



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Optimisation des traités de Réassurance d'une captive

Préparé par : *M. KIENDREBEOGO Issa*

Sous la direction de : *M EFFINA Driss (INSEA)*
M^{elle} BENNANI Alia (SAHAM FINANCES)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. EFFINA Driss (INSEA)*
- *M. Fouad MARRI (INSEA)*
- *Mme BENNANI Alia (SAHAM FINANCES)*

Résumé

Ce projet de fin d'études a pour objectif de créer un outil de modélisation de la charge de sinistres cédée par chaque filiale du Groupe SAHAM à la captive du groupe, « SAHAM Ré », ainsi que de tarifer ces traités de réassurance qui lient chaque filiale à la captive.

Plus particulièrement, il s'agit d'abord de modéliser la charge brute d'une filiale, et ensuite d'en déduire la charge cédée à SAHAM Ré en fonction du (des) traité(s) de réassurance choisi(s).

Pour atteindre notre but, nous implémenterons dans un premier temps la méthode par exposition pure utilisant une courbe d'exposition que nous développerons en interne. Dans le souci de valider nos résultats, nous souhaitons les comparer à notre sinistralité historique: pour cela, une méthode dite d'expérience sera sollicitée. Enfin, pour améliorer notre outil, nous passerons à un mix des deux méthodes pour en sortir une nouvelle dite hybride.

Pour chacune des méthodes utilisées, un modèle collectif sera développé via l'approche fréquence/Sévérité agrégée par simulation Monte-Carlo.

Nous appliquerons nos modèles aux données de la branche « Incendie » de SAHAM Côte d'Ivoire en net de Facultative et de Coassurance.

Mots clés : Courbe d'exposition, Simulation Monte-Carlo, Excédent de sinistre, Tarification, Pareto généralisée, Fréquence, Sévérité, Expérience, Exposition.

DEDICACES :

Je dédie spécialement ce modeste travail à Feu Mon Père et Feue Ma Mère pour leur amour inconditionnel, leur chaleur paternelle et maternelle et leurs conseils qui continuent et continueront à me guider. Je pense à vous, je vous aime très fort.

A mes oncles, A mes tantes, à Mes Frères & Sœurs et à toute la famille, je vous porte dans mon cœur.

ISSA KIENDREBEOGO

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|------------------|
| <u>Résumé</u> | <u>3</u> |
| <u>DEDICACES :</u> | <u>4</u> |
| <u>REMERCIEMENTS :</u> | <u>9</u> |
| <u>ABREVIATIONS</u> | <u>10</u> |
| <u>CHAPITRE 0 : CONTEXTE D'ETUDE</u> | <u>13</u> |
| I. Présentation de l'Organisme d'accueil | 13 |
| I.1. Présentation de SAHAM GROUP | 13 |
| I.2. Présentation de SAHAM FINANCES SA | 14 |
| II. Généralités sur la réassurance | 15 |
| II.1. Définition et rôle de la réassurance | 15 |
| II.1.1. Définition de la réassurance | 15 |
| II.1.2. Rôle de la réassurance | 16 |
| II.2. Les techniques de Réassurance | 17 |
| II.2.1. Types de réassurance | 17 |
| 1) La réassurance facultative | 17 |
| 2) La réassurance semi-facultative | 17 |
| 3) La réassurance « traité » ou « obligatoire » | 17 |
| II.2.2. Forme de la réassurance | 18 |
| 1) Les traités proportionnels (sommés) | 18 |
| 2) La réassurance non proportionnelle (dommage) | 20 |
| II. « Captive » et « Fronting » | 23 |
| II.1. Fonctionnement | 23 |
| I.3.4. Fonctionnement de la captive | 23 |
| II.2. Exemple : La Captive « SAHAM Ré » | 25 |
| <u>PARTIE I : LA METHODE PAR EXPOSITION « PURE »</u> | <u>27</u> |
| <u>CHAPITRE I : ELEMENTS DE STATISTIQUES DESCRIPTIVES</u> | <u>27</u> |
| I. Analyse de la fréquence | 27 |
| II. Profil de Risque et Analyse de la sévérité | 29 |
| <u>CHAPITRE II : Courbe d'exposition et Loi de Fréquence</u> | <u>33</u> |
| I. Courbe d'exposition | 33 |
| I.1. Formulation mathématique de la courbe d'exposition | 33 |
| 1) Définition | 34 |
| 2) Estimation des paramètres du modèle | 34 |
| 3) Propriétés des Courbes d'exposition. | 35 |
| 5) Les Courbes d'exposition du marché | 36 |
| I.2. Conception de la courbe d'exposition interne (Sévérité) | 37 |
| II.1. Mise en œuvre du modèle par exposition pure. | 39 |
| II.1.1. Etablir le profil de risque de la compagnie. | 39 |
| 1) Ajuster une courbe d'exposition | 39 |
| 2) Ajuster une loi de fréquence pour chaque bande | 39 |
| 3). Etablir un modèle collectif via simulation Monte-Carlo. | 40 |
| <u>CHAPITRE III : Résultats du modèle</u> | <u>43</u> |

| | |
|--|------------------|
| I. Modification de la courbe d'exposition pour les besoins de la simulation..... | 43 |
| II. Résultats..... | 44 |
| <u>PARTIE II. METHODE PAR EXPERINCE</u> | <u>49</u> |
| <u>CHAPITRE I. Mise en œuvre du modèle par expérience.....</u> | <u>49</u> |
| I. Modélisation de la sinistralité attritionnelle..... | 49 |
| I.1 L'approximation normale | 49 |
| I.2. L'approche Fréquence/Cout moyen..... | 50 |
| II. Modélisation de la sinistralité grave..... | 50 |
| III. Agrégation sinistres graves/sinistres attritionnels..... | 51 |
| <u>Chapitre II : Modélisation de la Fréquence des Sinistres</u> | <u>53</u> |
| I. Ajustement des données pour la modélisation de la fréquence | 53 |
| I.1. Input pour l'ajustement IBNR | 53 |
| I.2. Méthode des triangles de développement pour l'estimation des IBNRs..... | 53 |
| I.3. La Méthode du triangle-Libre pour l'Estimation des IBNR | 55 |
| I.3.1. Estimation de la distribution des retards de réclamation..... | 55 |
| I.3.2. Projection du nombre de sinistres à l'ultime | 57 |
| II. Sélection et Calibrage d'un modèle de fréquence..... | 58 |
| II.1.1. Tests Statistiques d'adéquation | 59 |
| 1) Le test de Cramer-Von Mises | 59 |
| 2) Le test d'Anderson-Darling | 59 |
| II.1.2. Incertitude sur les paramètres..... | 60 |
| 1) Le Bootstrap Paramétrique..... | 60 |
| 2) L'algorithme du Bootstrap paramétrique..... | 61 |
| III.1 Détermination du seuil de sinistre graves..... | 61 |
| III.2. Résultats de la fréquence (<i>Ngrav</i>)..... | 63 |
| III.3 Résultats de la fréquence attritionnelle (<i>Nattr</i>) | 65 |
| <u>Chapitre III : Modélisation de la Sévérité des Sinistres.....</u> | <u>67</u> |
| II. Ajustement par les IBNERs et d'autres facteurs..... | 67 |
| II.1. Ajustement par les IBNERs..... | 67 |
| II.1.1. N'utiliser que les sinistres clôturés..... | 67 |
| II.1.2. Identifier les tendances et ajuster par les tendances..... | 67 |
| 1) Identifier les tendances en utilisant l'analyse multivariée (GLM)..... | 68 |
| II.2. Ajustement par d'autres facteurs | 68 |
| II.2.1. Réévaluation par le taux d'inflation | 69 |
| II. Résultats de la Sévérité..... | 69 |
| II.1. Résultats de la Sévérité des graves (<i>XiGrav</i>) | 69 |
| II.2. Résultats de la Sévérité attritionnelle (<i>Xattr</i>) | 70 |
| III. Résultats de la Simulation du modèle par expérience | 72 |
| <u>PARTIE III : LE MODELE HYBRIDE ET TARIFACATION</u> | <u>75</u> |
| <u>CHAPITRE I : Le Modèle dit « hybride ».....</u> | <u>75</u> |
| I. Résultats de la fréquence..... | 75 |
| II. Résultats de la sévérité..... | 76 |
| III. Résultats de la simulation du modèle « hybride »..... | 78 |
| <u>CHAPITRE II. Tarification des traités de réassurance (EDP et XS)</u> | <u>81</u> |
| I. Tarification par « Burning Cost »..... | 81 |

| | |
|--|-----------|
| II. Tarification par l'approche « probabiliste » ou « fréquence-coût » | 82 |
| III. La Méthode de tarification par « exposition » | 82 |
| III.1. Transformation de la courbe d'exposition pour besoin de la tarification | 83 |
| III.2. Tarifs obtenus | 84 |
| <u>CONCLUSION</u> | 86 |
| <u>BIBLIOGRAPHIE</u> | 87 |
| <u>ANNEXES</u> | 88 |

LISTE DES FIGURES

| | |
|--|----|
| Figure 1: Etapes de la Modélisation Fréquence/Sévérité..... | 12 |
| Figure 2: Les différents pôles d'activité de SAHAM GROUP | 13 |
| Figure 3: Carte d'implantation de SAHAM GROUP | 14 |
| Figure 4: Top 5 des compagnies de Réassurance | 16 |
| Figure 5: Fonctionnement du QUOTE-PART 30%..... | 19 |
| Figure 6: Fonctionnement du traité en excédent de plein..... | 20 |
| Figure 7: Fonctionnement d'un excédent de Sinistre par Risque | 21 |
| Figure 8: Fonctionnement d'un excédent de Sinistre par Evènement | 22 |
| Figure 9: Fonctionnement du Stop-loss | 23 |
| Figure 10: Schéma récapitulatif des différents types d'ententes en Réassurance..... | 23 |
| Figure 11: Illustration technique et opérationnelle de l'utilisation de la Captive..... | 24 |
| Figure 12: Historique du Nombre de Sinistres (2007-2016)..... | 27 |
| Figure 13: Nombre de Polices Souscrites (2012-2016)..... | 27 |
| Figure 14: Nombre de sinistres par Délai de déclaration | 28 |
| Figure 15: SMP Moyen (2010-2016) | 30 |
| Figure 16: Coût moyen d'un sinistre | 30 |
| Figure 17: Exemple de Courbe d'exposition | 34 |
| Figure 18: Quelques Courbes d'exposition du marché | 37 |
| Figure 19: Méthode par exposition : Fonct. Repart. et Courbe d'expo ajustée..... | 38 |
| Figure 20: Méthode par exposition : Courbe d'exposition tronquée..... | 43 |
| Figure 21 : <i>Forme du « Triangle de développement du nombre de sinistres »</i> | 54 |
| Figure 22: <i>Une illustration géométrique de la probabilité d'observer un retard de longueur $T=t$</i> ... | 56 |
| Figure 23: Histogramme des montants individuels revalorisés (2012-2016) | 62 |
| Figure 24: Le Hill plot des montants des sinistres | 62 |
| Figure 25: Le Mean Excess Plot | 63 |
| Figure 26: Ajustement de N_{grav} | 65 |
| Figure 27: Qualité d'ajustement de la fréquence attritionnelle..... | 66 |
| Figure 28: QQ Plot et Distribution des Sinistres graves..... | 70 |
| Figure 29: Coût moyen d'un sinistre attritionnel revalorisé..... | 70 |
| Figure 30: Qualité d'ajustement du coût moyen..... | 71 |
| Figure 31: Méthode hybride : Qualité d'ajustement..... | 78 |

LISTE DES TABLEAUX

| | |
|---|-----------|
| Tableau 1: Les Types de Réassurance | 18 |
| Tableau 2: Profil de Risque au 30/06/2016 | 29 |
| Tableau 3: Loss-Ratio par bande de SMP (2012-2016) | 31 |
| Tableau 4: Nombre de Sinistres 2012-2016 | 32 |
| Tableau 5: Forme du tableau de profil de risque..... | 39 |
| Tableau 6: Forme du tableau de simulation des sinistres individuels | 41 |
| Tableau 7: Forme du tableau de distribution empirique des Sinistres | 41 |
| Tableau 8: Modèle par exposition pure : Synthèse de la fréquence | 42 |
| Tableau 9: Méthode par exposition pure : Quantiles de la Charge brute..... | 45 |
| Tableau 10: Méthode par exposition pure : Quantiles de la charge brute partagée..... | 47 |
| Tableau 11: Méthode par exposition pure : Quantiles de l'attritionnel et des graves simulées ... | 48 |
| Tableau 12: Nombre de Sinistres Revalorisé..... | 63 |
| Tableau 13: Modèle par expérience : Distribution empirique | 74 |
| Tableau 14: Nombre de sinistres par bande de SMP | 75 |
| Tableau 15: Méthode Hybride : Tableau synthétique de la fréquence | 76 |
| Tableau 16: Box plot des taux de destruction..... | 77 |
| Tableau 17: Méthode Hybride : Tableau synthétique de la Sévérité..... | 77 |
| Tableau 18: Méthode hybride: Quantiles de la charge brute partagée | 79 |
| Tableau 19: Méthode hybride : Quantiles de l'attritionnel et des graves simulées | 80 |
| Tableau 20: Tarifs EDP et XS | 85 |

REMERCIEMENTS :

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de stage et par ailleurs Responsable « Actuariat Groupe » à SAHAM FINANCES Alia BENNANI pour sa sympathie, sa disponibilité ainsi que pour ses précieux conseils lors de cette expérience professionnelle inoubliable.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Ilyes HASSIB, directeur du département « Réassurance et Technique » pour avoir initié ce projet et sans qui ce travail ne serait possible.

Je ne saurais oublier Monsieur Ilassa SAWADOGO, chargé d'études actuarielles pour ses précieux conseils, son coaching sans faille et pour avoir contribué à mon intégration.

Enfin, j'adresse un grand merci à Monsieur EFFINA Driss pour avoir accepté d'encadrer ce projet, et à tous mes professeurs (FOUAD Marri ...) pour avoir contribué à ma formation.

ABREVIATIONS

- ***EDP*** : *Excédent de plein*
- ***GDP*** : *General Pareto Distribution*
- ***MBBEFD*** : *Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, et Fermie-Dirac*
- ***SMP*** : *Sinistre Maximum Possible*
- ***TVaR*** : *Tail Value At Risk*
- ***VaR*** : *Value At Risk*
- ***XS*** : *Excédent de sinistre*

Introduction

Ces dernières années nous avons assisté à un développement fulgurant des captives d'assurance/Réassurance. Cette croissance répond à un besoin de gestion de risque et d'optimisation de résultat des grands groupes. L'ensemble des risques du groupe sont mutualisés au niveau de la captive qui se charge de trouver la meilleure couverture en rétrocession au-delà de sa capacité de rétention. Le fonctionnement de la captive est similaire à celui d'un réassureur : chacune des filiales du groupe cède une partie de son risque à la captive à travers un ou plusieurs traités de réassurance. Ainsi, pour mieux gérer son risque, la captive a besoin de connaître la sinistralité qu'elle accepte et de tarifier au mieux ces traités de réassurance. C'est dans ce cadre que s'inscrit l'objet de ce mémoire.

Pour ce faire nous allons structurer notre travail comme suit.

Dans un premier temps, nous allons rappeler les principes de bases de la réassurance, ses techniques ainsi que ses formes. Plus particulièrement, la cession en traité Excédent de Plein est une cession proportionnelle du risque en fonction de sa somme assurée. Sa modélisation nécessitera donc un traitement particulier afin de tenir compte de cette proportionnalité à l'exposition du risque.

Ainsi, dans la seconde partie, il sera question de présenter le modèle par exposition « pure », basé sur l'exposition au risque de la compagnie à savoir son profil de risque. On y introduit aussi une notion très importante, en l'occurrence une courbe d'exposition. De nombreuses courbes de marchés existent et sont très utilisées par les réassureurs classiques afin de pallier au manque d'informations relatives à la sinistralité de la cédante. Dans notre cas, le problème ne se pose pas puisque SAHAM Ré est un réassureur interne et toutes les informations sont facilement accessibles, une courbe interne peut donc être conçue. Cette méthode nous permet ainsi de calculer la charge brute des sinistres individuels de la filiale, et de leur appliquer un programme de réassurance afin de calculer la charge acceptée par Saham Ré.

Afin de valider les résultats obtenus par le modèle par exposition, nous souhaitons les comparer à la charge de sinistres historiques de la compagnie. Pour cela une méthode par expérience sera utilisée et fera l'objet de la troisième partie. Cette méthode est impuissante quand il s'agit de déterminer la charge finale acceptée par SAHAM Ré mais de bons résultats de la charge brute (avant cession en Réassurance) peuvent être obtenus.

Dans la quatrième partie, nous allons procéder à un mélange des deux méthodes (Exposition et expérience) pour en sortir avec une nouvelle méthode dite « hybride ». Dans cette méthode la fréquence des sinistres sera modélisée via une approche par expérience et la sévérité via une approche par exposition. Cette dernière méthode présente l'avantage de nécessiter moins d'hypothèses sur la fréquence par rapport à la méthode par exposition « pure » et de prendre en compte les changements dans l'exposition de la cédante (notion absente dans la méthode par expérience).

Toutes ces méthodes que nous avons évoquées sont des modèles collectifs et passent par la base de modélisation par fréquence/Sévérité et la technique d'agrégation par simulation Monte-Carlo. Le modèle collectif suit une certaine démarche que nous avons synthétisée par le biais du schéma suivant :

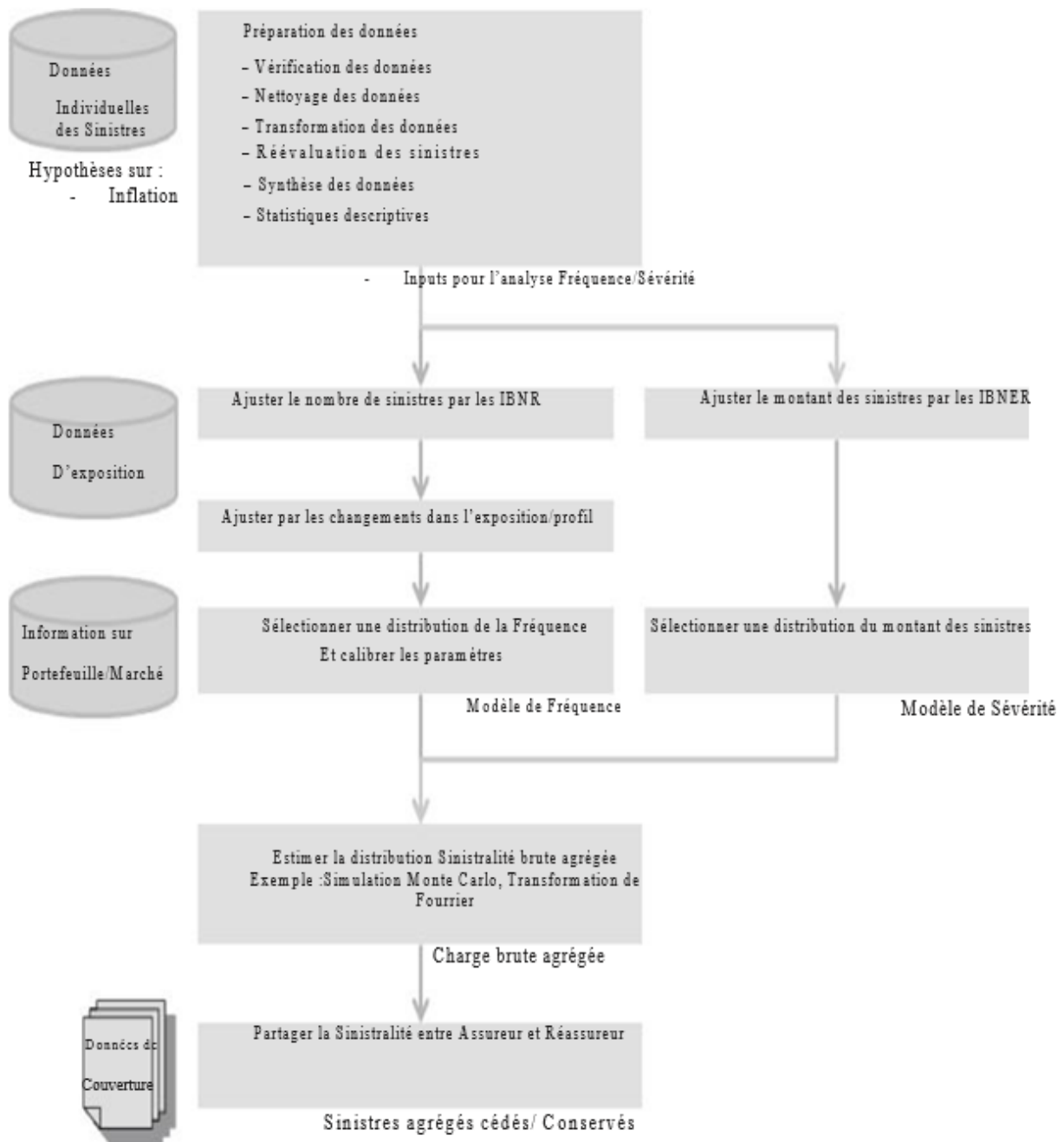


Figure 1: Etapes de la Modélisation Fréquence/Sévérité

CHAPITRE 0 : CONTEXTE D'ETUDE

I. Présentation de l'Organisme d'accueil

I.1. Présentation de SAHAM GROUP

SAHAM GROUP est une holding marocaine fondée en 1995 par Monsieur MOULAY HAFID ELALAMY. Groupe panafricain aux activités diversifiées, SAHAM Group s'est consolidé autour de deux métiers historiques : l'assurance et les centres de relations client. Capitalisant sur l'expérience acquise en immobilier à travers sa branche assurance, le Groupe met sa rigueur et son savoir-faire au service de projets immobiliers d'envergure au Maroc et en Afrique sub-saharienne. A travers son pôle Santé, SAHAM travaille aussi à renforcer le niveau d'infrastructures sanitaires en Afrique en fournissant des unités médicales équipées et modernes, en ligne avec les standards internationaux.

Enfin, face à l'urgence éducative du continent africain, le Groupe a démarré le développement d'un réseau scolaire d'excellence, s'appuyant sur un fort ancrage local.

Le groupe est divisé en 5 pôles : pôle assurance, pôle Offshoring, pôle Immobilier, pôle Santé et pôle Education.

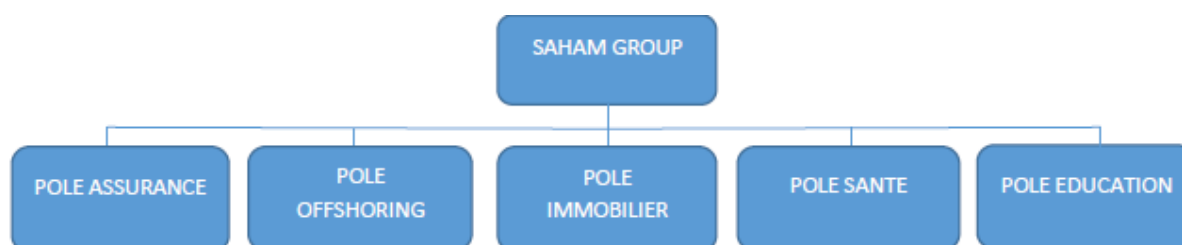


Figure 2: Les différents pôles d'activité de SAHAM GROUP

En 2014 le groupe a généré un chiffre d'affaires de 1.16 milliards de dollars US. Il comptait 9500 collaborateurs et est implanté dans 27 pays.

CARTE DES IMPLANTATIONS

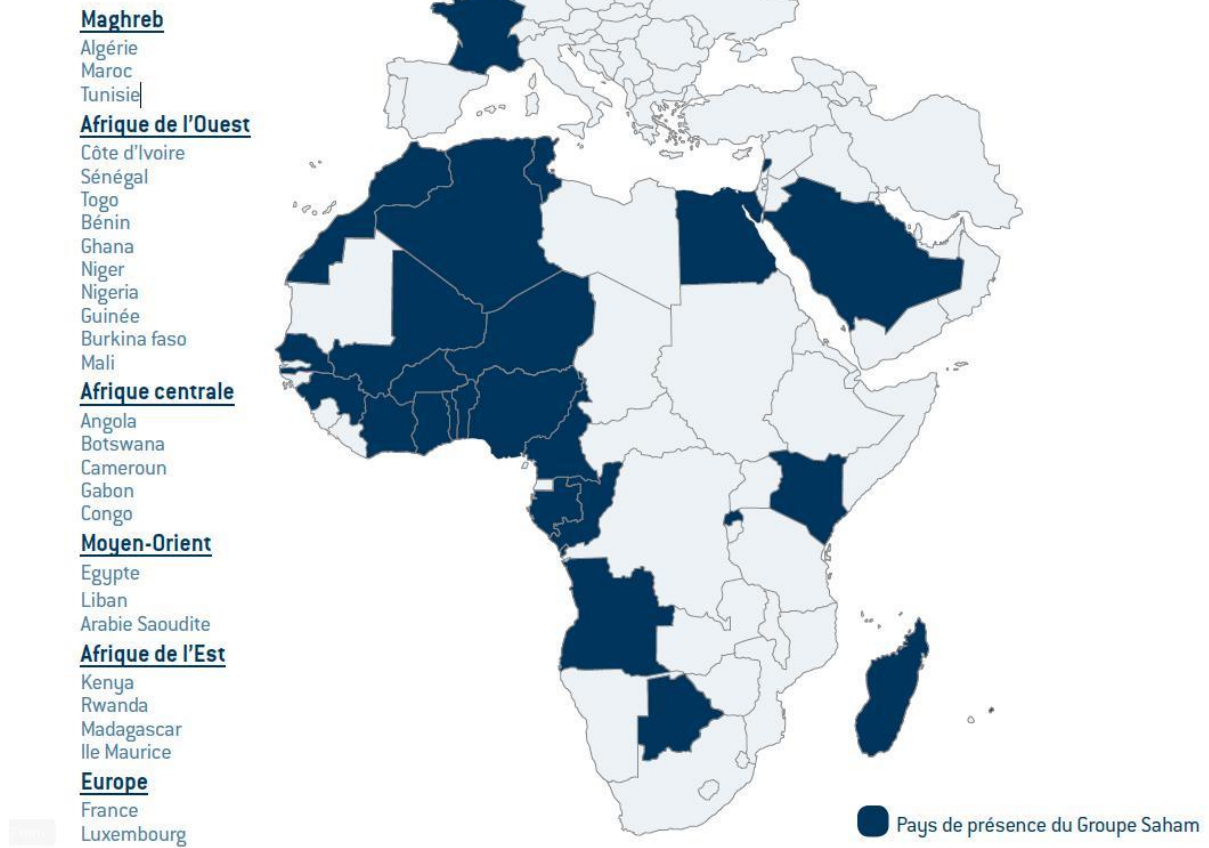


Figure 3: Carte d'implantation de SAHAM GROUP

I.2. Présentation de SAHAM FINANCES SA

SAHAM Finances SA, Pôle Assurance du Groupe, rassemble plusieurs domaines d'activité du Groupe au sein d'un même holding : Assurance, Assistance, TPA (Tierce Gérance). SAHAM Finances SA est une filiale de SAHAM GROUP : elle est détenue à 70% par SAHAM GROUP et à 30% par la société SANLAM.

II. Généralités sur la réassurance

II.1. Définition et rôle de la réassurance

II.1.1. Définition de la réassurance

Et si on faisait avant tout un peu d'histoire afin de mieux cerner le contexte d'apparition de la réassurance. La réassurance ne saurait exister sans l'assurance, quelques propos sur l'assurance s'imposent de ce fait.

✓ Un peu d'histoire

Les premières traces de techniques de transfert du risque moyennant le règlement d'une prime se retrouve vers 3000 av. J.-C. en Chine orientale où de riches marchands faisaient répartir les valeurs des biens transportés entre différents vaisseaux appartenant aux uns ainsi qu'aux autres, tout en contre-garantissant une partie de leurs biens par l'émission de titres payables par les acheteurs en cas de survenance de l'aléa. Dans le cas de la bonne arrivée à destination le garant conservait la prime d'émission.

Vers la fin du moyen-âge, le développement des relations commerciales (Italie, Flandre,...) a donné naissance à l'assurance commerciale en tant que telle. Suite à trois grands incendies ayant ravagé Londres (1666) et Hambourg (1672 et 1676), la première organisation moderne d'assurance a vu le jour sous la forme du Hand-in-Hand Fire Office, créé en 1696

Le plus vieux contrat de réassurance du monde quant à lui date de 12 juillet 1370, concernant le transport de marchandises de Gènes à Sluys et couvrant la partie dangereuse du transport maritime de marchandises de Gènes à Sluys en Flandre (Champ de bataille de la guerre de cent ans). Mais la réassurance moderne ainsi qu'à grande échelle est apparue en Allemagne vers la fin du XIX^e siècle, suite à la révolution industrielle de ce pays. Les sociétés d'assurance allemandes avaient de plus en plus de mal à couvrir les usines et autres complexes industriels immenses, en particulier en cas d'incendie. Elles ont par conséquent fait appel à des contrats de réassurance, et les techniques de réassurance se raffinèrent au fil du temps. Qu'entendons-nous par Réassurance dans sa forme actuelle ?

✓ Définition

Juridiquement, la réassurance est un contrat par lequel un réassureur (dit cessionnaire) s'engage, moyennant rémunération, à rembourser à un assureur (dit cédant), dans des conditions déterminées, tout ou en partie des sommes dues ou versées par l'assureur à ses assurés à titre de sinistres. L'opération constitue une cession pour l'assureur et une acceptation pour le ou les réassureurs. Ces derniers peuvent à leur tour rétrocéder cette affaire à un rétrocessionnaire. La réassurance est donc une activité où une entreprise financière spécialisée accepte de porter les risques cédés par une entreprise d'assurance ou par une autre entreprise de réassurance moyennant décote des créances cédées.

Picard (1912) définit la réassurance comme une opération d'assurance, greffée sur le contrat d'assurance primitif et étrangère à l'assuré, par laquelle l'assureur atténue dans la mesure nécessaire les inconvénients résultant des écarts statistiques. Nous voyons apparaître dans cette définition quelques éléments typiques de la réassurance :

- C'est une assurance au second degré (Assurance Secondaire),
- Le réassureur suit le sort de l'assureur,
- L'assuré ignore tout de l'opération dont il n'est pas partie,
- La réassurance permet de stabiliser le résultat de l'assureur.

La réassurance pourrait donc se définir de façon simpliste comme « L'assurance des Assureurs ».

✓ **La réassurance en chiffres**

La réassurance au niveau mondial vit actuellement ses mauvais jours caractérisés par une tendance baissière en terme de Chiffres d’Affaires. En effet, l’année 2015 marque une baisse du chiffre d’affaires au niveau mondial à 240 Milliards de dollars contre 245 Milliards en 2014. Les 5 premiers réassureurs mondiaux se taillent la part du lion avec 49% du chiffre d’affaires mondial en 2015. L’Europe est très exportatrice de capacité de réassurance : elle offre 60% de la capacité mondiale et ne cède que 38% des primes.

