



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Pricing et évaluation du risque de taux: cas des titres de créance.

Préparé par : Melle Aicha IBNSEDDIK

Sous la direction de : *Mme Nouzha ZAOUJAL (INSEA)*
Mme Karima MOULID (Attijariwafa bank)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat - Finance

Devant le jury composé de :

- *Mr Ayachi BAGHAGHA (INSEA)*
- *Mme Nouzha ZAOUJAL (INSEA)*
- *Mme Karima MOULID (AWB)*

Résumé

Dans le but d'assurer une bonne gestion du risque de marché engendré par les produits de taux, le présent travail propose une démarche complète d'évaluation du risque de taux des titres de créance.

Pour ce faire, nous commençons par la valorisation des obligations selon les normes et les pratiques du marché financier marocain, ce qui nous permet de construire une base de données des prix du portefeuille obligataire. L'historique des prix est ensuite utilisé pour évaluer les pertes potentielles, en appliquant d'abord les méthodes classiques de Value at Risk.

Ces dernières ne captant que les événements normaux du marché, elles n'arrivent pas à tenir compte des variations extrêmes des facteurs de risque. Pour remédier à ce problème, nous introduisons la théorie des valeurs extrêmes qui mesure le risque en ne modélisant que les queues de distribution.

Une comparaison entre les différentes méthodes nous permettra de choisir celles qui sont mieux adaptées à ce type de portefeuille.

Enfin nous élaborons des scénarii de crises pour estimer les pertes éventuelles que peut subir notre portefeuille d'obligations dans les conditions défavorables du marché.

Mots clés

Risque de taux, Pricing des obligations, Value at Risk, théorie des valeurs extrêmes, stress testing.

Dédicaces

A ma maman chérie, celle qui m'a tant aimée, tant soutenue et qui as toujours été à mes côtés.

A mon cher papa, je ne saurais exprimer l'amour, l'estime et le dévouement que j'ai toujours eus pour toi.

Je vous suis reconnaissante pour l'amour que vous m'avez porté, pour les sacrifices que vous avez faits pour moi, pour les encouragements sans lesquels je n'aurais pu réaliser mes rêves. Simplement, je vous aime.

A mes chers frères Yassine et Oussama, vous avez été l'exemple pour moi, vous avez toujours cru en moi et m'avez tant encouragée. Je suis fière de vous avoir comme frères.

A mon cher frère Abderrahmane, j'espère te voir réaliser tes rêves et aller au-delà de tes ambitions.

A Youssef, mon adorable petit frère,

A Douâa, tu es beaucoup plus qu'une amie pour moi, merci de m'avoir supportée, soutenue et d'avoir toujours été à mon écoute.

A mes chères amies, Sara, Rita, Mimi, Khadija, Ouafaa, Ghita, Soumia, Sanaa, Kaoutar, Kawtar, Amina, Sara.

A mes adorables cousines Khawla, Amina, Imane, Oumama, Touaiba, Loubaba.

Grâce à vous toutes, je n'ai jamais senti que je n'ai pas de sœur.

A Kaoutar et Abdellah, merci de m'avoir aidée, encouragée, tenu compagnie et fait de mon stage un moment très agréable.

A toute ma famille.

Je vous aime tous, vous m'êtes très chers et c'est vous qui avez fait de moi la personne que je suis aujourd'hui.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à mon encadrante interne Mme Nouzha ZAOUJAL, pour l'aide et les conseils pertinents qu'elle m'a apportés tout au long de mon projet de fin d'études.

Mes sincères remerciements s'adressent également à mon encadrante Karima MOULID, responsable Middle Office à la salle des marchés d'Attijariwafa bank, pour ses efforts, son écoute et son encouragement qui ont fait de mon stage une expérience très enrichissante.

Je remercie tout particulièrement et témoigne ma reconnaissance à tout le personnel de la Salle des marchés d'AWB pour leur soutien et leur disponibilité durant toute la période de mon stage.

Enfin, je remercie le corps professoral de l'INSEA, pour ses efforts continus afin de nous offrir une meilleure formation, ainsi que toute autre personne ayant participé de différentes façons à la réussite de mon projet de fin d'études.

Table des matières

Résumé	3
Dédicaces	4
Remerciements	5
Liste des abréviations	9
Liste des figures	10
Liste des tableaux	10
Introduction	11
Chapitre préliminaire: Présentation du cadre du travail.....	13
I. Présentation de la salle des marchés.....	14
II. Les pôles de la salle des marchés	14
II.1. Le Front office.....	14
II.2. Middle Office	15
II.3. Back Office.....	15
Chapitre I : Le risque bancaire	16
I. Le risque de crédit	17
II. Le risque opérationnel	17
III. Le risque de marché.....	17
III.1 Risque de liquidité	18
III.2. Risque de change :	18
III.3. Risque de taux :.....	19
Chapitre II : Valorisation des obligations	20
I. Les obligations	21
II. Les obligations à taux fixe	21
III. Les risques liés aux obligations	21
III.1. Risque de taux d'intérêt	21
III.2. Risque de dépréciation du pouvoir d'achat.....	21
III.3. Risque de défaut.....	22
III.4. Risque de liquidité	22
III.5. Risque de remboursement anticipé au gré de l'émetteur	22
IV. Les obligations à zéro coupon	22
V. Les caractéristiques principales d'une obligation	23
V.1. Le coupon et le principal d'une obligation	23
V.2. La date d'échéance.....	23

V.3. Le taux de rendement actuariel	23
V.4. Les facteurs déterminant les prix de l'obligation.....	23
V.5. Le dirty price et le clean price.....	24
V.6. La cotation d'une obligation	24
V.7. La duration	25
V.8. La sensibilité	25
V.9. Convexité	26
VI. Application : Mise en place d'un pricer d'obligations	26
VI.1. Règles de calcul des coupons des BDT :	26
VI.2. La courbe de taux.....	28
VI.3. Pricer sur VBA-Excel	29
Chapitre III : La value at risk	30
I. Définition	31
II. Méthodes de calcul de la VaR :.....	31
II.1. La méthode historique :	32
II.2. Méthode paramétrique (Méthode de variance-covariance).....	33
II.3. La méthode de Monte-Carlo :	36
III. Fonds propres et réglementation.....	37
IV. Application de la VaR à un portefeuille obligataire.	37
IV.1. Introduction :	37
IV.2. Présentation des données :	38
IV.3. Application de la VaR à un portefeuille obligataire :	39
V. Backtesting	44
V.1. Introduction :	44
V.2. Méthodologie du Backtesting :	44
V.3. Application au portefeuille obligataire.....	45
Chapitre IV : Les programmes de stress testing.....	48
I. Simulation de crises	49
I.1. Déplacements de la courbe des taux.....	49
I.2. Avantages et inconvénients du Stress testing	50
I.3. Application au portefeuille obligataire	51
I.4. Automatisation du Stress testing.	53
II. Théorie des valeurs extrêmes	54

II.1. Introduction	54
II.2. Formalisation mathématique	54
II.3. Application au portefeuille obligataire :	58
Conclusion.....	62
Bibliographie	64
Annexe I : Courbe de taux Affichée par BAM.....	65
Annexe II : Pricer Obligations.....	66
Annexe III : Sorties de E-views.....	67
Annexe IV : Sorties de Easyfit	69

Liste des abréviations

AWB : Attijariwafa bank.

BAM : Bank Al Maghrib.

BDT : Bons du trésor.

Ccu : coupon couru unitaire.

Cpu : coupon plein unitaire.

GEV : Generalized extreme value.

MEDAF : Modèle d'équilibre des actifs financiers.

PIB : Produit intérieur brut.

SDM : Salle des marchés.

TMP : taux moyen pondéré.

VaR : Value at Risk.

VBA : Visual Basic for Applications.

Liste des figures

Figure 1: Mapping des obligations	35
Figure 2: Historique des taux d'intérêt pour les différentes maturités	39
Figure 3: historique du rendement du portefeuille	39
Figure 4: VaR historique du portefeuille obligataire.....	40
Figure 5: Test de normalité de « Jarque Bera ».....	40
Figure 6: Sortie "mapping"	41
Figure 7: Matrice de variance-covariance calculée le 24/04/2013.....	41
Figure 8: Calcul de la VaR paramétrique du portefeuille obligataire	42
Figure 9: matrice de variance-covariance des taux	42
Figure 10: VaR de Monte-Carlo.....	43
Figure 11: Backtesting VaR historique	46
Figure 12: Backtesting VaR paramétrique	46
Figure 13: Backtesting VaR Monte-Carlo	47
Figure 14: déplacement parallèle de la courbe des taux.....	51
Figure 15: Twist	52
Figure 16: Butterfly	52
Figure 17: interface de l'application « Stress Testing ».....	53
Figure 18: Calcul de la VaR GEV	61

Liste des tableaux

Tableau 1: Règles de calcul des coupons pleins des BDT	27
Tableau 2: Règles de calcul des coupons courus des BDT	28
Tableau 3: Caractéristiques du BDT	29
Tableau 4: Calcul du prix du BDT	29
Tableau 5: Caractéristiques des BDT du portefeuille.	38
Tableau 6: Intervalles de confiance à 95%	45
Tableau 7: Paramètres de la loi GEV	59
Tableau 8: Résultats des tests d'ajustement.....	60

Introduction

Les techniques de « Risk Management » sont apparues à partir de la moitié du XXe siècle. Ces techniques visent à étudier les facteurs qui menacent le patrimoine d'une entreprise afin d'apporter des solutions stratégiques pour réduire, voire éliminer, le risque.

Dans la théorie de diversification de portefeuille avancée par Markowitz à la fin des années 50, la mesure du risque incombait à l'écart-type du rendement du portefeuille, mais cette valeur a vite montré ses faiblesses. En effet, cette mesure ne rend compte que du risque diversifiable quand seul le risque non diversifiable est rémunérateur.

Le modèle du MEDAF lui a succédé durant les années 60, mais ce modèle monofactoriel ne distingue qu'une seule source de risque, celui lié au portefeuille de marché, à travers le coefficient bêta.

Depuis les années 70, le monde a connu une accélération du processus de libéralisation et de réforme des marchés financiers. L'arrivée et le développement des produits dérivés, l'accroissement de la volatilité des marchés financiers ainsi que les faillites spectaculaires ayant eu lieu au cours des années 90 ont poussé les institutions financières à élaborer un indicateur de risque financier à la fois global et synthétique.

C'est pour cela que les autorités réglementaires notamment le comité de Bâle ont décidé d'imposer un certain nombre de règles et de mesures communes entre pays pour la gestion du risque. La plus connue de ces mesures de risque est la Value at Risk qui s'avère efficace lors de l'évaluation du risque dans les conditions normales du marché. C'est une mesure absolue qui permet d'évaluer des risques de type asymétrique, comme celui associé aux options, que l'écart-type et le bêta ne permettent pas de prendre en compte de manière satisfaisante. C'est de plus un indicateur synthétique très simple à appréhender puisqu'elle définit le risque par une valeur numérique unique.

Cependant, les crises financières survenues ces dernières décennies ont montré clairement la mauvaise appréciation du risque, ce qui a poussé les établissements financiers à mettre en œuvre un modèle qui prend en compte les événements rares, ce modèle est basé sur la théorie des valeurs extrêmes, qui consiste à analyser les événements présentant une probabilité de survenance très faibles.

Par ailleurs, l'élaboration d'un modèle de gestion de risques basé sur la Value at Risk, est une condition nécessaire mais non suffisante pour évaluer judicieusement le degré d'exposition au risque. Combiner la valeur en risque au stress testing serait nettement plus avantageux pour une bonne évaluation et donc une meilleure maîtrise de risque.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le présent projet, qui vise à évaluer le risque de marché d'un portefeuille de produits financiers détenu par la salle des marchés de la banque.

Nous avons choisi d'appliquer les méthodes de quantification du risque au portefeuille « titres de créance », puisque c'est l'un des plus importants portefeuilles de la banque en termes de volume.

Nous allons donc, dans un premier temps, développer une application permettant de valoriser les instruments de taux de notre portefeuille, pour ensuite présenter les différentes méthodes d'évaluation du risque de marché et les appliquer au portefeuille obligataire. L'application sera automatisée grâce à l'outil VBA-Excel, pour permettre une flexibilité et une adaptation à tout changement du portefeuille, et pour assurer l'évaluation quotidienne du risque. Finalement, un Backtesting et une étude comparative nous permettront de déterminer la méthode la plus adéquate à la quantification du risque de notre portefeuille de titres de créance.

Présentation du cadre du travail

Dans ce chapitre, nous allons présenter la salle des marchés d'Attijariwafa bank et les différents Desks qui la composent.

I. Présentation de la salle des marchés

La salle des marchés d'Attijariwafa bank, inaugurée officiellement au début de l'année 2007, est un lieu qui regroupe différents services spécialisés permettant à la banque d'intervenir sur les marchés de capitaux internationaux. Elle doit trouver des ressources à coût réduit et des emplois rémunérateurs tout en minimisant les risques de marché.

II. Les pôles de la salle des marchés

La salle des marchés est composée de trois pôles distincts à savoir le front office chargé de la négociation avec les clients, le middle office chargé de contrôler les risques et d'analyser les résultats, le back-office, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne.

II.1. Le Front office

Le front office constitue littéralement l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture et de financement, investissement, gestion de position, trading et arbitrage. Il se distingue du back office qui exécute l'ensemble des tâches administratives ou logistiques liées à la vente.

Le front office d'Attijariwafa bank se compose de quatre desks à savoir : Desk change, Desk taux, Desk matières premières et produits dérivés et Desk actions.

Desk change : plus communément appelé Forex (contraction des termes anglais Foreign Exchange), il s'agit du desk du marché des changes à travers lequel sont effectués les achats et ventes de devises.

Ce desk se charge du trading aussi bien pour le propre compte de la banque que pour le compte des particuliers qui représentent essentiellement les entreprises marocaines qui ont accès à la salle des marchés. Ce desk est le plus important en termes d'effectif et de revenu, du fait qu'il représente presque le tiers des revenus de la salle des marchés.

Desk matières premières : se charge du trading pour le compte propre de la banque en prenant des positions sur les différentes matières premières (Métaux, céréales,...) sur les marchés essentiellement anglo-saxon, londonien et américain.

Desk taux : se compose quant à lui des quatre parties distinctes : desk taux trésorerie, desk taux trader, desk Sales et desk structuration.

- Desk taux trésorerie : on peut distinguer le desk trésorerie dirham et celui des devises. Ils ont pour missions d'optimiser la trésorerie de la banque en MAD et en devises tout en veillant à l'équilibre des comptes.

- Desk taux trader et Desk taux sales (vendeurs) : il assure la liquidité de la banque et gèrent le portefeuille de la banque.

- Desk structuration : a pour mission de répondre aux exigences des clients ; en effet, il leur offre des produits personnalisés « taillés sur mesure »: répondant à leur besoins de financement et respectant leur aversion aux risques.

Desk actions : Récemment introduit au Front office, il a pour mission majeure de fructifier le compte propre de la banque en actions. Le rôle des traders au sein du Front Office s'avère être primordial, puisqu'il est amené à tout moment à assurer une rentabilité en faveur de la banque en profitant des situations favorables des cours, il achète ainsi avec le cours le plus bas possible et vendent avec le cours le plus haut possible.

Les opérations conclues en Front Office engagent la banque de manière irrévocable vis-à-vis des contreparties. Pour prendre au mieux les décisions en respectant les limites de marché et de contreparties qui leur sont fixées, les opérateurs doivent s'appuyer sur des systèmes leur permettant de s'informer sur l'activité de marché et de mesurer et d'analyser leurs positions et leur résultat, la salle des marchés a été pour cet effet équipée d'écrans projetant les cotations et les dernières nouvelles économiques à travers la chaîne Bloomberg et de postes disposant de licences Reuters.

