2053	3,83254%	2103	3,83254%
2054	3,83254%	2104	3,83254%
2055	3,83254%	2105	3,83254%
2056	3,83254%	2106	3,83254%
2057	3,83254%	2107	3,83254%
2058	3,83254%	2108	3,83254%
2059	3,83254%	2109	3,83254%
2060	3,83254%	2110	3,83254%
2061	3,83254%	2111	3,83254%

Annexe 2 : Résultats détaillés

Calcul des Alpha

âge	alpha Log-poisson	alpha Lee-Carter	âge	alpha Log-poisson	alpha Lee-Carter
0	-5,456023552	-5,440651412	41	-6,285721593	-6,271124463
1	-7,890417305	-7,877345142	42	-6,187631809	-6,173016646
2	-8,343133909	-8,329621136	43	-6,095328351	-6,080559546
3	-8,592427592	-8,579473279	44	-6,002565811	-5,987787874
4	-8,822543427	-8,809353328	45	-5,914478921	-5,899721058
5	-8,942653308	-8,929964052	46	-5,821697148	-5,806965147
6	-8,981764018	-8,968943645	47	-5,739911035	-5,72493545
7	-9,107192821	-9,094195956	48	-5,655115622	-5,639861327
8	-9,087308243	-9,074544012	49	-5,576230815	-5,560193366
9	-9,135896527	-9,123635517	50	-5,496541966	-5,480855819
10	-9,125225605	-9,112089267	51	-5,428956135	-5,412965803
11	-9,079321318	-9,067330145	52	-5,367048407	-5,35091959
12	-8,920728552	-8,908200746	53	-5,300456753	-5,284154031
13	-8,796733298	-8,783403796	54	-5,236848089	-5,220346475
14	-8,532443056	-8,519932851	55	-5,163956753	-5,1472905
15	-8,271529575	-8,258366997	56	-5,099848089	-5,083065014
16	-8,020677428	-8,007486775	57	-5,025442743	-5,008397396
17	-7,794398108	-7,780853447	58	-4,96894029	-4,951913061
18	-7,48697771	-7,474603153	59	-4,891638349	-4,874158356
19	-7,394266418	-7,381661493	60	-4,812520298	-4,797506623
20	-7,333395179	-7,320344094	61	-4,756412041	-4,738570463
21	-7,319166294	-7,296454734	62	-4,67319916	-4,654786709
22	-7,28923831	-7,275261035	63	-4,600487214	-4,581477748
23	-7,268590979	-7,254603026	64	-4,528583085	-4,509371117
24	-7,285760366	-7,272438074	65	-4,449176857	-4,429472412
25	-7,268059889	-7,254539581	66	-4,3709617	-4,350792426
26	-7,228269241	-7,214893965	67	-4,295354907	-4,274692644
27	-7,218647697	-7,205136698	68	-4,204748378	-4,183339273
28	-7,194028499	-7,181512224	69	-4,122442291	-4,100463936
29	-7,159701555	-7,147412072	70	-4,037750054	-4,015059345
30	-7,107699614	-7,095038293	71	-3,94724956	-3,923758039
31	-7,057009425	-7,044160673	72	-3,851544284	-3,827020228
32	-7,007233775	-6,994325237	73	-3,767259618	-3,741604457
33	-6,945525323	-6,932435281	74	-3,667059106	-3,640258508
34	-6,87394902	-6,861152025	75	-3,572260835	-3,544126831
35	-6,793551155	-6,779890353	76	-3,465269675	-3,435442141
36	-6,705179157	-6,691469838	77	-3,36236784	-3,33072722
37	-6,643681698	-6,629667835	78	-3,251474422	-3,218389087
38	-6,548397984	-6,53403966	79	-3,14487354	-3,10879874
39	-6,475006119	-6,460665332	80	-3,029670593	-2,990846561

40	-6,37901997	-6,364456526	81	-2,916981074	-2,875100879
âge	alpha Log-poisson	alpha Lee-Carter			
82	-2,800180739	-2,754672098			
83	-2,683783703	-2,634220936			
84	-2,567183103	-2,513135599			
85	-2,448581215	-2,389254488			
86	-2,332687902	-2,267474543			
87	-2,226496372	-2,155250877			
88	-2,109798083	-2,031052645			
89	-2,005804294	-1,9194461			
90	-1,902509588	-1,807776276			
91	-1,793212217	-1,688430984			
92	-1,700718887	-1,586327864			
93	-1,60683085	-1,481588049			
94	-1,519935173	-1,383383503			
95	-1,434945901	-1,286112058			
96	-1,362059858	-1,201665385			
97	-1,290261128	-1,117312302			
98	-1,222370657	-1,036378782			
99	-0,013876374	-1,025689456			