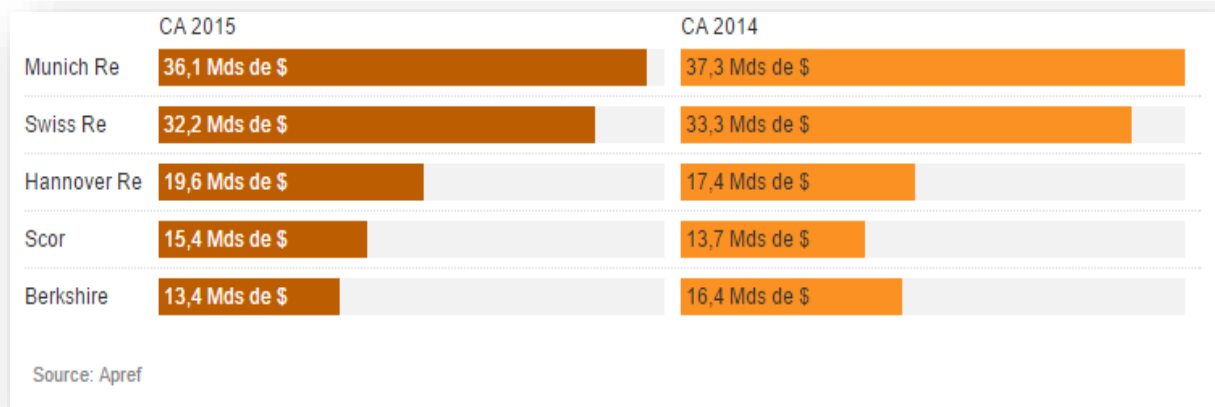


Figure 4: Top 5 des compagnies de Réassurance

II.1.2. Rôle de la réassurance

En réassurance l’assureur transfère sur une autre entreprise tout ou une partie des risques qu’il a souscrits. Cette politique de transfert répond à la nécessité de protection de fonds propres de l’assureur. De même qu’un assuré sait consciemment ou non ce qu’il peut supporter et ce contre quoi il doit se prémunir, une compagnie d’assurance doit rendre sa ruine « pratiquement impossible ». De là la Réassurance peut s’avérer d’une importance capitale. Nous recensons là quelques utilités de la réassurance

✓ Augmentation de la Capacité disponible ou de Souscription

La réassurance permet d’accroître le montant maximum que les assureurs peuvent assurer au titre d’un sinistre ou d’une catégorie de sinistres en leur permettant de souscrire des polices portant sur des risques plus nombreux ou plus importants, sans augmenter à l’excès leurs frais généraux et leurs besoins de couverture de marge de solvabilité, donc leurs fonds propres ;

✓ Ecrêtement des Grands risques « Rétention Homogène » :

L’assureur ne peut garder pour son propre compte des sinistres atteignant des millions d’unité monétaire donc ces risques sont typiquement cédés aux réassureurs et ce afin d’homogénéiser la communauté des risques conservés.

✓ Allègement de la Trésorerie :

Lors de la survenance d'un sinistre important, la compagnie d'assurance peut avoir des difficultés de liquidités. Le Réassureur apporte une solution en mettant immédiatement à la disposition de la cédante la liquidité et ce par l'appel au comptant.

✓ Rôle de conseil et Support technique

Les Réassureurs disposent généralement d'une expérience et d'une expertise parfois inaccessibles aux compagnies d'assurance. La tarification des risques aggravés, la sélection médicale en assurance-vie et la tarification des grands risques industriels peuvent s'avérer difficiles ou coûteuses pour un assureur qui n'est que rarement confronté à ce type de risques. Le Réassureur Pourra offrir des solutions grâce à son expérience et à sa maîtrise des risques non standards La mise en place de nouveaux produits d'assurance est rendue possible grâce aux Réassureurs. Le Réassureur peut également offrir des services en termes de prévention ou gestion des sinistres, de formation des collaborateurs de cédante ou encore l'analyses actuarielles.

II.2. Les techniques de Réassurance

II.2.1. Types de réassurance

Selon le volet juridique on distingue trois types de réassurance : la réassurance facultative, la réassurance semi-facultative et la réassurance obligatoire.

1) La réassurance facultative

La réassurance facultative est un contrat conclu entre la cédante et un réassureur portant sur un ou des risques explicitement identifiés (un site de production en particulier, un ensemble de biens clairement délimité, etc.) et qui sont l'objet d'un seul et même contrat. La cession et l'acceptation en réassurance du risque en question résulte d'un libre choix de la part des deux acteurs, d'où la dénomination « facultative ».

La Réassurance facultative est pratiquement le seul moyen pour les cédantes de couvrir des risques exceptionnellement grands. Pour le réassureur, c'est l'occasion d'analyser des risques qu'il n'accepte habituellement pas automatiquement et ce, grâce à l'étude technique potentiellement détaillée qui accompagne l'analyse de l'affaire. Il faut signaler également que la réassurance facultative est achetée par une cédante lorsque le risque à assurer dépasse la capacité mise à sa disposition par la réassurance en traité ou lorsque le risque à assurer ne tombe pas dans la catégorie des risques automatiquement couverts au traité.

2) La réassurance semi-facultative

On distingue d'un côté la réassurance facultative obligatoire (ou FACOB) qui laisse à la cédante la liberté d'inclure ou non au traité de réassurance les risques de son choix, le réassureur quant à lui s'engageant alors à les accepter dans leur totalité. Les dispositions contractuelles du traité de réassurance facultative obligatoire sont prévues à l'avance : nature des risques couverts, rétention minimale de la cédante, engagement maximal du réassureur, exclusions éventuelles. D'un autre côté, à l'inverse si la cession est obligatoire et l'acceptation non on parlera de Réassurance obligatoire facultative.

3) La réassurance « traité » ou « obligatoire »

Il s'agit alors de réassurer une communauté de risques souvent nombreux et homogènes (par exemple l'ensemble d'un portefeuille de polices automobile) plutôt qu'un seul risque. L'emploi du mot « traité » désigne ainsi implicitement dans la pratique un traité de réassurance obligatoire. Dans ce cas, le traité de réassurance se négocie en amont et présente donc un caractère obligatoire c'est-à-dire une obligation de céder tous les risques du portefeuille concerné pour l'assureur et une obligation de les accepter pour le réassureur. L'avantage de cette forme de réassurance est sa simplicité dans la gestion administrative. En effet la cédante ne délivre pas les détails sur chaque risque individuel (bordereaux). Les traités supposent une relation de confiance entre les parties vues que le réassureur doit garantir automatiquement la capacité et accepte tous les risques entrants dans les termes du contrat.

| | Acceptation | Facultative | Obligatoire |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Cession | | | |
| Facultative | | Facultative | FACOB |
| Obligatoire | | OB-FAC | Traité |

Tableau 1: Les Types de Réassurance

II.2.2. Forme de la réassurance

Techniquement, on fait la différence entre deux formes de Réassurance : La Réassurance proportionnelle et non-proportionnelle.

1) Les traités proportionnels (sommés)

La réassurance proportionnelle consiste en une participation proportionnelle du réassureur aux gains (primes) et pertes (sinistres) de la cédante. La Réassurance proportionnelle est conceptuellement très simple. L'assureur et le réassureur conviennent d'un taux de cession β (entre 0% et 100%) pour chacun des risques en portefeuille (le taux de cession peut être le même ou différent pour chacun des risques en portefeuille). Ce taux de cession est alors appliqué à la prime originale, pour former la Prime de Réassurance. Lorsqu'il y a un sinistre, le taux de cession est appliqué au montant du sinistre pour former l'intervention du Réassureur dans le montant de sinistre. L'équilibre suivant est donc respectée :

$$\text{Prime cédée} / \text{Prime totale} = \text{Charge cédée} / \text{Charge totale} = \beta$$

On distingue entre deux types de traité de réassurance en proportionnelle : les traités en Quote-Part et les traités en excédent de plein.

- ✓ La réassurance dite en participation pure ou « Quote-part »

Dans un traité en quote-part, encore appelé traité en participation, cédante et réassureur conviennent d'une cession identique des primes et de la sinistralité. Chaque sinistre, quelque que soit sa hauteur est partagé selon la même entre assureur et réassureur et ce comme

mentionné dans le graphique ci-après :

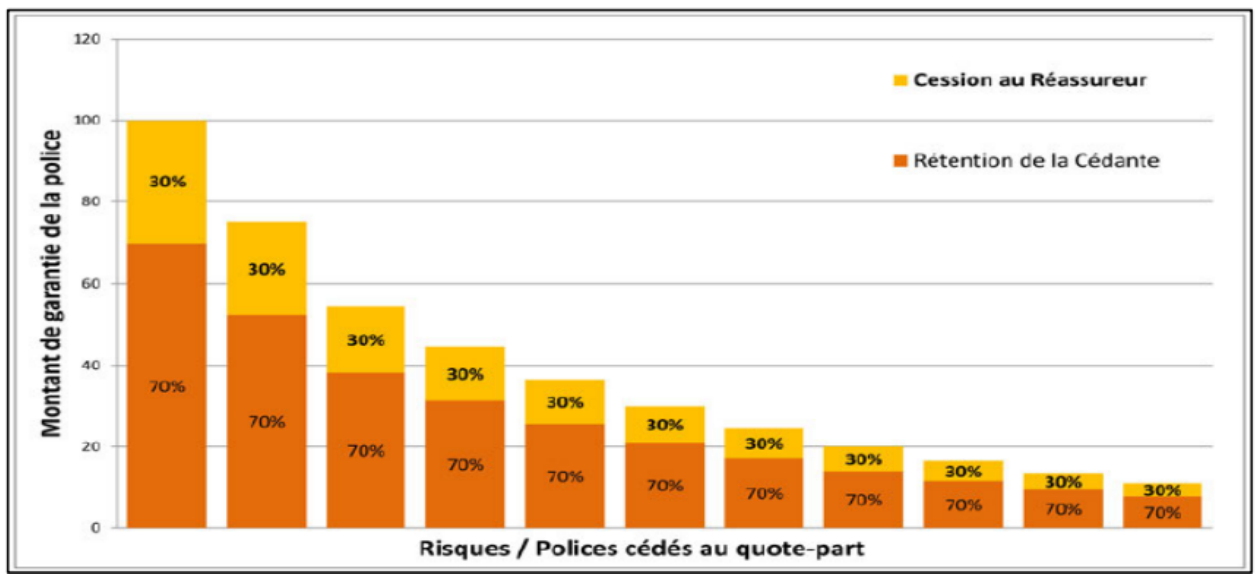


Figure 5: Fonctionnement du QUOTE-PART 30%

Ce type de Réassurance est très utile pour les cédantes en début d'activité en leur aidant dans la constitution de portefeuille susceptible de supporter les écarts majeurs. Mais tout en réduisant la charge de sinistres supportée par la cédante, elle ne la limite pas. En effet si la sinistralité peut être infinie, même après application d'une réassurance en quote-part, la sinistralité à charge de la cédante reste infinie. Elle fait intervenir le réassureur même dans le plus petit sinistre, ce qui implique de potentiels grands montants de primes à céder. La réassurance en quote-part ne rend pas le portefeuille plus homogène.

✓ La réassurance dite en excédent de capitaux ou traité en excédent de plein

Dans cette forme, la cédante détermine un plein de rétention, ou plein de conservation, c'est le montant monétaire maximal que la cédante souhaite prendre en charge lorsqu'un sinistre survient, le taux de cession est déterminé risque par risque, en fonction du capital assuré et de ce plein et par conséquent pour les risques dont les capitaux assurés ne dépassent pas le plein, il n'y a pas de réassurance. Les petits risques ne sont donc pas réassurés.

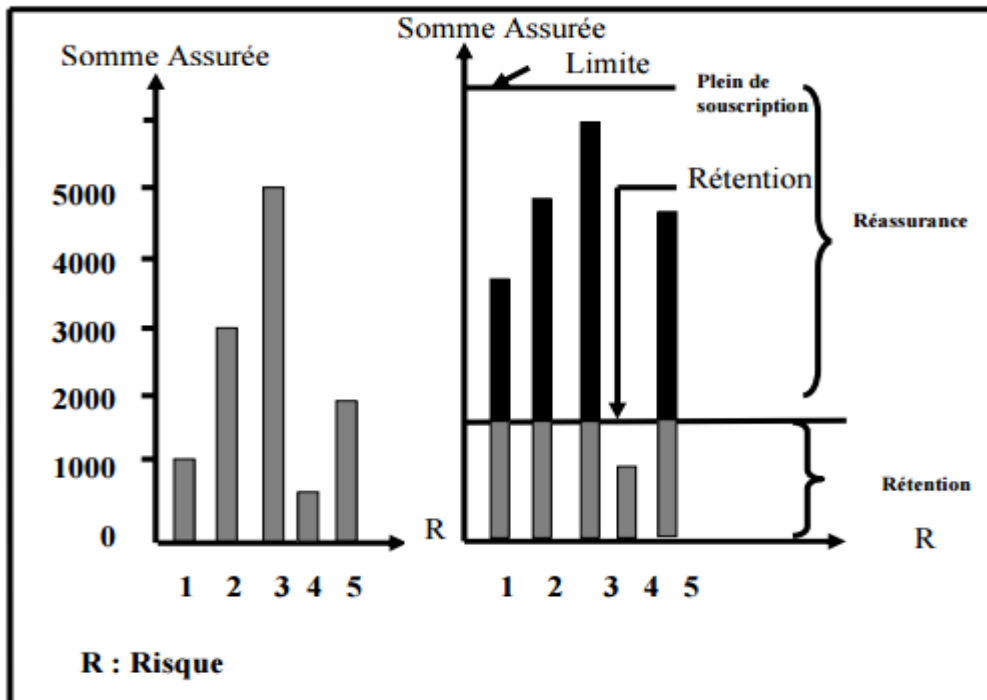


Figure 6: Fonctionnement du traité en excédent de plein

L'excédent de plein est nettement plus lourd au niveau de la gestion que la quote-part puisque chaque contrat d'assurance doit être analysé pour déterminer le taux de cession y afférent, la cession de prime et la responsabilité du réassureur dans la sinistralité. Mais d'un autre côté la cession de primes est moindre par rapport au quote-part et il permet d'homogénéiser le portefeuille de la cédante.

2) La réassurance non proportionnelle (dommage)

En réassurance non proportionnelle, contrairement à la réassurance proportionnelle, il n'y a pas de fraction contractuellement fixée permettant de partager proportionnellement primes et sinistres. L'intervention du réassureur est déterminée en fonction du montant de sinistre. Assureur et réassureur conviennent d'une franchise (la priorité) au-delà de laquelle le réassureur prendra en charge la compensation financière relative au sinistre survenu. La prime est fixée par le réassureur, en fonction de son attente de la sinistralité, de ses coûts de gestion et de la rémunération attendue par son actionnaire. En particulier, la commission de réassurance n'a ici pas de raison d'être. Le sort de la cédante et du réassureur sont beaucoup moins liés, ainsi au cours d'une année d'exercice, Cédante pourra être en perte, mais pas forcément Réassureur, ce qui aurait dû être le cas dans le cadre d'un contrat en quote-part.

Il convient de distinguer deux classes de réassurance non proportionnelle : les excédents de sinistre (ou excess of loss en anglais) et les excédents de pertes annuelle (ou stop loss en anglais).

✓ La Réassurance en Excédent de Sinistre (XS)

Un traité de réassurance en excédent de sinistre (ou XS) couvre la part de chaque sinistre excédant un seuil donné, appelé priorité. Le réassureur limite son intervention à un montant

donné par sinistre, appelé portée. La limite (ou plafond) du traité est obtenue en additionnant la priorité et la portée. La formule de calcul de la charge cédée est la suivante :

$$R_i = \text{Min}(\text{Max}(S_i - l, 0), d)$$

R_i : La charge cédée du sinistre i

S_i : Le montant du sinistre i

l : La priorité

d : La portée

Il convient de faire la distinction entre deux types de traités en excédent de sinistre suivant la définition que l'on donne au sinistre (Risque ou Evènement).

✓ L'Excédent de Sinistre par Risque :

Un traité en excédent de sinistre par risque couvre les sinistres risque par risque. Il est relatif à la survenance d'un sinistre d'une branche donnée, compte tenu du portefeuille du traité et de sa territorialité. Cette forme de traité est souvent appelée « Excess of loss cover per risk » notée « XL/R ».

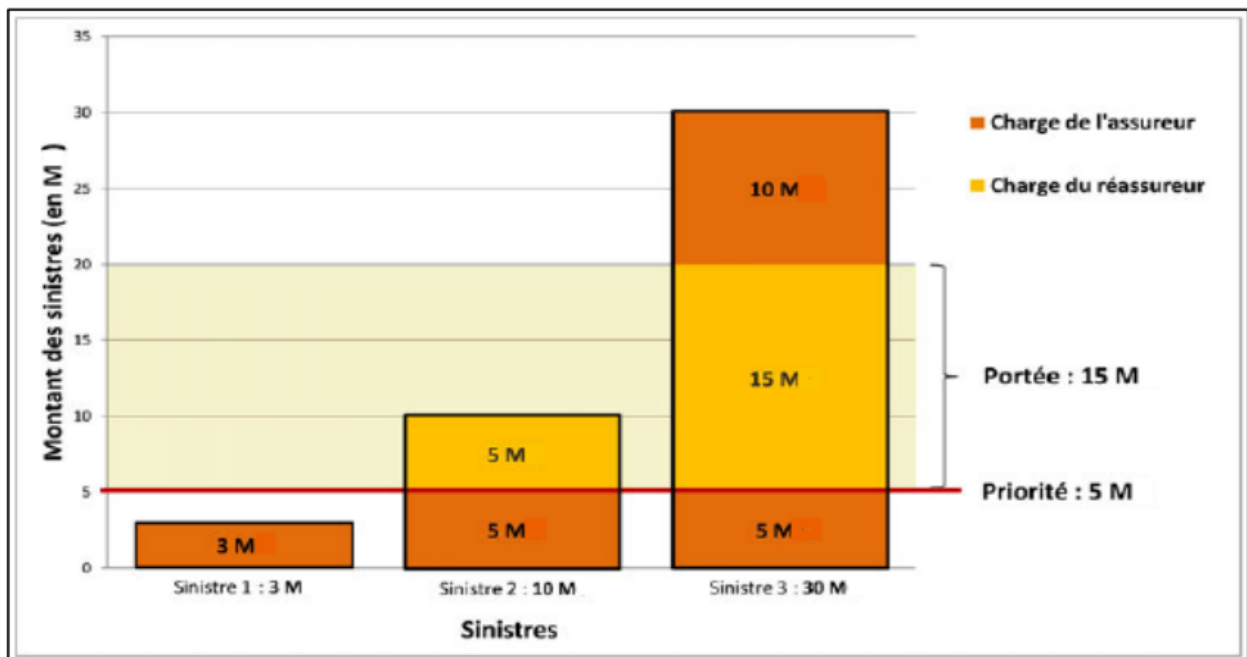


Figure 7: Fonctionnement d'un excédent de Sinistre par Risque

✓ L'Excédent de Sinistre par Evènement

La dénomination courante de ce type de traité est de « working excess of loss per event » ou « WXL/E ». En cas d'un traité « WXL/E », les réassureurs s'engagent à prendre en charge le cumul de tous les sinistres, pour autant que ce total dépasse la priorité contractuelle, touchant plusieurs polices d'une ou plusieurs branches, et causés tous par un seul et même évènement (Tempête, Inondations, ...)

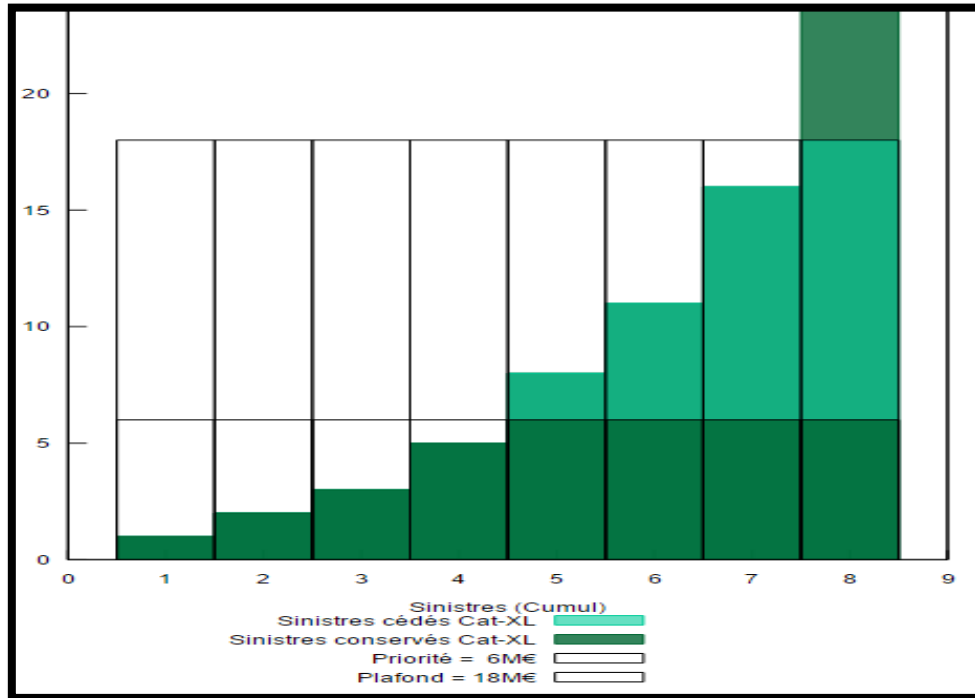


Figure 8: Fonctionnement d'un excédent de Sinistre par Evènement

✓ La Réassurance en Excédent de Perte Annuelle ou Stop-loss (SL)

Le réassureur intervient lorsque l'assureur est en perte. L'assureur cherche à se protéger, en considérant les montants de sinistres, non plus individuellement sur un risque ou sur un événement, mais au total sur une période donnée. La réassurance en excédent de perte annuelle couvre l'agrégat annuel de la sinistralité en excédent d'une priorité et avec un plafond d'intervention du réassureur. Le plus souvent la couverture est exprimée en taux de sinistre (rapport sinistres à primes). Dans le schéma suivant, le réassureur interviendra pour une perte supérieure à 120% et inférieure à 160% des primes acquises.



Figure 9: Fonctionnement du Stop-loss

Nous choisissons de présenter là un schéma récapitulatif des types et formes de Réassurance.

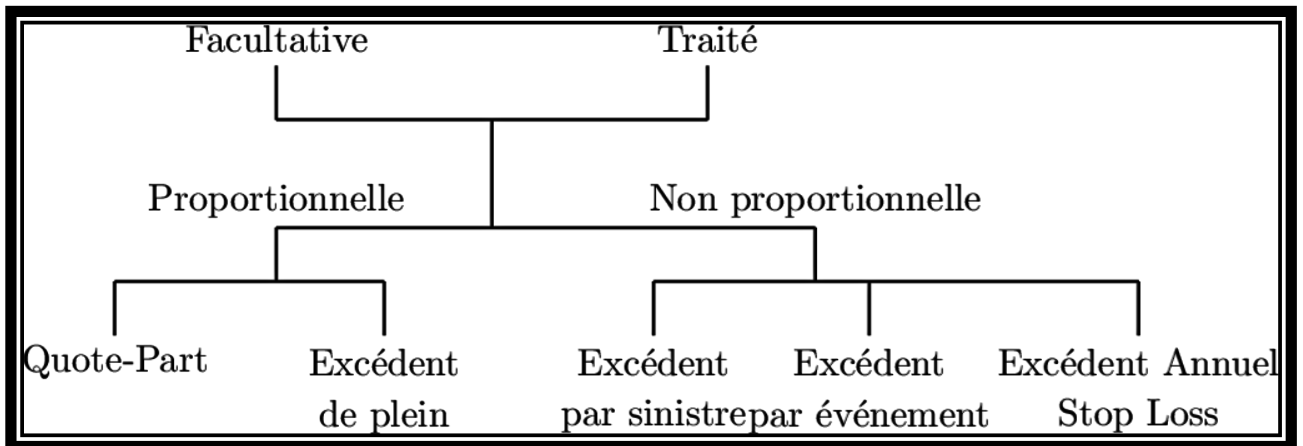


Figure 10: Schéma récapitulatif des différents types d'ententes en Réassurance

II. « Captive » et « Fronting »

II.1. Fonctionnement

I.3.4. Fonctionnement de la captive

Une captive est une société d'assurance et/ou de réassurance appartenant à une ou plusieurs sociétés industrielles et commerciales.

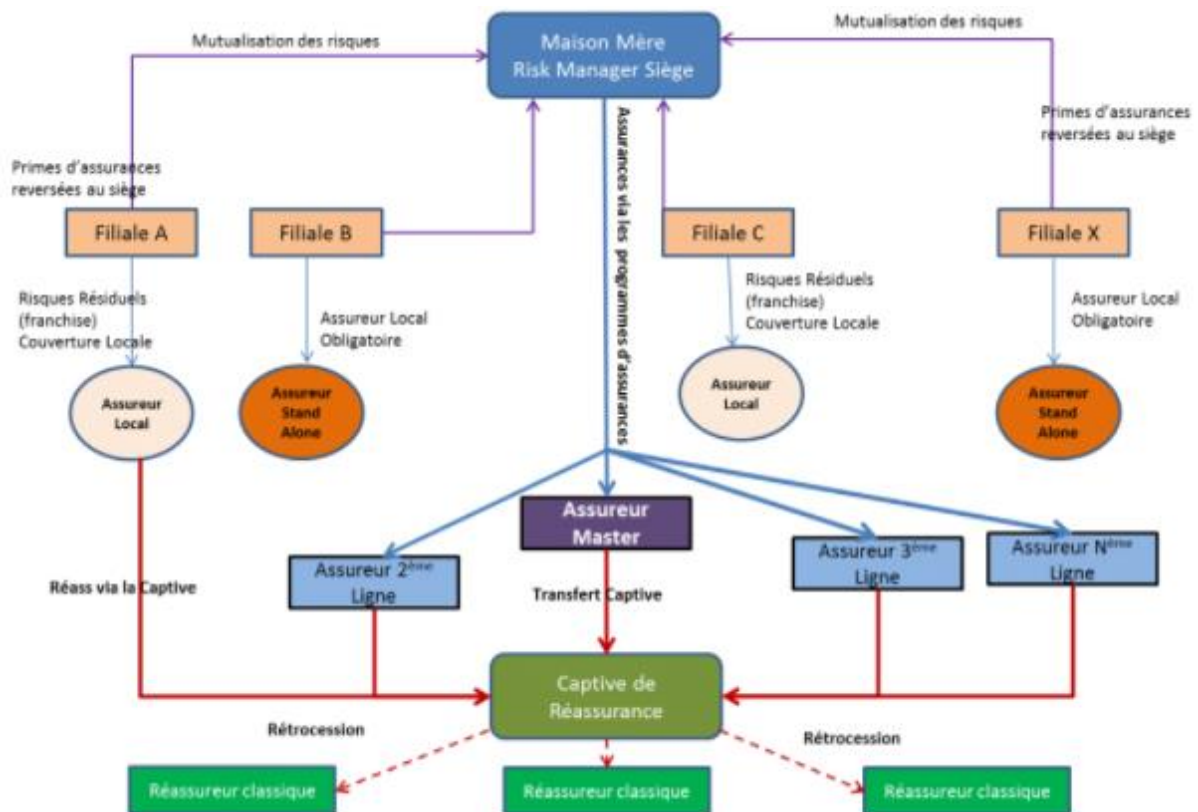


Figure 11: Illustration technique et opérationnelle de l'utilisation de la Captive

Expliquons le schéma ci-dessus :

- Les risques des entités du groupe sont mutualisés auprès de la maison mère. Cette dernière se charge même de collecter les primes correspondantes et de rechercher une couverture adéquate sur le marché classique de l'assurance. Au travers des programmes d'assurances, le Risk Manager (RM) assure tout ou partie des risques du groupe auprès d'un assureur Master, et auprès d'autres assureurs du programme.
- Tous ces assureurs réassurant à leur tour une partie du risque porté auprès d'un réassureur qui n'est autre que la Captive du Groupe. Cette mutualisation n'empêche pas les entités du groupe de s'assurer localement
 - soit parce que la loi l'impose, et c'est le cas des « Stand Alone » ;
 - soit parce qu'une partie du risque reste sous leur responsabilité (Franchise pure).

Les avantages d'une captive sont nombreux. On peut en citer :

- **Maîtriser les coûts d'assurance et améliorer la marge brute d'autofinancement des risques :** au lieu d'être thésaurisées et conservées par l'assureur traditionnel, les primes encaissées et les réserves détenues pour couvrir les sinistres en cours peuvent être conservées et investies par la captive.
- **Baisser le taux de transfert des risques au marché de l'assurance classique.** La croissance et l'augmentation du capital net d'une captive peuvent permettre à la captive de conserver au fil des ans une part sans cesse croissante des risques de l'entreprise mère.

- **Permettre une meilleure gestion des programmes d'assurances** : l'existence d'une captive octroie la possibilité de mieux structurer les programmes d'assurances puisqu'il existe moins de contraintes pour le gestionnaire des risques de l'entreprise.
- **Favoriser une meilleure gestion des risques.** Ainsi par le système de répartition des primes entre les filiales et entités du groupe, il est possible de répartir les coûts plus équitablement entre les centres de profits du groupe.

En somme, la captive favorise une coordination et une uniformisation de la politique de gestion des risques en intégrant toutes les entités du groupe dans ses programmes d'assurances. Elle offre donc une panoplie de d'options au Risk Manager pour gérer les risques de son Groupe. Or, comme le démontre l'étude de Guy Carpenter et Olivier Wymann pour MARSH en 2012, « *plus une captive est utilisée, plus la dépendance de la société qui la détient diminue sur le marché de l'assurance classique* » ; Et c'est à ce niveau qu'entre en jeu le mécanisme du Fronting.

II.2. Exemple : La Captive « SAHAM Ré »

« SAHAM Ré » est la captive de réassurance du groupe SAHAM. Elle a été créée dans le but de retenir la prime souvent très élevée cédée en réassurance au niveau du groupe. Elle répond donc à un besoin de gestion de risque et d'optimisation du résultat du Group. Les primes cédées par toutes les filiales d'assurance de SAHAM pour les besoins en réassurance sont captées par « SAHAM Ré » qui mutualise tous les risques du groupe et se charge de chercher la meilleure couverture par rétrocession sous forme « d' Aggregate ».