II.2. Middle Office

Le Middle Office est le service chargé de nommer les opérations initiées par les traders dans la salle des marchés, plus exactement dans le Front Office, après avoir vérifié qu'elles sont conformes à la réglementation. Il est chargé de faire la jonction entre le front et le back office. Il saisit sur une base de données toutes les transactions effectuées par les traders et les sales. Et enfin, il met en place avec le front et le back office des méthodes d'analyse des risques et définit les procédures homogènes par lignes de produits.

II.3. Back Office

L'opérateur back office est chargé d'assurer le suivi administratif et comptable des opérations conclues au Front Office. Il enregistre les transactions, informe les clients (entreprises ou institutions), effectue le règlement et la livraison des titres, gère le versement des dividendes des actions et des intérêts des obligations. Il participe aussi à la mise en place et à l'évolution des procédures et des systèmes informatiques.

Dans le cadre de notre stage de fin d'études, nous avons été accueillis au sein de la salle des marchés d'Attijariwafa bank, plus précisément au front office. Nous avons eu l'honneur de développer ce travail avec l'aide et la collaboration du personnel du front office, où nous avons eu l'occasion de côtoyer les différents métiers de trading assurés dans cette entité, et de tirer profit de cette expérience afin de mieux comprendre le mécanisme de cette profession qui concrétise parfaitement nos perspectives professionnelles.

Chapitre 1

Le risque bancaire

Les entreprises sont dans l'obligation de tenir compte des risques si elles veulent survivre et pérenniser leur activité. Toute entreprise doit avoir une connaissance sans faille du portefeuille actuel de risques qu'elle détient et planifier son évolution future, pour pouvoir évaluer si l'ensemble des risques sont acceptables ou si, au contraire, ceux-ci sont trop importants. Dans ce dernier cas, l'entreprise décidera des actions à mettre en œuvre afin de modifier ce portefeuille, pour gérer le risque de façon à continuer à exercer son activité sans menacer son existence économique.

Dans le cas des banques, les risques pris par celles-ci provoquant parfois des crises systémiques et mettant en danger l'économie mondiale, la gestion des risques ne peut être laissée à la libre appréciation de l'entreprise. C'est pour cette raison que le comité de Bâle, créé en 1974 par le Comité des Gouverneurs des Banques Centrales des pays du G10, a pour principale mission d'établir les règles internationales en matière de supervision bancaire afin d'assurer la bonne gestion des risques au sein des banques.

Les établissements financiers, en l'occurrence les banques, s'exposent à plusieurs risques qui s'articulent autour de trois principaux axes : risque de crédit, risque opérationnel, et risque de marché. Dans ce chapitre, nous allons présenter les trois types de risques, en s'attardant sur le risque de marché qui constituera l'objet de notre projet.

I. Le risque de crédit

Le risque de crédit est pour une banque, le risque qu'un client ou une contrepartie n'honore pas ses engagements à l'échéance convenue. Il existe donc pour la banque un risque dès que celle-ci se met dans une situation d'attendre une entrée de fonds de la part d'un client ou d'une contrepartie du marché.

Le risque de crédit est un risque critique car le défaut d'un petit nombre de clients importants peut suffire à mettre en grave difficulté un établissement, comme c'est d'ailleurs le cas de la crise actuelle.

Le risque de crédit comporte deux aspects: un aspect externe lié à l'insolvabilité de l'emprunteur, et un aspect interne qui tient à la façon dont la banque organise la fonction distribution de crédit.

II. Le risque opérationnel

Le risque opérationnel se définit par le comité de Bâle comme « le risque de pertes résultant de l'inadaptation ou de la défaillance de procédures internes, de personnes et de systèmes ou résultant d'événements extérieurs ». Il inclut notamment le risque de catastrophes naturelles, erreur humaine, fraude, défaillance du système d'information...etc.

Le risque opérationnel a pris une importance croissante ces dernières années, en raison de l'évolution continue des activités bancaires. En effet, le danger croissant du risque opérationnel est le résultat, entre autres, de la sophistication des activités de la banque et la conception de nouveaux produits auxquels sont associés des risques juridiques, ainsi que la mise en place de systèmes d'information de plus en plus complexes.

L'importance prise par le risque opérationnel s'explique aussi par l'attention accrue portée aux risques à faible probabilité d'occurrence mais qui risquent d'entraîner des pertes colossales à l'entreprise.

Dans son rôle de régulateur des marchés financiers, Le comité de Bâle exige des établissements de crédit et des entreprises d'investissement la mise en place d'un système de surveillance et de maîtrise des risques opérationnels, en particulier ceux liés aux systèmes comptable et d'information.

III. Le risque de marché

Le risque de marché est le risque lié à l'évolution de la valeur de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. En cas d'évolution défavorable du marché, l'investisseur est exposé à réaliser une perte au lieu du bénéfice espéré.

Les notions de risque et de résultat sont d'ailleurs intimement liées. En effet, il n'y a pas de résultat garanti sans prise de risque, et la règle générale veut que le risque augmente dès que le gain potentiel est élevé. Il existe cependant des investissements plus ou moins efficaces suite au choix du couple rentabilité/risque. L'ensemble de ces investissements efficaces (qui maximisent la rentabilité pour un niveau de risque donné) est appelé « frontière efficace ».

Le risque, quant à lui, est étroitement lié à la valorisation des produits financiers. En effet, gérer le risque revient à se poser des questions du type :

- Que vaut ma position aujourd'hui, par rapport à ce qu'elle valait lors de l'acquisition ?
- Que vaudra ma position demain, dans une semaine, dans un mois, toutes choses égales par ailleurs ?
- Que vaudrait ma position en cas d'évolution de tel ou tel paramètre de marché ?

Les méthodes de mesure du risque de marché impliquent donc de pouvoir évaluer une **valeur de marché** (mark-to-market) des actifs détenus. Ceci fera donc l'objet du second chapitre de ce rapport.

Le risque de marché lui-même s'articule autour de trois éléments entraînant une variation des prix des actifs financiers :

III.1 Risque de liquidité

Il s'agit du risque qu'une position ne puisse être liquidée à temps à un prix raisonnable.

La crise financière résultant de la crise des « subprimes » a entraîné une crise de liquidité du marché du crédit. Les techniques de titrisation jusqu'alors adoptées ne prenaient pas en compte le risque de liquidité. En effet, avec la crise des subprimes, la valeur des actifs financiers a baissé, et la règle "mark to market" a entraîné une chaîne de dépréciation et donc une contamination des valorisations. Les acheteurs ne voulant acheter qu'au prix du marché, ce qui correspond à une logique de marché, et ce ne paraissant pas acceptable au vendeur, il y a eu crise de liquidités. Les banques n'ont plus voulu se prêter entre elles.

Il convient de souligner que les banques sont structurellement en position risquée de liquidité. Le montant des dépôts à vue est en effet nettement supérieur à celui de leurs actifs liquides.

III.2. Risque de change :

Le risque de change est le risque lié à la variation du cours d'une devise, par rapport à la monnaie de référence utilisée par une entreprise ou un établissement bancaire, entre la date de l'engagement et la date du règlement financier.

Il s'agit donc du risque lié à la variation de parité de change entre la date de l'engagement et la date du règlement.

Le risque de change résulte d'activités économiques donnant lieu à des facturations en devise. Il s'agit par exemple d'opérations commerciales ou des prestations de services à l'exportation ou à l'importation

Le risque de change résulte par ailleurs d'opérations financières faites en devise, comme des prêts ou emprunts libellés dans une devise, ou d'achat de titres sur une bourse étrangère.

III.3. Risque de taux :

Le risque de taux d'intérêt peut être défini comme le risque de perte ou de manque à gagner, d'une dévalorisation du patrimoine ou d'une diminution des revenus d'un agent économique du fait des fluctuations des taux d'intérêt.

Dans la mesure où les banques détiennent des portefeuilles de titres de créances et de produits de taux d'intérêt, les fluctuations des taux d'intérêt induisent un risque contre lequel elles doivent se prémunir.

C'est d'ailleurs le taux d'intérêt qui a été la principale cause de la crise des « subprimes » en 2007. En effet, quelques années avant la crise, plusieurs ménages ont contracté des emprunts à taux bas mais variables pour s'approprier leurs logements. Ces clients ont été encouragés tant par les taux bas que par les facilités de financement proposées par les banques même aux clients potentiellement risqués. Mais les taux ont été revus à la hausse, ce qui a fait endetter les ménages de plus en plus, jusqu'à ce qu'ils soient incapables de payer leurs dettes.

Devant cette situation, Les organismes prêteurs se retournent alors contre ces ménages qui se voient dès lors obligés de revendre leurs logements. De ce fait, il y a abondance de maisons en vente, les prix de l'immobilier baissent et les sommes récupérées ne suffisent pas pour rembourser les emprunts. D'énormes pertes sont enregistrées et les cours des actions chutent conduisant à un krach boursier.

Dans notre application, c'est plus particulièrement le risque de taux qui va être traité, vu que notre étude portera sur des produits de taux d'intérêt.

Chapitre 2

Valorisation des obligations

Dans ce chapitre nous allons présenter les différentes caractéristiques des obligations pour ensuite valoriser ces dernières en respectant les normes de calcul du contexte marocain. Ceci nous servira à calculer un historique du prix des obligations qui constituera notre base de données pour la quantification du risque engendré par celles-ci.

I. Les obligations

Contrairement à l'action qui représente une fraction des capitaux propres d'une société, l'obligation représente une fraction d'un emprunt émis par une société. L'obligation se définit donc comme un titre de créance négociable, qui peut faire l'objet d'une cotation sur une bourse ou sur un marché secondaire. L'obligation offre à son détenteur la rémunération de l'emprunt (sous forme de coupons), en plus du remboursement du capital à l'échéance.

L'obligation peut être émise par l'Etat, des collectivités publiques ou privées. Selon l'entité émettrice, le risque de défaut est plus ou moins élevé, ce qui fait que la rémunération diffère selon l'émetteur. Les obligations de l'Etat, appelées « Bons du trésor », se distinguent des obligations privées par leur niveau de risque pratiquement nul. Leur rémunération est par conséquent minimale et elles sont considérées comme référence pour déterminer le prix des obligations privées.

II. Les obligations à taux fixe

Elles sont caractérisées par un versement périodique (fixé à l'avance) du coupon et sont remboursées à l'échéance ou périodiquement par l'emprunteur.

L'avantage majeur des obligations à taux fixe est qu'elles offrent un revenu stable et récurrent, quelle que soit l'évolution du marché.

Par ailleurs, les obligations offrent une volatilité (risque) beaucoup plus faible que les actions. Elles offrent des stratégies de diversification, améliorent la rentabilité et limitent le risque d'un portefeuille.

Cependant, comme n'importe quel produit financier, les obligations n'échappent pas au risque de marché, les fluctuations du taux d'intérêt se répercutant directement sur le prix des obligations. En effet, les taux d'intérêt et le prix fonctionnent à sens inverse. Par exemple, si les taux d'intérêt augmentent, le prix des obligations chute, et inversement.

III. Les risques liés aux obligations

III.1. Risque de taux d'intérêt

Ce facteur est la source de risque la plus importante car les variations de taux amènent de la volatilité. Pour les obligations, ce risque est défini comme systémique ou de marché car toutes les obligations sont touchées par ce changement.

III.2. Risque de dépréciation du pouvoir d'achat

L'ajustement des rendements des obligations s'effectue en retard par rapport au taux d'inflation. La raison est que le rendement des obligations est fixé d'avance et n'est pas objet à aucun changement jusqu'à l'échéance, alors que les rendements du marché augmentent avec l'inflation. Ceci constitue un risque de dépréciation du pouvoir d'achat.

III.3. Risque de défaut

Il s'agit du risque de non-paiement du coupon et/ou le non remboursement du capital. Ce risque peut être minimisé en choisissant les obligations d'entreprises bien notées par les grandes agences de notation, ou en optant pour les « bons du trésor », qui sont qualifiées d'obligation sans risque (de défaut).

III.4. Risque de liquidité

Ce risque se caractérise par la difficulté à revendre une obligation, à prix raisonnable, dans le cas où l'on souhaite s'en défaire. Pour éviter ce problème, il faut choisir les obligations où les transactions sont nombreuses.

III.5. Risque de remboursement anticipé au gré de l'émetteur

Ce cas de figure se présente lorsque l'obligation est retirée avant l'échéance prévue. Evidemment, les émetteurs utilisent le remboursement anticipé lorsque les conditions de marché jouent en leur faveur. C'est-à-dire lorsque le marché enregistre une baisse des taux. L'émetteur a tout avantage à rembourser son ancienne dette pour se refinancer à un coût plus bas.

Les investisseurs perdent un actif offrant une bonne rentabilité avec par exemple des taux de coupon élevés. Ils doivent ensuite trouver une obligation avec des avantages comparables alors que les taux de rémunération sont moins intéressants pour eux.

Il est stipulé dans la clause de l'obligation si un remboursement anticipé est possible.

IV. Les obligations à zéro coupon

Elles se caractérisent par le versement d'aucun coupon entre leur émission et leur remboursement. Le seul revenu que percevra l'investisseur, s'il la garde jusqu'à l'échéance, sera le prix de remboursement.

Le gain pour l'investisseur dans ce type d'actif financier sera la croissance du prix du titre. En effet, plus l'obligation se rapprochera de son échéance, plus sa valeur de marché tend vers son prix de remboursement qui est également sa valeur nominale. Toutefois, il faut que le prix d'émission soit plus bas que la valeur nominale. Par la suite, le prix de l'obligation ne pourra pas dépasser le prix de remboursement. Ainsi, plus le prix d'une obligation à coupon zéro est bas, plus le rendement offert est élevé.

Pour ce type d'obligations, l'investisseur ne doit pas se soucier du problème des réinvestissements des coupons sur le marché puisqu'il n'y en a pas. De plus l'obligation ZC offre une gestion simple de l'exposition au risque de taux. Il suffit à l'investisseur de détenir le titre jusqu'à l'échéance pour obtenir une rémunération égale au taux de rendement du titre constaté au moment de son achat.

Cependant, l'investisseur ne profite pas des hausses de taux sur le marché car il ne pourra pas réinvestir à des taux plus élevés les coupons échus.

V. Les caractéristiques principales d'une obligation

V.1. Le coupon et le principal d'une obligation

Le coupon et le principal de l'obligation sont définis à l'émission de celle-ci. C'est sur ces deux paramètres, en plus de la date d'échéance, que l'on se base pour déterminer le prix de l'obligation, en fonction des taux d'intérêt du marché.

A chaque période définie par l'émetteur, l'investisseur reçoit le coupon. Pour calculer la somme perçue, on multiplie le taux du coupon par la valeur nominale.

Pour l'émission et le remboursement de l'obligation, 3 cas de figures sont possibles : en dessous du pair, au pair et au-dessus du pair. Cela veut dire que le prix est respectivement inférieur, égal, ou supérieur à la valeur nominale de l'obligation.

V.2. La date d'échéance

A la différence des actions, les obligations ont une durée de vie limitée, et expirent à leur date d'échéance. Cette dernière est également déterminée à l'émission de l'obligation.

On appelle la maturité, le temps restant pour le remboursement de l'obligation. Deux possibilités de remboursement sont possibles :

Dans la première, le remboursement se fait à la date d'échéance et est nommé remboursement in fine.