Calcul des beta

âge	beta Log-poisson	beta Lee-Carter	âge	beta Log-poisson	beta Lee-Carter
0	0,011102365	0,011168157	41	0,011225601	0,011282431
1	0,011495389	0,011496251	42	0,010582774	0,010610191
2	0,010450656	0,010533444	43	0,010800381	0,010836407
3	0,010848121	0,010926055	44	0,008443349	0,008459766
4	0,016143949	0,01611528	45	0,007618443	0,007600775
5	0,015522216	0,015527462	46	0,006471569	0,0064223
6	0,014848303	0,014869903	47	0,005597812	0,005570656
7	0,019328107	0,019142999	48	0,005309151	0,005329188
8	0,01835776	0,018273322	49	0,004353237	0,004419236
9	0,019094957	0,019112318	50	0,003651568	0,003669937
10	0,017265288	0,017276226	51	0,002760048	0,002790879
11	0,017535075	0,017426992	52	0,003246332	0,003302397
12	0,017079878	0,017238775	53	0,00272119	0,002730078
13	0,016781225	0,016786236	54	0,003266316	0,003303162
14	0,016167264	0,016330766	55	0,00272119	0,003688451
15	0,017015484	0,016978923	56	0,003266316	0,003882506
16	0,014004523	0,014109658	57	0,003602717	0,003976192
17	0,012703326	0,01273458	58	0,00375704	0,005143025
18	0,013986759	0,014149568	59	0,003879166	0,005637585
19	0,014697311	0,014911034	60	0,005014938	0,006460311
20	0,012887625	0,013009863	61	0,005534529	0,007226383
21	0,014705082	0,014649491	62	0,006345002	0,007475921
22	0,016465917	0,016439961	63	0,007096632	0,007906961
23	0,013151861	0,013128649	64	0,007356427	0,008797763
24	0,015078122	0,01498068	65	0,00774834	0,009221311
25	0,015108098	0,015057074	66	0,008702034	0,00962575
26	0,014519673	0,014418224	67	0,009129475	0,009999486
27	0,015875272	0,015768785	68	0,009540262	0,009517437
28	0,017083209	0,016852442	69	0,009923294	0,009533558
29	0,01877854	0,018356416	70	0,00943479	0,009851902
30	0,018900666	0,018498943	71	0,009465876	0,008857024
31	0,018283375	0,017941266	72	0,009797837	0,008913805
32	0,016751248	0,01649234	73	0,008833042	0,008853157
33	0,017283051	0,017051235	74	0,008865238	0,008274684
34	0,015792004	0,015600435	75	0,008756435	0,008418992
35	0,015657665	0,015561868	76	0,008200207	0,007995977
36	0,01389572	0,013857088	77	0,008315671	0,008088743
37	0,013735846	0,013722591	78	0,007901553	0,008262293
38	0,012711098	0,012730735	79	0,007957065	0,007624796
39	0,012199279	0,01224143	80	0,008142474	0,007680545
40	0,011327743	0,011389298	81	0,007482994	0,007492067

âge	beta Log-poisson	beta Lee-Carter
82	0,007504088	0,007538161
83	0,007317569	0,007717728
84	0,007355317	0,007291616
85	0,007474112	0,006794183
86	0,007053332	0,006719868
87	0,006520419	0,00615826
88	0,006412726	0,006006625
89	0,006021923	0,00587033
90	0,005688852	0,005379817
91	0,005523427	0,004563398
92	0,005103757	0,004314044
93	0,004351017	0,003571706
94	0,004079009	0,002706755
95	0,003403985	0,002747503
96	0,002525788	0,00221913
97	0,002445851	0,001917753
98	0,001846323	0,000892329
99	0,001486607	0,000765433

Calcul de K(t)

âge	K(t) Log-poisson	K(t) Lee-Carter
1995	15,33071054	19,25841823
1996	13,21404439	16,66772936
1997	11,673832	13,67410722
1998	9,620215484	10,07833603
1999	7,458513884	7,193110317
2000	5,323833554	4,834978782
2001	2,810855444	3,410350827
2002	0,162770984	1,431622626
2003	-0,846023096	-0,679433008
2004	-5,016305766	-4,898399188
2005	-8,529070866	-8,777956606
2006	-14,47375027	-12,50963373
2007	-16,8786433	-14,62005181
2008	-19,850983	-16,91459349
2009	-20,789023	-18,14858557