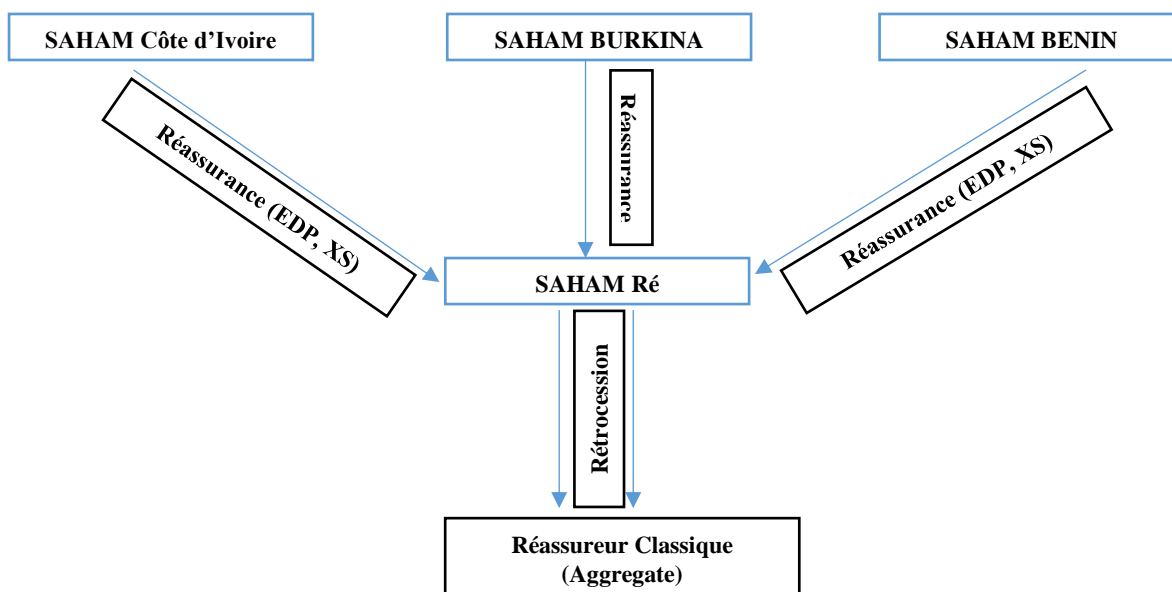


Schéma de Réassurance de SAHAM

- **Plan de Réassurance de la branche Incendie**
 - Tous les risques ayant une somme assurée supérieure à 14milliards de franc CFA

sont automatiquement cédés en Réassurance facultative. Le profil de risque en net de Fac sera donc plafonné à 14milliards.

- Au deuxième niveau on a une cession sous forme d'excédent de plein (EDP) à SAHAM Ré. Le plein de rétention de cette couverture est fixé à 1milliard et sa capacité à 13milliards soit un plein de souscription de 14milliards de franc CFA.
- Puis viens une couverture en excédent de sinistre (XS) par Risque. Cette couverture est appliquée sur la rétention de la filiale (c'est-à-dire après cession en EDP). La priorité de l'XS est fixée à 200millions et sa portée à 800millions.

PARTIE I : LA METHODE PAR EXPOSITION « PURE »

CHAPITRE I : ELEMENTS DE STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Dans cette section nous allons mener une analyse préliminaire de description de nos données afin d'avoir un aperçu de ce qu'est notre niveau de risque.

I. Analyse de la fréquence

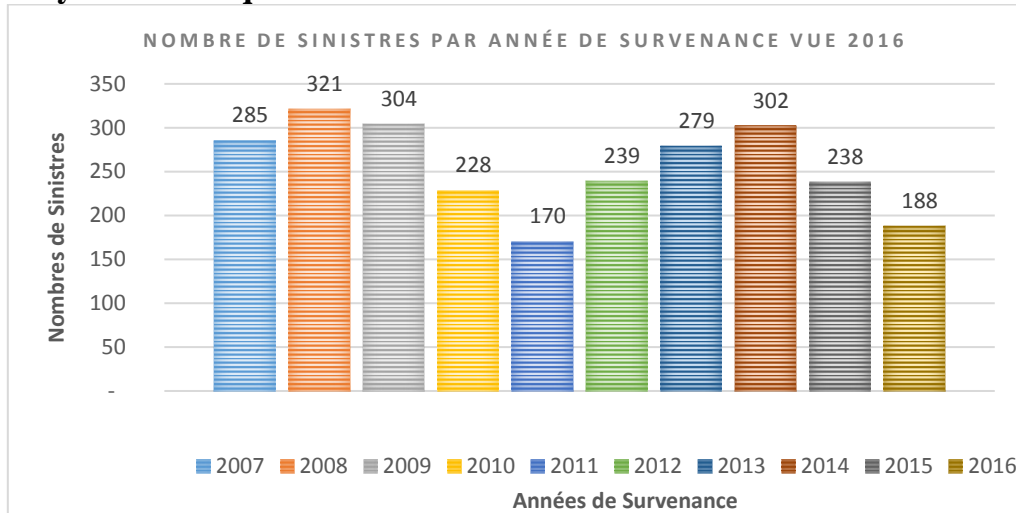


Figure 12: Historique du Nombre de Sinistres (2007-2016)

Le graphique précédent donne le nombre de sinistre survenu durant la période 2007-2016 et ayant fait l'objet d'une déclaration avant le 31/12/2016, date la plus récente de la disponibilité de nos données. On n'observe aucune tendance de notre nombre de sinistres au fil des années mais on peut voir 3 pics (2008,2009 et 2014). 2014 a été une année particulièrement sinistré.

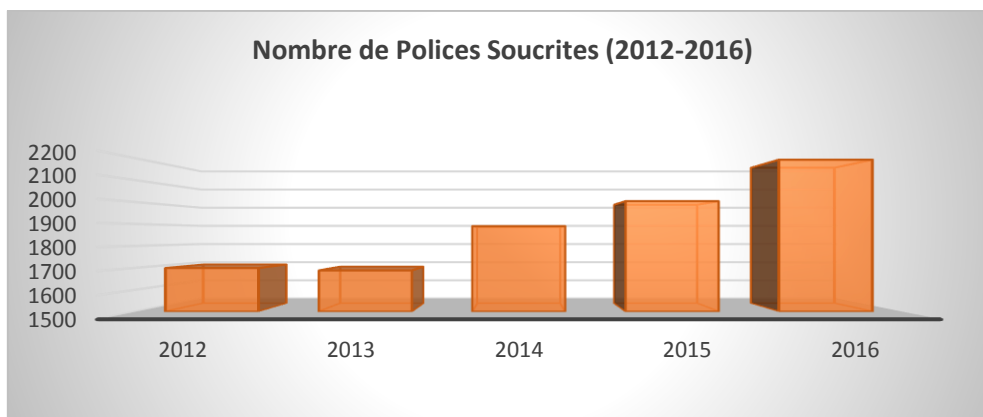


Figure 13: Nombre de Polices Souscrites (2012-2016)

Dans ce graphe on constate une tendance haussière du nombre d'affaires souscrites par la compagnie au fil des années cause d'une politique commerciale agressive.

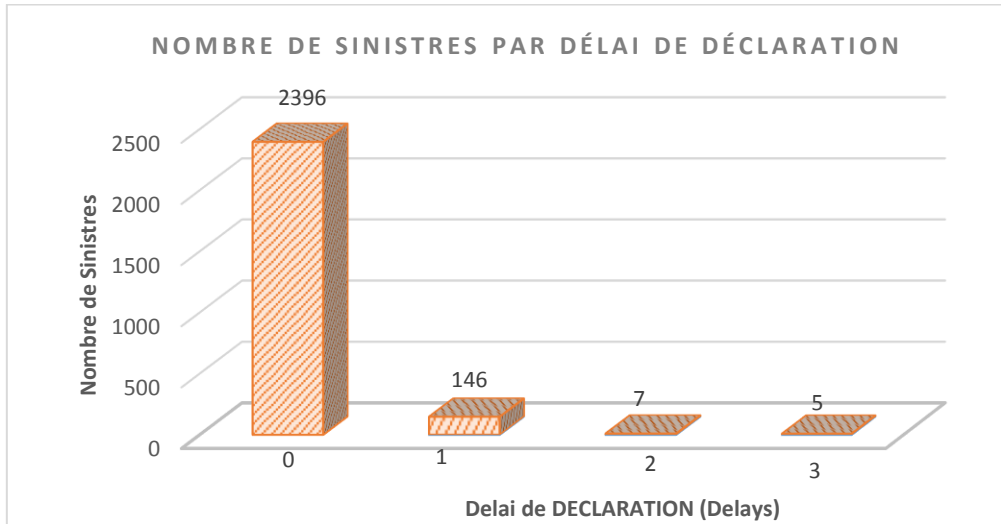


Figure 14: Nombre de sinistres par Délai de déclaration

La figure ci-dessus donne le nombre global de sinistres survenus durant notre période d'étude (2012-2016) en fonction de leur délai de déclaration en d'années (voir définition plus bas). Comme on peut le remarquer sur le graphe la quasi-totalité des sinistres est déclarée dès la première année de leur survenance (environ 94%) et aucun sinistre n'accuse un délai de déclaration de plus de 3 ans. L'Incendie est donc une branche courte (voir définition plus bas). La correction du nombre de sinistres de la branche incendie par les IBNRs n'est donc pas une nécessité en soit, on peut s'en passer puisqu'elle n'impacte pas significativement les résultats.

- *Le délai de déclaration est le temps qui sépare la survenance d'un sinistre de sa déclaration.*
- *Une branche courte est une branche dont le délai de déclaration est très réduit (moins de 5 ans) ainsi que les années de développement du règlement des sinistres. L'assurance santé et l'incendie sont des branches courtes. A l'opposé la « RC Auto » se positionne comme une branche longue.*

II. Profil de Risque et Analyse de la sévérité

| Bandes | Entre | Et | Total SMP | Nbre de Polices | SMP moyen | Prime acquise | Taux de Prime |
|--------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| 1 | - | 235 200 000 | 79 899 249 053 | 580 | 137 757 326 | 50 651 032 | 36,77% |
| 2 | 235 200 000 | 470 400 000 | 105 363 885 925 | 316 | 333 430 019 | 55 806 379 | 16,74% |
| 3 | 470 400 000 | 705 600 000 | 73 769 696 876 | 128 | 576 325 757 | 46 000 563 | 7,98% |
| 4 | 705 600 000 | 940 800 000 | 57 621 893 547 | 71 | 811 575 965 | 33 400 509 | 4,12% |
| 5 | 940 800 000 | 1 293 600 000 | 70 759 796 726 | 64 | 1 105 621 824 | 47 066 244 | 4,26% |
| 6 | 1 293 600 000 | 1 764 000 000 | 77 504 101 748 | 51 | 1 519 688 270 | 55 624 834 | 3,66% |
| 7 | 1 764 000 000 | 2 234 400 000 | 70 162 059 960 | 35 | 2 004 630 285 | 51 668 587 | 2,58% |
| 8 | 2 234 400 000 | 2 587 200 000 | 58 296 704 730 | 24 | 2 429 029 364 | 30 732 160 | 1,27% |
| 9 | 2 587 200 000 | 3 057 600 000 | 69 176 817 421 | 25 | 2 767 072 697 | 53 740 310 | 1,94% |
| 10 | 3 057 600 000 | 3 528 000 000 | 83 747 168 886 | 25 | 3 349 886 755 | 50 116 311 | 1,50% |
| 11 | 3 528 000 000 | 4 116 000 000 | 38 994 348 121 | 10 | 3 899 434 812 | 35 921 266 | 0,92% |
| 12 | 4 116 000 000 | 4 704 000 000 | 90 551 627 892 | 21 | 4 311 982 281 | 51 825 541 | 1,20% |
| 13 | 4 704 000 000 | 5 292 000 000 | 64 551 050 804 | 13 | 4 965 465 446 | 47 162 507 | 0,95% |
| 14 | 5 292 000 000 | 5 880 000 000 | 50 186 550 774 | 9 | 5 576 283 419 | 38 954 604 | 0,70% |
| 15 | 5 880 000 000 | 7 056 000 000 | 339 566 215 173 | 49 | 6 929 922 759 | 235 174 409 | 3,39% |
| 16 | 7 056 000 000 | 8 232 000 000 | 53 008 332 565 | 7 | 7 572 618 938 | 16 797 569 | 0,22% |
| 17 | 8 232 000 000 | 9 408 000 000 | 17 924 973 321 | 2 | 8 962 486 661 | 9 398 737 | 0,10% |
| 18 | 9 408 000 000 | 10 584 000 000 | 39 513 224 541 | 4 | 9 878 306 135 | 29 237 210 | 0,30% |
| 19 | 10 584 000 000 | 11 760 000 000 | 22 400 000 000 | 2 | 11 200 000 000 | 22 048 020 | 0,20% |
| 20 | 11 760 000 000 | 12 936 000 000 | 37 800 000 000 | 3 | 12 600 000 000 | 15 003 965 | 0,12% |
| 21 | 12 936 000 000 | 14 112 000 000 | 70 000 000 000 | 5 | 14 000 000 000 | 32 024 445 | 0,23% |

Tableau 2: Profil de Risque au 30/06/2016

D'après le profil de risque précédent près des $\frac{3}{4}$ (72%) des affaires souscrites par la compagnie sont contenues dans les 3 premières bandes et ne représentant que 16% du SMP (Sinistre Maximum possible) total. La bande 15 présente la caractéristique de monopoliser à elle seule le $\frac{1}{4}$ du SMP alors qu'elle ne contribue qu'à hauteur de 6% dans la prime acquise. Le taux de prime calculé à la dernière colonne représente le rapport entre la prime acquise et le SMP moyen de la bande. La bande 1 a un taux de prime de 36,77%, ce qui signifie que la prime collectée couvre en moyenne un peu plus du tiers son SMP. Les bandes hautes ont un taux de prime beaucoup plus élevé que les bandes basses, ce qui est tout à fait justifié par le fait que les petits sites ont une probabilité de perte totale (Probabilité que le sinistre égale son SMP) un peu plus élevé que les gros sites et nécessite de ce fait un taux de prime plus élevé.

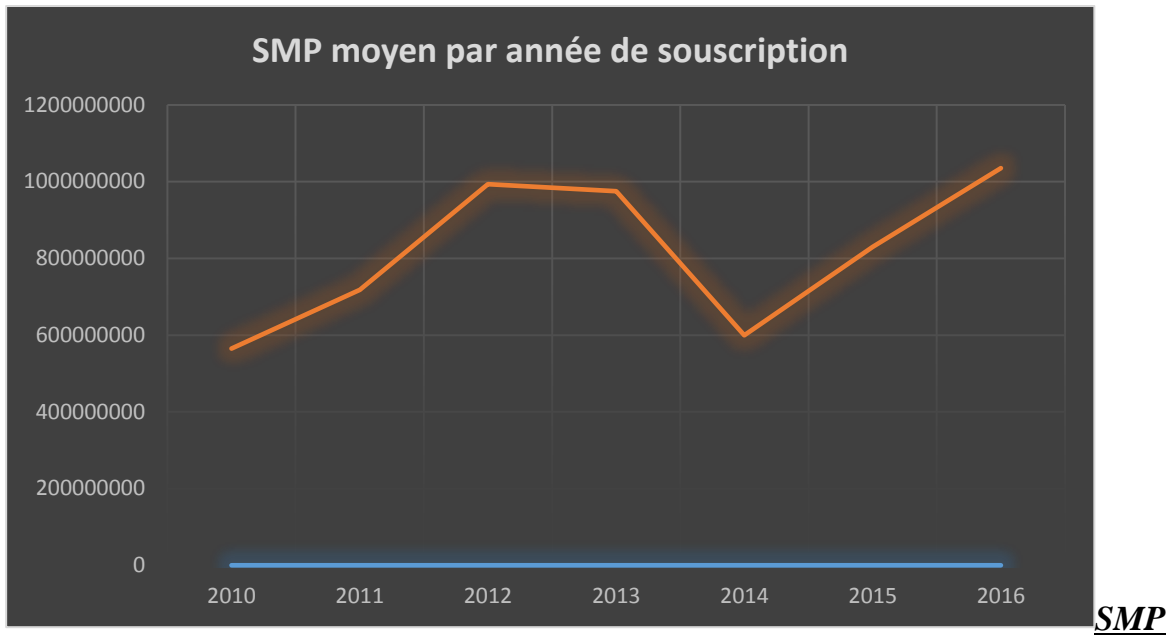


Figure 15: SMP Moyen (2010-2016)

Le SMP moyen est le rapport entre le SMP total et le nombre de polices souscrit. Le graphe ci-dessus montre 3 pics de SMP moyen en 2012, 2013 et 2016 qui correspondent par effet de cause à une exposition à des sinistres sévères plus élevé que les autres années.

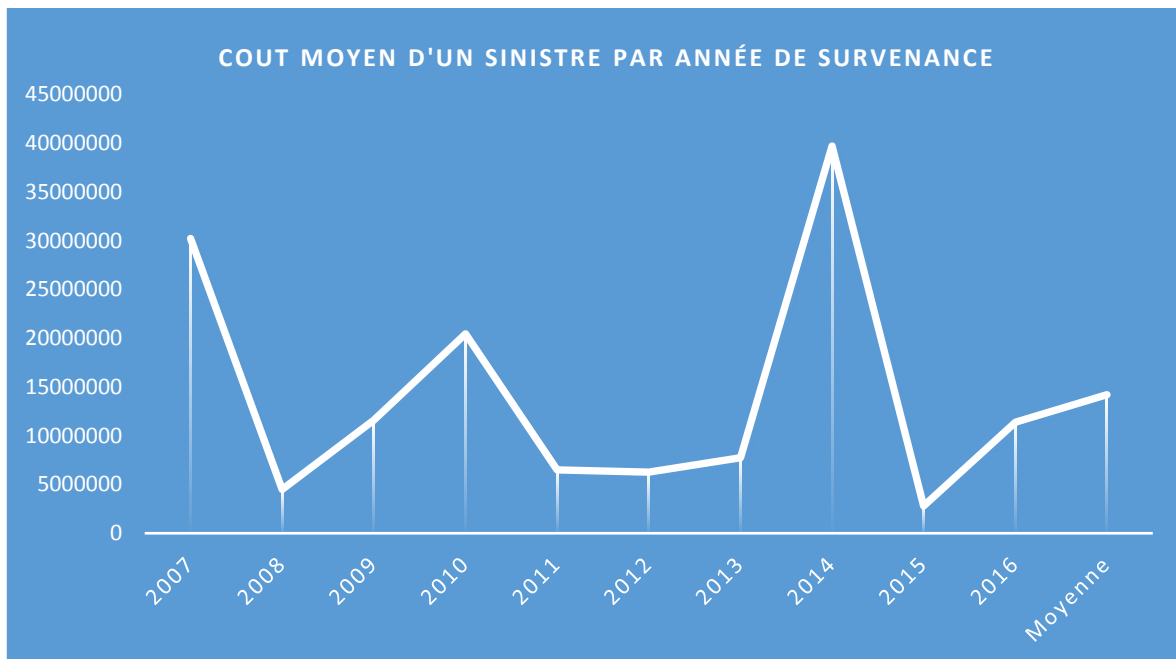


Figure 16: Coût moyen d'un sinistre

Le Coût moyen d'un sinistre est la somme totale de tous les sinistres survenus durant l'année rapportée à leur nombre. L'année 2014 présente la particularité d'avoir enregistré un coût largement supérieur à la moyenne des autres années. Cela est dû particulièrement à la

survenance de deux sinistres exceptionnels dépassant de loin les montants des autres sinistres tout année confondue.

| Bandes de SMP | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | MOYENNE |
|---------------|------|------|-------|------|------|---------|
| 1 | 2% | 4% | 7% | 12% | 16% | 8% |
| 2 | 119% | 47% | 57% | 9% | 10% | 49% |
| 3 | 38% | 81% | 9% | 13% | 30% | 34% |
| 4 | 336% | 46% | 60% | 27% | 25% | 99% |
| 5 | 4% | 19% | 223% | 41% | 302% | 118% |
| 6 | 20% | 2% | 25% | 6% | 17% | 14% |
| 7 | 22% | 0% | 11% | 16% | 2% | 10% |
| 8 | 10% | 24% | 112% | 35% | 144% | 65% |
| 9 | 1% | 28% | 35% | 22% | 33% | 24% |
| 10 | 0% | 506% | 183% | 1% | 8% | 140% |
| 11 | 8% | 15% | 27% | 14% | 25% | 18% |
| 12 | 27% | 236% | 5482% | 28% | 67% | 1168% |
| 13 | 10% | 57% | 43% | 0% | 11% | 24% |
| 14 | 2% | 0% | 5% | 8% | 8% | 5% |
| 15 | 36% | 32% | 400% | 15% | 142% | 125% |
| 16 | 1% | 25% | 2% | 4% | 1% | 7% |
| 17 | 5% | 11% | 9% | 29% | 121% | 35% |
| 18 | 120% | 77% | 233% | 78% | 118% | 125% |
| 19 | 4% | 0% | 0% | 13% | 155% | 34% |
| 20 | 110% | 1% | 0% | 7% | 23% | 28% |
| 21 | 3% | 257% | 10% | 35% | 4% | 62% |
| Moyenne | 30% | 40% | 235% | 16% | 59% | 76% |

Tableau 3: Loss-Ratio par bande de SMP (2012-2016)

Le tableau précédent donne les loss-Ratio par bande pour les années de survenance 2012 à 2016. Les bandes 1, 14 et 16 ont été extrêmement excédentaires les 5 dernières années et ont contribué fortement au bénéfice de la compagnie compensant ainsi les pertes enregistrées sur les bandes 5, 10 et 18.

Les pertes colossales observées sur les bandes 12 et 15 de l'année 2014 sont la cause des 2 sinistres exceptionnels évoqués précédemment. Une inclusion de tels sinistres dans une modélisation conduit à de mauvaises interprétations de la sinistralité, il convient de les isoler et de les modéliser séparément.

Toutes les bandes présente une certaine volatilité au niveau de leur moyenne de loss-ratio. Aucune bande n'a été constamment déficitaire les 5 dernières années. Mais la bande 18 à garder un loss-ratio supérieur au loss-ratio de long terme (76%) observé les 5 dernières années.

| Nombre de sinistres par bande et Année de Survenance | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|-------|---------|
| Bandes | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | Total | Moyenne |
| 1 | 13 | 23 | 36 | 27 | 13 | 112 | 22,4 |
| 2 | 17 | 17 | 24 | 11 | 13 | 82 | 16,4 |
| 3 | 9 | 11 | 13 | 8 | 13 | 54 | 10,8 |
| 4 | 11 | 9 | 10 | 10 | 12 | 52 | 10,4 |
| 5 | 4 | 5 | 13 | 3 | 10 | 35 | 7 |
| 6 | 4 | 4 | 5 | 4 | 7 | 24 | 4,8 |
| 7 | 8 | 3 | 5 | 6 | 3 | 25 | 5 |
| 8 | 9 | 8 | 6 | 8 | 8 | 39 | 7,8 |
| 9 | 2 | 15 | 28 | 26 | 15 | 86 | 17,2 |
| 10 | 0 | 3 | 2 | 2 | 5 | 12 | 2,4 |
| 11 | 2 | 5 | 4 | 4 | 3 | 18 | 3,6 |
| 12 | 5 | 6 | 8 | 9 | 8 | 36 | 7,2 |
| 13 | 9 | 13 | 11 | 1 | 5 | 39 | 7,8 |
| 14 | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | 7 | 1,4 |
| 15 | 15 | 49 | 42 | 20 | 21 | 147 | 29,4 |
| 16 | 5 | 7 | 3 | 4 | 4 | 23 | 4,6 |
| 17 | 2 | 5 | 4 | 9 | 4 | 24 | 4,8 |
| 18 | 22 | 30 | 45 | 15 | 14 | 126 | 25,2 |
| 19 | 1 | 0 | 1 | 1 | 5 | 8 | 1,6 |
| 20 | 9 | 5 | 1 | 2 | 14 | 31 | 6,2 |
| 21 | 2 | 2 | 2 | 19 | 12 | 37 | 7,4 |
| Total | 152 | 220 | 264 | 190 | 191 | 1017 | 203,4 |

Tableau 4: Nombre de Sinistres 2012-2016

Le tableau ci-dessus donne le nombre de sinistres survenus entre 2012 et 2016. Les bandes 1, 15 et 18 peuvent être qualifiées de tranches travaillantes car ce sont elles qui ont enregistré le plus grands nombres de sinistres les 5 dernières années. A l’opposé les bandes 10, 14 et 19 sont dites non-travaillantes car elles ne sont pénétrées que très rarement.

CHAPITRE II : Courbe d'exposition et Loi de Fréquence

I. Courbe d'exposition

Dans la pratique de la réassurance en risque incendie, on trouve une méthode nommée « Exposure Rating » ou cotation par exposition. Cette méthode s'appuie sur des courbes appelées courbes d'exposition. Elle permet de répartir les primes entre l'assureur et le réassureur, sans dépendre des fluctuations statistiques de la sinistralité. Malheureusement, les seules courbes disponibles sont peu nombreuses et peu récentes. Ainsi il paraissait intéressant de pouvoir modéliser de telles courbes à partir d'un portefeuille quelconque, et d'en étudier les propriétés. Tel sera l'objet de ce paragraphe.

I.1. Formulation mathématique de la courbe d'exposition

Soit X la variable aléatoire représentant le taux de dommage (ou encore le taux de destruction) où $x = \frac{MS}{SA \text{ ou } SMP}$. Il s'agit du niveau de destruction du bien assuré résultant de la survenance d'un sinistre et ce en proportion de la somme assurée.

✓ $MS = \text{Montant ou Sévérité du Sinistre}$

✓ $SA = \text{Somme Assurée}$

✓ $SMP = \text{Sinistre maximum possible}$

x Appartient à l'intervalle $[[0,1]]$, de ce fait toutes les lois appartenant à cette intervalle sont à priori candidates. L'une des distributions les plus hautement probables pour modéliser X est la distribution MBBEFD du nom de trois physiciens Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, et Fermie-Dirac. Il s'agit d'une combinaison de la distribution des trois lois de statistiques de ces trois physiciens. Suite à l'article de Stephan Bernegger sur les courbes MBBEFD, on possède une expression analytique de ce type de courbes afin de modéliser des courbes d'exposition.

$$G_{b,g}(x) = \frac{\ln\left[\frac{(g-1)b + (1-gb)b^x}{1-b}\right]}{\ln(bg)}$$

Où b et g sont les paramètres de cette loi. **Conditions:** $b \neq 1, b > 0, bg \neq 1$ et $g > 1$.
Un exemple de courbe d'exposition est donné par :

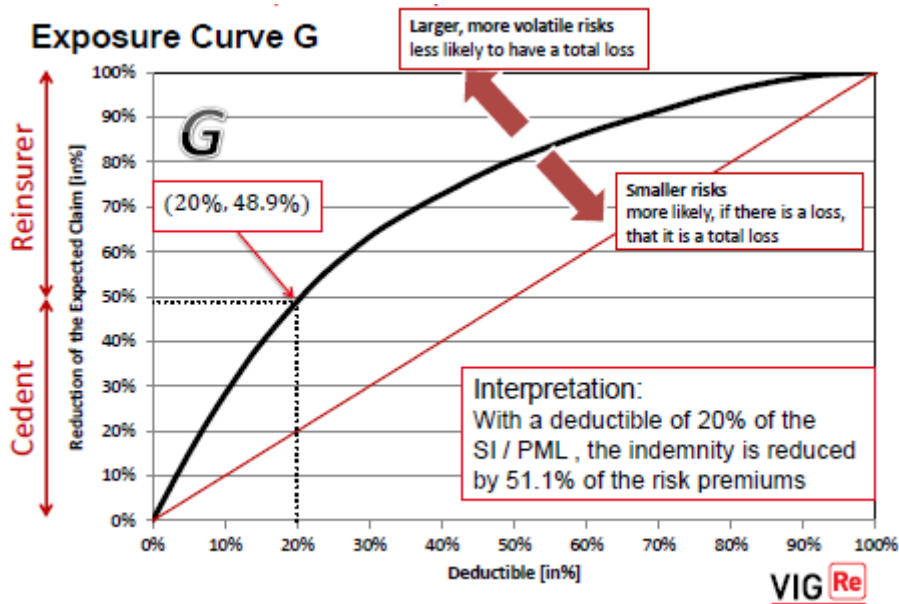


Figure 17: Exemple de Courbe d'exposition

1) Définition

La fonction G est une fonction strictement croissante et concave sur l'intervalle $[0,1]$. De plus $G(0)=0$ et $G(1)=1$ par définition. L'une des utilités des courbes d'exposition est la tarification des traités en excédent de sinistres. Et c'est de là que vient sa définition. On appelle donc courbe d'exposition G le rapport entre prime pure sous rétention et prime pure à la base, soit la part de prime pure retenue par la cédante (respectivement l'assuré) pour une tranche $+ \infty$ XS D (respectivement pour la mise en place d'une franchise D).

Par-exemple le point de coordonnées (20% ; 48.9%) de la courbe d'exposition sera interprété comme suit : Pour une franchise de traité XS de 20% de la somme assurée le risque conservé par l'assureur sera de 48.9% et 51.1% du risque sera cédé au traité XS.

La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{b(g-1)(1-b^x)}{b(g-1) + (1-bg)b^x} & x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Et sa fonction de densité $f(x) = \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x}}{((g-1)b^{1-x} + (1-gb))^2}$.

2) Estimation des paramètres du modèle

On considère un échantillon de taux de dommage de dimension n (x_1, \dots, x_n). On veut ajuster une courbe MBBEFD sur une courbe empirique, c'est-à-dire qu'il nous faut trouver les coefficients b et g d'une courbe MBBEFD qui reflète au mieux nos données empiriques. Pour

ce faire, on va utiliser la méthode classique de maximisation de la log-vraisemblance. Dans un but de simplification et de clarté des calculs, on pose : $D = (g - 1)b^{1-x_i} + (1 - gb)$

La vraisemblance est ainsi :

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_i \frac{(b-1)(g-1) \ln(b) \cdot b^{1-x_i}}{[(g-1) \cdot b^{1-x_i} + (1-gb)]^2} = ((b-1)(g-1) \ln(b))^n \prod_i \frac{b^{1-x_i}}{D^2}$$

La log-vraisemblance donne donc :

$$\ln\left(\prod_i f(x_i)\right) = B = n \cdot \ln[(b-1)(g-1) \ln(b)] + \sum_{i=1}^n \ln\left[\frac{b^{1-x_i}}{D^2}\right]$$

On doit donc résoudre le système suivant $\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial g} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial b} = 0 \end{cases}$.

Équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{n}{(g-1)} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{b^{1-x_i} - b}{D} = 0 \Leftrightarrow h_1 = 0 \\ \frac{n \left[\ln(b) + 1 - \frac{1}{b} \right]}{(b-1) \ln(b)} + \sum_{i=1}^n \frac{[Db^{-x_i}(1-x_i) - 2b^{1-x_i}[(g-1)(1-x_i)b^{-x_i} - g]]}{Db^{-x_i}} = 0 \Leftrightarrow h_2 = 0 \end{cases}$$

A ce stade nous faisons face à deux équations non linéaires à deux inconnues, que l'on ne sait résoudre formellement. Nous décidons donc de mettre en œuvre une méthode de résolution numérique : la méthode de *Newton-Raphson*.

3) Propriétés des Courbes d'exposition.

- ✓ L'espérance du taux de dommage est donnée par $E(X) = \frac{1}{G'(0)}$
- ✓ La probabilité de perte totale est $P(x = 1) = \frac{G'(1)}{G'(0)} = \frac{1}{g}$. Il s'agit de la probabilité que le montant du sinistre atteigne la somme assurée ou le SMP correspondant.
- ✓ Pour un traité $L \times S \times D$ le taux de cession sera donnée par $tx = G\left(\frac{D+L}{SMP}\right) - G\left(\frac{D}{SMP}\right)$.
- ✓ Les courbes d'exposition avec une tendance qui se rapproche de la diagonale (droite $y=x$) sont celles d'un portefeuille essentiellement constituées de sinistres totaux. Dans le cas d'un portefeuille entièrement constitué de sinistres totaux (100% destruction pour tous les sinistres) la courbe d'exposition coïncide exactement avec la diagonale.