La seconde possibilité de remboursement est d'amortir à chaque période une fraction du montant.

V.3. Le taux de rendement actuariel

Le taux de rendement actuariel ou Yield to Maturity d'une obligation est le rendement anticipé de cette obligation si elle est détenue jusqu'à maturité. C'est le taux avec lequel on actualise les flux de l'obligation pour déterminer son prix d'émission, ainsi que son prix tout au long de sa durée de vie.

Ce taux est à ne pas confondre avec le taux d'intérêt nominal de l'obligation, ce dernier étant fixe, déterminé à l'émission de l'obligation et servant au calculer des coupons alors que l'autre varie tout au long de la vie de l'obligation et sert à actualiser les coupons et le nominal pour déterminer le prix de l'obligation.

V.4. Les facteurs déterminant les prix de l'obligation

- Le prix varie en fonction de plusieurs facteurs comme :
- Taux du coupon
- L'échéance
- Les variations des taux d'intérêt du marché.

Il existe donc une relation inverse entre le prix des obligations et le taux du marché : Plus les taux sont faibles, plus les prix sont élevés. Donc le prix des obligations est supérieur au pair chaque fois que les taux d'intérêt diminuent au-dessous du taux de coupon de l'obligation.

La volatilité des prix des obligations est aussi en relation avec le taux de coupon, la valeur de remboursement et la durée avant l'échéance. Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, les obligations ayant les taux de coupon les plus bas et/ou les prix de remboursement les plus faibles et/ou des échéances plus longues ont des prix qui réagissent plus fortement aux variations des taux sur le marché.

Donc si on anticipe une baisse des taux d'intérêt sur le marché, il faudrait investir dans des coupons plus faibles et des échéances plus longues pour maximiser les plus-values.

V.5. Le dirty price et le clean price

Pour définir les « dirty price » et « clean price », il est nécessaire d'introduire la notion de « coupon couru ».

Le coupon couru correspond à un pourcentage de la valeur totale de l'intérêt qui doit être payé par l'émetteur d'un titre de créance négociable.

Le délai écoulé depuis le dernier versement d'intérêt, dans l'attente de la prochaine date de paiement de l'intérêt, ouvre donc un droit prorata temporis, appelé coupon couru.

Le cours de l'obligation est mentionné sans tenir compte des intérêts courus non échus. C'est le clean price ou prix pied de coupon.

L'acquisition d'un titre de créance négociable sur le marché secondaire implique le paiement du capital ainsi que la partie du coupon couru que l'acheteur paie au vendeur. Il l'achète donc au dirty price.

Le clean price permet de comparer des obligations dont le détachement de coupon se fait à des dates différentes.

V.6. La cotation d'une obligation

D'une manière générale, les obligations sont cotées en pourcentage de leur valeur nominale. De plus, elles sont toujours cotées au pied de coupon (clean price) c'est-à-dire en ne tenant pas compte du coupon couru.

Ainsi, en supposant que les taux d'intérêts restent stables au cours de la période, la valeur de l'obligation augmente régulièrement au cours du temps jusqu'à la date de paiement du coupon où la valeur de l'obligation chute du montant du coupon payé. Le calcul au pied de coupon permet de remédier à cette variation.

Ce type de cotation permet une comparaison des cours des obligations ayant des dates de paiement de coupon différentes.

V.7. La duration

La duration est l'horizon à l'issue duquel, quelle que soit l'évolution des taux d'intérêt, la valeur globale du portefeuille (obligations + coupons réinvestis) est la même, et l'investisseur aura dégagé sur son investissement un taux de rentabilité égal au taux actuariel annoncé au moment de l'émission.

Mathématiquement, La duration correspond à la somme des durées pondérées par les valeurs actualisées des cash-flows à recevoir (coupons), rapportée à la valeur présente du titre. La duration s'exprime en unités de temps (fractions d'année) et est assimilable à un délai moyen de récupération de la valeur actuelle.

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i \times F_i}{(1+t)^i}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+t)^i}}$$

Où :

n : le nombre de périodes

F_i : cash-flow de la période i

t : le taux actuariel de l'obligation tel que le prix observé de l'obligation corresponde à la valeur actualisée de celle-ci.

V.8. La sensibilité

La sensibilité d'une obligation, mesure la variation entre le cours de l'obligation et le mouvement des taux d'intérêt. La sensibilité évolue en sens inverse des taux d'intérêt et est liée à la durée de vie des titres. Plus la durée de vie de l'obligation est longue, plus sa sensibilité est élevée. Plus la sensibilité de l'obligation est élevée, plus elle subit fortement les mouvements des taux d'intérêt. Plus la sensibilité est élevée, plus le potentiel de performance est important en contrepartie d'un risque plus important.

Mathématiquement, la sensibilité de l'obligation est donnée par la formule suivante :

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i \times F_i}{(1+t)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+t)^i}}$$

La sensibilité et la duration sont liées par la relation : $S = \frac{D}{1+i}$

V.9. Convexité

La convexité est la dérivée seconde du cours d'une obligation par rapport au taux d'intérêt. Elle mesure la variation relative de la sensibilité d'une obligation pour une petite fluctuation de taux d'intérêt. La convexité exprime la rapidité de l'appréciation et la lenteur de la dépréciation du cours de l'obligation, si les taux baissent ou montent.

Cette notion est récente et explique le caractère convexe de la courbe qui lie le prix et le taux de rendement d'une obligation. Grâce à ce concept on arrive à appréhender la vitesse de variation due à l'exposition à un risque de taux. Ainsi grâce à la convexité, on peut savoir comment évolue sa durée, s'il y a modification du niveau de la courbe de taux et de la pente de celle-ci.

L'usage de la convexité implique que le prix diminue avec le rendement mais à un taux décroissant, à mesure que le rendement s'accroît. Bref plus la convexité est forte, plus le prix d'un titre diminue lentement pour une hausse de rendement actuariel, et plus sa valeur augmente si le taux baisse.

La convexité est donc un outil d'analyse de risque de taux, dont l'utilité est d'apporter un complément d'information à l'analyse déjà faite grâce à la sensibilité ou la durée.

VI. Application : Mise en place d'un pricer d'obligations

Dans cette partie, nous allons appliquer les règles du pricing que nous avons vues pour mettre en place un pricer d'obligations. Dans notre application, nous nous intéresserons aux obligations marocaines, et plus particulièrement aux « bons du trésor ». Il est nécessaire donc d'introduire des notions propres à la valorisation des bons du trésor marocains, pour ensuite appliquer les méthodes précédemment vues pour calculer le prix des BDT.

VI.1. Règles de calcul des coupons des BDT :

VI.1.1. Règles de calcul des coupons pleins des BDT

Les coupons des bons du Trésor à taux fixe émis par voie d'adjudication sont réglés à l'échéance pour les bons d'une durée inférieure ou égale à 52 semaines et annuellement aux dates anniversaires des dates de jouissance pour les bons d'une durée supérieure à 52 semaines.

En ce qui concerne les bons du Trésor rattachés à d'autres lignes antérieures, les coupons sont réglés aux dates anniversaires de la date de jouissance des lignes de rattachement.

Il est à préciser que les bons rattachés à une ligne future dégagent un premier coupon atypique, les autres coupons sont calculés de la même manière que ceux d'une ligne simple.

A cet égard, le coupon plein unitaire (Cpu) à payer à une date d'échéance d est déterminé de la manière suivante :

Nature de la ligne	Maturité des bons	Applicable à	Coupon plein unitaire
simple	≤ 52 semaines	Tous les coupons	$T \times N \times \frac{M}{360}$
	> 52 semaines	Tous les coupons	$T \times N$
future	$= 52$ semaines	Tous les coupons	$T \times N \times \frac{M}{k}$
	> 52 semaines	Premier coupon	$T \times N \times \frac{M'}{k}$
		Autres coupons	$T \times N$

Tableau 1: Règles de calcul des coupons pleins des BDT

Où :

T : taux nominal

N : valeur nominale du titre

M : maturité initiale du BDT en jours

M' : nombres de jours entre la date d'émission et la première date d'anniversaire de la date de jouissance

k : nombre entier égal à 365 ou 366,

k = 366 si la période qui s'étend entre la date d'émission et la date d'échéance inclut un 29 février.

K=365 sinon.

Le coupon unitaire ainsi calculé est affiché avec 2 décimales.

Le montant total de coupons payé à l'investisseur est calculé en multipliant le coupon unitaire par le nombre de titres détenus par l'investisseur.

VI.1.2. Règles de calcul des coupons courus des BDT

Le coupon couru à la date j représente l'intérêt dû sur la période qui s'est écoulée depuis la date du dernier coupon versée ou, s'il n'y a pas encore eu de coupon versé, depuis la date d'émission jusqu'à la date j.

Le coupon couru unitaire, noté CCu, à la date j (date de calcul) est calculé selon la méthode suivante :

Nature de la ligne	Maturité des bons	Coupon couru (CCu)
Simple	≤ 52 semaines	$T \times N \times \frac{M_j}{360}$
	> 52 semaines	$T \times N \times \frac{M_j}{k}$
Future	$= 52$ semaines	
	> 52 semaines	

Tableau 2: Règles de calcul des coupons courus des BDT

Où :

T : taux nominal ;

N : valeur nominale du titre ;

M_j : le nombre de jours d'intérêt courus entre la date d et la date j ;

d : date du dernier coupon versé ou, s'il n'y a pas encore eu de coupon versé, date d'émission

k : nombre entier qui est égale à 365 ou 366, $k = 366$ si la période qui s'étend entre la date d'émission et la date d'échéance inclut un 29 février, sinon $k = 365$.

Le coupon couru unitaire ainsi calculé est affiché avec 2 décimales.

Le montant total de coupons courus payés à l'investisseur est calculé en multipliant le coupon unitaire par le nombre de titres détenus par l'investisseur.

VI.2. La courbe de taux

La structure par terme des taux d'intérêts (ou courbe des taux) est la fonction qui à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt associé en ordonnée.

A une date donnée et dans un pays donné, il existe une multitude de courbes de taux, à savoir la courbe des taux zéro coupon, la courbe des taux swap, la courbe des taux forward, qui servent à la valorisation des différents instruments de taux présents sur le marché.

Dans notre application, nous nous intéresserons à la courbe des taux des emprunts de l'état, une courbe de taux sans risque qui sert de référence pour la valorisation des bons du trésor comme pour les obligations privées. la courbe de taux des bons du trésor est affichée quotidiennement par Bank Al Maghrib et représente l'ensemble des transactions effectuées par la banque centrale sur les bons du trésors en précisant le montant de ces transactions ainsi que les taux auxquels elles ont été effectuées. (Annexe I)

Or cette courbe n'affiche le taux de rendement que pour certaines maturités. Pour les autres maturités, on déduit le taux d'actualisation en procédant par interpolation linéaire. La formule utilisée est alors la suivante :

$$r_k = \frac{(t_j - t_k) \times r_i + (t_k - t_i) \times r_j}{(t_j - t_i)}$$

Où :

r_k : le taux d'intérêt de la maturité t_k .

r_i (resp. r_j) : les taux d'intérêt des maturités t_i (resp. t_j) directement inférieure (resp. supérieure) à t_k .

VI.3. Pricer sur VBA-Excel

Sur Excel, dans une feuille appelée « courbe », nous avons développé une application qui permet de télécharger quotidiennement la courbe à partir du site de Bank Al Maghrib et une fonction interpolation qui permet d'obtenir les taux de rendements des maturités de notre portefeuille.

Ensuite, pour chaque obligation, nous calculons tous les coupons à recevoir en respectant les règles expliquées précédemment, puis nous les actualisons au taux déjà déterminé par la courbe et par la fonction d'interpolation. Nous obtenons ainsi le « dirty price » des obligations, duquel nous déduisons le coupon couru pour obtenir le « clean price ».

Exemple de calcul :

Considérons le BDT dont les caractéristiques sont les suivantes :

NOMINAL	FACIAL	EMISSION	JOUISSANCE	ECHEANCE	Taux rend	Date calcul
100000	3,95%	16/01/2012	17/04/2012	17/04/2017	4,73%	25/03/2013

Tableau 3: Caractéristiques du BDT

Le calcul des coupons et l'actualisation des flux sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	Coupon	Fraction année	Flux actualisés
17/04/2013	4 932,10	0,063013699	4 917,76
17/04/2014	3 950,00	1,063013699	3 760,64
17/04/2015	3 950,00	2,063013699	3 590,79
17/04/2016	3 950,00	3,063013699	3 428,62
17/04/2017	103 950,00	4,063013699	86 153,98
Prix du BDT			101 851,78

Tableau 4: Calcul du prix du BDT

Le prix n'est alors autre que la somme actualisée des flux générés par l'obligation. Pour ce BDT de valeur nominale 100000 DH et de taux facial 3,95%, le prix au 25/03/2013 est de 101 851,78 DH. Une capture du tableau sur VBA-Excel qui permet d'automatiser ce calcul se trouve en annexe (annexe II) .

Chapitre 3

La value at risk

La détention d'un portefeuille de produits de taux engendre systématiquement un risque de taux pour la banque. Ce risque ne peut être éliminé, puisque il n'y a pas de profit sans risque, il peut tout de même être couvert par des instruments de couverture ou par des fonds propres, ce qui nécessite d'abord une bonne évaluation de ce dernier. Dans ce chapitre, nous allons présenter l'approche de la Value at Risk permettant d'évaluer le risque de taux des titres de créances, que nous allons appliquer à un portefeuille d'obligations. Nous allons traiter trois méthodes de calcul de VaR. Il s'agit notamment de la VaR historique, VaR paramétrique et VaR de Monte Carlo. Un Backtesting permettra de valider ces modèles et de choisir celui qui s'adapte le mieux à ce type de portefeuille.

I. Définition

La Value at risk (VaR) est une mesure de la perte potentielle que peut subir le portefeuille suite à des mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante :

« Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité α pour un horizon de temps T fixé ? »

Deux paramètres sont donc indispensables pour interpréter le chiffre VaR :

- La période de détention T qui correspond à la période sur laquelle est mesurée la variation de la valeur de portefeuille.
- Le seuil de confiance α du chiffre VaR qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque.

Sans préciser ces deux paramètres, on ne peut pas interpréter le chiffre VaR, car un risque à 10 jours avec une probabilité de 99% est beaucoup plus important qu'un risque 1 jour avec une probabilité 95%. Dans le premier cas, nous avons une chance sur 100 que la perte réalisée pour les 10 prochains jours ouvrés soit supérieure à celle estimée par la VaR. Dans le second cas, nous avons 5 chances sur 100 que la perte réalisée demain soit plus grande que la VaR. Avec la mesure VaR, on passe donc d'une mesure de risque comme volatilité à une mesure de risque comme quantile.

Il faut bien avoir à l'esprit que la mesure VaR ne donne une image du risque que dans le cadre de conditions normales de marché et pour un niveau de confiance inférieur ou égal à 99% (dans le cadre de la réglementation). Pour avoir une mesure du risque extrême, d'autres techniques sont plus adaptées : les méthodes de stress-testing et la théorie des valeurs extrêmes permettent de mieux appréhender les risques extrêmes. Ces techniques seront présentées dans un chapitre ultérieur.

Pour calculer la VaR, nous devons identifier les facteurs de marché qui affectent la valeur du portefeuille. Le nombre de ces facteurs peut être plus ou moins grand, mais dépend généralement du type de marché considéré. Dans le cas d'un portefeuille d'obligations, les facteurs sont les taux d'intérêt des différentes maturités composant le portefeuille.

Outres les paramètres de la VaR et les facteurs de risque, le calcul de la VaR dépend également de la méthodologie utilisée.

II. Méthodes de calcul de la VaR :

On distingue trois méthodes pour effectuer le calcul de la VaR :

- la méthode historique.
- la méthode paramétrique.
- la méthode de Monte Carlo.

II.1. La méthode historique :

II.1.1. Présentation :

C'est la méthode la plus simple dans sa conception et sa mise en œuvre, puisqu'elle ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution des rentabilités. Il faut seulement disposer des données historiques des gains et des pertes journalières du portefeuille dont on souhaite calculer la VaR. A partir de ces données, il est possible de reconstituer la distribution empirique des gains et des pertes journaliers et d'en déduire la VaR.

Si l'on considère par exemple un niveau de confiance de 99% et que l'on dispose d'un échantillon de 1000 observations historiques de rendements, la VaR est obtenue en multipliant la valeur du portefeuille par le rendement historique qui correspond à la 10ème forte perte.

II.1.2. Hypothèses :

Utiliser les données historiques pour estimer les rendements futurs suppose la **stationnarité** des rendements des facteurs de risque: le passé doit refléter le futur. Ceci dit, on prévoit que les flux futurs vont se reproduire de la même manière que ceux du passé. L'évolution est alors connue d'avance.

Méthodologie :

Plus concrètement, cette méthode consiste à reproduire pour les N jours de l'historique, la valeur du portefeuille avec sa composition actuelle. Ensuite, à partir des N scénarios obtenus, on calcule le rendement du portefeuille pour chaque scénario en utilisant la formule :

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Ceci nous permet d'obtenir N-1 rendements $\{r_1, r_2, \dots, r_{N-1}\}$. Ces valeurs nous permettront de construire une distribution empirique à partir de laquelle le α ème quantile peut être extrait. Pour ce faire, il suffit de considérer la valeur absolue du N α ème plus petit rendement. Si N α n'est pas entier, on procède par interpolation linéaire.

De façon générale, la formule permettant de calculer la VaR historique est la suivante :

$$VaR_{1,\alpha} = \begin{cases} |r_{N\alpha}| & , \quad \text{si } N\alpha \text{ est entier} \\ r_{n^*} + (n\alpha - n^*)(r_{n^*+1} - r_{n^*}), & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec : $n^* = [N \times \alpha]$ la partie entière de $N \times \alpha$.

II.1.3. Avantages et inconvénients :

L'avantage majeur de la méthode historique réside dans le fait qu'elle allie simplicité et large application.

Elle représente manifestement la plus intuitive des techniques de calcul de la VaR. La procédure est en effet simple et fournit des résultats faciles à interpréter.

Elle ne formule aucune hypothèse quant à la forme des distributions des rendements, ni quant à la linéarité des relations entre le prix et les facteurs de risque. Elle parvient ainsi à s'adapter avec les spécificités des positions traitées et des marchés. Elle convient donc pour gérer tout type de position dans toute condition du marché.

Son caractère non paramétrique lui évite d'estimer des paramètres. Ceux-ci étant implicitement présents dans l'historique des variations des facteurs de marché. La méthode historique ne requiert donc pas de calculs préliminaires.

Elle permet de tenir compte de l'asymétrie entre les parties gauche et droite de la distribution correspondant aux chocs négatifs et positifs, et des changements de la volatilité associée à des successions de périodes calmes et agitées, et de l'importance des événements rares.

Enfin, la VaR historique échappe au risque de modèle puisque, du fait de son caractère non paramétrique, elle n'utilise aucun modèle d'évaluation.

L'inconvénient théorique est que cette méthode est basée sur l'hypothèse de stationnarité qui sous-tend que le futur se comporte comme le passé. Ceci est cependant rarement rencontré dans la réalité. En effet, les séries financières sont caractérisées par des clusters de volatilité (regroupement de périodes de forte volatilité suivies par des périodes de faible volatilité) et la méthode ne peut pas anticiper la période à venir pour l'horizon temporel choisi. Cela peut ainsi conduire à des estimations de la VaR inférieures à la réalité. De plus, les résultats de la méthode vont être dépendants des pertes les plus défavorables du passé, alors que l'ajustement d'une distribution paramétrique sur les observations permettrait de lisser l'information historique.

Enfin, la longueur de l'historique, utilisée pour le calcul de la VaR s'avère difficile à choisir. D'une part, l'observation des événements rares nécessite un grand nombre de données, et d'autre part, la prise en compte des données trop anciennes peut affaiblir la pertinence des estimations.

II.1.4. Technique du bootstrapping :

Une amélioration simple de la méthode historique consiste à estimer la VaR à partir de données simulées par Bootstrap. Le Bootstrap consiste à ré-échantillonner les données historiques de rendements avec remise. Plus précisément, dans notre contexte, la procédure consiste à créer un grand nombre d'échantillons de rendements simulés, où chaque observation est obtenue par tirage au hasard à partir de l'échantillon original. Chaque nouvel échantillon constitué de la sorte permet d'obtenir une estimation de la VaR par la méthode historique standard, et l'on définit au final une estimation en faisant la moyenne de ces estimations basées sur les ré-échantillonnages.

II.2. Méthode paramétrique (Méthode de variance-covariance)

II.2.1. Présentation :

La méthode de variance-covariance a été proposée et développée par JP Morgan en 1994, avec son système RiskMetrics™. Jusqu'à ce jour, il s'agit de la forme la plus achevée, du point de vue opérationnel, des techniques de calcul de la VaR.

Cette méthode comprend essentiellement trois étapes, à savoir :

- Décomposition les actifs financiers du portefeuille en plusieurs facteurs de risque élémentaires.
- Répartition des cash-flows associés à ces facteurs de risque en cash-flows plus simples correspondants à des échéances standards, cette technique est appelée en anglais « Mapping ».
- Le calcul effectif de la VaR.

II.2.2. Hypothèses :

La méthode de variance-covariance repose sur trois hypothèses :

- La première hypothèse concerne la normalité des distributions considérées. On suppose que les rendements de notre portefeuille suivent une loi normale.
- Ensuite, il faut s'assurer de la stationnarité des prix ou des rendements de l'actif objet de l'estimation.
- Enfin, la dernière hypothèse est que le rendement moyen d'un actif financier est nul pour la période considérée. (Si l'on s'attend à un rendement annuel moyen de 15% pour un certain actif, le rendement journalier moyen est de $15/252=0,06\%$, 252 correspondant au nombre de jours où la bourse est ouverte. Ainsi faire l'hypothèse d'un rendement journalier nul n'est donc pas restrictif).

II.2.3. Méthodologie :

Dans le modèle de la VaR paramétrique, nous considérons un portefeuille constitué de K actifs.

Notons R_t le vecteur des rendements des K actifs à l'instant t, W_t le vecteur des poids et P_t la valeur du portefeuille à l'instant t.

Le rendement global du portefeuille à l'instant t+1 est comme suit:

$$W_t^T R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

Or le vecteur des rendements des K actifs R_t suit une loi normale multivariée de moyenne μ et de matrice de variance-covariance Σ :

$$R_t \sim N(\mu, \Sigma)$$

Le rendement global du portefeuille suit donc une loi normale univariée de moyenne $W_t^T \mu$ et de variance $W_t^T \Sigma W_t$:

$$W_t^T R_{t+1} \sim N(W_t^T \mu, W_t^T \Sigma W_t)$$

D'où :

$$\frac{\frac{P_{t+1} - P_t}{C_t} - W_t^T \mu}{\sqrt{W_t^T \Sigma W_t}} \sim N(0,1)$$

C'est-à-dire :

$$Pr \left\{ \frac{\frac{P_{t+1} - P_t}{C_t} - W_t^T \mu}{\sqrt{W_t^T \Sigma W_t}} \geq \phi^{-1}(1 - \alpha) \right\} = \alpha$$

Avec ϕ^{-1} : l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Et $\phi^{-1}(1 - \alpha) = -\phi^{-1}(\alpha)$ est le quantile à $\alpha\%$ de la loi gaussienne.

La VaR à 1 un jour pour un niveau de confiance α est la perte potentielle sur un jour que le portefeuille risque d'accuser avec une probabilité $1-\alpha$.

$$Pr\{P_{t+1} - P_t \geq -VaR_\alpha\} = \alpha$$

Par identification des deux dernières équations, on déduit l'expression de la value at risk au seuil de confiance α :

$$VaR_\alpha = P_t[\phi^{-1}(\alpha)\sqrt{W_t^T \Sigma W_t} - W_t^T \mu]$$

Comme vu précédemment, la VaR obtenue pour une période de détention d'un jour peut se généraliser à une période de détention de T jours, en multipliant son expression par \sqrt{T}

$$VaR_{\alpha,T} = \sqrt{T}VaR_{\alpha,1}$$

II.2.4. Mapping des cash-flows (obligations)

Les cash-flows d'un portefeuille obligataire classique présentent un continuum d'échéances et de maturités. Le calcul de la VaR nécessiterait une puissance de calcul inimaginable s'il fallait mesurer les variances et covariances de toutes les maturités. Par exemple, un portefeuille contenant 30 obligations de maturités différentes nécessite le calcul de 465 valeurs, pour des maturités qui, elles-mêmes, changent tous les jours. Ainsi, une matrice de variance covariance regroupant un nombre limité de maturités fixes faciliterait énormément le calcul.

Pour ce faire, on procède par le « Mapping » qui consiste à redistribuer les cash flows sur un ensemble limité et prédéfini d'échéances standards, tout en conservant la valeur actuelle et le risque du portefeuille.

Aucun mapping n'est nécessaire pour un cash-flow correspondant à une des échéances standards. Par contre, pour un cash-flow survenant entre deux échéances standards il convient de le répartir sur les deux échéances standards voisines, une directement supérieure et une directement inférieure. Supposons qu'un cash-flow de valeur actuelle V_0 et d'échéance t_0 doit être réparti entre les échéances standards t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$:

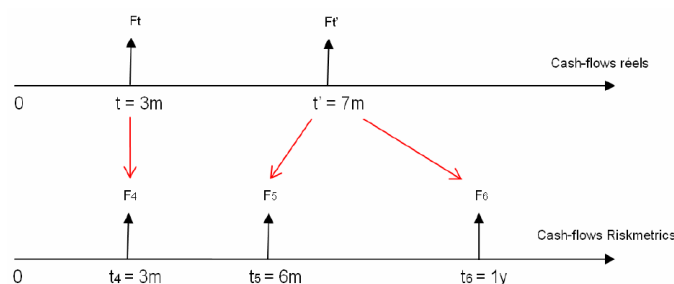


Figure 1: Mapping des obligations

Il nous reste à calculer les valeurs actuelles des cash-flows v_1 et v_2 correspondants aux échéances t_1 et t_2 .

Le calcul de v_1 et v_2 :

On se base sur les principes les plus courants du calcul financier suivants :

- La conservation de la valeur actuelle : $V_0 = V_1 + V_2$
- La conservation de la duration : $\frac{t_0 V_0}{V_0} = \frac{t_1 V_1 + t_2 V_2}{V_1 + V_2}$

C'est-à-dire : $t_0 V_0 = t_1 V_1 + t_2 V_2$

La résolution du système formé par les deux équations nous donne :

$$V_1 = \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1} V_0 \qquad V_2 = \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} V_0$$

Considérons un portefeuille de change à terme, entre T (actuellement) et T' (horizon de calcul de la VaR).

L'expression de la VaR dans ce cas est la suivante :

$$\text{VaR}_\alpha = P_t \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\text{MRM}^T}$$

Avec M : le vecteur des cash-flows mappés.

R : la matrice de variance-covariance du portefeuille mappé.

II.2.5. Avantages et inconvénients :

La VaR paramétrique possède un avantage très appréciable. Elle s'exprime simplement en fonction des caractéristiques des différents instruments composant le portefeuille, et des paramètres de distribution des facteurs de risque.

La méthode paramétrique suppose toutefois un ensemble d'hypothèses qui reflètent parfois mal la réalité et qui font d'elle une méthode assez approximative. En effet, l'hypothèse de normalité n'est jamais vérifiée en réalité pour les séries financières, car la queue de distribution des séries financières sont généralement largement plus épaisses que celle de la loi normale.

Il convient donc de trouver une méthode qui combine les deux premières, en bénéficiant des avantages de chacune d'elles. Il s'agit notamment de la méthode de Monte-Carlo, que nous allons présenter dans la partie suivante.

II.3. La méthode de Monte-Carlo :

II.3.1. Présentation :

A mi-chemin entre VaR paramétrique et VaR historique, on trouve la méthode de Monte-Carlo. En effet, cette méthode consiste à générer, à partir d'une distribution prédéfinie, des rendements aléatoires qui vont servir de base de données pour le calcul du α ème quantile. Cette méthode s'inspire donc de la VaR paramétrique puisqu'on suppose que les rendements sont distribués selon une loi (généralement la loi normale), et de la VaR historique car, une fois les rendements simulés, le calcul de VaR est le même que celui de l'approche historique. La seule différence est que les données sont réelles dans la méthode historique alors qu'elles sont simulées dans la VaR de Monte-Carlo.

II.3.2. Hypothèses :

Les hypothèses de la méthode de Monte-Carlo sont les mêmes que celles de la méthode paramétrique, à savoir la stationnarité des rendements du portefeuille d'obligations ainsi que la distribution paramétrique (distribution normale dans notre cas) de ces derniers.

II.3.3. Méthodologie:

La démarche suivie pour calculer la VaR de Monte-Carlo enchaîne deux étapes.

La première consiste à simuler des séries de taux, en choisissant la loi de distribution adéquate et en respectant la corrélation entre les séries historiques.

La deuxième concerne le calcul propre de la VaR qui, à partir des données simulées, s'effectue de la même manière que celui de la VaR historique.

II.3.4. Avantages et inconvénients:

La VaR Monte Carlo permet a priori de calculer la VaR lorsque les autres méthodes n'y parviennent pas. En effet, il existe des problèmes de linéarité des facteurs de risque que nous n'avons pas rencontrés dans cette étude de cas, mais qui risquent de se poser pour les autres produits financiers, et notamment les options.

De plus, les facteurs de risque peuvent suivre un grand nombre de lois de probabilité, ce qui permet une meilleure précision dans la modélisation de ces facteurs.

Elle possède néanmoins quelques inconvénients, à savoir que sa mise en œuvre peut s'avérer complexe et coûteuse en termes de temps de calcul. De plus, la spécification des distributions induit toujours un risque de modèle.

III. Fonds propres et réglementation

Afin de se prémunir contre les risques engendrés par les portefeuilles détenus par la banque, le Comité de Bâle recommande de multiplier la valeur de la Value at Risk pour une période de 10 jours par un multiple pour déterminer les fonds propres nécessaires permettant de couvrir les engagements. Ainsi, la formule suivante indique le montant des capitaux requis pour exercer selon les normes prudentielles :

$$\text{Capitaux requis} = 3 \times \text{VaR} + \text{Minimum fixé}$$

Face à la multiplicité des méthodes de calcul disponibles et les abus que cela peut engendrer, les instances de réglementation prévoient de mettre en place des pénalités financières pour les institutions dont les modèles de VaR auraient tendance à sous-estimer le risque, de manière à disposer de plus de capitaux à investir.

IV. Application de la VaR à un portefeuille obligataire.

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les trois méthodes de calcul de VaR que nous avons présentées à un portefeuille obligataire. Ceci nous permettra d'évaluer le risque lié à la

détention de ces obligations par la banque, pour fournir les fonds propres nécessaires à couvrir ce risque, et pour, en cas de risque élevé, changer la composition du portefeuille par des produits à risque moins élevé.