5) Les Courbes d'exposition du marché

Les premières courbes d'exposition sont mises au point par Ruth E. Salzmann et publiés en 1963 dans les Bulletins de la « Casualty Actuarial Society ». Elles s'appuient sur les sinistres incendie Multirisques Habitation de la compagnie américaine INA pour la survenance 1960. Plus tard, Stephen J. Ludwig reprit l'étude sur des données de 1984 à 1988 de la compagnie Hartford en l'étendant au portefeuille des petits risques commerciaux. Les courbes les plus connues restent celles mises au point par Peter Gasser de la Swiss Ré dans les années 1970 avec des statistiques Incendie Suisses des années 1960 à 1968. Il a mis au point quatre courbes notées Y1-Y4 ou SR1-SR4 qui sont encore utilisées en pratique pour la tarification des XS.

Le type d'activité est un élément discriminant car il influe sur la nature de la construction, le type de protection et le degré de vulnérabilité du bien assuré. Le taux de destruction moyen varie donc considérablement selon la classe de risque ou d'activité comme l'illustre le tableau suivant (Source : Swiss Intercantonal Reinsurance Association de 1991 à 1996) :

| <i>Classe de risque</i> | <i>Taux de destruction moyen</i> |
|-------------------------|----------------------------------|
| Bâtiment résidentiel | 1,9% |
| Bâtiment administratif | 0,5% |
| Bâtiment agricole | 4,9% |
| Bâtiment industriel | 4,4% |

Taux de destruction moyen par activité

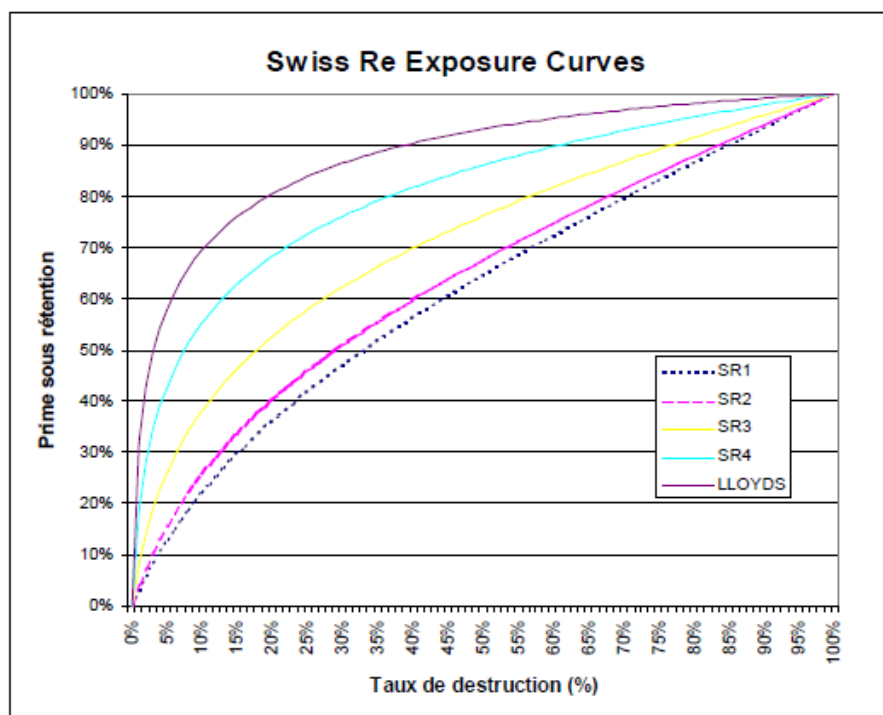


Figure 18: Quelques Courbes d'exposition du marché

La prime sous rétention correspond également à la réduction (en pourcentage) de l'espérance de la charge sinistre.

- SR 1 : Assurance des particuliers.
- SR 2 : Assurance des entreprises (petites).
- SR 3 : Assurance des entreprises (moyennes).

Pour les risques industriels les souscripteurs des différentes compagnies de réassurance utilise une courbe d'exposition du marché Londonien (courbe des Lloyd's). La courbe des Lloyd's est connue sous le nom de SR5 ou Y5.

Les courbes Swiss Ré (SR1 à SR4) et Lloyd's (Y5) ci-dessus peuvent être approchées par des courbes de la famille MBBEFD ce qui permet dans un premier temps d'obtenir des couples de paramètres (b_i, g_i) $i = 1, \dots, 5$. Une deuxième étape consiste à représenter ces points dans le plan (b, g) , la courbe obtenue est ensuite modélisée en fonction d'un seul paramètre c .

La famille à un paramètre des courbes d'exposition MBBEFD est définie comme suit $G_{g,b}(x) = G_{g_c, b_c}(x)$. Avec :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad b_c &= b(c) = \exp(3.1 - 0.15(1 + c)c) \\ \checkmark \quad g_c &= g(c) = \exp((0.78 + 0.12c)c) \end{aligned}$$

I.2 Conception de la courbe d'exposition interne (Sévérité)

Pour pouvoir produire notre courbe d'exposition nous avons besoin de la distribution des taux de destruction (valeur comprise entre 0 et 1). Pour ce faire, disposant des montants individuels revalorisés des sinistres sur la période 2012-2016 nous faisons l'hypothèse d'homogénéité pour tous les risques d'une bande donnée. Ainsi chaque risque est considéré avoir un SMP égal au SMP moyen de la bande auquel il appartient (Cf. le tableau de profil de risque). On rapporte chaque sinistre à son SMP et on obtient la distribution empirique des taux de dommage. On ajuste à cette distribution une courbe d'exposition théorique à travers la loi MBBEFD. Les paramètres estimés du modèle ainsi que la courbe de la fonction de répartition ajustée sont présentés ci-dessous.

```
> fitDR(TauxDom[,2], "MBBEFD", method="mle")
<simpleError in if (obj * sign(mu) > obj.old * sign(mu))
break: missing value where TRUE/FALSE needed>
Fitting of the distribution ' MBBEFD ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
g 3049.884628      NA
b   1.199278      NA
```

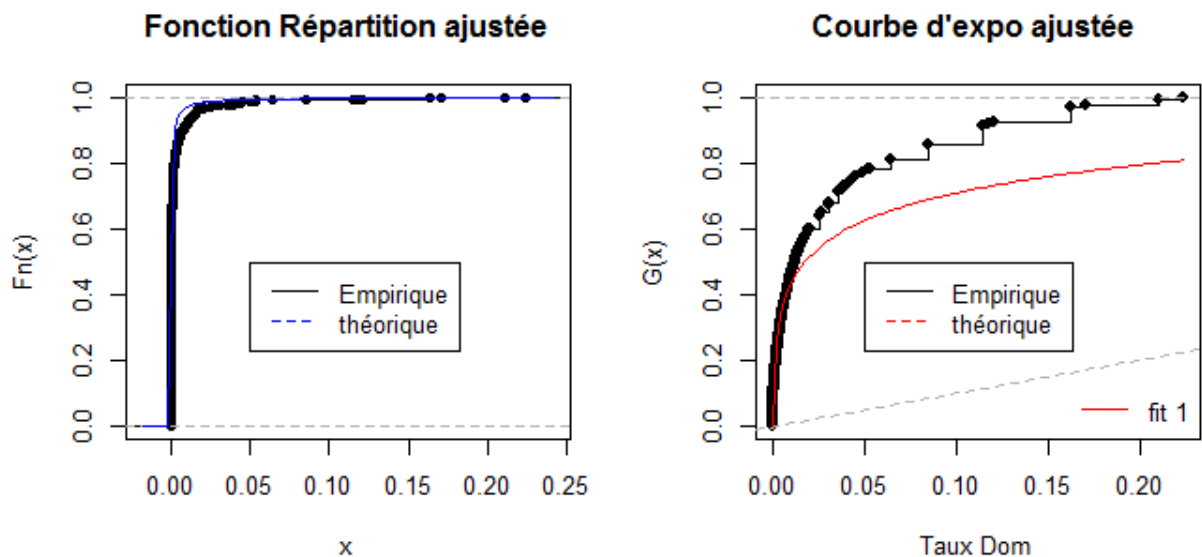


Figure 19: Méthode par exposition : Fonct. Repart. et Courbe d'expo ajustée

Graphiquement notre loi ne semble pas bien ajuster nos données empiriques. Constat qui sera confirmé à travers des tests statistiques.

```
> ad.test(TauxDom[,2], "pMBBEFD", estim.mbbefd$estimate[1], estim.mbbefd$estimate[2])
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pMBBEFD'
```

```
data: TauxDom[, 2]
An = 34.457, p-value = 6.104e-07
```

```
> ks.test(TauxDom[,2], pMBBEFD, estim.mbbefd$estimate[1], estim.mbbefd$estimate[2])
```

```
one-sample Kolmogorov-Smirnov test
```

```
data: TauxDom[, 2]
D = 0.094537, p-value = 4.679e-08
alternative hypothesis: two-sided
```

Le test de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling rejette l'adéquation du modèle au seuil 5%. Ce modèle ne peut donc ni être utilisé pour déterminer notre loi de fréquence ni être utilisé dans la simulation (sauf moyennant une transformation).

II.1. Mise en œuvre du modèle par exposition pure.

La réalisation de la modélisation par exposition suit une démarche assez différente du modèle par expérience. Le modèle par exposition n'exige pas une discrimination entre sinistres graves et sinistres attritionnels mais utilise plutôt le profil de risque de la compagnie. Ainsi pour produire notre modèle par exposition nous suivrons les étapes suivantes.

II.1.1 Etablir le profil de risque de la compagnie.

Le profil de risque est un tableau synthétique résumant le risque supporté par la compagnie. Il donne une image du risque qu'encourt l'entreprise résultant des affaires qu'elle a souscrites. Il est fondamental dans le sens qu'il constitue le point d'entrée de notre modélisation par exposition. Elle nécessite une segmentation de la somme assurée par tranche ou bande sous la base d'une homogénéité de profil de risque.

| Bandes de SA | Entre | Et | Total SMP | Nbre de Polices | Total Primes | Loss-Ratio de lg-terme |
|--------------|-------|----|-----------|-----------------|--------------|------------------------|
| 1 | 0 | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | - | - | - |

Tableau 5: Forme du tableau de profil de risque

Après avoir élaboré notre profil de risque viens maintenant l'étape du choix de la courbe d'exposition appropriée pour chaque bande.

1) Ajuster une courbe d'exposition

Comme input on aura besoin de réunir une grosse base de données sur le montant (x') des sinistres individuels et repartis par bande de somme assurée. Supposant l'homogénéité du profil de risque pour toutes les polices d'une bande, on prendra pour chaque risque de la bande la moyenne de la somme assurée de la bande (M_b) comme la somme assurée de celui-ci. Cette moyenne est calculée comme suit : $M_b = \frac{\text{Total SMP}}{\text{Nbre de Polices}}$. De là on peut ajuster à nos données de taux de destruction ($x = x'/M_b$) par bande une courbe d'exposition via la loi MBBEFD décrite auparavant et tout autre loi adéquate. A partir de la courbe d'exposition on peut en déduire la courbe de sévérité via $F_X(x) = F_{X'}(x'/M_b)$ et inversement.

Une fois la courbe d'exposition trouvée nous devons par la suite penser à ajuster une loi de fréquence, objet du paragraphe suivant.

2) Ajuster une loi de fréquence pour chaque bande.

Dans le modèle par exposition nous disposons de deux méthodes pour réaliser notre modèle de fréquence. Dans le modèle dit par « **exposition pure** » on procède comme suit :

Exposition pure :

- ✓ $\widehat{E}(S_b) = \widehat{E}(LR_b) * P_b$
- ✓ $\widehat{E}(S_b) = \widehat{E}(N_b) * E(X'_b) \rightarrow \widehat{E}(N_b) = \frac{\widehat{E}(S_b)}{E(X'_b)}$
- ✓ *On suppose que les nombres de sinistres suivent la loi de Poisson de paramètre $\widehat{E}(N_b)$. On pourrait aussi choisir la loi binomiale négative mais cela nécessiterait une connaissance sur la sur-dispersion des nombres de sinistres.*
 - $\widehat{E}(S_b)$, l'espérance de la charge de sinistre de la bande
 - $\widehat{E}(LR_b)$, le loss – ratio de long terme

En plus de la méthode par exposition pure il en existe une autre dite « **hybride** ». Elle possède la caractéristique d'être une combinaison de la méthode par exposition et par expérience. La fréquence est modélisée à partir des données d'expérience et la sévérité à partir des données d'exposition. Dans la méthode hybride on ajuste une loi de fréquence (Poisson, binomiale négative ou poisson mélange) à travers les nombres de sinistres annuels observés sur chaque. Ayant la loi de fréquence et de sévérité on peut passer à la détermination de la distribution des sinistres agrégés via un modèle dit « **Modèle collectif** ».

3). Etablir un modèle collectif via simulation Monte-Carlo.

A partir du modèle de fréquence et de sévérité que nous avons ajusté on peut construire un modèle de sinistralité agrégée par le biais de la simulation Monte-Carlo. Les étapes de cette simulation sont décrites ci-dessous.

Simulation Monte-Carlo :

- *Pour chaque simulation $k = 1, \dots, N$*
- *Effectuer un tirage aléatoire du nombre de sinistre par le biais de la loi de fréquence retenue pour la bande $N_b^{(k)}$.*
- *Pour chaque $N_b^{(k)}$ tiré, effectuer une seconde fois un tirage aléatoire du montant du sinistre individuel sur la courbe d'exposition $X_{b,1}^{(k)}, \dots, X_{b,N_b^{(k)}}^{(k)}$.*
- *Sommer les charges de sinistres générées de façon aléatoire au travers de la simulation sur toutes les bandes.*
- *Trier par ordre croissant les charges de sinistres obtenues afin d'avoir une distribution empirique de la sinistralité.*
- *Elaborer le tableau des centiles de la distribution empirique obtenue.*
- *Calculer la moyenne, la variance, la VaR, la TVaR et le coefficient de variation de la distribution empirique obtenue.*

NB : Le choix du nombre de simulation est crucial pour obtenir des résultats probants. On utilise très souvent les critères d'arrêt suivant :

- La convergence de la moyenne de la simulation vers la moyenne théorique est considérée comme critère d'arrêt.
- On considère aussi comme critère d'arrêt la stabilité du quantile à 99.5%.

| Simulations | Bandes | Nbre de Sin | Sinistre 1 | Sinistre 2 | | Charge brute |
|--------------|---------|-------------|------------|------------|-------|--------------|
| Simulation 1 | Bande 1 | - | - | - | - | - |
| | Bande 2 | - | - | - | - | - |
| | . | - | - | - | - | - |
| | bande h | - | - | - | - | - |
| | Somme | - | - | - | - | - |
| . | . | | | | | |
| . | . | | | | | |
| . | . | | | | | |
| Simulation N | Bande 1 | - | - | - | - | - |
| | Bande 2 | - | - | - | - | - |
| | . | - | - | - | - | - |
| | bande h | - | - | - | - | - |
| | Somme | - | - | - | - | - |

Tableau 6: Forme du tableau de simulation des sinistres individuels

Le tableau de la distribution empirique de la sinistralité se présente de la manière suivante :

| Percentile | 1 en n années (Période de retour) | Charge brute cumulée |
|-------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| 0,001 | 1000 | - |
| 0,02 | 50 | - |
| . | - | - |
| . | - | - |
| . | - | - |
| 0,995 | 200 | - |
| 0,999 | 1000 | - |
| Espérance | | - |
| Ecart-type | | - |
| Coef de Variation | | - |
| VaR | | - |
| TVaR | | - |

Tableau 7: Forme du tableau de distribution empirique des Sinistres

Interprétation : Ce tableau s'interprète comme suit. Par exemple pour le percentile 2%, on dira qu'il y a une probabilité de 2% que la charge de sinistre de l'année prochaine soit inférieure ou égale à la charge correspondante à ce percentile. Ce qui est l'équivalent d'un sinistre dans le même intervalle tous les 50 ans.

II. Loi de fréquence

Dans cette section nous devons déterminer une loi de fréquence pour chaque bande de somme assurée. Pour cela nous avons besoin de faire des hypothèses sur le loss-ratio de long terme, sur les primes (prévisionnelles) de 2017 ainsi que sur la loi de fréquence à choisir. On suppose donc :

- Le loss-ratio de long terme (moyenne observée sur les années antérieures) est de 0.6 pour toutes les bandes.
- La distribution du nombre de sinistre est une loi de Poisson. Le paramètre de cette loi est déterminé via la formule $\hat{E}(N_b) = \frac{\hat{E}(S_b)}{E(X_b)}$ (comme expliqué dans la partie théorique).

Le modèle ayant été rejeté nous utilisons la moyenne empirique plutôt que la moyenne théorique des taux de destruction pour en déduire notre loi de fréquence.

La moyenne empirique des taux de dommage est donnée par :

```
> mean(TauxDom[,2])
[1] 0.003745099
```

Un tableau synthétisant les résultats de la fréquence est présenté ci-dessous.

| Bandes de SMP | Primes estimées 2017 | Loss Ratio | $\hat{E}(S_b)$ | SMP moyen | $\hat{E}(X_b)$ | $\hat{E}(X'_b)$ | $\hat{E}(N_b)$ |
|---------------|----------------------|------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| 1 | 120 557 610 | 60% | 72 334 566 | 137 757 326 | 0,375% | 516 590 | 140,02 |
| 2 | 128 515 886 | 60% | 77 109 532 | 333 430 019 | 0,375% | 1 250 363 | 61,67 |
| 3 | 101 508 336 | 60% | 60 905 002 | 576 325 757 | 0,375% | 2 161 222 | 28,18 |
| 4 | 79 665 435 | 60% | 47 799 261 | 811 575 965 | 0,375% | 3 043 410 | 15,71 |
| 5 | 117 938 856 | 60% | 70 763 314 | 1 105 621 824 | 0,375% | 4 146 082 | 17,07 |
| 6 | 169 186 134 | 60% | 101 511 680 | 1 519 688 270 | 0,375% | 5 698 831 | 17,81 |
| 7 | 152 286 873 | 60% | 91 372 124 | 2 004 630 285 | 0,375% | 7 517 364 | 12,15 |
| 8 | 78 016 369 | 60% | 46 809 821 | 2 429 029 364 | 0,375% | 9 108 860 | 5,14 |
| 9 | 126 555 496 | 60% | 75 933 298 | 2 767 072 697 | 0,375% | 10 376 523 | 7,32 |
| 10 | 96 041 771 | 60% | 57 625 063 | 3 349 886 755 | 0,375% | 12 562 075 | 4,59 |
| 11 | 87 300 466 | 60% | 52 380 279 | 3 899 434 812 | 0,375% | 14 622 881 | 3,58 |
| 12 | 120 583 843 | 60% | 72 350 306 | 4 311 982 281 | 0,375% | 16 169 934 | 4,47 |
| 13 | 78 424 395 | 60% | 47 054 637 | 4 965 465 446 | 0,375% | 18 620 495 | 2,53 |
| 14 | 104 052 735 | 60% | 62 431 641 | 5 576 283 419 | 0,375% | 20 911 063 | 2,99 |
| 15 | 314 271 663 | 60% | 188 562 998 | 6 929 922 759 | 0,375% | 25 987 210 | 7,26 |
| 16 | 147 855 086 | 60% | 88 713 051 | 7 572 618 938 | 0,375% | 28 397 321 | 3,12 |
| 17 | 54 899 941 | 60% | 32 939 964 | 8 962 486 661 | 0,375% | 33 609 325 | 0,98 |
| 18 | 34 539 970 | 60% | 20 723 982 | 9 878 306 135 | 0,375% | 37 043 648 | 0,56 |
| 19 | 40 454 256 | 60% | 24 272 553 | 11 200 000 000 | 0,375% | 42 000 000 | 0,58 |
| 20 | 35 975 999 | 60% | 21 585 600 | 12 600 000 000 | 0,375% | 47 250 000 | 0,46 |
| 21 | 77 255 956 | 60% | 46 353 573 | 14 000 000 000 | 0,375% | 52 500 000 | 0,88 |

Tableau 8: Modèle par exposition pure : Synthèse de la fréquence

La dernière colonne nous fournit le paramètre lambda de la loi de poisson pour chaque bande de somme assurée.

CHAPITRE III : Résultats du modèle

I. Modification de la courbe d'exposition pour les besoins de la simulation

Les courbes d'expositions théoriques ont souvent du mal à ajuster parfaitement les données empiriques surtout au niveau de la queue de distribution, tel est notre cas. Dans de telles situations une transformation de cette courbe est souvent indéniable afin qu'elle puisse être utilisée dans la simulation. Pour ce faire nous suivons les étapes suivantes :

- Identification du point de rupture ou de troncature (point de déviance entre la courbe théorique et celle empirique). Sur notre courbe nous l'identifions au point $x = 1,8\%$.
- Estimation d'une seconde courbe d'exposition pour les taux de dommage au-delà du point de troncature.
- Mixer les deux courbes d'expositions pour en obtenir une définie par morceaux. Sa fonction de répartition sera définie comme suit :

$$F = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x \leq 0,018 \text{ avec } p = F_1(0,018) \\ F_2(x) & \text{si } x > 0,018 \text{ avec } p = 1 - F_2(0,018) \end{cases}$$

- F_1 la fonction de répartition initialement ajustée. Elle est tronquée à droite au point $x = 1,8\%$.
- F_2 la fonction de répartition deuxièmement ajustée. Elle est tronquée à gauche au point $x = 1,8\%$.

Les paramètres estimés pour la courbe d'exposition au-delà du point de troncature sont consignés ci-dessus.

```
> fitDR(subset(TauxDom[,2],TauxDom[,2]>=0.018),"MBBEFD",
method = "mle")
Fitting of the distribution ' MBBEFD ' by maximum likeli
hood
Parameters:
      estimate Std. Error
g 7.919650e+09          NA
b 5.842371e-11          NA
```

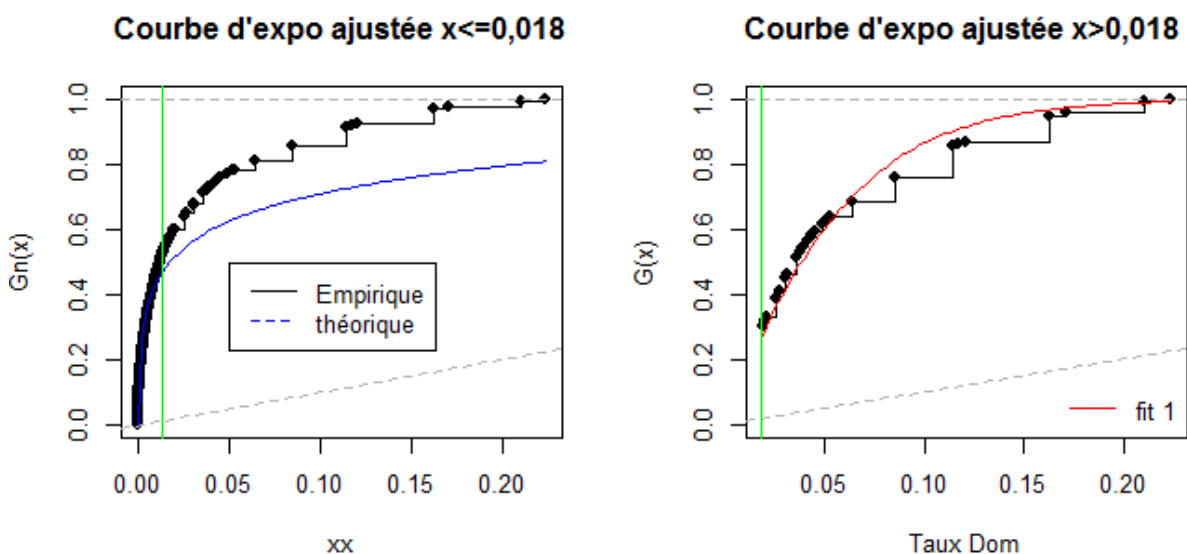


Figure 20: Méthode par exposition : Courbe d'exposition tronquée

Graphique la courbe théorique paraît bien ajuster celle empirique au-delà du point de troncature. Vérifions-le à travers un test statistique.

```
> ad.test(subset(TauxDom[,2],TauxDom[,2]>=0.018),"pMBBEFD",
,estim.mbbefd.trunc$estimate[1],estim.mbbefd.trunc$estimate[2])
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pMBBEFD'
```

```
data: subset(TauxDom[, 2], TauxDom[, 2] >= 0.018)
An = 1.9281, p-value = 0.101
```

Le test d'Anderson-Darling confirme nos impressions. Cette courbe sera donc retenue pour modéliser nos taux de destruction au-dessus de 1,8%.

II. Résultats

Avant de présenter les résultats nous choisissons de définir tout d'abord certaines mesures de risque plus particulièrement les quantiles extrêmes.

➤ Estimation des quantiles extrêmes.

✚ La Value-at-Risk (VaR)

Le quantile d'ordre $p \in]0,1[$ correspondant à la Value-at-Risk - associé à X , de fonction de répartition F_X , se définit par :

$$VaR(X, p) = x_p = F_p^{-1}(p) = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geq p\}$$

On parle plutôt de période de retour que nous avons déjà évoqué.

✚ La Tail-Value-at-Risk (TVaR)

Parmi les autres mesures pertinentes (et intéressantes en réassurance), on retiendra la TVaR correspondant à la valeur moyenne sachant que la VaR a été dépassée,

$$TVaR(X, p) = E(X | X > VaR(X, p))$$

La simulation se fait via l'approche fréquence-sévérité. Ayant donc la loi de fréquence et celle de la sévérité, l'implémentation de ladite simulation en devient triviale. On suit les étapes indiquées dans la partie théorique consacrée à cet effet. Les résultats de la charge brute sont consignés dans le tableau suivant.

| Percentiles | Période de Retour | BRUT | Percentiles | Période de Retour | BRUT |
|-------------|-------------------|---------------|-------------------------------|-------------------|----------------|
| 0,10% | 1000 | 446 040 756 | 80,00% | 5 | 1 900 440 842 |
| 0,50% | 200 | 505 369 841 | 85,00% | 7 | 2 219 365 191 |
| 1,00% | 100 | 539 725 628 | 90,00% | 10 | 2 761 647 965 |
| 1,50% | 67 | 562 148 088 | 95,00% | 20 | 3 947 100 471 |
| 2,00% | 50 | 575 275 799 | 98,00% | 50 | 6 122 744 656 |
| 5,00% | 20 | 640 321 742 | 99,00% | 100 | 8 248 919 318 |
| 10,00% | 10 | 712 238 502 | 99,50% | 200 | 10 957 345 760 |
| 15,00% | 7 | 770 568 884 | 99,90% | 1000 | 15 645 198 414 |
| 20,00% | 5 | 822 831 483 | Moyenne de la Simulation | | 1 586 649 403 |
| 25,00% | 4 | 874 946 134 | Ecart type de la Simulation | | 1 486 059 814 |
| 30,00% | 3 | 922 057 223 | Coefficient de variation(CoV) | | 94% |
| 50,00% | 2 | 1 149 387 726 | VaR à 95% | | 3 947 100 471 |
| 70,00% | 3 | 1 516 795 731 | TVaR à 95% | | 6 651 130 342 |
| 75,00% | 4 | 1 672 777 672 | VaR à 99,5% | | 10 957 345 760 |
| 77,00% | 4 | 1 748 040 200 | TVaR à 99,5% | | 13 820 586 088 |

Tableau 9: Méthode par exposition pure : Quantiles de la Charge brute

➤ **Interprétations et comparaisons**

- *Le tableau ci-dessus donne la distribution de la charge brute de sinistres c'est-à-dire avant cession à la Captive SahamRe.*
- *La moyenne de la simulation est de 1,59milliards, différent mais proche des 1,459milliards du résultat trouvé par la méthode par expérience. Cela qui correspond à un loss-ratio de 64%.*
- *La différence majeure dans la distribution empirique donnée par les deux méthodes qu'il convient de noter est observée dans la partie basse de ladite distribution (jusqu'au percentile 80% les deux distributions semble sensiblement équivalente puis devient divergentes).*
- *La méthode par expérience nous donne un coefficient de variation, une VaR à 95% et une VaR à 99,5% respectivement de 49%, 2,85milliards et 4,15milliards pendant que la méthode par exposition nous donne respectivement 94%, 3,947milliards et 10,957milliards.*
- *De telles différences étaient à priori attendues car la méthode par exposition en introduisant de nouvelles notions telles que la somme assurée et le sinistre maximum possible prend en compte les changements dans l'exposition de la compagnie, notions que la méthode par expérience éprouve des difficultés à capter.*
- *La méthode par exposition nous informe que nous somme beaucoup plus exposé à de grandes variabilités et à de gros montants de sinistres que le veut nous laisser croire le modèle par expérience.*

Le plus du modèle par exposition est qu'elle nous permet de pouvoir appliquer les paramètres des traités en Réassurance et de partager ainsi la charge brute de sinistres entre la cédante et la captive. Cela se fait comme suit :

➤ **Partage de la sinistralité entre cédante et Captive**

- ✓ *Ayant à notre disposition la charge individuelle brute de sinistre nous lui appliquons un taux de cession en EDP (Calculer via les paramètres de l'EDP et ainsi que le SMP moyen de la bande) pour obtenir la charge net de l'EDP (Rétention après cession en EDP).*
- ✓ *A cette charge nette en EDP à lui applique une cession en XS pour obtenir la charge nette retenue par la cédante (Rétention de la filiale).*
- ✓ *La différence entre la charge brute et la charge retenue par la filiale est rien d'autre que la charge cédée à la captive SahamRé.*

| Percentiles | Période de Retour | BRUT | Rétention de la filiale | Cédée à SahamRe |
|-------------------------------|-------------------|----------------|-------------------------|-----------------|
| 0,10% | 1000 | 446 040 756 | 230 375 553 | 166 727 858 |
| 0,50% | 200 | 505 369 841 | 256 137 089 | 204 127 563 |
| 1,00% | 100 | 539 725 628 | 269 098 927 | 221 335 342 |
| 1,50% | 67 | 562 148 088 | 278 782 206 | 234 880 033 |
| 2,00% | 50 | 575 275 799 | 287 013 347 | 243 881 626 |
| 5,00% | 20 | 640 321 742 | 315 400 866 | 279 421 451 |
| 10,00% | 10 | 712 238 502 | 347 022 987 | 322 768 400 |
| 15,00% | 7 | 770 568 884 | 371 910 662 | 360 961 684 |
| 20,00% | 5 | 822 831 483 | 395 666 364 | 392 138 828 |
| 25,00% | 4 | 874 946 134 | 418 066 565 | 421 686 211 |
| 30,00% | 3 | 922 057 223 | 439 747 476 | 455 537 850 |
| 50,00% | 2 | 1 149 387 726 | 527 370 169 | 606 621 712 |
| 70,00% | 3 | 1 516 795 731 | 625 421 052 | 898 090 737 |
| 75,00% | 4 | 1 672 777 672 | 655 531 160 | 1 031 466 602 |
| 77,00% | 4 | 1 748 040 200 | 669 976 595 | 1 090 572 391 |
| 80,00% | 5 | 1 900 440 842 | 692 888 117 | 1 211 164 081 |
| 85,00% | 7 | 2 219 365 191 | 736 318 926 | 1 524 743 350 |
| 90,00% | 10 | 2 761 647 965 | 793 366 255 | 2 009 069 716 |
| 95,00% | 20 | 3 947 100 471 | 887 344 708 | 3 180 874 946 |
| 98,00% | 50 | 6 122 744 656 | 982 703 914 | 5 360 580 722 |
| 99,00% | 100 | 8 248 919 318 | 1 048 044 551 | 7 537 162 962 |
| 99,50% | 200 | 10 957 345 760 | 1 109 220 929 | 10 324 468 313 |
| 99,90% | 1000 | 15 645 198 414 | 1 241 896 993 | 14 687 475 126 |
| Moyenne de la Simulation | | 1 586 649 403 | 552 045 288 | 1 034 604 116 |
| Ecart type de la Simulation | | 1 486 059 814 | 176 020 236 | 1 401 396 031 |
| Coefficient de variation(CoV) | | 94% | 32% | 135% |
| VaR à 95% | | 3 947 100 471 | 887 344 708 | 3 180 874 946 |
| TVaR à 95% | | 6 651 130 342 | 985 764 226 | 5 879 983 157 |
| VaR à 99,5% | | 10 957 345 760 | 1 109 220 929 | 10 324 468 313 |