IV.2. Présentation des données :

IV.2.1. Le portefeuille obligataire :

Les données par rapport à la composition du portefeuille obligataire d'Attijariwafa bank sont confidentielles, les calculs se feront donc à partir d'un portefeuille de bons du trésor qui ne sont pas forcément détenus par AWB. Mais l'application est flexible, elle a été conçue de façon à prendre en compte tout changement dans la composition du portefeuille.

Le portefeuille fictif est composé de 8 bons du trésor de maturités comprises entre 13s et 30 ans, de même valeur nominale 100000 DH. A la date du 24/04/2013, la valeur du portefeuille est égale à 786453,19 DH.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des BDT de notre portefeuille :

Emission	Jouissance	Echéance	Nominal	Taux facial
18/03/2013	18/03/2013	16/09/2013	100 000	4,09%
04/12/2006	04/12/2006	04/12/2036	100 000	4,50%
15/08/2011	17/10/2011	17/10/2016	100 000	3,90%
01/03/2010	01/03/2010	01/03/2025	100 000	4,20%
22/08/2011	22/08/2011	22/08/2013	100 000	3,60%
09/01/2012	17/02/2012	17/02/2014	100 000	3,75%
18/03/2013	14/09/2013	14/09/2015	100 000	4,25%
18/06/2012	15/09/2012	15/09/2014	100 000	3,75%

Tableau 5: Caractéristiques des BDT du portefeuille.

IV.2.2. L'historique des taux d'intérêt :

La particularité des obligations est que l'on ne possède pas d'historique des prix, comme c'est le cas pour les actions. Les seules données disponibles sont les taux d'intérêts des différentes maturités. A l'aide du « pricer » qui a été conçu dans la première étape du travail, nous allons pouvoir reproduire un historique des prix des obligations composant notre portefeuille, pour avoir un historique de la valeur du portefeuille.

Pour ce faire, nous avons utilisé l'historique des taux des maturités standards et celui du TMP que l'on va considérer comme une maturité 1jour. Notre étude portera sur les données journalières des taux du 02/01/2008 au 05/03/2013, soit un total de 1889 observations. Selon la méthode de calcul et ses exigences, cette base de données peut être réduite à une ou deux années d'observations.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		TMP	13s	26s	52s	2ans	5ans	10ans	15ans	20ans	30ans
2		1	91	182	364	730	1 825	3 650	5 475	7 300	10 950
3	02/01/2008	3,41%	3,74%	3,82%	3,73%	3,73%	4,21%	4,37%	4,45%	4,48%	4,29%
4	03/01/2008	3,42%	3,70%	3,78%	3,66%	3,69%	4,21%	4,37%	4,45%	4,48%	4,29%
5	04/01/2008	3,43%	3,68%	3,74%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,68%	4,48%	4,29%
6	05/01/2008	3,44%	3,68%	3,74%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,68%	4,48%	4,29%
7	06/01/2008	3,45%	3,68%	3,74%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,68%	4,48%	4,29%
8	07/01/2008	3,45%	3,68%	3,74%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,68%	4,48%	4,29%
9	08/01/2008	3,46%	3,68%	3,74%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,77%	4,80%	4,25%
10	09/01/2008	3,55%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
11	10/01/2008	3,55%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
12	11/01/2008	3,55%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
13	12/01/2008	3,55%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
14	13/01/2008	3,55%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
15	14/01/2008	3,44%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%
16	15/01/2008	3,40%	3,65%	3,72%	3,67%	3,70%	4,18%	4,31%	4,75%	4,67%	4,27%

Figure 2: Historique des taux d'intérêt pour les différentes maturités

IV.3. Application de la VaR à un portefeuille obligataire :

Afin de prendre en considération assez de données historiques sans pour autant affaiblir la pertinence des estimations par des données trop anciennes, nous avons choisi de calculer la VaR à partir d'un historique de 2ans, soit 731 observations.

La VaR du portefeuille est calculée au seuil de confiance $\alpha=99\%$ jour sur un horizon de $T=1$ jour. Toutefois, l'application présente la possibilité de calculer également la VaR pour un seuil de 95% et pour une période de détention de 10 jours.

IV.3.1. VaR historique :

1) Vérification des hypothèses:

La VaR historique repose sur la seule hypothèse de stationnarité des rendements. Les rendements historiques, calculés à partir de l'historique des prix, sont distribués comme suit :

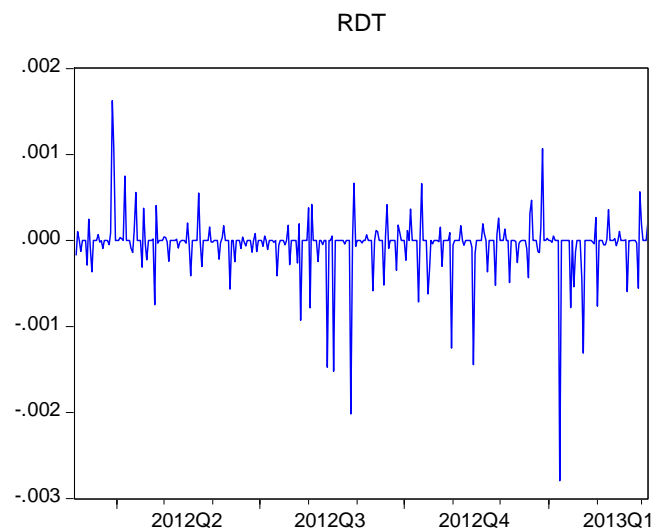


Figure 3: historique du rendement du portefeuille

Le test de Dickey-Fuller appliqué à la série des rendements montre que l'hypothèse de stationnarité est vérifiée (Voir annexe III).

2) Calcul de la VaR historique :

Afin de prendre en considération assez de données historiques sans pour autant affaiblir la pertinence des estimations par des données trop anciennes, nous avons choisi de calculer la VaR historique à partir d'un historique de 2ans, soit 731 observations.

A la date du 24/04/2013, la VaR historique du portefeuille obligataire est égale à 1121,41, soit 0,14% de la valeur du portefeuille.

Ce chiffre n'est significatif que lorsqu'il est comparé avec la VaR des autres portefeuilles pour évaluer le risque, ou avec d'autres méthodes pour étudier la pertinence du modèle.

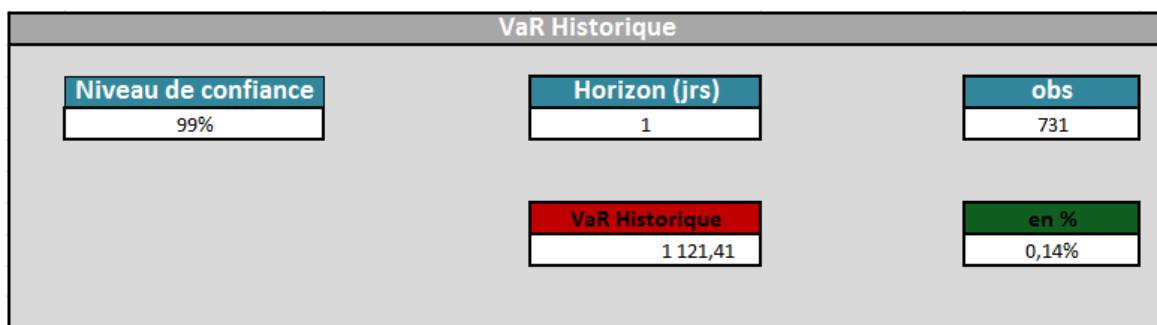


Figure 4: VaR historique du portefeuille obligataire

IV.3.2. VaR Paramétrique :

1) Vérification des hypothèses:

En plus de l'hypothèse de stationnarité déjà vérifiée précédemment, l'application de la VaR paramétrique suppose la normalité des rendements.

Pour étudier la normalité, nous appliquons le test de « Jarque Bera » proposé par E-views, sur la série du rendement global du portefeuille.

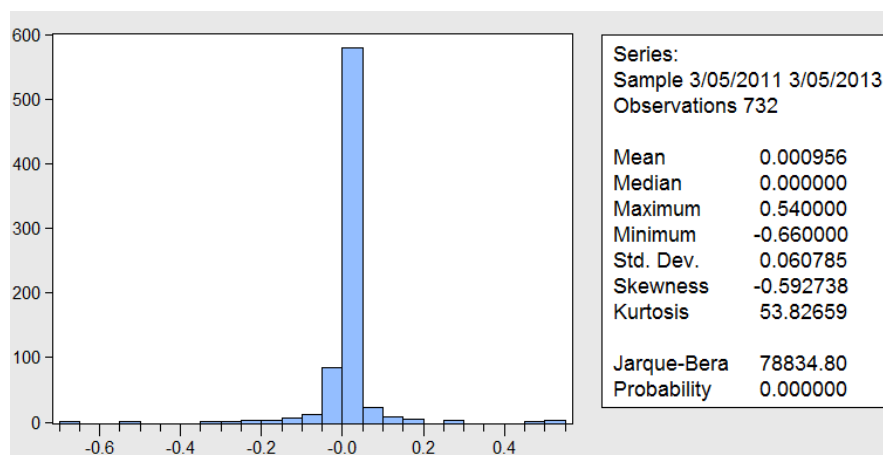


Figure 5: Test de normalité de « Jarque Bera »

Enfin, nous calculons la VaR paramétrique à l'aide de la formule suivante :

$$VaR_{\alpha} = P_t[\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{W_t^T \Sigma W_t} - W_t^T \mu]$$

En supposant que le vecteur des moyennes est nul, la formule est simplifiée :

$$VaR_{\alpha} = P_t \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{W_t^T \Sigma W_t}$$

Selon l'approche paramétrique, la perte maximale à 1 jour de mon portefeuille est égale à 1133,02 DH, représentant également 0,14% du portefeuille.

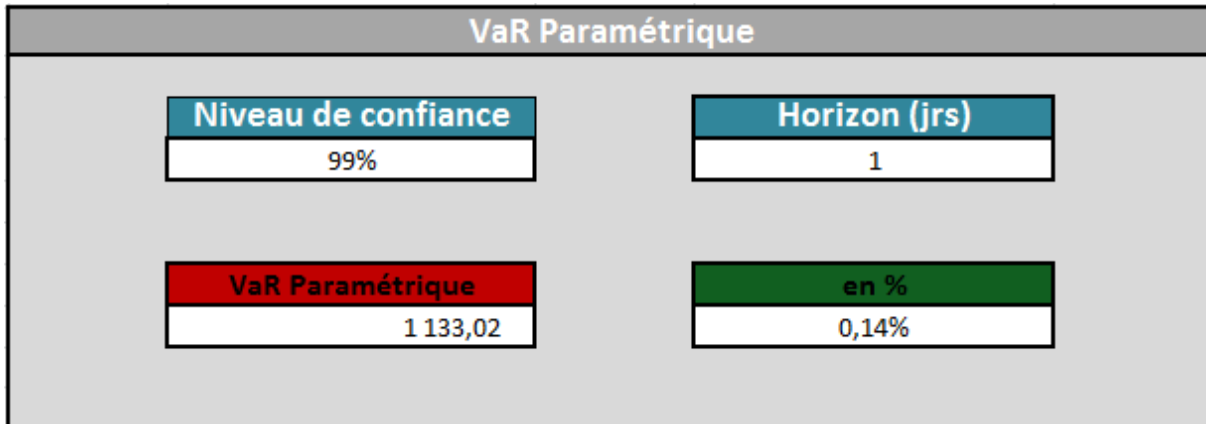


Figure 8: Calcul de la VaR paramétrique du portefeuille obligataire

IV.3.3. VaR de Monte-Carlo :

1) Validation des hypothèses :

Les hypothèses de la VaR de Monte-Carlo sont les mêmes que celles de la VaR Paramétrique. Par conséquent, elles ont déjà été testées.

2) Calcul de la VaR de Monte-Carlo :

Pour cette approche de la VaR, il est préférable de générer un grand nombre de simulations, sans pour autant que cela coûte en termes de temps de calcul. Nous avons donc choisi de générer 1000 simulations de taux pour chaque maturité comprise entre 1jour et 30 ans, ce qui a généré en total 10000 nombres aléatoires.

Pour générer des taux corrélés, la matrice de corrélation est calculée à partir de l'historique, cette méthode n'échappe donc pas au risque du choix des donnés.

	1 jr	13s	26s	52s	2ans	5ans	10ans	15ans	20ans	30ans
1 jr	1	0,18635556	0,15686741	0,1262973	0,03367643	-0,0209713	-0,0041134	0,00639127	0,03435849	-0,006868
13s	0,18635556	1	0,95437349	0,87111593	0,7789984	0,71846422	0,71010859	0,77908586	0,74463318	-0,5762785
26s	0,15686741	0,95437349	1	0,94465395	0,87115376	0,82102365	0,80676013	0,84670421	0,81609805	-0,5815403
52s	0,1262973	0,87111593	0,94465395	1	0,95453577	0,90272838	0,89784311	0,88002428	0,8689468	-0,5421536
2ans	0,03367643	0,7789984	0,87115376	0,95453577	1	0,96143474	0,95292259	0,8958154	0,88074748	-0,5247162
5ans	-0,0209713	0,71846422	0,82102365	0,90272838	0,96143474	1	0,97158404	0,89598631	0,88179986	-0,5419877
10ans	-0,0041134	0,71010859	0,80676013	0,89784311	0,95292259	0,97158404	1	0,92363316	0,91161137	-0,5575225
15ans	0,00639127	0,77908586	0,84670421	0,88002428	0,8958154	0,89598631	0,92363316	1	0,95156054	-0,6658442
20ans	0,03435849	0,74463318	0,81609805	0,8689468	0,88074748	0,88179986	0,91161137	0,95156054	1	-0,6444722
30ans	-0,006868	-0,5762785	-0,5815403	-0,5421536	-0,5247162	-0,5419877	-0,5575225	-0,6658442	-0,6444722	1

Figure 9: matrice de variance-covariance des taux

En calculant la valeur de portefeuille pour chaque simulation des taux, nous avons construit une base de 1000 scénarios, et dans ce cas, la VaR du portefeuille est égale à 1146,76, ce que représente également 0,14% de la valeur du portefeuille.

VaR Monte-Carlo	
Niveau de confiance	Horizon (jrs)
99%	1
VaR Monte-Carlo	en %
1 146,76	0,14%

Figure 10: VaR de Monte-Carlo

V. Backtesting

V.1. Introduction :

La VaR est un indicateur de risque qui permet de calculer le minimum de fonds propres nécessaires pour couvrir le risque d'un portefeuille. En sous évaluant le risque, la banque allouera moins de fonds propres pour couvrir sa position et bénéficiera du surplus de ressources pour générer des gains. Mais elle s'expose ainsi à un risque de perdre des sommes colossales et de ne pas être en mesure de se relever d'un grand choc. D'autre part, en cas de surévaluation du risque, les banques condamnent une partie de leurs ressources et limitent leur profit et peuvent même provoquer des crises de liquidité.

Ainsi, les instances régulatrices, qui ont autorisé les banques à utiliser des modèles internes de VaR, restent tout de même prudentes et assurent un contrôle de ces modèles en imposant des tests permettant de valider la pertinence des modèles internes. Parmi ces tests se trouve le Backtesting qui permet de vérifier l'adéquation de la VaR aux risques effectivement supportés.

Le Backtesting peut prendre des formes différentes. Il s'agit, par exemple, de vérifier que le pourcentage de défauts par tranche de risque ne s'écarte pas du pourcentage prévu. Il s'agit aussi de s'assurer que le nombre de dépassements de la limite fixée par la VaR au cours du temps ne dépasse pas un certain seuil. Dans ce projet, nous allons considérer le deuxième cas en présentant le Backtesting basé sur le modèle binomial proposé par l'accord de Bâle de 1996.

V.2. Méthodologie du Backtesting :

L'idée de base est simple. Par définition la VaR sur un horizon d'un jour à 99% est la perte maximale que l'on pourrait subir dans les conditions normales du marché. Cela veut donc dire que la probabilité que la perte effective soit supérieure à la VaR est de 1% ; autrement dit sur 100 estimations de VaR, nous devons observer une seule exception.

Soit R_t la distribution des pertes et profits à l'instant t . Considérons la Bernoulli définie de la façon suivante :

$$R_t = \begin{cases} 1 & \text{si la VaR est dépassée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons donc $P(R_t = 1) = p$ et $P(R_t = 0) = 1 - p$

Soit n le nombre de jours sur lesquels nous effectuons le Backtesting. Les autorités de surveillance préconisent un Backtesting sur $n = 250$ jours. La variable aléatoire X définit le nombre de dépassements de la VaR. Elle suit une loi binomiale $B(n, p)$ dont la fonction densité, l'espérance mathématique et la variance sont respectivement :

$$f(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$E(x) = pn \qquad V(x) = np(1-p)$$

Lorsque n est très grand et p très faible, on peut utiliser le théorème central limite pour approximer la loi binomiale par une loi normale :

$$z = \frac{x - pn}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Ainsi, nous pouvons construire un intervalle de confiance des nombres d'exceptions, en dehors duquel le modèle de VaR sera rejeté.

D'autre part, Kupiec a développé un test de rapport de vraisemblance « log-likelihood ratio » afin de pouvoir valider ou rejeter le modèle de VaR.

Soit N le nombre de fois où la perte du portefeuille est supérieure à la VaR dans un échantillon de taille T. Idéalement, le rapport N/T doit être égal au quantile gauche p, ce qui permet de définir l'hypothèse suivante :

H0 : Valider le modèle de Value at risk.

On définit la statistique du rapport de vraisemblance :

$$\Lambda = -2 \ln[(1-p)^{T-N} p^N] + 2 \ln \left\{ \left[1 - \left(\frac{N}{T} \right) \right]^{T-N} \left(\frac{N}{T} \right)^N \right\}$$

Sous l'hypothèse nulle, la statistique Λ suit un khi-deux à un degré de liberté. Ainsi, pour un niveau de confiance 95%, on rejette l'hypothèse nulle si $\Lambda > 3,84$.

Le tableau, fourni par le comité de Bâle, indique les régions d'acceptation pour différentes valeurs du quantile et de la taille T :

Intervalles de confiance à 95% pour valider les modèles de Backtesting

Probabilité p	Niveau de confiance de la VaR	Intervalle de confiance pour le nombre d'exceptions		
		T = 255 jours	T = 510 jours	T = 1000 jours
0,01	99%	N < 7	1 < N < 11	4 < N < 17
0,05	95%	6 < N < 21	16 < N < 36	37 < N < 65
0,10	90%	16 < N < 36	38 < N < 65	81 < N < 120

Tableau 6: Intervalles de confiance à 95%

Ainsi, pour le niveau de confiance 99% imposé par la réglementation pour le calcul de la VaR, et pour une période de backtesting de 255 jours, le nombre d'exceptions ne doit pas dépasser 7 exceptions pour que le modèle soit validé.

V.3. Application au portefeuille obligataire

Pour les trois modèles de VaR que nous avons étudiés, nous avons effectué un backtesting sur une période de 2 ans allant du 05/03/2011 au 04/03/2013. L'historique utilisé pour le calcul de la VaR sur cette période commence à partir du 05/03/2009, auquel nous ajoutons, pour chaque jour de calcul, l'historique de la veille et retranchons la date la plus ancienne pour garder la même taille de l'historique (2 ans).

Le calcul sur Excel à l'aide de l'outil VBA nous a permis d'obtenir les graphes suivants :

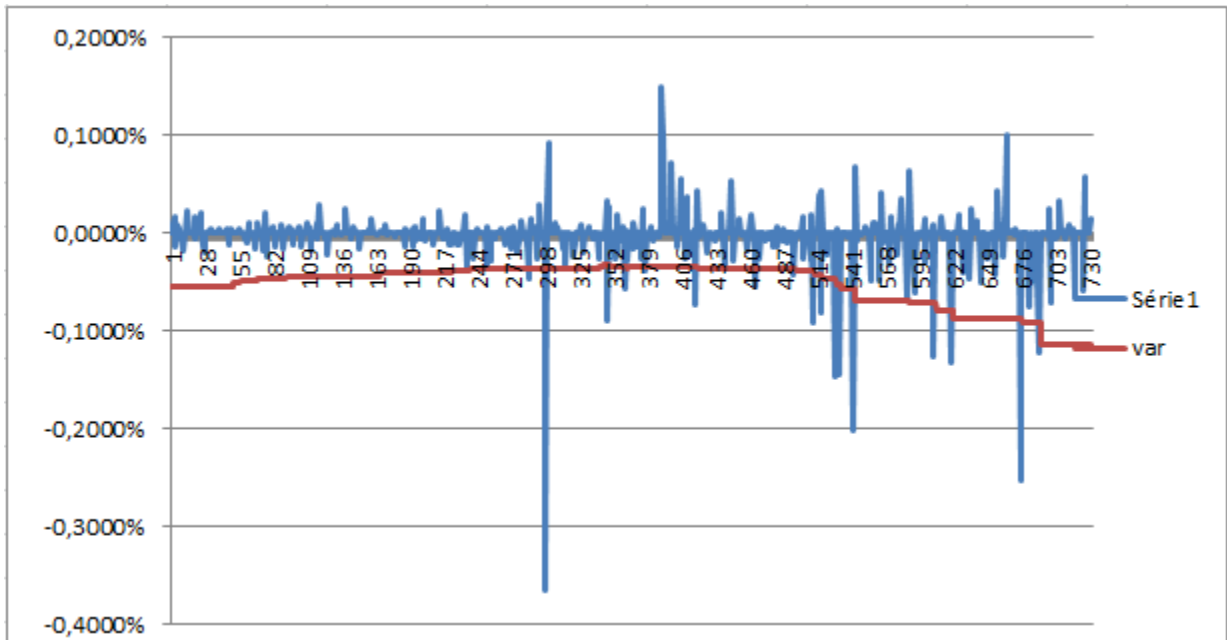


Figure 11: Backtesting VaR historique

La VaR historique tend à sous-estimer le risque du portefeuille. Sur 731 jours d'historique, la VaR a été dépassée 15 fois, ce qui rentre tout de même dans l'intervalle de confiance à 95%. Nous ne pouvons donc rejeter le modèle.

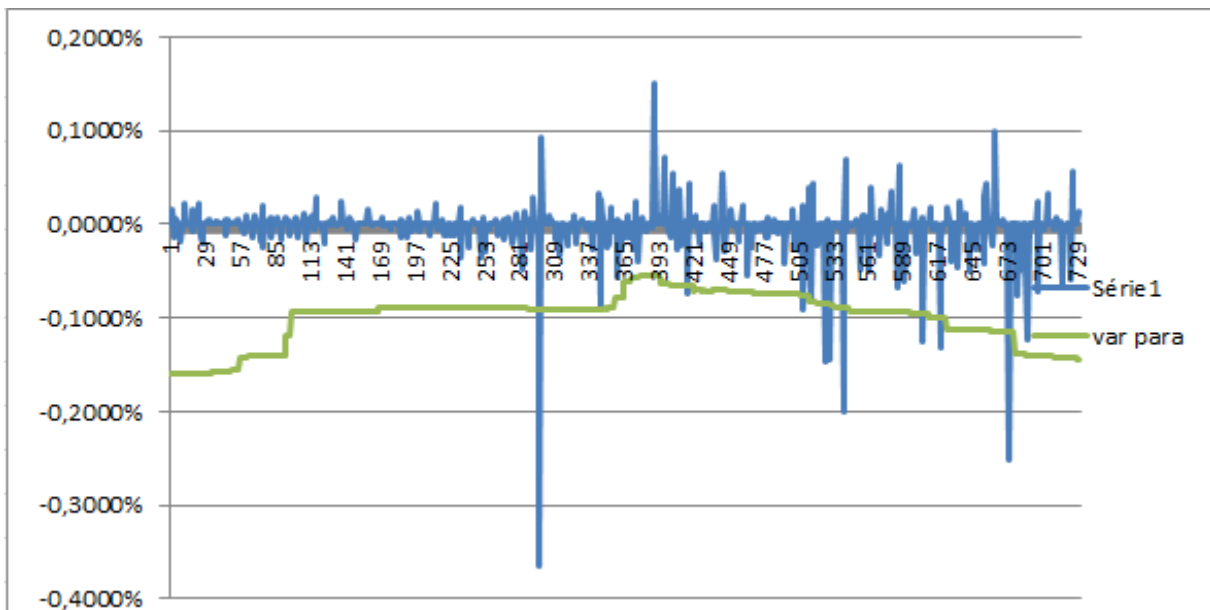


Figure 12: Backtesting VaR paramétrique

La VaR paramétrique, quant à elle, surestime le risque dans la première année du backtest, et le sous-estime dans la seconde partie. Un nombre d'exceptions égal à 10 nous permet de conclure quant à la validité du modèle. D'une part, la statistique du rapport de vraisemblance donne une valeur de 0,897, qui est largement inférieure à la valeur critique du test du khi-deux, et d'autre part, le nombre d'exceptions est inférieur à celui de la VaR historique, ce qui nous confirme la validité du modèle.

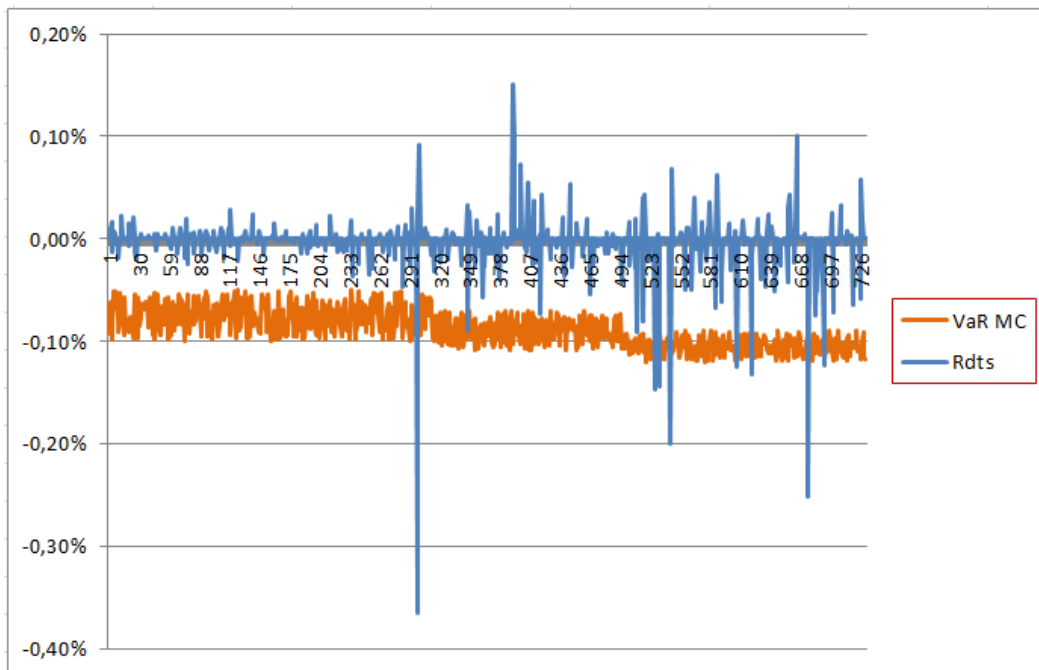


Figure 13: Backtesting VaR Monte-Carlo

Enfin, la méthode de Monte-Carlo n'échappe pas à la règle. La valeur de la statistique étant inférieure à la valeur critique, on accepte l'hypothèse nulle.

Une comparaison entre les trois méthodes montre que la méthode la plus adéquate pour ce type de portefeuille est celle de Monte-Carlo. Ne présentant pas plusieurs exceptions, elle prend en considération la corrélation entre les obligations composant le portefeuille, et n'est pas très liée à l'historique. Ceci est un avantage car les crises survenues dans le passé ne risquent pas de se répéter de la même façon. Il faut alors prévoir de nouvelles situations défavorables du marché. Celles-ci sont fournies par la méthode de Monte-Carlo grâce à la simulation des taux d'intérêts.

Les programmes de stress testing

Les évènements extrêmes occupent une place centrale en finance et notamment dans le domaine de la gestion des risques financiers. La performance d'une banque sur une période donnée est souvent le fait de quelques journées exceptionnelles, la plupart des journées de trading ne contribuant que marginalement au résultat. De plus, les conditions de crise intéressent davantage les autorités réglementaires que les conditions normales. En effet, ces derniers sont concernés par la protection du système financier contre les évènements catastrophes tels que la crise des « subprimes » de 2007, qui peuvent être à la source du risque systémique. Les fonds propres doivent être en mesure de couvrir les pertes d'une institution de sorte à lui éviter la ruine suite à un grand choc.

I. Simulation de crises

Comme nous l'avons déjà vu précédemment, la Value at Risk ne s'applique que dans les conditions normales du marché, et ne fournit aucune information sur les pertes possibles au-delà du seuil de confiance. Or, c'est lors des crises et dans les cas extrêmes que le redoutable survient, et c'est là que l'on a plus que jamais besoin d'évaluer le risque de notre portefeuille afin de s'en prémunir.

Le Stress test est un exercice qui a pour but de simuler des conditions économiques et financières extrêmes mais plausibles afin d'en étudier les conséquences sur les portefeuilles de la banque et de mesurer leur capacité de résistance à de telles situations.

L'opération consiste à définir plusieurs scénarii à un horizon précis qui seront appliqués au portefeuille de la banque afin de mesurer son évolution. Pour appliquer cette méthode d'analyse au portefeuille obligataire, nous avons besoin d'importer la courbe des taux donnée par BAM, et ensuite la faire varier en fonction des paramètres prévus pour étudier l'impact des mouvements de la courbe sur le rendement du portefeuille.

Avant de faire varier la courbe de taux, il est nécessaire de savoir comment cette courbe pourrait-elle varier et dans quelles circonstances. Le paragraphe suivant présente les principales déformations que peut subir une courbe de taux suite à des conditions défavorables de la conjoncture économique.

I.1. Déplacements de la courbe des taux

Les déplacements de la courbe des taux peuvent être des déplacements parallèles ou des déplacements non parallèles.

I.1.1. Les déplacements parallèles

Ils surviennent lorsque le changement des taux est le même pour toutes les échéances (court, moyen et long terme). En réalité, les déplacements parallèles de la courbe sont très rares, car les facteurs influençant la courbe des taux n'affectent pas toutes les échéances de la même manière. C'est plutôt les déplacements parallèles qui sont envisageables en cas de changements dans la conjoncture économique.

I.1.2. Les déplacements non parallèles

Il y a déplacement non parallèle lorsque la variation du taux de rendement à l'échéance est différente d'une échéance à l'autre.