Tableau 10: Méthode par exposition pure : Quantiles de la charge brute partagée**➤ Interprétations**

- *Le tableau précédent donne la répartition de la charge de sinistres entre la filiale et la captive.*
- *A partir de ces résultats on peut dégager le principe fondateur même de la réassurance, qui permet à la cédante de réduire son besoin en capital, d'homogénéiser son résultat et du même coût d'augmenter sa capacité de souscription.*
- *La volatilité de la sinistralité mesurée par l'écart-type est de 176millions (32% de CoV) pour la cédante alors qu'elle est de 1,4milliards (135% de CoV) pour la captive. Cela représente une baisse en CoV de 62%.*
- *La réassurance permet à la filiale de faire passer sa VaR à 95% (respectivement sa TVaR à 95%) d'un peu moins de 4milliards (de 6,65milliards) à un peu moins de 1milliards (respectivement un peu moins de 1milliards) et d'en céder un peu plus de 3milliards (respectivement un peu moins de 6milliards).*

A partir de la charge individuelle brute de sinistres on peut en déduire le nombre de sinistres graves ou majeurs simulé par la méthode par exposition ainsi que leurs coûts et ce à des fins de comparaisons avec la méthode par expérience.

| Percentiles | Période de Retour | Nombre de graves simulé | Charge grave simulée | Charge attritionnelle simulée |
|-------------|-------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 0,10% | 1000 | - | - | 357 770 320 |
| 0,50% | 200 | - | - | 391 218 435 |
| 1,00% | 100 | - | - | 407 039 874 |
| 1,50% | 67 | - | - | 418 152 981 |
| 2,00% | 50 | - | - | 424 340 894 |
| 5,00% | 20 | 1 | 71 690 001 | 453 175 004 |
| 10,00% | 10 | 1 | 137 860 354 | 479 959 908 |
| 15,00% | 7 | 2 | 190 158 098 | 498 160 991 |
| 20,00% | 5 | 2 | 236 456 824 | 513 706 914 |
| 25,00% | 4 | 2 | 280 613 425 | 527 522 107 |
| 30,00% | 3 | 3 | 329 813 722 | 539 567 663 |
| 50,00% | 2 | 4 | 556 413 272 | 584 957 914 |
| 70,00% | 3 | 5 | 926 009 894 | 631 072 554 |
| 75,00% | 4 | 5 | 1 080 458 430 | 644 486 606 |
| 77,00% | 4 | 5 | 1 161 544 228 | 650 369 874 |
| 80,00% | 5 | 5 | 1 303 401 458 | 659 349 946 |
| 85,00% | 7 | 6 | 1 626 138 151 | 677 955 293 |
| 90,00% | 10 | 6 | 2 187 004 583 | 700 503 313 |
| 95,00% | 20 | 7 | 3 335 478 822 | 736 658 157 |

| | | | | |
|-------------------------------|------|-----|----------------|-------------|
| 98,00% | 50 | 8 | 5 508 194 791 | 780 375 771 |
| 99,00% | 100 | 9 | 7 617 353 220 | 808 396 657 |
| 99,50% | 200 | 9 | 10 420 225 312 | 832 572 730 |
| 99,90% | 1000 | 11 | 14 930 694 573 | 895 385 624 |
| Moyenne de la Simulation | | 4 | 998 281 076 | 588 368 327 |
| Ecart type de la Simulation | | 2 | 1 483 374 584 | 86 734 333 |
| Coefficient de variation(CoV) | | 52% | 149% | 15% |
| VaR à 95% | | 7 | 3 335 478 822 | 736 658 157 |
| TVaR à 95% | | 9 | 6 061 517 398 | 781 783 947 |
| VaR à 99,5% | | 9 | 10 420 225 312 | 832 572 730 |
| TVaR à 99,5% | | 11 | 13 222 367 717 | 877 781 298 |

Tableau 11: Méthode par exposition pure : Quantiles de l'attritionnel et des graves simulées

➤ **Interprétations et comparaisons**

- *La méthode par exposition présente l'avantage de ne pas exiger une modélisation séparée entre l'attritionnel et les graves comme sera le cas dans la méthode par expérience. Elle permet de capter simultanément les deux notions.*
- *Le tableau précédent nous informe que la probabilité d'avoir 0 sinistre majeur est de 0,02 ; l'équivalent en période de retour de 1 sur 50 ans.*
- *Le nombre annuel moyen de sinistres majeurs simulé par la méthode est de 4.*
- *Le nombre maximum de sinistre majeur auquel on peut s'attendre pour une année donnée est d'environ 11 (VaR à 99,9%).*
- *La moyenne de la sinistralité attritionnelle est de 588millions La distribution de l'attritionnel des deux modèles est proche, la différence frappante à observer se situe dans la distribution de la sinistralité grave.*

A côté des deux méthodes précitées se trouve une troisième dite hybride qui regroupe les deux méthodes. Tel sera l'objet du prochain paragraphe.

PARTIE II. METHODE PAR EXPERINCE

CHAPITRE I. Mise en œuvre du modèle par expérience.

La modélisation par expérience nécessite une séparation entre sinistres attritionnels et sinistres graves.

I. Modélisation de la sinistralité attritionnelle.

Les sinistres attritionnels se caractérisent par le fait qu'ils ne sont pas coûteux, c'est-à-dire que leur montant n'est pas élevé mais ils sont très fréquents. De ce fait la modélisation de ce type de sinistre dans le cadre de la réassurance n'utilise pas la modélisation fréquence-sévérité. L'approximation normale, l'approximation de Wilson-Hilferty et l'approche par fréquence/cout-moyen sont les techniques de modélisation de la sinistralité attritionnelle les plus largement répandues. Nous choisissons de présenter ici les méthodes de l'approximation normale et l'approche fréquence/cout-moyen. Mais pour des raisons qui seront évoquées ultérieurement l'approche fréquence/cout-moyen sera notre meilleur candidat.

I.1 L'approximation normale

Un théorème important dans cette approche est le théorème central limite :

Théorème central limite :

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées de variance σ^2 et d'espérance μ . On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$$

L'idée de l'approximation normale est de rapprocher :

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = \tilde{Z} + \frac{\beta_s}{6} (\tilde{Z}^2 - 1)$$

Où \tilde{Z} est une variable aléatoire qui suit une loi normale et β_s est le coefficient de Skeewness de S .

En pratique cela consiste à ajuster la charge de la sinistralité annuelle totale par la loi normale ou plus encore la loi log normale (pour éviter la négativité des résultats obtenus). Cette approche nous évite de passer par des méthodes de simulations des sinistres individuels très coûteux en temps et ce pour des résultats proches.

I.2. L'approche Fréquence/Cout moyen.

L'approche fréquence-coût moyen se fait à partir des triangles des nombres de sinistres sous le seuil et du triangle des coûts moyens. Le Coût moyen (\bar{X}_{attr}) est modélisé comme suit :

- ✓ *On divise le triangle des règlements (corrigé de l'inflation/ICC) par le triangle des nombres de sinistres (Bien évidemment, triangle des nombres de sinistres avant retraitement par l'exposition) et on obtient le triangle des coûts moyens.*
- ✓ *Ce triangle de coût moyen est ensuite projeté à l'ultime au travers d'une méthode approprié (ChainLadder par-exemple).*
- ✓ *Ces coûts moyens annuels ultimes obtenus sont par la suite ajustés via une*

Après avoir modélisé le Coût moyen vient maintenant la modélisation de la fréquence (N_{attr}) des sinistres attritionnels. La procédure suivante sera suivit :

- ✓ *Projeter le triangle des nombres de sinistres attritionnels à l'ultime.*
- ✓ *Corriger les nombres ultimes annuels (par année de survenance) obtenus par une mesure d'exposition.*
- ✓ *Ajuster une loi discrète adéquate (Poisson, Binomiale négative ou poisson mélange) aux nombres de sinistres corrigés de l'exposition.*

La charge attritionnelle annuelle ($S_{attr} = N_{attr} * \bar{X}_{attr}$) de sinistres obtenue pour une simulation de la fréquence de \bar{n}_{attr} et du coût moyen de \bar{x}_{attr} est donnée donc par : $\bar{s}_{attr} = \bar{n}_{attr} * \bar{x}_{attr}$.

Dans notre étude nous avons fait le choix de modéliser l'attritionnel par l'approche fréquence-coût moyen car elle permet une certaine flexibilité dans les choix des techniques d'agrégation des sinistres attritionnels et graves. Ces différentes techniques seront explicitées plus tard.

II. Modélisation de la sinistralité grave.

La modélisation de la sinistralité grave ($S_{grav} = \sum_{i=1}^{N_{grav}} X_i^{Grav}$) se fait sinistre par sinistre à travers l'approche fréquence-Sévérité et par le biais une méthode de simulation appropriée. Les étapes suivantes devront de ce fait être suivies :

- *Projeter le nombre de sinistres graves à l'ultime et corriger à travers l'exposition*
- *Ajuster la distribution obtenue par une loi de fréquence adéquate.*
- *Corriger le montant des sinistres graves par l'inflation (ICC) et ajuster via la loi GPD ou bien via des lois tronquées appropriées.*
- *Simuler une réalisation de fréquence n_{grav} et pour chaque i de 1 à n_{grav} générer x_i le montant de la charge du sinistre grave i selon la loi retenue.*
- *Le scénario de charge annuelle grave est donné par ($S_{grav} = \sum_{i=1}^{n_{grav}} x_i^{Grav}$).*

Maintenant que nous disposons des techniques de modélisation de la sinistralité grave et attritionnelle la question qui se pose désormais est de savoir comment agréger ces deux types de sinistres afin d'obtenir un scénario de charge annuelle brute (Sinistres attritionnels + sinistres graves). On consacrera le prochain paragraphe à traiter ce sujet.

III. Agrégation sinistres graves/sinistres attritionnels.

La modélisation par expérience que nous avons retenue pour modéliser la sinistralité brute de la branche incendie sur une période est la suivante : $S = S_{attr} + S_{grav} = N_{attr} * \bar{X}_{attr} + \sum_{i=1}^{N_{grav}} X_i^{Grav}$. Où N_{attr} et \bar{X}_{attr} représentent le nombre et le coût moyen des sinistres en dessous du seuil, les X_i^{Grav} sont les coûts individuels des N_{grav} sinistres au-dessus du seuil. La problématique est ici d'obtenir la charge totale agrégée S grâce à des simulations. Il faut alors étudier les sources possibles de dépendance entre ces deux sinistralités.

Une analyse qualitative des sources de dépendance est fondamentale. A priori, les nombres de sinistre sont dépendants. On peut facilement concevoir que pendant une année de forte sinistralité, c'est-à-dire avec un nombre total de sinistres élevé, à la fois le nombre de sinistres attritionnels et graves augmentent. De la même manière, pendant une année de faible sinistralité, les deux nombres seront moins élevés que d'habitude.

L'hypothèse retenue est donc de modéliser la dépendance uniquement sur les nombres.

Les modèles possibles sont les suivants :

- indépendance ;
- dépendance totale positive sur les nombres ;
- dépendance modélisée par une copule gaussienne de dimension 2.

Pour agréger S en cas de dépendance totale positive, l'approche est de trier les réalisations de N_{attr} et de N_{grav} par ordre croissant et d'additionner les sinistralités attritionnelles et graves correspondantes. On simule les scénarios des deux sinistralités de manière indépendante. Puis on ordonne les scénarios des deux sinistralités en fonction du nombre de sinistres et on somme les charges correspondantes :

$$scénario_total^i = scénario_attritionnel_{i,n}^i + scénario_grave_{i,n}^i$$

En cas d'hypothèse d'indépendance l'agrégation se fera ligne à ligne sans trier les résultats étant donné que chaque réalisation simulée est indépendante. On simule les scénarios des deux sinistralités de manière indépendante, puis on somme les charges de chaque scénario ligne à ligne afin d'obtenir la charge totale :

$$scénario_total^i = scénario_attritionnel^i + scénario_grave^i.$$

La dépendance peut être modélisée par une copule gaussienne. Nous donnerons ici la définition d'une copule et d'une copule gaussienne de dimension 2.

Copule de dimension 2 :

Une copule de dimension 2 est la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire (U_1, U_2) dans lequel U_1 et U_2 sont de lois uniformes sur $[0,1]$.

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

Copule de Gauss de dimension 2 :

C'est la copule d'un vecteur gaussien de dimension 2 de matrice de variance-covariance Σ .

$$C(u_1, u_2) = P[F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2]$$

- $(X_1, X_2) \rightarrow N(0, \Sigma)$
- F_i la fonction de répartition de la loi Σ_{ii}

On rappelle ici le coefficient de corrélation de Pearson :

Coefficient de corrélation linéaire - ρ de Pearson :

Pour deux variables aléatoires X_1 et X_2 dont les variances existent, le coefficient de corrélation linéaire est défini par :

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}\sqrt{\text{Var}(X_2)}}$$

Dans la littérature, le coefficient de corrélation linéaire de Pearson n'est pas une mesure de dépendance car ne vérifie pas certaines propriétés d'une mesure de dépendance. Néanmoins il présente un certain intérêt car, en l'absence d'historique important sur les données, il sera utilisé pour estimer le paramètre de la copule normale.

Pour agréger S lorsque la dépendance entre les nombres est modélisée par une copule gaussienne de dimension 2, il faut d'abord simuler la réalisation de vecteurs aléatoires de dimension 2 de fonction de répartition normale et de lois marginales uniformes sur $[0,1]$. Pour obtenir les réalisations (N_{attr}, N_{grav}) , il faut inverser (u_1, u_2) grâce aux fonctions quantiles des lois de fréquence.

Méthode :

- Choix du paramètre de la copule gaussienne δ . Par exemple $\hat{\delta} = \hat{\rho}(N_{attr}, N_{grav})$.
- Simulation de (u_1, u_2) de marginales uniformes sur $[0,1]$ et de copule gaussienne de paramètre $\hat{\delta}$.
- $(N_{attr}, N_{grav}) = (F_{attr}^{-1}(u_1), F_{grav}^{-1}(u_2))$

Chapitre II : Modélisation de la Fréquence des Sinistres

I. Ajustement des données pour la modélisation de la fréquence

Nous nous concentrons en premier lieu sur la modélisation de la fréquence. Parce que produire un modèle de fréquence nécessite de calculer les caractéristiques de la distribution de fréquence telles que la moyenne et la variance, nous avons besoin de connaître le nombre de sinistres à l'ultime pour chaque année. Cependant, la seule information que nous avons est le nombre de sinistres déclaré pour toute année spécifique. Pour passer du nombre de sinistres déclaré au nombre de sinistres ultime nous avons besoin d'estimer le nombre de sinistres survenu mais non encore déclaré dit classiquement IBNR (Incurred But Not (Yet) Reported). L'objectif de cette section est de montrer comment y arriver.

I.1. Input pour l'ajustement IBNR

Pour l'ajustement IBNR nous aurons besoin des données suivantes. Nous avons besoin de l'information sur les sinistres individuels et pour chaque sinistre nous avons besoin au moins :

- ✚ La date de survenance du sinistre
- ✚ La date de déclaration
- ✚ La date de quantification (date à laquelle un montant non-nul a été rattaché à un sinistre)
- ✚ La date à laquelle le sinistre a été remis à zéro (point de disparition du sinistre)

En pratique il se peut que nous ne puissions pas avoir toutes les informations précitées. Il est très fréquent que si nous disposons de l'information sur les sinistres individuels, nous pourrions avoir seulement une capture de l'information et seulement les dates de base en occurrence la date de survenance et la date de déclaration. Dans tels cas nous nous voyons obligé de faire quelques hypothèses sur les deux dernières dates nécessaires à notre modélisation.

Alternativement il se peut que nous disposions d'un triangle du nombre de réclamations. Cela est bien évidemment une information synthétique et donc sans information complète sur les sinistres individuels mais a l'avantage de prendre automatiquement en compte le problème des sinistres non-nuls.

Il peut arriver aussi que nous n'ayons pas assez d'information pour porter un avis sur les retards (entre déclaration et année de survenance) ; par exemple parce que la date de déclaration ou de survenance nous manque. Dans tels cas nous aurions besoin d'informations externes pour estimer les niveaux d'IBNR. Dans notre cas nous disposons de la date de survenance et de déclaration du sinistre.

I.2. Méthode des triangles de développement pour l'estimation des IBNRs

La méthode la plus commune pour l'estimation du nombre de sinistres IBNR est basée sur le développement des triangles du nombre de sinistres par Chain-Ladder ou autres techniques de développement de triangle pour projeter le nombre de sinistres à l'ultime. Les principales hypothèses à faire dans cette projection sont :

- a. Toutes les années se développent globalement de la même manière (ainsi nous pourrions appliquer les facteurs de développement passé aux années actuellement incomplètes)
- b. Il n'y a pas davantage de développement pour les premières années (ainsi nous n'aurions pas à nous inquiéter à propos des développements après un certain nombre d'années.)

La deuxième hypothèse peut être facilement levée à travers l'inclusion d'un tail factor dans le modèle.

Pour appliquer cette méthode (Chain-Ladder), la première des choses à faire est d'organiser le nombre de sinistres dans un triangle dit « Triangle du nombre de sinistres ». Ensuite pour projeter le nombre de sinistres à l'ultime par Chain-Ladder il faut cumuler ledit triangle.

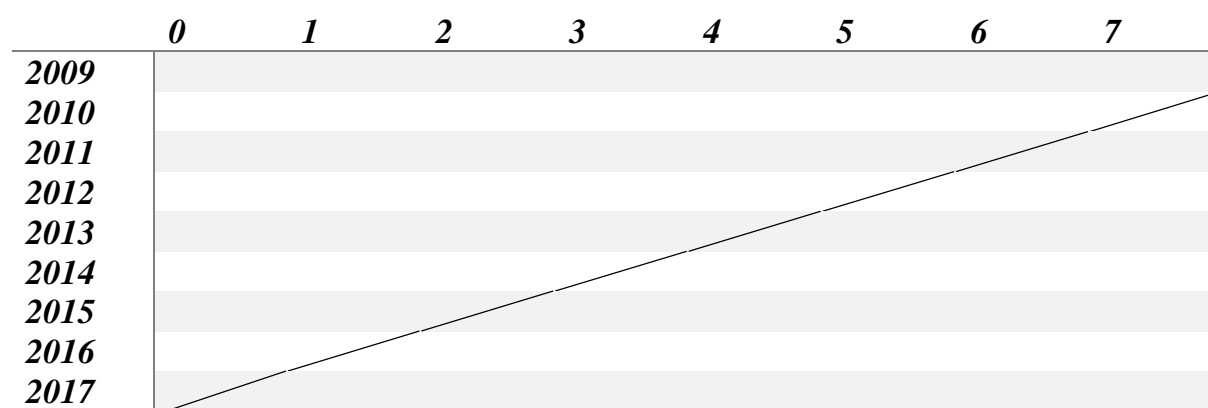
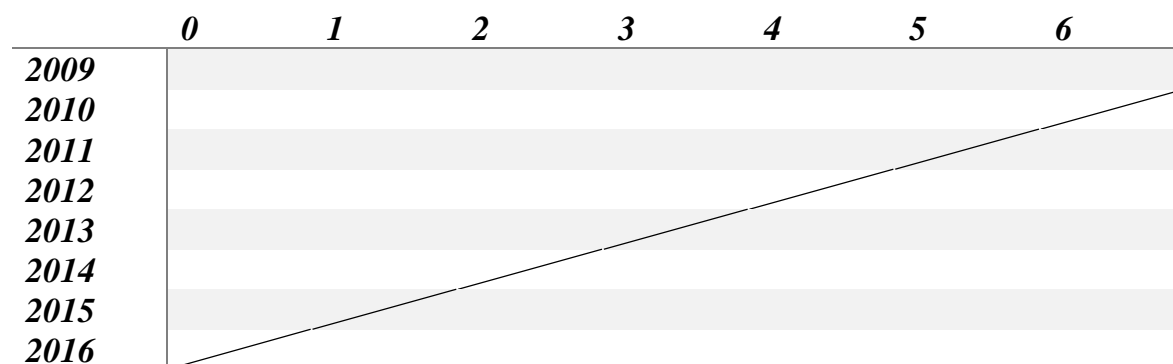


Figure 21 : Forme du « Triangle de développement du nombre de sinistres »

Dans ce triangle chaque ligne représente une année comptable et chaque colonne représente le temps de retards en années entre la date de survenance et la date de réclamation.

Avant de pouvoir appliquer Chain-Ladder nous observons un léger souci. Le nombre de sinistres pour l'année 2017 (dernière diagonale) est incomplet (Nous aurons que les 3 premiers mois). On est capable de venir à bout de ce problème à travers plusieurs méthodes :

- ✚ **Méthode 1 :** Ignorer la dernière diagonale et appliquer la méthode de Chain-Ladder aux années complètes seulement. Le triangle se présentera comme suit :



- ✚ **Méthode 2 :** Grossir le nombre de sinistres de la dernière diagonale par $12(\text{Nombre total de mois dans l'année})$ sur $3(\text{Nombre de mois disponible}) = 4$. Cela est bien léger comme approche mais peut être sujet à amélioration si nous disposons de plus d'information sur la distribution des retards durant l'année. Après grossissement du nombre de sinistres nous pouvons aisément poursuivre avec la méthode de Chain-Ladder.
- ✚ **Méthode 3 :** Utiliser une période de 3 mois plutôt que une année entière et calculer les facteurs de développement pour le nouveau triangle.
- ✚ **Méthode 4 :** Décaler la période d'observation. Au lieu d'utiliser l'année civile (01/01 au 31/12) on peut utiliser la période du 01/04 au 31/03.

I.3. La Méthode du triangle-Libre pour l'Estimation des IBNR

Le problème majeur de la méthode décrite ci-dessus est qu'agréger le nombre de sinistres dans un triangle nous fait perdre de l'information. Par exemple si nous avons 1000 sinistres sur 10 ans le triangle le comprimera à 55. Cette compression de l'information est utile pour des fins de visualisation et reste robuste quand il s'agit de trouver précisément le nombre projeté de sinistres pour chaque année mais demeure impuissant à l'idée de trouver une possible distribution de nos résultats rendant ainsi l'incertain difficile à quantifier.

Dans cette section nous explicitons le fonctionnement une approche alternative. L'idée d'utiliser les méthodes de projections granulaires s'est développée parmi les actuaires scandinaves aussi bien que parmi d'autres actuaires à travers le monde.

La méthode fonctionne comme suit :

- ✓ *Estimer la distribution des retards de réclamation basée sur les retards de réclamations observées.*
- ✓ *Utiliser cette distribution de retards pour projeter le nombre de sinistres à l'ultime.*

I.3.1. Estimation de la distribution des retards de réclamation

La manière la plus naturelle d'avoir la distribution est de recueillir la date de survenance et de déclaration pour tous les sinistres déclarés jusqu'ici et de tracer la fonction de distribution cumulative empirique de ces dates de déclarations. Cela sera une approximation de la vraie distribution. Elle sera une bonne approximation si la fenêtre d'observation est assez large mais en général il y a un biais pour les retards les plus petits.

Définissons tout d'abord nos variables :

- ✓ *Soit T la variable aléatoire représentant le retard entre la date de survenance et la date de déclaration.*
- ✓ *Soit T_0 le temps auquel le sinistre survient*
- ✓ *Par conséquent $T_0 + T$ représente le temps auquel le sinistre survient.*

La loi la plus sollicitée pour ajuster la distribution est la loi exponentielle où T est la variable aléatoire des retards en nombres d'années. Cette loi a les caractéristiques suivantes :

- ✓ La distribution sous-jacente des retards T est $P(T = t) = f(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)$ et ne change pas au fil du temps.
- ✓ Les Sinistres surviennent uniformément sur la période $[0, a]$, la fenêtre d'observation. Donc $P(t \leq a - t) = 1 - \frac{t}{a}$.

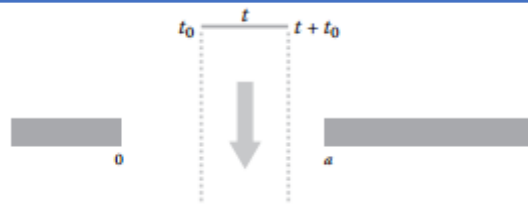


Figure 22: Une illustration géométrique de la probabilité d'observer un retard de longueur $T=t$

Ainsi la distribution des retards observés est :

$$f_a(t) = \begin{cases} c \left(1 - \frac{t}{a}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{si } t < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où c est une constante qui peut être facilement déterminé en imposant la condition que l'intégrale de $f_a(t)$ sur $[0, a]$ est 1. On obtient donc le résultat suivant :

$$f_a(t) = \frac{\frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{t}{a}\right) \exp(-t/\tau)}{1 - \frac{\tau}{a} (1 - \exp(-a/\tau))}$$

En pratique on observe une version empirique de $f_a(t)$, $\hat{f}_a(t)$ et on veut déduire la vraie valeur $f(t)$. On a :

$$E(T) = \tau_{obs}(a, \tau) = \int_0^a t \hat{f}_a(t) dt = \tau \left(1 + \frac{e^{-\frac{a}{\tau}} - \frac{\tau}{a} (1 - e^{-\frac{a}{\tau}})}{1 - \frac{\tau}{a} (1 - e^{-\frac{a}{\tau}})}\right)$$

On peut de là utiliser cette relation pour estimer τ à partir de la moyenne des retards empiriques $\hat{\tau}_{obs}(a)$.

➤ Calcul du Tail factor

Le Tail factor est le factor additionnel qu'on aura à multiplier par les projections à l'ultime afin de prendre en considération les retards plus larges que a . Dans le cas exponentiel le Tail factor φ_{Tail} sera donné par $\varphi_{Tail} = \frac{1}{1 - \exp(-a/\tau)}$.

I.3.2. Projection du nombre de sinistres à l'ultime

Pour projeter le nombre de sinistres déclarés à l'ultime on peut maintenant utiliser la distribution des retards $\hat{f}(t)$ ou plus directement la distribution cumulative $\hat{F}(t) = P(T \geq t)$ qui représente la probabilité que le retard est moins ou égal à t .

On suppose que les sinistres surviennent sur $[[0, a']]$ et qu'ils sont déclarés sur $[[0, a]]$. De plus on fait l'hypothèse que les sinistres surviennent de façon homogène entre 0 et a' et que la distribution exponentielle est un modèle valide pour les retards.

Par définition si un sinistre survient en u , la probabilité qu'il soit observé sur $[[0, a]]$ est $F(a - u)$. Considérant maintenant l'intervalle infinitésimal $[[u, u + du]]$, la valeur espérée du nombre de sinistres sur cet intervalle est $N(u, u + du) = Ndu/a'$, et la valeur espérée du nombre de sinistres survenant sur $[[u, u + du]]$ et déclaré sur $[[0, a]]$ est $R_a(u, u + du) = N(u, u + du)F(a - u) = \left(\frac{N}{a'}\right)F(a - u)du$. En définitif la valeur espérée du nombre de sinistres sur $[[0, a']]$ et déclaré sur $[[0, a]]$ est donc :

$$E(\text{déclaré}_a(a')) = \frac{N}{a'} \int_0^{\min(a', a)} F(a - u) du$$

On peut donc en déduire l'estimation du nombre de sinistres survenant sur $[[0, a']]$ de l'équation précédente par :

$$\text{projeté}_a(a') = \frac{a'}{\int_0^{\min(a', a)} \hat{F}(a - u) du} * \text{déclaré}_a(a')$$

Dans notre modèle exponentiel on aura :

$$\text{projeté}_a(a') = \frac{a'}{a' - \tau(\exp(\frac{a' - a}{\hat{t}}) - \exp(-\frac{a}{\hat{t}}))} * \text{déclaré}_a(a')$$

Les IBNRs nombre de sinistres sont simplement donnés par la différence entre les nombres projetés et déclarés des sinistres :

$$IBNR_a(a') = \text{projeté}_a(a') - \text{déclaré}_a(a')$$

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

| Bandes | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|--------|------|------|------|------|------|
| 1 | 17 | 31 | 43 | 32 | 14 |
| 2 | 28 | 27 | 33 | 14 | 14 |
| 3 | 16 | 18 | 18 | 10 | 14 |
| 4 | 17 | 13 | 12 | 13 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 16 | 4 | 11 |
| 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 8 |
| 7 | 12 | 4 | 7 | 8 | 4 |
| 8 | 20 | 13 | 10 | 9 | 9 |
| 9 | 3 | 17 | 29 | 26 | 17 |
| 10 | 0 | 5 | 3 | 3 | 6 |
| 11 | 2 | 7 | 5 | 4 | 4 |
| 12 | 8 | 13 | 15 | 13 | 9 |
| 13 | 10 | 15 | 10 | 1 | 6 |
| 14 | 4 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 15 | 21 | 65 | 53 | 23 | 23 |
| 16 | 10 | 17 | 7 | 8 | 5 |
| 17 | 3 | 7 | 6 | 7 | 5 |
| 18 | 25 | 34 | 41 | 23 | 16 |
| 19 | 2 | 0 | 1 | 2 | 7 |
| 20 | 6 | 4 | 2 | 2 | 17 |
| 21 | 7 | 4 | 3 | 34 | 14 |
| Total | 222 | 306 | 322 | 242 | 219 |

II. Sélection et Calibrage d'un modèle de fréquence.

II.1 Considérations préalables

RECOMMANDATIONS

- *Si le modèle de risque est un modèle individuel tel que le risque crédit il peut être possible d'utiliser le modèle binomial. Cependant si une sur-dispersion est observée de fait de facteurs systémiques la loi binomiale négative peut être utilisée.*
- *Si le modèle est par contre un modèle collectif du risque comme dans notre cas l'Incendie*
 - ✓ *On essaye de modéliser la loi binomiale négative*
 - ✓ *Si le modèle trouvé n'est pas satisfaisant du point de vue de ses paramètres on peut se résoudre à utiliser la loi de poisson malgré tout.*

Si nous avons à notre disposition de données historiques assez importantes nous procédons assez classique comme suit :

PROCEDURE CLASSIQUE

- Estimer les paramètres de toutes les lois candidates
- Effectuer des tests d'adéquations à ces lois (Test de Kolmogorov-Smirnov, Test d'Anderson Darling, Test de Cramer-Von Mises) afin de ne retenir que les plus significatives
- Sélectionner la loi la plus appropriée au travers du critère d'AIC ou de BIC
- Prendre en compte l'incertitude sur l'estimation des paramètres du modèle retenu.