On distingue principalement deux types de déplacements non parallèles, à savoir les twists et les déplacements en papillon:

- Les twists sont des déplacements qui occasionnent un aplatissement ou un raidissement de la courbe des taux. Il y a aplatissement de la courbe lorsque l'écart entre les taux à long terme et les taux à court terme diminue. Il y a raidissement de la courbe lorsque l'écart entre les taux à long terme et les taux à court terme augmente.
- Les déplacements en papillon (Butterfly) où l'augmentation (la baisse) des taux d'intérêt à court terme et à long terme est supérieure (inférieure) à la variation des taux intermédiaires. On distingue des déplacements en papillon positifs (augmentation des taux court terme et long terme, aucune ou très peu de variation dans les taux moyen terme) et des déplacements en

papillon négatifs (baisse des taux court terme et long terme, aucune ou très peu de variation dans les taux moyen terme).

1.1.3. Pourquoi la courbe des taux peut-elle s'inverser ?

Dans les conditions normales du marché, et en période de croissance du produit intérieur brut (PIB), le niveau des taux à court terme doit être plus faible que celui des taux à long terme. Cela paraît logique. Le risque de défaut de l'emprunteur augmente avec la durée de l'emprunt, le prêteur demande donc une rémunération plus élevée pour un prêt sur dix ou vingt ans que pour un prêt sur quelques jours ou quelques mois. En théorie, une courbe des taux « normale » veut que le niveau des taux à très court terme soit donc bien inférieur à celui des taux à long terme. On parle de pentification de la courbe des taux.

Or, une forte demande pour les titres de long terme entraîne la chute des taux correspondants, provoquant un déséquilibre et un excès de demande sur le marché des titres. On se retrouve alors dans une situation où les taux long termes sont inférieurs aux taux court terme. C'est-à-dire que l'on a inversion de la courbe des taux. Ceci est dû à plusieurs raisons :

D'une part, les autorités monétaires, par leurs interventions visant à maintenir l'inflation à des niveaux raisonnables, favorisent l'inversion de la courbe, les taux courts devenant supérieurs aux taux longs. En effet, afin de freiner l'inflation, les banques centrales tendent à augmenter leur taux directeur, ce qui affecte les maturités court et moyen terme de la courbe, en les portant à des niveaux plus élevés.

D'autre part, la demande croissante des salariés qui cherchent à se constituer une épargne longue de réserve en vue de leur retraite afin de lisser leur niveau de revenu intertemporel accroît la demande des investisseurs institutionnels (société d'assurance, fonds de pension...) pour les titres de longues maturités afin de satisfaire aux besoins des clients. La forte demande fait augmenter le prix des titres longues durées, c'est-à-dire qu'elle fait baisser les taux des longues maturités.

I.2. Avantages et inconvénients du Stress testing

Cette méthode de simulation de crise dispose de divers avantages qui font d'elle le complément naturel du concept de VaR :

- La méthode de « stress testing » est capable de simuler n'importe quel scénario jugé intéressant. Elle parvient en effet à prendre en compte des situations complètement absentes des données historiques et de toute prévision qui, même peu probable, est jugée possible.
- la méthode de simulation de crise force les gestionnaires du risque à analyser les vulnérabilités de l'institution financière à certains événements.
- Lors de situations de crise des marchés financiers, la liquidité des marchés s'assèche. Ce phénomène rend indisponible toute information de prix suffisamment fiable que pour quantifier la perte potentielle. Dans ce cas, un stress testing bien mené semble être la seule méthode à même d'évaluer les risques de l'institution financière.

Néanmoins, La simulation de crise souffre d'un certain nombre de faiblesses :

- L'utilité de la simulation de crise dépend en fait des compétences et de l'intuition des gestionnaires du risque. Car la méthode de stress testing souffre d'un manque de rigueur scientifique pour le calcul de la VaR en ce sens que la construction des scénarios s'opère de façon totalement subjective, en plus les événements extrêmes contre lesquels l'institution financière cherche à se prémunir peuvent très difficilement être anticipés,

- Lorsque l'institution financière dispose d'un portefeuille large et complexe, le stress testing peut éprouver quelques difficultés à gérer une masse importante de possibilités et un grand nombre de corrélations.

I.3. Application au portefeuille obligataire

A titre d'exemple, nous allons étudier l'impact d'un déplacement parallèle, d'un Twist et d'un Butterfly sur le rendement de notre portefeuille obligataire.

I.3.1. Scénario 1 : Déplacement parallèle.

Le premier scénario suppose que la courbe de taux va se déplacer en parallèle du jour au lendemain, translatant de 50 points de base.

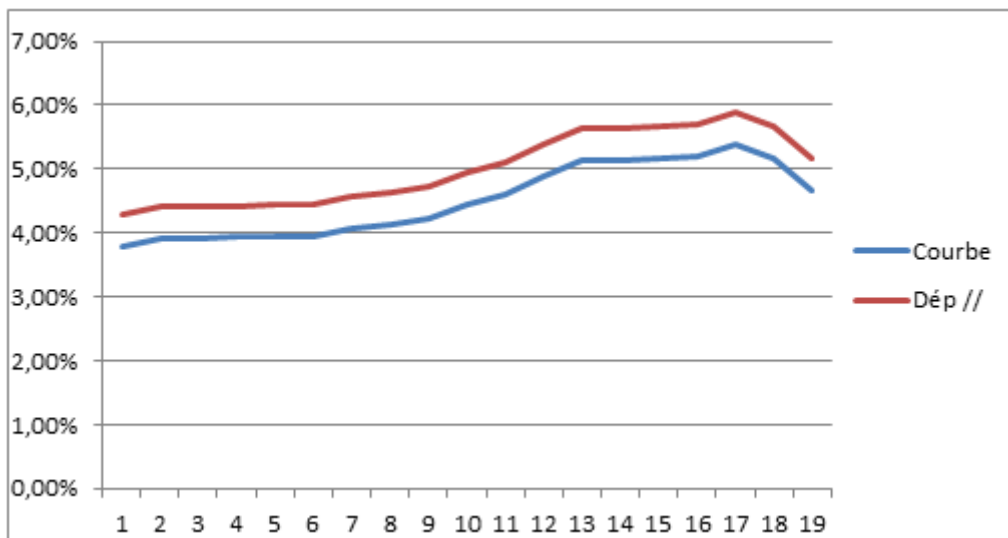


Figure 14: déplacement parallèle de la courbe des taux

En recalculant la valeur de chaque obligation composant le portefeuille avec cette nouvelle courbe, nous obtenons la valeur actuelle de notre portefeuille, qui passe de 796369,91 DH à 781 959,13 DH.

Ainsi, la perte que subirait le portefeuille si ce scénario se réalise est de 14410,78 DH, représentant 1,81% de la valeur totale du portefeuille.

I.3.2. Scénario 2 : Twist

Dans ce cas, on suppose que la courbe subit un twist, c'est-à-dire que les taux du court terme ont tendance à augmenter alors que ceux du long terme subissent une baisse. On suppose dans cet exemple illustratif que la variation à la hausse comme à la baisse est égale à 50 points de base.

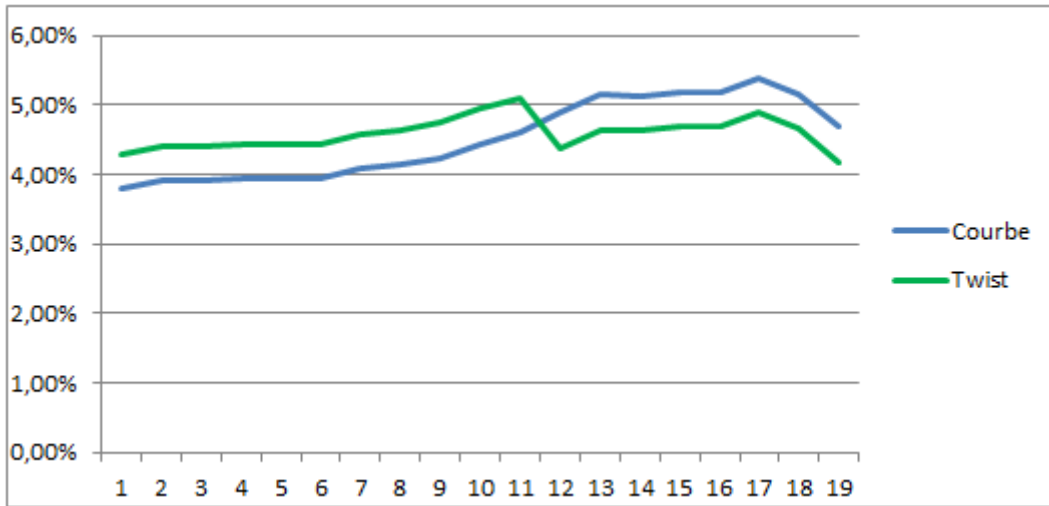


Figure 15: Twist

Nous obtenons, pour ce scénario de stress, une perte totale de 782,56 DH, représentant 0,10% de la valeur du portefeuille. Cette perte est inférieure à la perte accusée dans le premier scénario car les taux de long terme ont baissé, ce qui constitue un gain en valeur de portefeuille, ce qui va compenser la perte due à la hausse des taux de court terme.

1.3.3. Scénario 3 : Butterfly.

Ce dernier scénario suppose que la courbe des taux va augmenter pour le court et le long terme, sans affecter le moyen terme.

On suppose donc que les taux vont augmenter de 50 pts de bases pour les maturités inférieures à un an et les maturités supérieures à 5ans. Les maturités entre 1 et 5 ans resteront fixes.

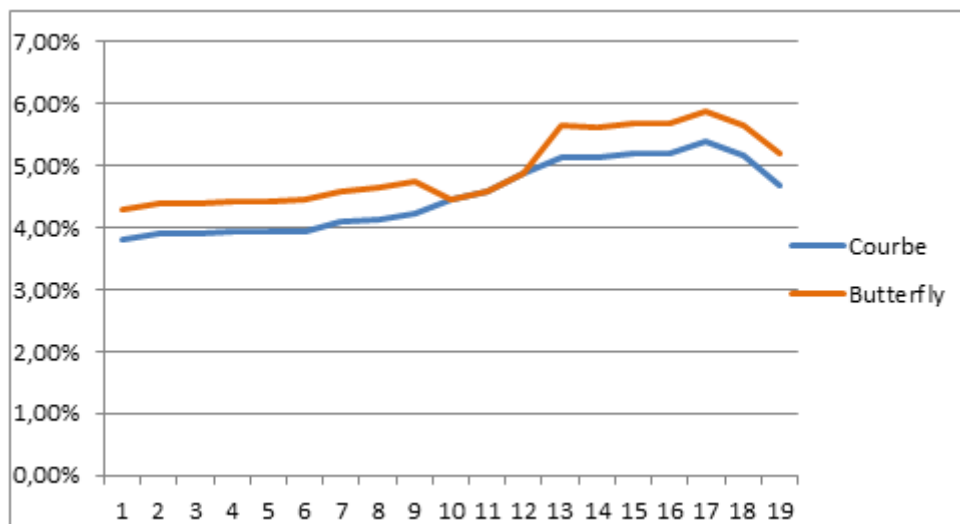


Figure 16: Butterfly

Le portefeuille enregistre une perte de 11 444,57, représentant 1,44% du portefeuille obligataire, une perte légèrement inférieure à celle accusée lors du premier scénario de stress, puisque notre portefeuille contient quelques obligations de moyen terme.

Les résultats dépendent donc des scénarii mais aussi de la composition du portefeuille. Un portefeuille ne contenant pas d'obligation de court terme ne va pas subir de perte si la courbe des taux subit un Twist ; C'est même bénéfique pour la banque, car les taux de long terme accuseront une baisse qui va augmenter le rendement du portefeuille.

I.4. Automatisation du Stress testing.

Afin de permettre aux responsables middle office de prévenir les déplacements de la courbe de taux, nous avons mis en place une application permettant de calculer les pertes potentielles en cas de conditions défavorables pour le portefeuille obligataire.

L'application permet de télécharger la courbe de taux du site de Bank Al Maghreb et, à partir de cette dernière, plusieurs scénarii de déplacements de la courbe sont proposés à l'utilisateur, qui doit préciser, selon ses prévisions pour l'évolution de la courbe, le scénario de stress adapté.

Comme le montre la figure ci-dessous, l'application retourne directement la perte éventuelle que le portefeuille obligataire risque de subir en cas de réalisation du scénario.

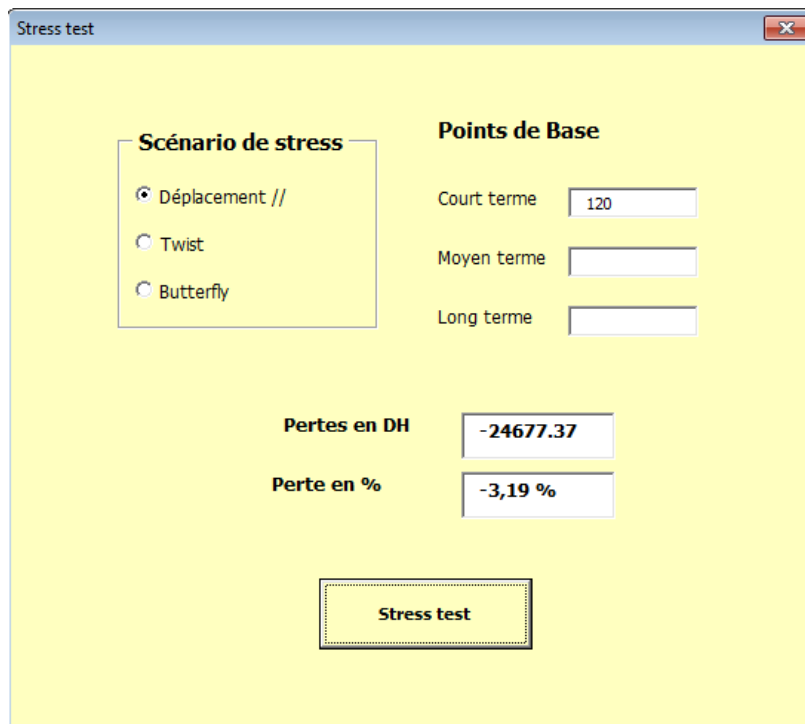


Figure 17: interface de l'application « Stress Testing »

Dans, cet exemple, pour le scénario de déplacement parallèle de la courbe de 120 points de base, ceci entraînera une perte de 3,19% du portefeuille obligataire.

Les méthodes de VaR et Stress Testing sont indispensables pour assurer la gestion du risque lié à la détention de titres, mais elles sont loin d'être parfaites, l'une ne prévenant pas contre les évènements extrêmes du marché, et l'autre étant « trop » subjective et n'anticipe pas forcément les évènements qui peuvent réellement survenir. La théorie des valeurs extrême, elle, permet de tenir compte des pires conditions du marché tout en restant objective puisqu'elle se base sur des données historiques. Celle-ci sera l'objet de la partie suivante.

II. Théorie des valeurs extrêmes

II.1. Introduction

Les événements extrêmes occupent une place centrale en finance et Notamment dans le domaine de la gestion des risques financiers. La Performance d'une banque sur une période donnée est souvent le fait de quelques journées exceptionnelles, la plupart des journées de trading ne contribuant que marginalement au résultat. De plus, les conditions de crise intéressent davantage les instances de réglementation que les Conditions normales : les autorités sont concernées par la protection du Système financier contre les événements catastrophes tels que la crise des « subprimes » de 2007, qui peuvent être à la source du risque systémique. Les Fonds propres doivent en principe couvrir les pertes d'une institution de Sorte qu'elle puisse continuer à exister même après un grand choc.

Dans cette partie, nous proposons une troisième approche pour évaluer le risque en période de crise, appelée théorie des valeurs extrêmes.