II.1.1. Tests Statistiques d'adéquation

Nous décidons de ne présenter ici que le test d'Anderson Darling et de Cramer-Von Mises réputés être plus puissant que le test de Kolmogorov-Smirnov (KS). Ces deux tests débutent avec la même logique que le test de KS, à savoir examiner la distance entre la fonction de répartition théorique supposée sous H_0 (la loi est adéquate) et la fonction de répartition empirique construite sur l'échantillon $\hat{F}(x)$. Ils vont différer sur deux points :

- leur distance fait intervenir l'écart quadratique $(\hat{F}(x) - F(x))^2$ et non plus l'écart absolu $|\hat{F}(x) - F(x)|$
- alors que dans KS on regarde seulement la distance maximale entre les deux fonctions, ils vont considérer l'ensemble des observations.

Leur expression générale est donc :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{F}(x) - F(x))^2 \Psi(x) dF(x)$$

Où $\Psi(x)$ est une fonction de pondération qui va caractériser l'un ou l'autre test.

1) Le test de Cramer-Von Mises

La fonction de pondération est $\Psi(x) = 1$ et la statistique de test

$$W^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2i-1)}{2n} - F_{(x_i)} \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

Où (x_i) est la $i^{\text{ème}}$ plus petite valeur de l'échantillon. Une grande valeur de la statistique W^2 est un signe défavorable à H_0 : on va rejeter cette hypothèse lorsque W^2 est supérieure à sa valeur critique.

2) Le test d'Anderson-Darling

La fonction de pondération est $\Psi(x) = [F(x)(1 - F(x))]^{-1}$ et la statistique est :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1) \log F_{(x_i)} + (2n + 1 - 2i) \log(1 - F_{(x_i)})]$$

Rappelez-vous que dans le test de Cramer-Von Mises un même poids est donné à toutes les observations quel que soit leur rang. Dans le test d'Anderson-Darling, la fonction de pondération utilisée donne plus de poids aux observations situées dans les queues de la distribution. La statistique A^2 peut donc être intéressante à regarder lorsque l'utilisateur veut précisément prêter attention aux écarts entre les deux fonctions pour les valeurs situées dans les queues de la distribution (considérations très utiles en réassurance).

II.1.2. Incertitude sur les paramètres

Dans cette section, nous proposons un exposé des techniques statistiques qui servent à évaluer l'incertitude des paramètres des lois de fréquence discrètes (Poisson simple, Binomiale Négative et Poisson Généralisée) ajustées aux échantillons de nombre de sinistres annuels. L'incertitude sur les paramètres de la distribution de fréquence provient de la difficulté à évaluer les vrais paramètres de la population d'où est extrait le petit échantillon étudié. En statistique classique, l'estimation des paramètres se fait par la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. Mais ces estimateurs sont eux aussi des variables aléatoires, par exemple si l'on prend deux échantillons finis d'une même distribution, les estimateurs par maximum de vraisemblance des paramètres vont être différents. Utiliser des paramètres fixes dans un modèle fréquence-sévérité peut conduire à une sous-évaluation du risque, car les estimateurs des paramètres sont calculés sur une quantité trop faible de données d'expérience. Trois approches permettent la prise en compte de l'incertitude des paramètres :

- *Les méthodes statistiques « classiques » comme la limite asymptotique normale des estimateurs par le maximum de vraisemblance,*
- *Les méthodes empiriques comme le Bootstrap paramétrique,*
- *l'approche bayésienne avec la méthode de simulation Monte Carlo par chaîne de Markov.*

Le Bootstrap et l'approche bayésienne ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années, et leur application est facilitée notamment grâce à l'évolution de la performance des ordinateurs et la disponibilité de logiciels professionnels de simulation. Nous décidons de ne présenter que la méthode de Bootstrap paramétrique.

1) Le Bootstrap Paramétrique

Cette méthode consiste à approximer la distribution des estimateurs des paramètres en échantillonnant un grand nombre de fois à partir de la distribution ajustée sur l'échantillon de départ. Cette distribution ajustée correspond à l'hypothèse de départ sur la population. A chaque échantillonnage, l'ajustement donne lieu à de nouvelles valeurs pour les estimateurs des paramètres. La distribution empirique de ces estimateurs permet de rendre compte de la variation des estimations que l'actuaire aurait pu faire si il avait observé un très grand nombre de fois un échantillon de taille n issu de la distribution de la population. Au lieu de

l'approximation en Normale multivariée de la théorie classique, une distribution empirique $\hat{\theta}$ est obtenue.

2) L'algorithme du Bootstrap paramétrique.

L'algorithme consiste dans un premier temps à estimer, par le maximum de vraisemblance, les p paramètres de la loi de fréquence ajustée P_{θ} sur l'échantillon d'origine \underline{k} , ce qui permet d'obtenir $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$. Le meilleur estimateur de la loi de la population \underline{P} dont est issu l'échantillon \underline{k} de nombre étudié est $\hat{P}_{\theta} = P_{\hat{\theta}}$.

A lieu ensuite un tirage aléatoire dans $P_{\hat{\theta}}$ d'un nombre B suffisamment grand d'échantillons de même taille n que l'échantillon d'origine. Pour chaque échantillon $j = 1, \dots, B$ simulé k_j , le maximum de la fonction de vraisemblance $L(\theta/k_j)$ est calculé pour en déduire les réalisations des estimateurs des paramètres $\hat{\theta}_j = (\hat{\theta}_{j,1}, \hat{\theta}_{j,2}, \dots, \hat{\theta}_{j,p})$. Un échantillon de taille B d'estimateurs de paramètres $\{\hat{\theta}_j\}_{1, \dots, B}$ est ainsi obtenu par le Bootstrap.

La distribution empirique des estimateurs des paramètres qui en découle sert à l'estimation de l'incertitude des paramètres. Lorsque l'échantillon est de taille n très grande, la distribution empirique de θ obtenue par le Bootstrap doit correspondre à la loi Normale multivariée prévue par la théorie classique.

III. Résultat de la fréquence

III.1 Détermination du seuil de sinistre graves

Avant de passer à une modélisation séparée des sinistres graves et attritionnels il est indéniable de connaître au préalable la frontière discriminant la gravité d'un sinistre. La procédure de détection du seuil consiste dans un premier temps à un choix visuel à travers des graphes puis dans un second temps, un test d'adéquation nous confirmera si oui ou non le seuil est statistiquement acceptable. Le premier graphe à tracer est celui de l'histogramme du montant individuel des sinistres revalorisés à travers un indice annuel de coût à la construction de 3%.

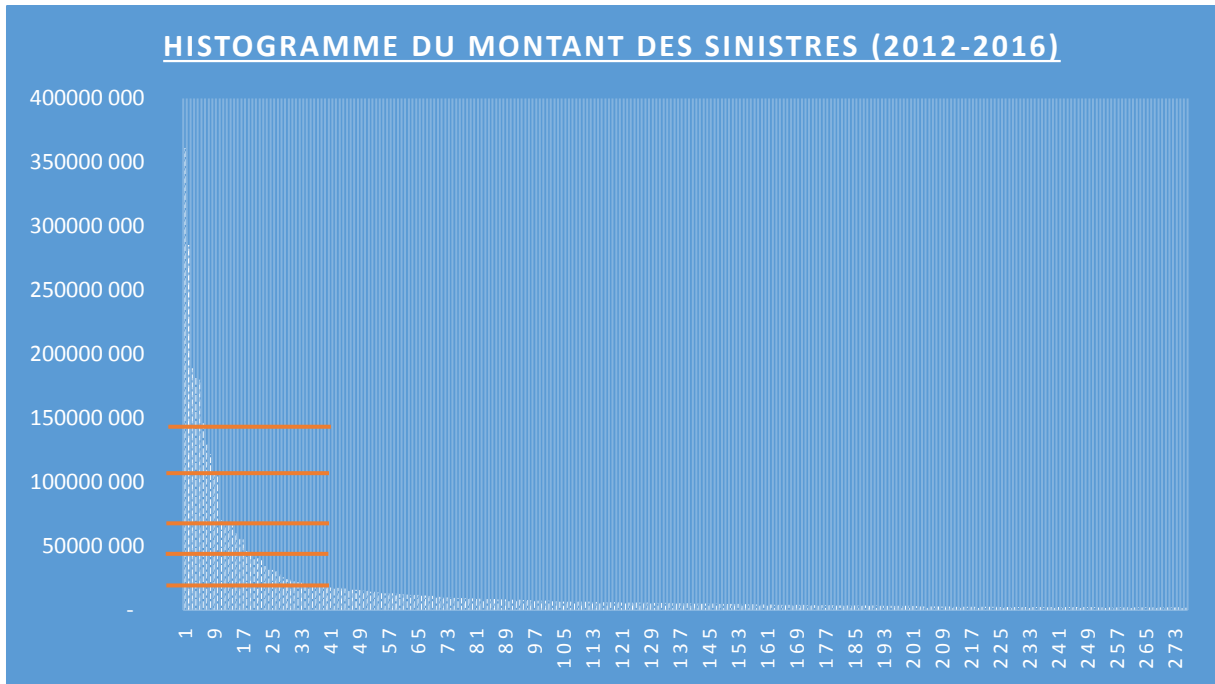


Figure 23: Histogramme des montants individuels revalorisés (2012-2016)

A travers ce graphe on voit que plusieurs choix du seuil se présente à nous (10, 50, 100, 150 millions). Cette méthode ne peut donc pas à elle seule nous permettre de conclure.

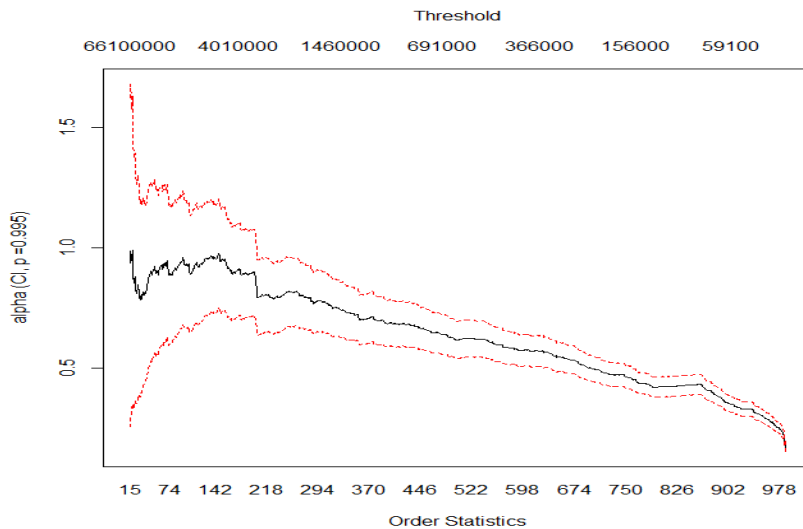


Figure 24: Le Hill plot des montants des sinistres

Le Hill plot ci-dessus laisse percevoir deux régions de stabilité :

- L'une aux alentours de 890 ce qui correspond à 93 (983-890) dépassements et un seuil de 8 millions.
- L'autre aux environs de 967 ce qui correspond à 16 (983-967) excès et un seuil de 55 millions.

Cette méthode réduit considérablement le nombre de seuil admissible. Pour de considérations pratiques qui veulent que l'on garde le seuil à un pourcentage raisonnable de la priorité de

l'XS sur rétention le seuil de 8 millions sera jugé inadmissible car il ne représente que 4% ($8/200=0.04$) de ladite priorité.

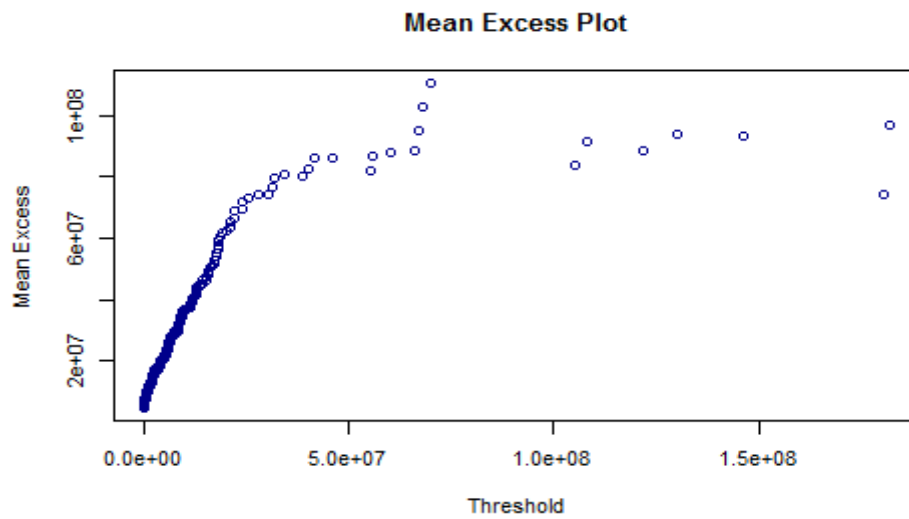


Figure 25: Le Mean Excess Plot

La pente du Mean Excess Plot est ascendante on peut donc considérer que la queue de la distribution est lourde. On peut considérer que le seuil du Mean Excess plot s'aligne approximativement sur une droite à partir du seuil de 50 millions, proche des 47 millions du Hill plot. On décide de garder le seuil de 50 millions. Des tests statistiques d'adéquation confirmeront par la suite le choix de ce seuil.

III.2. Résultats de la fréquence (N_{grav}).

Le tableau suivant donne une synthèse du nombre de sinistres graves et attritionnels observé selon le seuil de 50 millions sur notre période d'étude ainsi que leur revalorisation par l'exposition (le nombre de polices souscrit).

| Années | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---------------------|------|------|------|------|------|
| Global | 152 | 220 | 264 | 190 | 191 |
| Attritionnel | 149 | 215 | 260 | 190 | 184 |
| Grave | 3 | 5 | 4 | 0 | 7 |
| Global Reval. | 222 | 306 | 322 | 242 | 219 |
| Attritionnel Reval. | 217 | 297 | 316 | 242 | 209 |
| Grave Reval. | 5 | 9 | 8 | 0 | 10 |

Tableau 12: Nombre de Sinistres Revalorisé

Les trois dernières lignes donnent le nombre de sinistres que l'on aurait dû observer sur la même période si notre exposition en termes de nombre de police pour les mêmes années était celle prévue pour 2017.

Le package « Fitdistrplus » de R permet d'estimer les paramètres de la variable aléatoire N_{grav} par maximum de vraisemblance. Les résultats sont donnés par :

```

> fitdist(Distr_NBSIN_Grav,"pois",start=list(lambda=2), method = "mle")
Fitting of the distribution ' pois ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
lambda 6.400001  1.131371
> fitdist(Distr_NBSIN_Grav,"nbinom",start=list(size=1.1,prob=0.007), method = "mle")
Fitting of the distribution ' nbinom ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
size 2.279246  2.5866173
prob 0.262539  0.2296648

```

La prochaine étape consiste à vérifier l'adéquation de la fréquence des sinistres graves N_{grav} aux lois ajustées. Pour ce faire nous avons effectué les trois tests les plus populaires à savoir le test de Kolmogorov-Smirnov, le test d'Anderson-Darling et le test de Cramer-Von Mises. Les résultats du dernier test figurent ci-dessus.

```

> cvm.test(Distr_NBSIN_Grav,"ppois",Adj.pois_Grav$estimate)

      Cramer-von Mises test of goodness-of-fit
      Null hypothesis: Poisson distribution

data:  Distr_NBSIN_Grav
omega2 = 0.16136, p-value = 0.3654

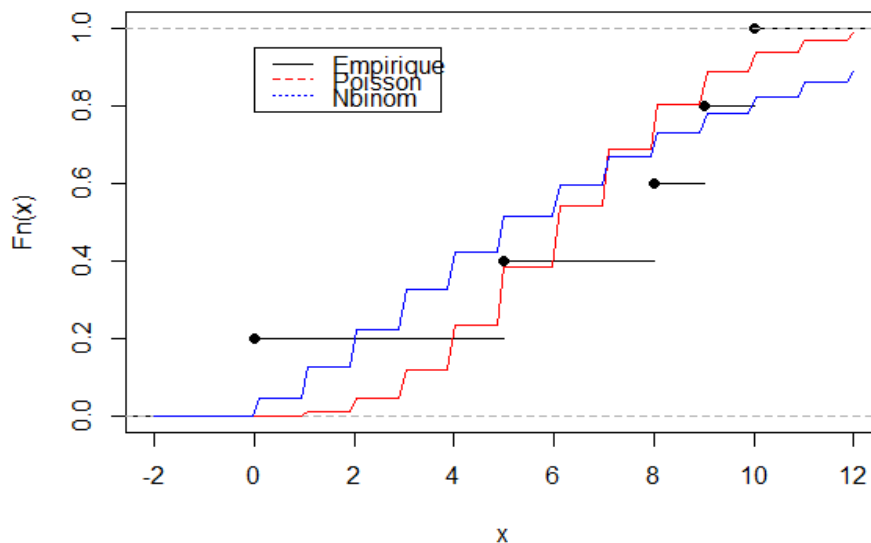
> cvm.test(Distr_NBSIN_Grav,pnbinom,Adj.Nbinom_Grav$estimate[1],Adj.Nbinom_Grav$estimate[2])

      Cramer-von Mises test of goodness-of-fit
      Null hypothesis: negative binomial distribution

data:  Distr_NBSIN_Grav
omega2 = 0.13076, p-value = 0.467

```

Ajustement de la fréquence des Sins graves



Statistiquement les deux lois sont acceptables, reste maintenant à sélectionner qu'une.

Figure 26: Ajustement de N_{grav}

Le graphe de la fonction de répartition précédente montre que la loi binomiale négative ajuste mieux N_{grav} , le critère de choix de l'AIC nous le confirmera.

```
> Adj.Nbinom_Grav$aic  
[1] 32.71305  
> Adj.pois_Grav$aic  
[1] 33.7936
```

- La loi binomiale négative a le plus petit AIC, elle sera donc retenue comme la loi qui modélise la fréquence annuelle des sinistres graves.
- La loi de la fréquence N_{grav} est donc : $N_{grav} \sim NB(2.279; 0.262)$

III.3 Résultats de la fréquence attritionnelle (N_{attr})

En suivant le même cheminement que celui concernant la fréquence des sinistres graves on aboutit à une conclusion sur la loi du nombre attritionnel de sinistres. Les résultats de l'estimation des paramètres, des tests statistiques, des critères de sélection sont données ci-dessous.

➤ Estimation des paramètres

```
> fitdist(Distr_NBSIN_Attri,"pois",start=list(lambda=2), method = "mle")  
Fitting of the distribution ' pois ' by maximum likelihood  
Parameters:  
      estimate Std. Error  
lambda 256.1839   7.157765  
> fitdist(Distr_NBSIN_Attri,"nbinom",start=list(size=1.1,prob=0.007), method = "mle")  
Fitting of the distribution ' nbinom ' by maximum likelihood  
Parameters:  
      estimate Std. Error  
size 42.1425151 30.81843669  
prob  0.1412559  0.08915848
```

Ajustement de la fréquence attritionnelle

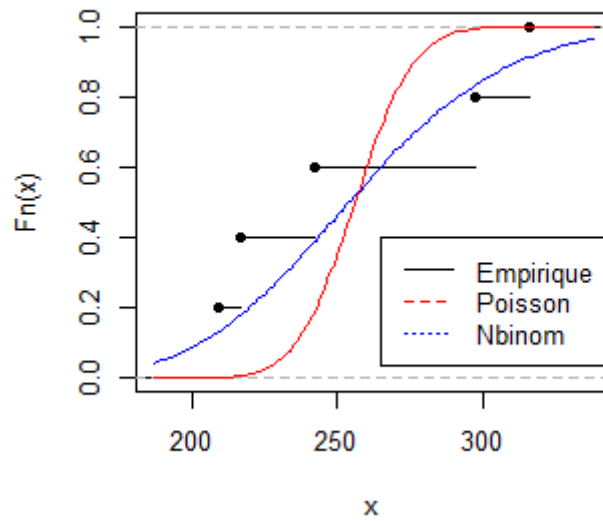


Figure 27: Qualité d'ajustement de la fréquence attritionnelle

➤ Les tests d'adéquation

```
> ks.test(Distr_NBSIN_Attri, ppois, Adj.pois_Attri$estimate)
```

one-sample kolmogorov-smirnov test

```
data: Distr_NBSIN_Attri
D = 0.40295, p-value = 0.3011
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test(Distr_NBSIN_Attri, pnbinom, Adj.Nbinom_Attri$estimate[1], Adj.Nbinom_Attri$estimate[2])
```

one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: Distr_NBSIN_Attri
D = 0.23549, p-value = 0.8866
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> Adj.Nbinom_Attri$aic
```

```
[1] 55.60946
```

```
> Adj.pois_Attri$aic
```

```
[1] 74.43098
```

- *Le plus petit AIC est donné par la loi binomiale négative*
- *La loi de la fréquence attritionnelle est $N_{attr} \sim NB(42, 14; 0.141)$.*

Chapitre III : Modélisation de la Sévérité des Sinistres

Après avoir produit le modèle de fréquence la prochaine étape consiste à construire un modèle de sévérité basé sur l'expérience passée de nos montants de sinistres de notre portefeuille et si possible d'autres informations sur d'autres portefeuilles de risque pertinentes. Un modèle de sévérité n'est pas seulement essentiel pour calculer en combinaison avec le modèle de fréquence la distribution agrégée des sinistres mais aussi permet de répondre aux questions suivantes :

- *Quelle est la probabilité qu'un sinistre individuel dépasse un certain niveau ?*
- *Quelle est la priorité adéquate pour un tel risque ?*
- *Quelle portée devrait-on acheter pour un tel risque ?*

Dans ce chapitre trois principaux points seront traités. Il sera question entre autres de traiter les montants individuels des sinistres puis par la suite de sélectionner et de calibrer un modèle de sévérité. Enfin nous devons notre modèle collectif de risque en combinant la fréquence et la Sévérité des sinistres afin d'avoir une distribution agrégée de nos charges de sinistres.

II. Ajustement par les IBNERs et d'autres facteurs

II.1. Ajustement par les IBNERs

L'écart entre le montant total réglé et celui estimé est appelé IBNER (Incurred But Not Enough Reserved), à ne pas confondre avec IBNR. Afin de prendre en compte notre engagement final nous avons besoin d'estimer ces IBNER. Il y a plusieurs méthodes d'identification et d'ajustement de ces IBNER. Deux méthodes sont présentées ici.

II.1.1. N'utiliser que les sinistres clôturés

Si l'on dispose de l'information sur quel ou quel sinistre est réglé ou pratiquement réglé alors on pourrait considérer la possibilité de n'utiliser que les sinistres déjà clôturés pour établir notre modèle de sévérité. Cette méthode est moins implémentable si nos données ne sont pas assez volumineuses car nous risquons d'introduire un biais et réaliser une analyse moins crédible. Outre le besoin de larges bases de données cette méthode nécessite aussi un bon mécanisme de classification des sinistres sur la base de clôturé ou ouvert (on sait que les sinistres graves prennent plus de temps pour être complètement réglés). Cet effet est atténué par le fait que la branche incendie est une branche courte et que tous les sinistres sont pratiquement réglés au-delà de deux ans. Cette méthode présente l'avantage de ne pas utiliser d'estimations, donc les données utilisées pour l'analyse sont plus certaines.

II.1.2. Identifier les tendances et ajuster par les tendances

L'idée ici est d'identifier les tendances sur les réserves estimées des sinistres individuels et utiliser ces tendances pour prédire la valeur ultime de chaque sinistre. Cette méthode est utilisable que si nous avons de l'information soit sur la manière dont les sinistres sont

provisionnés au fil des années ou bien sur la valeur initialement estimée et sur la valeur réglée. Deux techniques existent pour atteindre notre but.

- ✓ *Développer les triangles individuels des sinistres avec chain-Ladder.*
- ✓ *Utiliser la méthode du GLM pour identifier les facteurs les plus pertinents pour les IBNER et prédire le montant final.*

Nous choisissons de présenter ici la deuxième méthode.

1) Identifier les tendances en utilisant l'analyse multivariée (GLM)

Il s'agit ici de calculer des moyennes-IBNERs en fonction des retards de déclaration en années. Cependant il est évident que les IBNERs dépendent de plusieurs facteurs tels que :

- *L'année de développement d (plus récent est le sinistre plus il aura de chances de dévier de sa valeur estimée)*
- *La taille du sinistre x (Plus d'incertitudes entours les sinistres graves)*
- *Le Ratio du montant du sinistre à payer r (Plus ce ratio est élevé plus l'estimation de la valeur survenue paraîtra conjecturale)*
- *Le type de sinistre t (Incendie, RC-corporelle,)*

Cette approche consiste à écrire les IBNER comme une combinaison linéaire de ces différentes variables, à laquelle on ajoute une certaine transformation par une fonction h :

$$IBNER(d, x, r, t \dots) = h(a_1 f_1(d, x, r, t \dots) + \dots + a_n f_n(d, x, r, t \dots))$$

Où a_1, \dots, a_n sont les paramètres du modèle

Un modèle assez simple et pratique est de la forme suivante :

$$IBNR(d, x, r) = e^{-(a_1 + a_2 d + a_3 x + a_4 r)}$$

Où $f_1(d, x, r, t \dots) = 1, f_2(d, x, r, t \dots) = d, f_3(d, x, r, t \dots) = x, f_4(d, x, r, t \dots) = r, et h(x) =$

Le manque de larges bases de données nous pousse à ne pas utiliser cette méthode et de ne pas ajuster par les IBNERs mais cela n'a que très peu d'impact vue que nous sommes dans une branche courte et l'ajustement par les IBNER n'est pas une grande nécessité en soi.

II.2. Ajustement par d'autres facteurs

Outre la vérification de la cohérence de nos données et l'ajustement par les IBNR-IBNER des traitements supplémentaires de nos données s'imposent afin qu'elles soient pures à utilisation. Il s'agit essentiellement d'éliminer l'effet du taux d'inflation sur le montant des sinistres ainsi que celui du taux de change.

II.2.1. Réévaluation par le taux d'inflation

Pour prendre en compte le taux d'inflation nous devons au préalable choisir une date de réévaluation. Notre année comptable étant l'année civile (1JAN au 31DEC) et l'année d'intérêt 2017 il nous a semblé judicieux de choisir le milieu de ladite année (c'est-à-dire le 01/07/2017, date à laquelle seront ramenées tous les sinistres) et ce vu que les sinistres surviennent aléatoirement au cours de l'année.

Pour notre branche incendie l'indicateur d'inflation approprié est l'Indice du Coût à la Construction (ICC). Ainsi donc pour un sinistre de montant X survenu en t et besoin d'être réévalué en t^* avec un ICC annuel de r (3% dans notre cas), la formule sera donnée par :

$$X^{rev@t^*}(t) = X(t) * (1 + r)^{t^* - t}$$

De même s'il existe des sinistres payés en monnaie étrangère lesdits sinistres auront besoin d'être corrigé par le taux de change et ce de la même manière qu'avec le taux d'inflation. Tous nos sinistres étant exprimés en monnaie locale la correction par le taux de change n'a pas lieu d'être pour notre modèle.

Il est aussi judicieux de nettoyer notre base de données par les sinistres catastrophes ainsi que les sinistres résultant de chocs exceptionnels car ils influencent considérablement les résultats.

II. Résultats de la Sévérité

II.1. Résultats de la Sévérité des graves (X_i^{Grav})

La loi retenue pour modéliser la sévérité des sinistres graves est la loi de Pareto généralisée (**GPD**). Il est possible d'utiliser d'autres lois tronquées telles la loi normale ou log normale. Ici on se contentera de la GPD puisque c'est elle qui a servi dans le choix du seuil. Les packages « fExtremes » et « Evir » sont utiles dans ce cas.

Les paramètres estimés par la loi GPD de X_i^{Grav} pour le seuil 50 millions est donné par :

```
> gpd(ChargesSin[,1], threshold = Seuil, nextremes = NA, method = c("ml", "pwm"),
+     information = c("observed", "expected"))$par.ests
      xi      beta
2.682141e-02 8.019521e+07
```

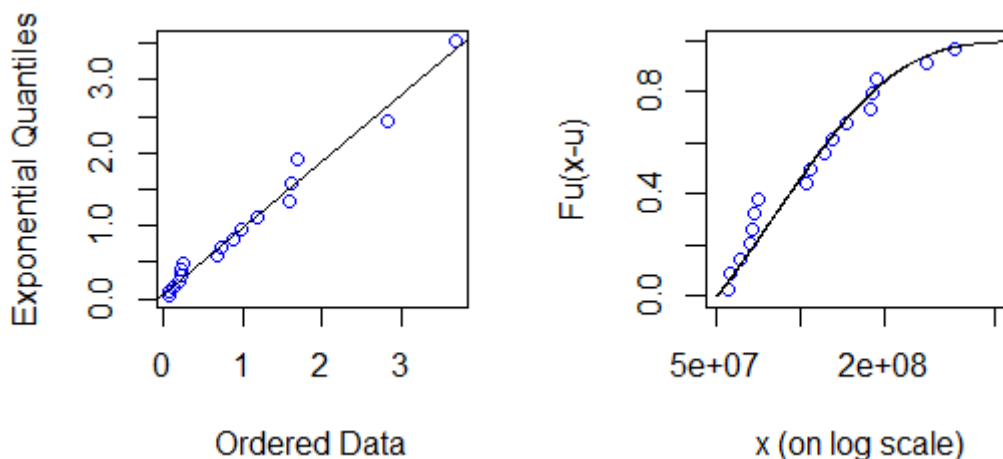


Figure 28: QQ Plot et Distribution des Sinistres graves

Les deux graphes ci-dessus représentent respectivement le QQ plot des résidus et la fonction de distribution des sinistres graves au-delà du seuil. La distribution théorique semble bien ajuster la distribution empirique de nos excès. Référons-nous à des tests statistiques pour se rassurer.

```
> ad.test(x, "pgpd", xi=estim.gpd$par.ests[1],beta=estim.gpd$par.ests[2], mu=Seuil)

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pgpd'
with parameters xi = 0.0268214146720066, beta = 80195211.6193255, mu =
5e+07

data: x
An = 0.39867, p-value = 0.8482
```

- *Le test d'Anderson-Darling nous informe que la GPD est adéquat pour modéliser la distribution de nos sinistres majeurs pour un seuil de 50 millions. Ce résultat nous conforte sur le choix de ce seuil-là.*
- *La loi de la sinistralité grave est donc $x_i^{Grav} \sim GPD(xi = 0.0268, beta = 8.02 * 10^7, mu = 5 * 10^7)$.*

II.2. Résultats de la Sévérité attritionnelle (\bar{X}_{attr})

\bar{X}_{attr} Représente le coût moyen d'un sinistre attritionnel. Le tableau suivant fournit une synthèse de ce coût durant les 5 dernières années mais revalorisé par l'inflation du prix de la construction.

| Années | Charge Attri | Nbre Attri de Sinistres | coût moyen du sinistre Attri (\bar{X}_{attr}) |
|--------|---------------|-------------------------|---|
| 2012 | 413 044 203 | 172 | 2 401 420 |
| 2013 | 475 974 323 | 219 | 2 173 399 |
| 2014 | 710 488 672 | 262 | 2 711 789 |
| 2015 | 355 597 358 | 192 | 1 852 070 |
| 2016 | 423 195 366 | 154 | 2 748 022 |
| Total | 2 378 299 923 | 999 | 2 380 681 |

Figure 29: Coût moyen d'un sinistre attritionnel revalorisé

Dans cette section nous cherchons à déterminer la loi de la variable aléatoire \bar{X}_{attr} de distribution empirique {2 401 420; 2 173 399; 2 711 789; 1 852 070; 2 748 022}. Les lois candidates sont entre autres la loi log normale, la loi normale et la loi de Weibull. Les estimations des paramètres sont consignées ci-dessous.

➤ *Estimations des paramètres*

```
> fitdist(Chargesin_Attri_Annuel[,2],"norm", method = "mle")
Fitting of the distribution ' norm ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
mean 2378026.3          NA
sd   337820.1           NA
> fitdist(Chargesin_Attri_Annuel[,2],"lnorm", method = "mle")
Fitting of the distribution ' lnorm ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
meanlog 14.671366 0.06507898
sdlog   0.145521 0.04600801
> fitdist(Chargesin_Attri_Annuel[,2], distr = "weibull", metho
d = "mle", lower = c(0, 0))
Fitting of the distribution ' weibull ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
shape 8.385672e+00      NA
scale 2.526148e+06      NA
```

Nous traçons ensuite les graphes d'ajustement des fonctions de répartition théoriques de ces lois à la fonction empirique.

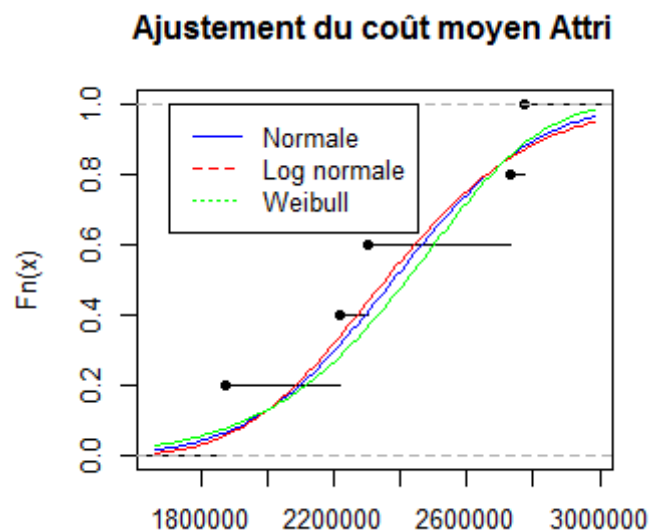


Figure 30: *Qualité d'ajustement du coût moyen*

A priori et de façon visuelle aucune loi ne semble prendre le déçu sur les autres. Un critère de sélection est donc indispensable. On fait appel au critère de l'AIC. Mais avant effectuons des tests d'adéquations.

```
> ad.test(x, "pnorm", Adj.norm_Attri$estimate[1],Adj.norm_Attri$estimate[2])
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: Normal distribution
```

```
data: x
An = 0.33637, p-value = 0.9056
```

```
> ad.test(x, "plnorm", Adj.lnorm_Attri$estimate[1],Adj.lnorm_Attri$estimate[2])
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: log-normal distribution
```

```
data: x
An = 0.32701, p-value = 0.9141
```

```
> ad.test(x, "pweibull", Adj.weibull_Attri$estimate[1],Adj.weibull_Attri$estimate[2])
```

```
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: weibull distribution
```

```
data: x
An = 0.37149, p-value = 0.8718
```

Toutes les trois lois sont statistiquement acceptables, l'AIC nous aidera à trancher.

```
> Adj.norm_Attri$aic
[1] 145.4921
> Adj.weibull_Attri$aic
[1] 145.3472
> Adj.lnorm_Attri$aic
[1] 145.6287
```

- L'AIC nous informe que la loi de Weibull l'emporte sur les autres.
- On a donc : $\bar{X}_{attr} \sim Weibull(\text{shape} = 8, 385672; \text{scale} = 2, 53 * 10^6)$

Nous disposons pratiquement de tous les éléments nécessaires pour simuler notre charge brute.

III. Résultats de la Simulation du modèle par expérience

Pour calculer par simulation la charge brute $S = N_{attr} * \bar{X}_{attr} + \sum_{i=1}^{N_{grav}} X_i^{Grav}$, nous décidons de modéliser la dépendance entre les nombres de sinistres N_{attr} et N_{grav} par une copule gaussienne de dimension 2. Le coefficient de corrélation de Pearson, également utilisé comme paramètre de la copule est de 23%.

```
> cor(x=Distr_NBSIN_Attri,y=Distr_NBSIN_Grav,method = "pearson")
[1] 0.2292265
```

N_{attr} et N_{grav} Sont donc lié par la copule $Copule(\rho = 0.229; \dim = 2)$. Pour obtenir la charge brute nous suivons les étapes suivantes.

➤ **Procédure de la Simulation**

- ❖ On simule une copule gaussienne de dimension 2 et de paramètre $\rho=0.229$ et ce 100000 fois. On obtient des marginales uniformes (u_1^i, u_2^i) sur $[0,1]$.
- ❖ On inverse (u_1^i, u_2^i) grâce aux fonctions quantiles des lois de fréquence correspondantes selon le principe $(N_{attr}^i, N_{grav}^i) = (F_{attr}^{-1}(u_1^i), F_{grav}^{-1}(u_2^i))$. F_{attr} , la fonction de répartition de la variable aléatoire $N_{attr} \sim NB(42,14; 0.141)$ et F_{grav} celle de $N_{grav} \sim NB(2.279; 0.262)$
- ❖ Pour chaque scénario, on génère un coût moyen de sinistre attritionnel \bar{X}_{attr}^i selon la loi de Weibull (Weibull(shape = 8,39; scale = $2,53 * 10^6$)). De même on génère N_{grav}^i montants individuels de sinistres graves selon la GPD ($GPD(x_i = 0.0268, \beta = 8.02 * 10^7, \mu = 5 * 10^7)$).
- ❖ Un scénario de charge brute est donné par $S^i = N_{attr}^i * \bar{X}_{attr}^i + \sum_{i=1}^{N_{grav}^i} X_i^{Grav}$.
- ❖ Les 100000 scénarios de S^i triés de façon croissante nous permettent de construire une distribution empirique ainsi que des quantiles empiriques de la charge brute de sinistres S .

Les résultats de cette simulation sont consignés dans le tableau synthétique suivant.

| Percentiles | Période de Retour (ans) | Charge Attritionnelle | Charge grave | Charge Brute |
|-------------|-------------------------|-----------------------|---------------|---------------|
| 0,10% | 1000 | 246 505 089 | 0 | 324 648 507 |
| 0,50% | 200 | 300 346 683 | 0 | 400 820 314 |
| 1,00% | 100 | 325 651 836 | 0 | 443 730 038 |
| 1,50% | 67 | 343 594 424 | 0 | 473 094 142 |
| 2,00% | 50 | 355 205 700 | 0 | 496 286 852 |
| 5,00% | 20 | 401 526 375 | 52 389 091 | 589 003 450 |
| 10,00% | 10 | 443 269 796 | 126 907 392 | 693 680 618 |
| 15,00% | 7 | 472 533 879 | 198 704 047 | 778 626 238 |
| 20,00% | 5 | 496 421 820 | 269 482 644 | 855 880 470 |
| 25,00% | 4 | 517 098 859 | 337 277 163 | 930 867 548 |
| 30,00% | 3 | 536 379 066 | 403 837 522 | 1 002 246 708 |
| 50,00% | 2 | 604 674 060 | 691 592 879 | 1 306 682 510 |
| 70,00% | 3 | 676 339 111 | 1 063 677 897 | 1 697 486 667 |
| 75,00% | 4 | 697 265 727 | 1 187 569 774 | 1 825 808 697 |
| 77,00% | 4 | 706 344 723 | 1 244 679 513 | 1 884 365 442 |
| 80,00% | 5 | 721 531 887 | 1 338 584 273 | 1 977 647 878 |

| | | | | |
|--------|------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| 85,00% | 7 | 750 368 982 | 1 522 127 544 | 2 164 848 960 |
| 90,00% | 10 | 787 406 202 | 1 770 708 164 | 2 424 160 858 |
| 95,00% | 20 | 843 334 406 | 2 191 029 051 | 2 853 123 354 |
| 98,00% | 50 | 908 496 857 | 2 698 008 660 | 3 382 894 133 |
| 99,00% | 100 | 952 479 611 | 3 092 792 982 | 3 771 271 414 |
| 99,50% | 200 | 995 463 826 | 3 478 074 320 | 4 158 376 363 |
| 99,90% | 1000 | 1 078 748 114 | 4 363 074 898 | 5 072 154 486 |
| | Moyenne Simulation | 611 082 702 | 847 766 538 | 1 458 849 240 |
| | Moyenne théorique | 610 871 952 | 847 394 830 | 1 458 266 782 |
| | Ecart type Simulation | 134 661 468 | 688 523 124 | 721 825 475 |
| | Coefficient. Variation (COV) | 22% | 81% | 49% |

Tableau 13: Modèle par expérience : Distribution empirique

➤ **Interprétations :**

- *Le tableau précédent nous donne la distribution de la charge attritionnelle, de la charge grave et de la charge brute avec leur période de retour (c'est-à-dire le cycle d'apparition de la charge en question).*
- *Sans surprise le coefficient de variation de la charge attritionnelle est beaucoup plus faible que celui de la charge grave car les sinistres majeurs témoignent très souvent d'une plus grande volatilité.*
- *La probabilité que notre charge attritionnelle ou que notre charge grave ou bien que notre charge brute excède respectivement 1,08milliards, 4,36milliards et 5,072milliards est quasi-nulle ($1-0,999=0,001$) ; ce qui correspond à une période de retour de 1000 ans (c'est-à-dire une occurrence de 1 sur 1000 ans).*
- *La colonne charge grave nous renseigne que chaque 50 ans on aura la chance de ne pas connaître de sinistre majeur (aucun sinistre ne dépassera la barre de 50millions=seuil des graves). $P(S_{grav} = 0) = 0,02$.*
- *La prime prévisionnelle pour l'année 2017 est de 2,424milliards.Ce qui donne par rapport à la charge annuelle de sinistres fournit par la simulation un loss-Ratio de 60,18%.*
- *La $P(S > 2,424milliards) = 0,1$. La probabilité de ruine de la compagnie est donc de 10%. Pour réduire cette probabilité à 5% une injection d'un fond supplémentaire d'environ 400millions est nécessaire. Il est souvent recommandé de maintenir la probabilité de ruine à 0,5% c'est-à-dire une ruine tous les 200 ans tout comme le veut « Solvency II ». Auquel cas une somme additionnelle de 1,73milliards sera demandée.*
- *La moyenne simulée est très proche de celle trouvée dans la méthode par expérience*

PARTIE III : LE MODELE HYBRIDE ET TARIFACATION

CHAPITRE I : Le Modèle dit « hybride ».

La méthode hybride est basée sur une modélisation de la fréquence via l'approche par expérience et sur une modélisation de la sévérité via l'approche par exposition.

I. Résultats de la fréquence

Pour modéliser la fréquence des sinistres nous avons besoin de l'historique du nombre de sinistres revalorisé par le nombre de polices (choisit comme exposition) et ce pour chaque bande de somme assurée ou de SMP (Cf. le tableau suivant).

| Bandes | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|--------|------|------|------|------|------|
| 1 | 17 | 31 | 43 | 32 | 14 |
| 2 | 28 | 27 | 33 | 14 | 14 |
| 3 | 16 | 18 | 18 | 10 | 14 |
| 4 | 17 | 13 | 12 | 13 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 16 | 4 | 11 |
| 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 8 |
| 7 | 12 | 4 | 7 | 8 | 4 |
| 8 | 20 | 13 | 10 | 9 | 9 |
| 9 | 3 | 17 | 29 | 26 | 17 |
| 10 | 0 | 5 | 3 | 3 | 6 |
| 11 | 2 | 7 | 5 | 4 | 4 |
| 12 | 8 | 13 | 15 | 13 | 9 |
| 13 | 10 | 15 | 10 | 1 | 6 |
| 14 | 4 | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 15 | 21 | 65 | 53 | 23 | 23 |
| 16 | 10 | 17 | 7 | 8 | 5 |
| 17 | 3 | 7 | 6 | 7 | 5 |
| 18 | 25 | 34 | 41 | 23 | 16 |
| 19 | 2 | 0 | 1 | 2 | 7 |
| 20 | 6 | 4 | 2 | 2 | 17 |
| 21 | 7 | 4 | 3 | 34 | 14 |
| Total | 222 | 306 | 322 | 242 | 219 |

Tableau 14: Nombre de sinistres par bande de SMP

Pour modéliser la fréquence on suit le schéma classique suivant :

- Estimer les paramètres pour l'ensemble des lois candidates
- Tracer la courbe empirique et théorique pour mesurer la qualité d'ajustement
- Calculer la p-value pour chaque loi
- Sélectionner une seule loi parmi les lois retenues via le critère de l'AIC.

Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau suivant.

| Bandes | Loi de Poisson | | | Loi binomiale négative | | | Loi choisie | |
|----------|----------------|-----|---------|------------------------|-------------|-----|-------------|--------------------|
| | Lambda | AIC | P-Value | Size | Probabilité | AIC | | P-Value |
| Bande 1 | 27 | 49 | 0,35 | 17 | 0,39 | 43 | 0,58 | Binomiale négative |
| Bande 2 | 23 | 40 | 0,35 | 23 | 0,49 | 39 | 0,62 | Binomiale négative |
| Bande 3 | 15 | 28 | 0,92 | 18 | 0,54 | 32 | 0,82 | Poisson |
| Bande 4 | 14 | 25 | 0,40 | 23 | 0,63 | 29 | 0,33 | Poisson |
| Bande 5 | 9 | 32 | 0,84 | 9 | 0,50 | 32 | 0,99 | Poisson |
| Bande 6 | 6 | 21 | 0,20 | 10 | 0,64 | 25 | 0,14 | Poisson |
| Bande 7 | 7 | 27 | 0,96 | 11 | 0,60 | 29 | 0,94 | Poisson |
| Bande 8 | 12 | 30 | 0,85 | 13 | 0,52 | 32 | 0,73 | Poisson |
| Bande 9 | 18 | 53 | 0,52 | 16 | 0,45 | 45 | 0,80 | Binomiale négative |
| Bande 10 | 3 | 24 | 0,54 | 7 | 0,69 | 26 | 0,47 | Poisson |
| Bande 11 | 4 | 22 | 0,57 | 20 | 0,82 | 24 | 0,54 | Poisson |
| Bande 12 | 12 | 27 | 0,67 | 20 | 0,63 | 30 | 0,73 | Poisson |
| Bande 13 | 8 | 37 | 0,49 | 4 | 0,33 | 34 | 0,78 | Binomiale négative |
| Bande 14 | 2 | 19 | 0,75 | 14 | 0,88 | 21 | 0,73 | Poisson |
| Bande 15 | 37 | 72 | 0,06 | 31 | 0,46 | 54 | 0,11 | Binomiale négative |
| Bande 16 | 9 | 30 | 0,97 | 13 | 0,58 | 31 | 1,00 | Poisson |
| Bande 17 | 6 | 22 | 0,72 | 18 | 0,76 | 25 | 0,68 | Poisson |
| Bande 18 | 28 | 41 | 0,68 | 20 | 0,42 | 40 | 0,95 | Binomiale négative |
| Bande 19 | 2 | 25 | 0,95 | 2 | 0,41 | 24 | 0,92 | Binomiale négative |
| Bande 20 | 6 | 40 | 0,59 | 2 | 0,24 | 32 | 0,90 | Binomiale négative |
| Bande 21 | 12 | 68 | 0,08 | 7 | 0,37 | 45 | 0,39 | Binomiale négative |

Tableau 15: Méthode Hybride : Tableau synthétique de la fréquence

II. Résultats de la sévérité.

Il est possible de modéliser la sévérité des sinistres par bande de SMP (c'est-à-dire une courbe d'exposition par bande). Mais ayant des nombres limités de sinistres par bande et pour ne pas biaiser notre modélisation nous préférons modéliser une courbe d'exposition par groupe de bande ayant un taux de destruction plus ou moins homogène. Une analyse graphique du Box plot des taux de dommage nous permet de détecter trois groupes homogènes de bandes (Bandes 1-6, 7-14, 15-21). Ces trois groupes constitueront le socle de la modélisation de la sévérité.

Boxplot Tx dommage * SMP

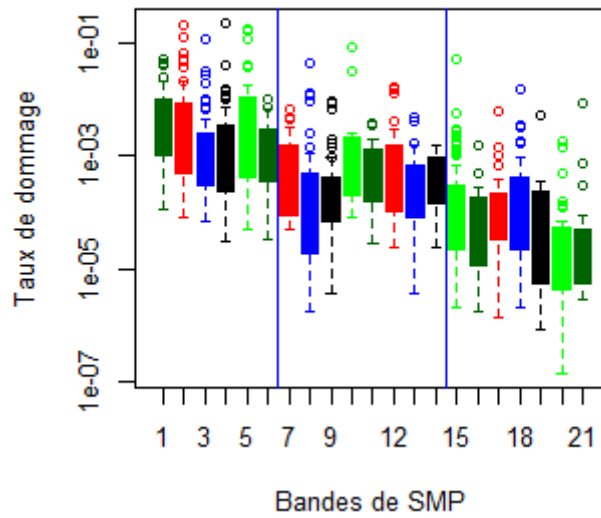


Tableau 16: Box plot des taux de destruction

Nous suivons les mêmes étapes que pour la fréquence afin de déterminer à l’ultime la loi qui sera finalement utilisée pour modéliser la sévérité des sinistres.

| Bandes | Loi MBBEFD | | | | | | | | | |
|----------|-------------|-------------|------------------|-----------------|--------------------|-------|----------------|------------|-------------|-------------|
| | Paramètre g | Paramètre b | p-Value CVM test | p-Value KS test | Proba Perte totale | AIC | AIC oistpareto | AIC oibeta | AIC oigbeta | Loi retenue |
| Bande 1 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 2 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 3 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 4 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 5 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 6 | 529 | 1 | 0,33 | 0,51 | 0,189% | -2990 | -2643 | -2856 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 7 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 8 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 9 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 10 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 11 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 12 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 13 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 14 | 4317 | 1,00003 | 0,59 | 0,54 | 0,023% | -3140 | -2716 | -2998 | -2966 | MBBEFD |
| Bande 15 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 16 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 17 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 18 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 19 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 20 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |
| Bande 21 | 16332 | 1,00107 | 0,08 | 0,06 | 0,006% | -5766 | -5059 | -2998 | -5761 | MBBEFD |

Tableau 17: Méthode Hybride : Tableau synthétique de la Sévérité

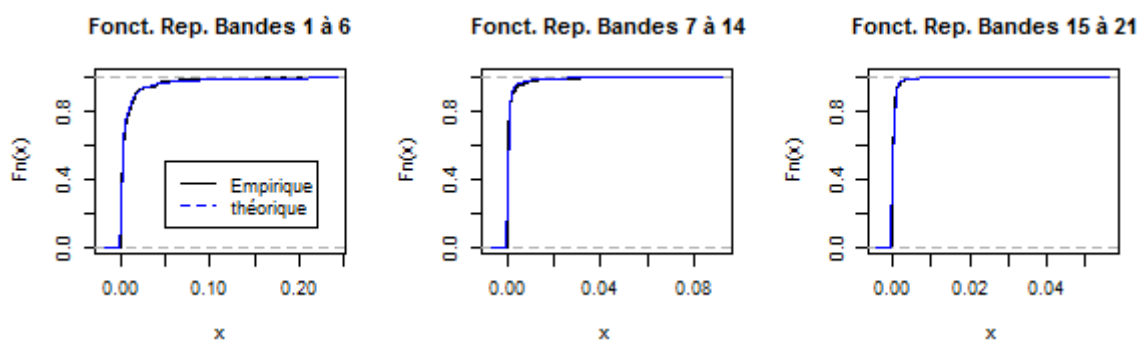


Figure 31: Méthode hybride : Qualité d'ajustement

La modélisation de la sévérité nous conduit à accepter la loi MBBEFD comme ajustant au mieux nos données. Les paramètres estimés sont contenus dans le tableau précédent. La colonne « Proba perte totale » nous donne la probabilité (théorique) d'avoir un sinistre de montant égal à son SMP. On constate qu'elle est décroissante avec la somme assurée.

III. Résultats de la simulation du modèle « hybride ».

La simulation se fait via l'approche fréquence-sévérité exactement comme dans le modèle par exposition « pure ». Nous obtenons les résultats suivants

| Percentiles | Période de Retour | BRUT | Rétention de la filiale | Cédée à SahamRe |
|--------------------------|-------------------|----------------|-------------------------|-----------------|
| 0,10% | 1000 | 432 303 330 | 200 653 667 | 181 567 938 |
| 0,50% | 200 | 515 044 720 | 230 960 209 | 213 126 872 |
| 1,00% | 100 | 552 556 477 | 250 808 718 | 231 717 553 |
| 1,50% | 67 | 575 717 356 | 262 941 594 | 244 774 147 |
| 2,00% | 50 | 594 414 026 | 274 113 682 | 254 161 440 |
| 5,00% | 20 | 671 394 399 | 314 160 909 | 293 751 380 |
| 10,00% | 10 | 752 003 377 | 356 195 907 | 340 679 464 |
| 15,00% | 7 | 816 675 508 | 390 025 427 | 377 596 169 |
| 20,00% | 5 | 875 719 081 | 418 836 633 | 412 583 837 |
| 25,00% | 4 | 936 361 949 | 446 217 842 | 446 915 202 |
| 30,00% | 3 | 988 090 062 | 473 676 847 | 480 019 816 |
| 50,00% | 2 | 1 234 289 911 | 574 911 108 | 641 684 887 |
| 70,00% | 3 | 1 613 232 184 | 687 791 527 | 924 040 125 |
| 75,00% | 4 | 1 759 871 061 | 724 083 599 | 1 035 740 409 |
| 77,00% | 4 | 1 825 723 379 | 739 792 341 | 1 093 758 566 |
| 80,00% | 5 | 1 939 566 808 | 765 552 346 | 1 196 911 891 |
| 85,00% | 7 | 2 191 134 482 | 811 756 213 | 1 427 872 354 |
| 90,00% | 10 | 2 612 152 250 | 875 859 917 | 1 807 974 306 |
| 95,00% | 20 | 3 610 053 516 | 978 968 890 | 2 778 137 750 |
| 98,00% | 50 | 5 504 253 450 | 1 092 224 116 | 4 694 087 411 |
| 99,00% | 100 | 7 781 962 131 | 1 163 781 109 | 7 014 920 616 |
| 99,50% | 200 | 9 929 876 617 | 1 241 319 133 | 9 265 596 087 |
| 99,90% | 1000 | 14 375 603 509 | 1 391 166 150 | 13 674 883 161 |
| Moyenne de la Simulation | | 1 591 470 888 | 599 713 612 | 991 757 277 |

| | | | |
|-------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| Ecart type de la Simulation | 1 313 228 954 | 203 873 844 | 1 222 209 913 |
| Coefficient de variation(CoV) | 83% | 34% | 123% |
| VaR à 95% | 3 610 053 516 | 978 968 890 | 2 778 137 750 |
| TVaR à 95% | 5 988 446 541 | 1 093 249 003 | 5 147 843 022 |
| VaR à 99,5% | 9 929 876 617 | 1 241 319 133 | 9 265 596 087 |
| TVaR à 99,5% | 12 461 136 850 | 1 334 061 844 | 11 675 471 421 |

Tableau 18: Méthode hybride: Quantiles de la charge brute partagée

➤ **Interprétations**

- *Les résultats obtenus par la méthode hybride sont proches de ceux trouvés par la méthode par exposition pure. Mais cette méthode hybride présente l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèse sur le loss-ratio (qui lorsqu'il est mal choisie peut conduire à une appréciation tout à fait erronée de la sinistralité).*
- *La moyenne de la charge brute simulée est de 1,59milliards, l'équivalent d'un loss-ratio de 65%.*
- *On remarque toujours que la réassurance réduit le risque de la cédante et homogénéise son résultat.*
- *Toutes les moyennes simulées sont l'équivalent d'un peu moins de 70% de quantile. Ce qui veut dire que dans 70% des cas on aura un loss-ratio n'excédant pas 65%.*

| Percentiles | Période de Retour | Nombre de graves | Charge grave | Charge attritionnelle |
|-------------|-------------------|------------------|----------------|-----------------------|
| 0,10% | 1000 | - | - | 347 387 643 |
| 0,50% | 200 | - | - | 382 237 246 |
| 1,00% | 100 | - | - | 399 531 473 |
| 1,50% | 67 | - | - | 413 258 000 |
| 2,00% | 50 | 1 | 50 697 612 | 421 770 717 |
| 5,00% | 20 | 1 | 88 280 154 | 457 855 205 |
| 10,00% | 10 | 2 | 157 047 769 | 491 112 831 |
| 15,00% | 7 | 2 | 211 092 311 | 511 743 763 |
| 20,00% | 5 | 2 | 266 838 350 | 530 984 856 |
| 25,00% | 4 | 3 | 319 486 006 | 546 665 860 |
| 30,00% | 3 | 3 | 372 013 084 | 560 525 348 |
| 50,00% | 2 | 4 | 604 907 941 | 614 270 226 |
| 70,00% | 3 | 5 | 980 137 616 | 668 987 676 |
| 75,00% | 4 | 5 | 1 121 332 163 | 685 593 550 |
| 77,00% | 4 | 5 | 1 184 435 854 | 693 321 076 |
| 80,00% | 5 | 6 | 1 304 376 146 | 705 274 817 |
| 85,00% | 7 | 6 | 1 560 166 723 | 727 141 248 |
| 90,00% | 10 | 7 | 1 986 655 489 | 755 201 377 |
| 95,00% | 20 | 8 | 2 986 075 861 | 802 364 131 |
| 98,00% | 50 | 9 | 4 877 318 950 | 851 622 232 |
| 99,00% | 100 | 9 | 7 097 011 920 | 888 260 536 |
| 99,50% | 200 | 10 | 9 375 297 719 | 923 822 557 |
| 99,90% | 1000 | 11 | 13 652 117 481 | 977 953 036 |

| | | | |
|-------------------------------|-----|----------------|-------------|
| Moyenne de la Simulation | 4 | 971 995 224 | 619 475 664 |
| Ecart type de la Simulation | 2 | 1 306 146 897 | 104 371 582 |
| Coefficient de variation(CoV) | 50% | 134% | 17% |
| VaR à 95% | 8 | 2 986 075 861 | 802 364 131 |
| TVaR à 95% | 10 | 5 361 861 560 | 854 139 470 |
| VaR à 99,5% | 10 | 9 375 297 719 | 923 822 557 |
| TVaR à 99,5% | 11 | 11 836 253 440 | 960 458 592 |

Tableau 19: Méthode hybride : Quantiles de l'attritionnel et des graves simulées

➤ **Interprétations**

- *De même ces résultats ne sont pas très éloignés de ceux de la méthode par exposition pure.*
- *Une différence à noter se trouve dans la probabilité en 0 du nombre de sinistres majeurs. Elle passe de 2% à 1,5% dans la méthode hybride.*
- *Le nombre maximum possible de graves auquel on peut s'attendre pour une année donnée demeure 11.*

CHAPITRE II. Tarification des traités de réassurance (EDP et XS)

La tarification d'un contrat de réassurance en excédent de plein est triviale. Disposant des paramètres de l'EDP à savoir la capacité et le plein de rétention et ayant supposé que chaque risque a une somme assurée égale au SMP moyen de la bande nous appliquons la formule de l'EDP (Voir chapitre 1) et nous en déduisons les taux de cession. Par contre l'exercice n'est pas si évident quand il s'agit de pricer un traité en excédent de sinistre (XS) surtout quand il faut le faire sur la rétention (c'est-à-dire après cession en EDP) comme dans notre cas.

La problématique de la tarification est d'estimer la prime pure à céder comme étant l'espérance de la sinistralité cédée. Pour un contrat XS on doit avoir $\pi(D, P) = E(S_{cédée})$. D représente la Priorité et P la Portée de l'XS. Il existe dans la littérature trois méthodes pour tarifier un contrat en XS qui nous décidons de présenter ci-dessous.

I. Tarification par « Burning Cost ».

Cette méthode consiste à calculer le taux moyen basé sur les données d'expérience de la cédante. Le taux *Burning Cost* sera la moyenne des taux des années d'expérience pondéré par les primes. La première étape est de corriger les montants des sinistres et des primes de l'inflation et de modification de la composition du portefeuille de la cédante (exercice déjà fait). Cette correction permet de trouver les montants de primes qui auraient été émises l'année de cotation pour une couverture semblable à celles des années de l'historique.

Supposons un contrat D XS P, $X_{i,j}$ le montant du $i^{ème}$ sinistre survenu l'année j , et π_j l'assiette de prime de l'année j (prime perçue et retenue par la cédante après la cession en EDP). On a à notre disposition un historique de n années.

La charge de sinistre tombée dans l'XS pour l'année j est donnée par :

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j} \min\{P, \max(X_{i,j} - D, 0)\}$$

Le taux de prime de risque ou Burning Cost pur de risque pour l'année j (c'est-à-dire le taux de prime qu'il fallait appliquer l'année j pour couvrir complètement la charge supportée la même année) est $BC_j = \frac{S_j}{\pi_j}$. Le Burning Cost pur moyen est $\overline{BC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n BC_j$. Cette moyenne n'est rien d'autre que le taux de cession en primes de la réassurance XS pour l'année de cotation trouvé par la méthode Burning Cost. La prime pure à céder correspond à $\pi = \pi_{estimée} * \overline{BC}$. $\pi_{estimée}$ Est la prime estimée de l'année de cotation.

La tarification Burning Cost a pour avantage de donner un taux fiable et crédible eu égard à l'expérience lorsque les tranches tarifées sont travaillantes, c'est-à-dire lorsqu'il y a une large quantité de sinistres qui traversent la tranche régulièrement chaque année. Mais cette approche comporte aussi de nombreux inconvénients. En effet elle suppose que les données disponibles du passé reflètent bien le futur, ce qui n'est généralement pas le cas en raison des changements dans les politiques de souscription. De plus elle ne permet pas de tarifier des tranches dites « non travaillantes » car, par définition, ces tranches n'ont aucune donnée d'expérience.

Sur les 5 années dont nous disposons, nous avons été témoin que de deux sinistres qui sont tombés dans l'XS (en 2013 et en 2016) c'est-à-dire dont la sévérité est supérieur à la priorité de

l'XS. Ces deux sinistres ne peuvent pas en eux seuls nous donner un bon tarif de l'XS, on passe à une seconde méthode dite « probabiliste ».

II. Tarification par l'approche « probabiliste » ou « fréquence-coût »

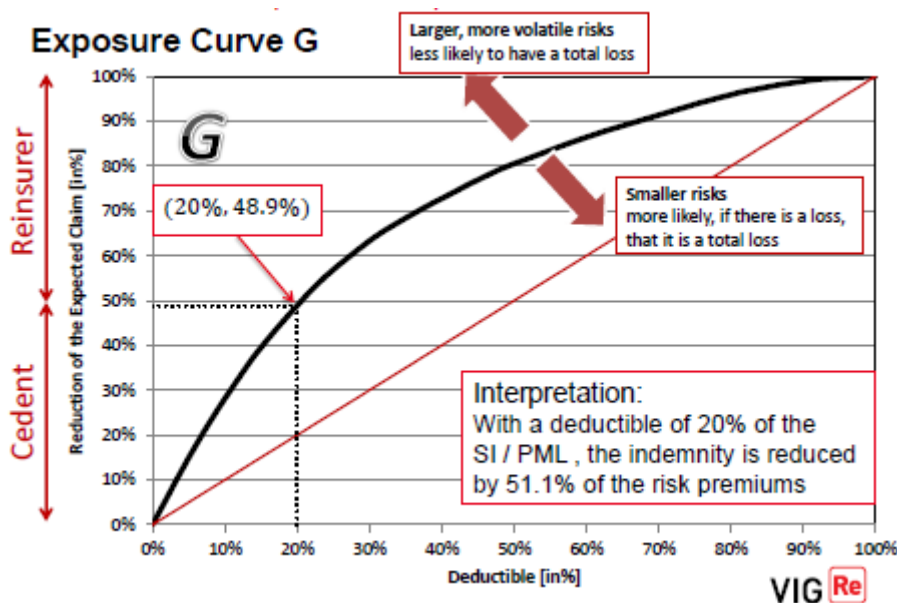
Alors que l'approche historique consiste à trouver le taux moyen des années passées revalorisé en date de cotation, l'approche probabiliste a pour conviction de trouver, à partir des données d'expérience, les distributions des fréquences et des sévérités du risque de la cédante. A partir de ces lois, l'estimation du tarif sera possible par simulation.

Pour implémenter ladite méthode nous commençons par simuler la charge de sinistres via la méthode fréquence-sévérité (exactement comme dans la méthode par expérience). Après avoir trouvé la distribution de la sinistralité nous pouvons aisément appliquer la méthode de Burning Cost pour tarifier notre XS en considérant chaque scénario simulé comme une année d'expérience. Cette méthode nous donne bien un nombre suffisant de sinistres dont le montant est supérieur à la priorité mais nous faisons toujours face à un obstacle : notre traité XS est sur rétention, la charge individuelle simulée ne nous permet pas de l'identifier à un risque donné et appliquer ici le taux de cession en EDP d'autant plus que tous les risques qui seront souscrits par la compagnie ne sont pas connaissables dès le début de l'année.

Il convient de noter que la méthode de Burning Cost et l'approche probabiliste sont toutes deux des méthodes basées sur l'expérience. Face aux limites des méthodes par expérience, une nouvelle méthode vue le jour, basée sur l'exposition. Il s'agit de la méthode par « exposition », considérée comme une amélioration des deux précédentes méthodes.

III. La Méthode de tarification par « exposition ».

Cette méthode de cotation par exposition permet de répartir les primes entre l'assureur et le réassureur, sans dépendre des fluctuations statistiques de la sinistralité. Elle est basée sur les courbes d'exposition dont nous avons déjà évoquées.



Exemple de Courbe d'exposition

Pour un contrat de réassurance L XS D, le pourcentage de risque supporté par cette tranche sera donné par la formule $\tau = G\left(l = \frac{D+L}{SMP}\right) - G\left(d = \frac{D}{SMP}\right)$. Il est évident que la prime à céder doit être à la hauteur du risque à supporter. Le taux de prime de risque ne sera rien d'autre que τ . La courbe d'exposition ajustée se fait sur les taux de destruction bruts d'EDP et de XS mais le τ trouvé est appliqué sur la prime net d'EDP

Comme déjà évoqué la courbe d'exposition unique que nous avons ajustée pour l'ensemble des bandes de SMP n'est pas assez satisfaisante car elle ne représente pas au mieux nos données à partir d'un certain niveau de taux de destruction, elle a donc besoin d'une transformation avant qu'elle ne puisse être aisément utilisée dans notre cotation.

III.1. Transformation de la courbe d'exposition pour besoin de la tarification

La distorsion étant constatée au-delà du seuil de 1,8%, c'est la portion [1,8% ; 100%] qui pose problème. Pour construire la courbe au-delà de ce seuil, on ne sélectionne que les sinistres qui ont un taux de dommage excédent 1,8%. L'étude des courbes d'exposition se fait habituellement dans l'intervalle [0%, 100%] donc nous allons procéder à un changement de variable pour se ramener à un tel échantillon. On pose :

$$\begin{cases} S' = S - \text{Seuil} * SMP \\ SMP' = (1 - \text{Seuil}) * SMP \end{cases} \Rightarrow Tx \text{ Dommage} = x' = \frac{S'}{SMP'}$$

On se trouve alors dans le cas 'standard', donc on peut trouver la courbe d'exposition correspondante. S représente la charge individuelle de sinistre. L'enjeu est ensuite d'ajuster une courbe MBBEFD sur cette courbe empirique, puis de reconstituer la courbe d'exposition théorique complète sur [0,1] en intégrant la partie manquante sur [0%, 1,8%]. En effet, pour passer de la courbe théorique sur [1,8%, 100%] à [0%, 100%], il nous faut appliquer un changement de variable qui permette d'obtenir une courbe pour laquelle au point d'abscisse 1,8% (auquel correspondait 0% en ordonnée) on fait correspondre la valeur lue sur la courbe empirique, pour assurer la continuité entre les deux.

```
> fitDR(txdom.sup.transf,"MBBEFD",method="mle")
Fitting of the distribution ' MBBEFD ' by maximum likelihood

Parameters:
      estimate Std. Error
g 1.333608e+09          NA
b 7.498448e-10          NA

> ad.test(txdom.sup.transf, "pMBBEFD", estim.mbbefd.sup$estimate[1],
estim.mbbefd.sup$estimate[2])

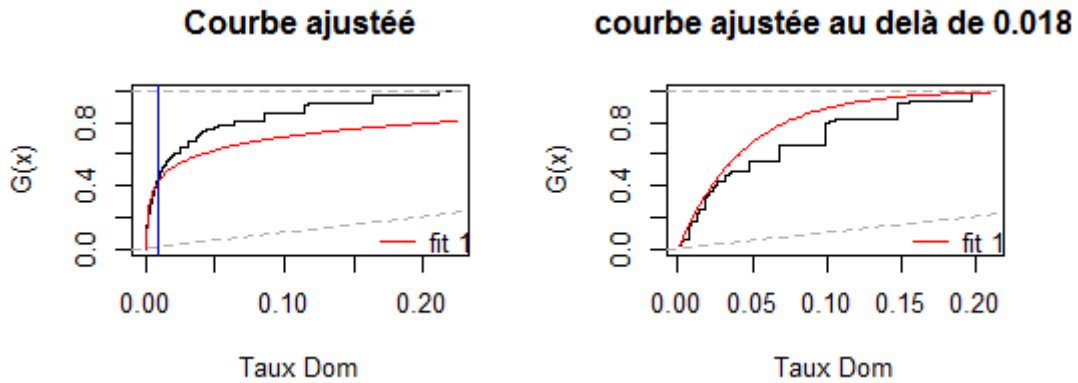
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pMBBEFD'

data: txdom.sup.transf
An = 1.7323, p-value = 0.1299
```

```
> cvm.test(txdom.sup.transf, "pMBBEFD", estim.mbbefd.sup$estimate[1],
,estim.mbbefd.sup$estimate[2])
```

Cramer-von Mises test of goodness-of-fit
Null hypothesis: distribution 'pMBBEFD'

```
data: txdom.sup.transf
omega2 = 0.22672, p-value = 0.2215
```



Toutes les vérifications tendent à accepter ce modèle, il sera donc retenu.

Ainsi de la courbe théorique (MBBEFD) sur [1,8%,100%] et de la courbe empirique sur [0%, 100%], on déduit une courbe théorique sur [0%, 100%]. Formellement cet exercice s'écrit de la manière suivante :

$$G'_{b,g}(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \leq \text{Seuil} \\ G_{b,g} \left(\frac{x - \text{Seuil}}{1 - \text{Seuil}} \right) * [1 - G(\text{Seuil})] + G(\text{Seuil}) & \text{si } x > \text{Seuil} \end{cases}$$

- ✓ $G(x)$ Est la valeur lue sur la courbe d'exposition empirique pour un taux de dommage de x .
- ✓ $G_{b,g}$ est la courbe d'exposition théorique ajustée sur les taux de dommage au-delà du seuil.

III.2. Tarifs obtenus

Les résultats de la tarification des traités de réassurance en EDP et en XS sont consignés dans le tableau suivant.

| Bandes | Assiette de Prime EDP | Taux cession EDP | Primes EDP | Assiette de Prime XS | Taux Prime XS | Primes XS |
|--------|-----------------------|------------------|------------|----------------------|---------------|-----------|
| 1 | 128 097 336 | 0% | - | 128 097 336 | 0% | - |
| 2 | 136 055 612 | 0% | - | 136 055 612 | 0,0002% | 210 |
| 3 | 109 048 062 | 0% | - | 109 048 062 | 0,04% | 39 792 |
| 4 | 87 205 161 | 0% | - | 87 205 161 | 0,32% | 275 013 |
| 5 | 125 478 582 | 10% | 11 987 170 | 113 491 412 | 0,85% | 968 577 |
| 6 | 176 725 860 | 34% | 60 434 997 | 116 290 863 | 0,85% | 992 468 |
| 7 | 159 826 599 | 50% | 80 097 883 | 79 728 716 | 0,85% | 680 434 |
| 8 | 85 556 095 | 59% | 50 333 756 | 35 222 339 | 0,85% | 300 600 |
| 9 | 134 095 222 | 64% | 85 634 182 | 48 461 041 | 0,85% | 413 584 |
| 10 | 103 581 497 | 70% | 72 660 602 | 30 920 895 | 0,85% | 263 890 |

| | | | | | | |
|-------|---------------|--------|---------------|---------------|-------|-----------|
| 11 | 94 840 192 | 74% | 70 518 669 | 24 321 523 | 0,85% | 207 569 |
| 12 | 128 123 569 | 77% | 98 410 189 | 29 713 380 | 0,85% | 253 585 |
| 13 | 85 964 121 | 80% | 68 651 721 | 17 312 399 | 0,85% | 147 750 |
| 14 | 111 592 461 | 82% | 91 580 483 | 20 011 978 | 0,85% | 170 789 |
| 15 | 321 811 390 | 86% | 275 432 689 | 46 378 700 | 0,85% | 395 813 |
| 16 | 155 394 812 | 87% | 134 874 195 | 20 520 617 | 0,85% | 175 130 |
| 17 | 62 439 667 | 89% | 55 472 887 | 6 966 779 | 0,85% | 59 457 |
| 18 | 42 079 696 | 90% | 37 819 887 | 4 259 809 | 0,85% | 36 355 |
| 19 | 47 993 982 | 91% | 43 708 805 | 4 285 177 | 0,85% | 36 571 |
| 20 | 43 515 725 | 92% | 40 062 096 | 3 453 629 | 0,85% | 29 475 |
| 21 | 84 795 682 | 93% | 78 738 847 | 6 056 834 | 0,85% | 51 691 |
| Total | 2 424 221 322 | 55,95% | 1 356 419 059 | 1 067 802 263 | 0,51% | 5 498 752 |

Tableau 20: Tarifs EDP et XS

➤ **Interprétations**

- *Comme on peut le constater les premières bandes de SMP ne sont quasiment pas cédées ni en EDP, ni en XS. Il s'agit là même d'un des principes fondamental de la réassurance qui veut que l'on ne cède que les gros risque et retenir les petits risques.*
- *La grande partie de la prime chargée initialement par la compagnie aux assurés est cédée en EDP (environ 55,95%) et une infime partie en XS (0,23% sur la prime initiale et 0,53% sur son assiette de primes) ; cela est dû au fait que l'XS est appliqué sur la rétention.*
- *On définit ici deux notions importantes en réassurance XS : le ROL (Rate On Line) et le Payback.*
- *$ROL (pur) = \frac{Prime (pure)}{Portée}$, il est interprété comme étant le prix d'une unité de XS. $Payback = \frac{1}{ROL}$, Il est parfois interprété comme le "nombre d'années qu'il faudrait sans sinistre afin de pouvoir payer un sinistre à plein".*
- *La Portée de l'XS est de 800millions et sa prime de 5,5millions, le prix d'une unité de XS est donc de **0,007** soit l'équivalent de **145années** de payback. Il faudra donc à la captive 145 années de collecte de primes XS afin d'être à mesure d'honorer un engagement de sinistre lui faisant appel à hauteur de la portée qu'elle a accordé. La réassurance est donc une vision à long terme.*

CONCLUSION

La méthode par exposition est souvent considérée comme une amélioration de celle par expérience. Le passé n'expliquant pas à 100% le futur nous devons trouver une méthode alternative qui permet de prendre en compte les changements dans le profil de risque, chose que sait bien le faire le modèle par exposition.

Nos études montrent une convergence de la sinistralité moyenne brute simulée par les différentes méthodes. La différence notable est observée au niveau de la distribution basse. Pendant que la méthode par expérience nous donne des VaR relativement moins élevées, la méthode par exposition attire notre attention sur une exposition au risque non négligeable beaucoup plus importante.

Pour tarifer notre traité XS nous faisons une fois de plus appel à la méthode par exposition car ne disposant pas assez de données de sinistralité sur notre XS on ne peut donc pas utiliser la méthode classique de Burning Cost ou bien probabiliste. Cette méthode de pricing s'avère incontournable quand il s'agit de tarifer un nouveau contrat de réassurance XS.

Il serait intéressant dans une prochaine étape de modéliser le résultat de SAHAM Ré après acceptation en appliquant notre outil à toutes les filiales du Groupe. Cela aboutira à une optimisation du résultat et à la détermination de la meilleure couverture de récession possible.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Stephan Bernegger (1994)**: « *The Swiss Re Exposure curves and the MBBEFD Distribution Class* »
2. **Arthur Charpentier, Christophe Dutang (2012)** : « *L'Actuariat avec R* »
3. **Ana J. Mata, Mark A. Verheyen (2005)** : “*An Improved Method for Experience Rating, Reinsurance Treaties using Exposure Rating Techniques*”; *Casualty Actuarial Forum*, Spring 2005.
4. **Mathieu POULIN (2012)** : « *Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie* ».
5. **Pietro PARODI** : « *PRICING IN GENERAL INSURANCE* »

ANNEXES

Annexe I : Code de la Simulation Monte-Carlo de la méthode par exposition

```
indiv.charge=matrix(nrow = n,ncol =max.N.Sinistre )

#set.seed(1234)
for(k in 1:n){
  Moy.Bande=as.numeric(BandesSA[k,3])/as.numeric(BandesSA[k,4])
  indiv.charge[k,]
  =Moy.Bande*rMBBEFD(max.N.Sinistre,Comp.Estims.Mat[k,1],Comp.Estims.Mat[k,2] )
}

# Calcul de l'agregate loss pour chaque scénario
Montant.Charge=matrix(nrow=n,ncol= N.sim) # Matrice de la charge des sinistres par bande et
scénario
for(k in 1:n){
  if(N.Sinistre[k,1]==0){
    Montant.Charge[k,1]=0
  }
  else{
    Montant.Charge[k,1]=sum(N.Montant.Sin[k,(N.sim +2):(N.sim +2+N.Sinistre[k,1]-1)])}
}
for(k in 1:n){
  for(i in 2:(N.sim)){
    Montant.Charge[k,i]=sum(N.Montant.Sin[k,(N.sim+2+sum(N.Sinistre[k,(1:(i-1)]))):(N.sim
+1+sum(N.Sinistre[k,(1:(i-1)]))+N.Sinistre[k,i])])
  }
}

# Chaque ligne de Agg.Charge correspond à une bande et chaque colonne à un scénario et chaque
élément à la charge simulée

# Calcul de la charge agrégée des sinistres pour chaque scénario (Charge annuelle) scénario
abstraction faite de la bande
Agg.Charge = apply(Montant.Charge,2,sum)

# On associe à Montant.Charge en bas de ligne la charge annuelle correspondant à chaque scénario
abstraction faite de la bande
Montant.Charge.Agg=rbind(Montant.Charge,Agg.Charge)
# Nommer les colonnes et lignes de la matrice des charges
colnames(Montant.Charge.Agg)=str_c("Sim ",1:N.sim)
```

```

rownames(Montant.Charge.Agg)=c(str_c("Bande ",1:n), "Total")

# Appréciation de la convergence de la simulation vers la moyenne théorique
Moy.Mat=matrix(nrow=n,ncol=3)
for(h in 1:n){
  Moy.Mat[h,1]=(1/N.sim)*sum(Montant.Charge.Agg[h,])
  Moy.Bande=as.numeric(BandesSA[h,3])/as.numeric(BandesSA[h,4])

Moy.Mat[h,2]=Moy.Bande*m.MBBEFD(1,Comp.Estims.Mat[h,1],Comp.Estims.Mat[h,2])*Lambda.
Mat[h,1]
  Moy.Mat[h,3]=Moy.Mat[h,2]-Moy.Mat[h,1]
}
Moy.Mat=rbind(Moy.Mat,apply(Moy.Mat,2,sum))
colnames(Moy.Mat)=c("Moy Simul","Moy théo","Moy théo - Moy Simul")
rownames(Moy.Mat)=c(str_c("Bande ",1:n), "Total")
write.csv2(Moy.Mat,"Rsltbande_ECparBd.csv")

# Percentiles qui seront utilisés pour calculer la distribution
percs = c(0.001,0.005,0.01,0.015,0.02,0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.5,0.70, 0.75, 0.77,0.8, 0.85, 0.9,
0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999)

pers.Montant.brut =c(quantile(Montant.Charge.Agg[n+1,],probs
percs),mean(Montant.Charge.Agg[n+1,]),Moy.Mat["Total","Moy
théo"],sd(Montant.Charge.Agg[n+1,])
, sd(Montant.Charge.Agg[n+1,])/mean(Montant.Charge.Agg[n+1,])
,quantile(probs
0.95,Montant.Charge.Agg[n+1,]),mean(subset(Montant.Charge.Agg[n+1,],Montant.Charge.Agg[n+
1,]>quantile(probs = 0.95,Montant.Charge.Agg[n+1,])))
,quantile(probs
0.995,Montant.Charge.Agg[n+1,]),mean(subset(Montant.Charge.Agg[n+1,],Montant.Charge.Agg[n
+1,]>quantile(probs = 0.995,Montant.Charge.Agg[n+1,])))
Percentiles = c(percs,"Moy SIMUL Brut","Moy THEO Brut","E.Type SIMUL Brut","CoV
Brut","VaR à 95%","TVaR à 95%","VaR à 99,5%","TVaR à 99,5%")
table.rslts = data.frame(Percentiles,pers.Montant.brut)
table.rslts
write.csv2(table.rslts,"RsltPers_ECparBd.csv")

```

ANNEXE 2: Code de la tarification par exposition

```
seuil.devi=0.02
```

```
txdom.sup=subset(TauxDom,TauxDom[,2]>=seuil.devi)
colnames(txdom.sup)=c("SA","Tx Dom","Num Bd")
```

```
# txdom.sup est element de [Seuil%,100%], Pour avoir des taux sur [0%,100%] et pouvoir estimer
# la courbe MBBEFD on passe par la transformation suivante
```

```
txdom.sup.transf=rep(0,length(txdom.sup[,1]))
for(k in 1:length(txdom.sup[,1])){
  txdom.sup.transf[k]=(txdom.sup[k,1]*txdom.sup[k,2]-
seuil.devi*txdom.sup[k,1])/(txdom.sup[k,1]*(1-seuil.devi))
}
```

```
# On estime la courbe d'exposition au-delà du seuil
```

```
x11()
```

```
estim.mbbefd.sup=fitDR(txdom.sup.transf,"MBBEFD",method="mle")
```

```
eccomp(estim.mbbefd.sup,do.points=FALSE, main=str_c("courbe ajustée au delà de
",seuil.devi),xlab = "Taux Dom")
```

```
cvm.test.mbbefd.sup=cvm.test(txdom.sup.transf, "pMBBEFD",
estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2])
```

```
ad.test.mbbefd.sup=ad.test(txdom.sup.transf, "pMBBEFD",
estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2])
```

```
ks.test.mbbefd.sup=ks.test(txdom.sup.transf,pMBBEFD,estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd
.sup$estimate[2])
```

```
if(ks.test.mbbefd.sup$p.value<=0.05){
```

```
  print(str_c("Le choix du seuil de deviation ",seuil.devi, "n'est pas recommandé. Veuillez choisir un
autre Seuil"))
}
```

```
Taux.prime.XS.0=matrix(0,n,1)
```

```
## Le G au-delà du seuil se calculera différemment
```

```
# for(k in 1:n){
```

```
#   Moy.Bande.SMP=(as.numeric(BandesSA[k,3])/as.numeric(BandesSA[k,4]))*(1-
Taux.cession.edp[k])
```

```
#   if(((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP)>=seuil.devi){
```

```
#     G.du.Plafond.XS=(ecMBBEFD((((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP)-seuil.devi)/(1-
seuil.devi),estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2]))*(1-seuil.devi)+
```

```
#   (ecMBBEFD(seuil.devi,estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2]))
```

```
#   }else {
```

```
#
```

```
G.du.Plafond.XS=ecMBBEFD((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP,estim.mbbefd$estimate[1],estim.
```

```

mbbefd$estimate[2])
# }
# if(((Priorité)/Moy.Bande.SMP)>=seuil.devi){
#           G.dela.Priorité.XS=(ecMBBEFD(((Priorité)/Moy.Bande.SMP)-seuil.devi)/(1-
seuil.devi),estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2]))*(1-seuil.devi)+
# (ecMBBEFD(seuil.devi,estim.mbbefd.sup$estimate[1],estim.mbbefd.sup$estimate[2]))
# }else {
#
G.dela.Priorité.XS=ecMBBEFD((Priorité)/Moy.Bande,estim.mbbefd$estimate[1],estim.mbbefd$esti
mate[2])
# }
# Taux.prime.XS.0[k,1]=G.du.Plafond.XS-G.dela.Priorité.XS;
# }

## Le G au-delà du seuil se calculera différemment
# Le G lu sur la courbe empirique au niveau du seuil
G.Seuil=as.numeric(lapply(seuil.devi,eecf(TauxDom[,2])))
# 1-as.numeric(G.Seuil)
# names(G.Seuil);1-G.Seuil
for(k in 1:n){
  Moy.Bande.SMP=(as.numeric(BandesSA[k,3])/as.numeric(BandesSA[k,4]))*(1-
Taux.cession.edp[k])
  # Taux de dommage correspondant au plafond de l'XS
  TxDom.Plafond=(Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP
  TxDom.Priorité=(Priorité)/Moy.Bande.SMP
  if(TxDom.Plafond>seuil.devi){
    G.du.Plafond.XS=(ecMBBEFD((TxDom.Plafond-seuil.devi)/(1-
seuil.devi),estim.mbbefd.sup$estimate[1]
,estim.mbbefd.sup$estimate[2]))*(1-G.Seuil)+ G.Seuil
  }else {
    G.du.Plafond.XS=lapply(TxDom.Plafond,eecf(TauxDom[,2]))
  }
  if(TxDom.Priorité>seuil.devi){
    G.dela.Priorité.XS=(ecMBBEFD((TxDom.Priorité-seuil.devi)/(1-
seuil.devi),estim.mbbefd.sup$estimate[1]
,estim.mbbefd.sup$estimate[2]))*(1-G.Seuil)+ G.Seuil }else {
    G.dela.Priorité.XS=lapply(TxDom.Priorité,eecf(TauxDom[,2]))
  }
  Taux.prime.XS.0[k,1]=G.du.Plafond.XS-G.dela.Priorité.XS;
}

# Taux.prime.XS.0=matrix(0,n,1)
# for(k in 1:n){
#           Moy.Bande.SMP=(as.numeric(BandesSA[k,3])/as.numeric(BandesSA[k,4]))*(1-
Taux.cession.edp[k])
#
Taux.prime.XS.0[k,1]=ecMBBEFD((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP,Comp.Estims.Mat[k,1],Com

```

```

p.Estims.Mat[k,2]-
ecMBBEFD((Priorité)/Moy.Bande.SMP,Comp.Estims.Mat[k,1],Comp.Estims.Mat[k,2]);
#
#Taux.prime.XS.0[k,1]=ecMBBEFD((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP,estim.mbbefd$estimate[1],
estim.mbbefd$estimate[2])-
ecMBBEFD((Priorité)/Moy.Bande.SMP,estim.mbbefd$estimate[1],estim.mbbefd$estimate[2]);
#      #Taux.prime.XS.0[k,1]=ecMBBEFD((Priorité+Portée)/Moy.Bande.SMP,swissRe(c =
5)[2],swissRe(c = 5)[1])-ecMBBEFD((Priorité)/Moy.Bande.SMP,swissRe(c = 5)[2],swissRe(c =
5)[1]);
# }

# Tableau des taux et des Montants de primes à céder à Saham Re pour la Réass XS sur Retention
Prime.Mat.0=matrix(0,n,1)
for(k in 1:n){
  Prime.Mat.0[k,1]=Taux.prime.XS.0[k,1]*(1-Taux.cession.edp[k])*as.numeric(BandesSA[k,5])
}
Primes.Mat.0=cbind(Taux.prime.XS.0,Prime.Mat.0)
rownames(Primes.Mat.0)=c(str_c("Bande ", 1:n))
colnames(Primes.Mat.0)=c("Taux Prime CE initial","Prime")
write.csv2(Primes.Mat.0,"PrimesXS_ECparBd_0.csv")

```

ANNEXE 3: Code de la technique agrégation par les copules

```
Para_copulaGauss=cor(x=Distr NBSIN Attr,y=Distr NBSIN Grav,method = "pearson")  
norm.cop <- normalCopula(c(Para_copulaGauss), dim = 2, dispstr = "un") # Def de la copule  
gaussienne  
# Para_copulaGauss=rho(paramètres) c'est aussi le coef de corr de Pearson  
Cop.simul <- rCopula(N.sim, norm.cop)# Simulation des lois uniformes par une copule gaussienne  
#####  
  
# Simulation de l'attritionnel -----  
# Matrice receptrice de la simulation des sinistres attritionnels  
SinsAttri=matrix(nrow = N.sim, ncol = 3)  
colnames(SinsAttri)=c("Nb Attri", "Chg Indiv Moy Attri", "Chg Annuel Attri")  
SinsAttri[,1]=qnbinom(Cop.simul[,1],Adj.Nbinom Attri$estimate[1],Adj.Nbinom Attri$estimate[2])  
SinsAttri[,2]=rweibull(N.sim,Adj.weibull Attri$estimate[1],Adj.weibull Attri$estimate[2])  
SinsAttri[,3]=SinsAttri[,1]*SinsAttri[,2]  
Moy.nbinom.Attri=mmedist(Distr NBSIN Attri,"nbinom")$estimate[2]  
Moy.weibull.Attri=mweibull(1,Adj.weibull Attri$estimate[1],Adj.weibull Attri$estimate[2])  
Moy.theo.Attri=Moy.nbinom.Attri*Moy.weibull.Attri  
E.type.Sim.Attri=sd(SinsAttri[,3])  
Moy.Sim.Attri=mean(SinsAttri[,3])  
# Synthèse de l'attritionnel  
# Percentiles qui seront utilisés pour calculer la distribution  
percs = c(0.001,0.005,0.01,0.015,0.02,0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.5,0.70, 0.75, 0.77,0.8, 0.85, 0.9,  
0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999)  
pers.Montant.Attri =c(quantile(SinsAttri[,3],probs =  
percs),Moy.Sim.Attri,Moy.theo.Attri,E.type.Sim.Attri)  
Percentiles = c(percs,"Moy.Sim.Attri", "Moy.theo.Attri", "E.type.Sim.Attri")  
table.rslts Attri = data.frame(Percentiles,pers.Montant.Attri)  
table.rslts Attri  
write.csv2(table.rslts Attri,"RsltPers ExperRatingUlt Attri.csv")  
#####  
  
# Simulation des sinistres graves -----  
#### une fonction très utile  
# La fonction Mettre.zeros li un vecteur de longueur 1+n et  
# produit un vecteur n-dimensionnel avec k 1 et n-k 0  
# ou k est le premier element du vecteur input (x[1])  
Mettre.zeros = fonction(x){  
  multiplicateur = c(rep(1,x[1]),rep(0,length(x)-1-x[1]))  
  x = x[-1]*multiplicateur  
  ### x[-i] supprime le ième élément du vecteur x  
}  
###  
  
#N.Sin.Sim Grav = qpois(Cop.simul[,2],Adj.pois Grav$estimate)  
N.Sin.Sim Grav =  
qnbinom(Cop.simul[,2],Adj.Nbinom Grav$estimate[1],Adj.Nbinom Grav$estimate[2])  
max.N.Sin.Sim Grav = max(N.Sin.Sim Grav) # Aide à contruire une matrice finie
```

Créer une matrice de N.sim de montants iniv de Sinistres

indiv.Sin = rgpd(N.sim*max.N.Sin.Sim Grav, xi=estim.gpd\$par.ests[1],beta=estim.gpd\$par.ests[2], mu=Seuil)

#subset(indiv.Sin,indiv.Sin>200000000)

Montants.Sin = matrix(indiv.Sin,ncol = max.N.Sin.Sim Grav)

Sin.Mat = cbind(N.Sin.Sim Grav,Montants.Sin)

Pour chaque scenario on garde seulement les premiers sinistres

Montants = t(apply(Sin.Mat,I,Mettre.zeros)) # Le "t" car Apply() transposera la matrice

agg.Montants = apply(Montants,I,sum)

E.type.Sim.grav=sd(agg.Montants); Moy.Sim.grav=mean(agg.Montants)

Moyenne théorique du montant des Sinistres graves

Moy.gpd=gpdMoments(xi=estim.gpd\$par.ests[1],beta=estim.gpd\$par.ests[2], mu=Seuil)

Moy.gpd=Moy.gpd\$mean

Moyenne théorique de la fréquence des sinistres graves

la fonction mmedist permet de calculer les moments d'ordre pour la loi ajustée

Moy.pois= mmedist(Distr NBSIN Grav,"nbinom")

Moy.pois=Moy.pois\$estimate[2]

Moy.theo.grav=Moy.pois*Moy.gpd

Synthèse des Graves

Percentiles qui seront utilisés pour calculer la distribution

percs = c(0.001,0.005,0.01,0.015,0.02,0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.5,0.70, 0.75, 0.77,0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999)

pers.Montant.Grav =c(quantile(agg.Montants,probs =

percs),Moy.Sim.grav,Moy.theo.grav,E.type.Sim.grav)

Percentiles = c(percs,"Moy.Sim.grav","Moy.theo.grav","E.type.Sim.grav")

table.rslts Grav = data.frame(Percentiles,pers.Montant.Grav)

table.rslts Grav

write.csv2(table.rslts Grav,"RsltPers ExperRatingUlt Grav.csv")

RM: On peut aussi utiliser AggregateDistr() ou bien Simul() de la librairie Actuar****

pour la modélisation fréquence-Sévérité

Matrice de la Simulation des graves

SinsGrav=matrix(nrow = N.sim,ncol=2)

colnames(SinsGrav)=c("Nbre des Graves","Charge des graves")

SinsGrav[,1]=N.Sin.Sim Grav

SinsGrav[,2]=agg.Montants

#####