Alors que traditionnellement, l'approche consiste à modéliser la distribution de tous les rendements possibles de la position, nous ne nous intéresserons ici qu'à la queue de la distribution, c'est-à-dire aux valeurs extrêmes possibles des rendements.

Dans notre cas, nous ne traitons que les obligations en position longue (obligations détenues et non pas vendues), nous ne nous intéressons alors qu'aux minimums relatifs des rendements, c'est-à-dire à la queue gauche de la distribution.

II.2. Formalisation mathématique

La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse non pas à la modélisation totale d'une distribution mais seulement aux queues de cette distribution à partir de lois spécifiques que nous allons préciser dans ce qui suit.

II.2.1. Cadre d'analyse :

La théorie des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi maximum d'une suite de variables aléatoires réelles même si la loi du phénomène n'est pas connue.

Formellement, considérons (X_1, X_2, \dots, X_n) une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = P(X_i \leq x) \quad i = 1, \dots, n$$

Pour étudier le comportement extrême des événements, on considère la variable aléatoire $M_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ le maximum d'un échantillon de taille n . Comme les variables aléatoires sont i.i.d, alors la fonction de répartition de M_n est donnée par :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = (F(x))^n$$

La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la fonction de répartition F . C'est la raison pour laquelle on s'intéresse au comportement asymptotique de la variable aléatoire M_n . Ainsi en exhibant la loi ou la famille de loi vers laquelle M_n va converger, on pourra remplacer F^n par cette dernière pour des grandes valeurs de n .

II.2.2. Le théorème de FISHER-TIPPET :

Ce théorème est parmi les résultats fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes, établi en 1928 par Fisher et Tippett.

Définition :

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont de même type s'il existe des constantes réelles $a > 0$ et b un réel tels que Y et $aX+b$ ont la même loi c'est-à-dire que si F et H sont des lois respectives des variables X et Y alors on a : $F(aX + b) = H(x)$

Autrement dit, les variables « de même type » ont la même loi à un facteur de localisation et d'échelle près.

De façon analogue au théorème central limite, on peut trouver des constantes de normalisation a_n et b_n avec $a_n > 0$ et b_n des réels et une loi non-dégénérée de loi H telle que :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = (F(a_n x + b))^{n} \rightarrow H(x)$$

Fisher et Tippett trouvent en 1928 une solution à ce problème au moyen d'un théorème qui porte leur nom et qui est l'un des fondements de la théorie des valeurs extrêmes.

Théorème :

S'il existe deux suites de constantes de normalisation avec $a_n > 0$ et b_n des réels et une loi non-dégénérée H telle que : $\frac{M_n - b_n}{a_n} \rightarrow H$ alors H appartient à l'un des trois types suivants :

Type I (Gumbel)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-z - \exp(-z))$$

Avec : $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Type II (Fréchet)

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)$$

Type III (Weibull)

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x - \gamma}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x - \gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)$$

Bien que le comportement de ces lois soit complètement différent, elles peuvent être combinées en une seule loi contenant un paramètre k qui contrôle la « lourdeur » de la queue de loi appelé indice des valeurs extrêmes, le paramètre de localisation μ et le paramètre de dispersion σ , on obtient la fonction de répartition de la GEV :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp(-(1 + kz)^{-\frac{1}{k}}(1 + kz)^{-1-\frac{1}{k}}) & k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-z - \exp(-z)) & k = 0 \end{cases}$$

Avec $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité de Von Mises, mais elle est plus connue sous le nom de « Generalized Extreme Value distribution » (GEV). Le domaine de définition de la GEV dépend du paramètre k :

$$1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} > 0 \quad \text{si } k \neq 0$$

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{si } k = 0$$

k est un paramètre de forme (shape parameter) encore appelé indice des valeurs extrêmes ou indice de queue. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distributions à « queues épaisses ».

L'estimation du paramètre de forme permet de déterminer la distribution qui correspond à nos données. Plus particulièrement, $k=0$, $k>0$ et $k<0$ correspondent respectivement aux distributions de Gumbel, Fréchet et Weibull.

II.2.3. Le temps de retour

Soit x_p le quantile de la distribution correspondant à la probabilité p , c'est-à-dire la valeur pour laquelle la probabilité de dépassement est égale à p . Néanmoins, on préférera par la suite associer au quantile la notion de temps de retour.

Ainsi on considérera que se donner un événement de probabilité d'occurrence p , est équivalent à se donner un événement dont le temps de retour est $1/p$. Notons enfin que puisque les temps de retour qui nous intéressent sont ceux des séries initiales et non ceux des séries des extrema, il nous faudra toujours utiliser l'approximation suivante : les temps de retour de la série initiale se déduisent de ceux de la série des extrema pour un horizon n par une simple multiplication par n

$$T_{ini} = T_{ext} \times n$$

En termes de seuil de confiance, cela s'écrit :

$$\frac{1}{1 - \alpha_{VaR}} = n \times \frac{1}{1 - \alpha_{GEV}}$$

Nous obtenons donc :

$$\alpha_{GEV} = 1 - n \times (1 - \alpha_{VaR})$$

II.2.4. Estimation du quantile extrême

L'estimation du quantile extrême revient à estimer x_p tel que :

$$G(x_p) = 1 - p$$

Avec p un nombre réel proche de 1 (cela signifie que sur une période correspondante aux n observations, la perte sera plus petite que x_p avec une probabilité de $1-p$). Il suffit pour cela d'inverser la fonction G pour obtenir :

$$X_p = \mu - \frac{\sigma}{k} [1 - (-\ln(1 - p))^{-k}]$$

Ce quantile est donc influencé par les paramètres μ , σ et k .

II.2.5. Estimation des paramètres de la GEV :

Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer les paramètres des lois GEV, nous traiterons dans ce rapport la méthode de maximum de vraisemblance, qui s'avère la plus populaire et la plus efficace sous certaines conditions.

En nous référant à la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres des lois GEV, notamment la méthode basée sur le maximum de vraisemblance, la méthode des moments pondérés, la méthode des moments ou encore par des méthodes bayésiennes. La méthode la plus populaires et qui sous certaines conditions est la plus efficace est la méthode de maximum de vraisemblance.

Considérons à nouveau la loi GEV dont la fonction de répartition est donnée par :

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right]^{-\frac{1}{k}} \right\}$$

Et dont la fonction de densité est la suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left(- \left(1 + kz \right)^{-\frac{1}{k}} \left(1 + kz \right)^{-1 - \frac{1}{k}} \right)$$

L'estimateur de la GEV, par la méthode de maximum de vraisemblance porte sur les paramètres μ , σ et k .

Soit θ le vecteur des paramètres : $\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \\ k \end{bmatrix}$

Nous considérons un échantillon de données $\{X_t\}$ de dimension $T = f \times n$.

Nous divisons cet échantillon en n blocs et nous définissons X_n^+ de la façon suivante :

$$X_q^+ = \text{Max}(\{X_{1+q(t-1)}, t = 1, \dots, f\})$$

L'expression de la vraisemblance de l'observation est donc :

$$L(X_q; \mu, \sigma, k) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + k \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+k}{k}\right)} \exp \left(- \left[1 + k \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{k}} \right)$$

Nous en déduisons l'expression de la log-vraisemblance

$$l(X_q; \mu, \sigma, k) = -\ln(\sigma) - \left(\frac{1+k}{k} \right) \ln \left[1 + k \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma} \right) \right] - \left[1 + k \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{k}}$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance correspond à :

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta \in \Phi} \text{Max} \sum_{j=1}^K l(x_j; \theta)$$

En décrivant la fonction (*) en μ , σ et k , nous obtenons les équations de maximisation à partir desquelles nous calculons les estimateurs du maximum de vraisemblance.

L'expression de des dérivés par rapport à chaque paramètre est la suivante : $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{k})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1 + k - \omega^{-\frac{1}{k}}}{\sigma \omega} \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{1 + k - \omega^{-\frac{1}{k}}}{\sigma^2 \omega} \\ \frac{\partial l}{\partial k} = (1 - \omega^{-\frac{1}{k}}) \left(\frac{1}{k^2} \ln \omega - \left(\frac{1}{k^2} \ln \omega - \left(\frac{X_q - \mu}{k \sigma \omega} \right) \right) \right) - \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma \omega} \right) \end{array} \right.$$

Avec $\omega = 1 + k \left(\frac{X_q - \mu}{\sigma} \right)$

II.2.6. La Value At Risk partielle :

Nous pouvons déterminer une VaR journalière GEV pour le portefeuille via la formule suivante :

$$VaR_{GEV} = P_t \times \hat{G}^{-1}(1 - \alpha_{GEV})$$

Sachant que :

$$P(Z_n \geq -VaR_{GEV}) = 1 - \alpha_{GEV} = \exp\left(-\left(1 - k \frac{(VaR_{GEV} + \mu)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

Nous obtenons alors :

$$VaR_{GEV} = P_t \times \left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} (1 - (-\ln(1 - \alpha_{GEV}))^{-\hat{k}}) \right)$$

Avec P_t : la valeur du portefeuille à l'instant t.

II.3. Application au portefeuille obligataire :

II.3.1. Etapes de calcul de la VaR GEV d'une position :

Les étapes que nous avons suivies pour calculer la VaR par la théorie des valeurs extrêmes sont détaillées ci-dessous :

Etape 1 : Comme pour les méthodes classiques de VaR, la première étape consiste à choisir la fréquence des rentabilités. Dans ce qui précède, nous avons considéré une période de détention de 1 jour, nous allons donc conserver la même fréquence pour pouvoir comparer les résultats.

Etape 2 : Calcul des rentabilités (journalières dans notre cas) du portefeuille. Nous traitons ici le cas d'une position agrégée et nous nous plaçons donc dans un cadre univarié.

Etape 3 : Choix de la longueur de la période de sélection des rentabilités extrêmes (T). Pour une fréquence donnée, il s'agit de déterminer la longueur de la période de sélection des rentabilités extrêmes, notée T, ou encore le nombre de rentabilités de bases (n) à partir desquelles sont extraites les rentabilités extrêmes. Les deux paramètres T et n sont liés par la relation $T = n \times f$. La période de détention devrait satisfaire une contrainte d'ordre

statistique : il faut que la période de détention soit assez longue pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs extrêmes. Le résultat du théorème étant un résultat limite, il faut que les rentabilités extrêmes soient sélectionnées sur des périodes suffisamment longues pour pouvoir remplacer en toute sécurité la loi exacte par la loi asymptotique. Dans notre cas, les rentabilités sont journalières, et nous calculons les extrêmes sur une période $T = 1$ mois ($T = n = 30$).

Etape 4: Sélection des rentabilités extrêmes négatives. La base de données est découpée en sous-périodes ne se chevauchant pas et comprenant chacune n ($n=30$) observations de rentabilités de fréquence f . Sur chaque sous-période, la rentabilité extrême est sélectionnée. Notre base comprenant $N^{obs} = 1890$ observations de rentabilités et notre période de sélection des rentabilités extrêmes est égale à $T = 30$ jours, le nombre de rentabilités extrêmes N est alors égal à $\left\lceil N^{obs}/T \right\rceil = 63$ observations.

Etape 5 : Estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes à partir des N rentabilités sélectionnées précédemment. La méthode du maximum de vraisemblance donne des estimations asymptotiquement sans biais et de variance minimale.

Etape 6 : En se basant sur les résultats de l'étape 5, choix de la loi qui s'ajuste le mieux aux données. Validation du modèle par les tests de Khi-deux, Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darling.

Etape 7 : détermination de la VaR GEV grâce à la formule citée précédemment.

II.3.2. Estimation des paramètres de la GEV :

Nous disposons d'un historique de taux de cinq années allant du 02/01/2008 au 04/05/2013, soit un nombre total d'observations égal à 1890 observations. A partir de ces dernières, nous avons dégagé un historique agrégé des prix des obligations de notre portefeuille. Sur chaque mois (30 jours), nous avons extrait la valeur minimale du portefeuille, pour ainsi constituer une base de 63 extremums mensuels. La distribution GEV sera alors estimée à partir de ces rentabilités minimales.

Nous avons estimé par maximum de vraisemblance les paramètres de la loi généralisée GEV. Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'estimation :

σ	6,6049 E-4
μ	-5,6592 E-4
k	-1,4969

Tableau 7: Paramètres de la loi GEV

Les résultats obtenus nous permettent de déduire que la queue de distribution suit une loi de Weibull, vu que le paramètre k obtenu est négatif.

II.3.3. Test d'adéquation :

A l'aide de trois tests d'ajustements, à savoir les tests de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Khi-deux, nous allons vérifier si les rentabilités maximales de nos séries de données suivent effectivement la loi de Weibull. Les trois tests sont de même hypothèse nulle :

H_0 : la série des rendements extrêmes suit une loi de Weibull.

Le tableau ci-dessous nous présente les résultats des tests :

Niveau de confiance α	Rejeter l'hypothèse nulle ?		
	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Khi-deux
0,1	Oui	Oui	Oui
0,05	Non	Oui	Non
0,01	Non	Non	Non

Tableau 8: Résultats des tests d'ajustement

Nous constatons qu'au niveau de confiance 95%, au moins deux des trois tests ne rejettent pas l'hypothèse nulle, ce qui montre que la loi de Weibull est bien appropriée pour décrire le comportement des rentabilités extrêmes de notre portefeuille.

Les résultats exacts des tests se trouvent en annexe (Annexe V).

II.3.4. Calcul de α_{GEV}

Nous allons calculer le niveau de confiance α_{GEV} de la distribution de la série des valeurs extrêmes correspondant au seuil de confiance de notre VaR c'est-à-dire le seuil à 99 % en appliquant la formule développée précédemment :

Nous avons :

$$\alpha_{GEV} = 1 - n \times (1 - \alpha_{VaR})$$

$$\alpha_{GEV} = 0,26$$

II.3.5. Calcul du quantile extrême :

Nous calculons le quantile extrême à partir de la formule :

$$X_p = \mu - \frac{\sigma}{k} [1 - (-\ln(1 - p))^{-k}]$$

$$X_p = -8,13 \text{ E-4}$$

II.3.6. Calcul de la VaR extrême :

Après le calcul du quantile extrême et l'estimation des paramètres de la GEV, nous allons calculer la VaR de notre portefeuille à l'aide de la formule suivante :

$$VaR_{GEV} = P_t \times \left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} (1 - (-\ln(1 - \alpha_{GEV}))^{-\hat{k}}) \right)$$

$$VaR_{GEV} = 1357,14 \text{ DH}$$

VaR extrême	
Niveau de confiance	Horizon (jrs)
99%	1
VaR GEV	en %
1 357,14	0,17%

Figure 18: Calcul de la VaR GEV

La VaR calculée par la théorie des valeurs extrêmes permet d'améliorer le résultat de la VaR paramétrique, puisque, nous l'avons constaté, les rendements de notre portefeuille ne sont pas normaux. Les queues des distributions des séries financières étant généralement épaisses, la VaR paramétrique tend à sous-estimer les rendements extrêmes. C'est d'ailleurs pour cette raison que la valeur que nous avons obtenue est supérieure à celle des autres méthodes de VaR. Pour s'assurer de sa validité et de sa performance, il est important d'effectuer un Backtesting et la comparer aux autres méthodes.

Conclusion

Au lendemain d'une crise financière qui a fortement impacté l'économie mondiale, la gestion du risque est au centre des préoccupations des institutions financières et des instances de réglementation. Une bonne gestion du risque nécessite d'abord une bonne évaluation de ce dernier.

L'objectif de ce travail est de concevoir une application permettant d'évaluer quotidiennement le risque de taux lié au portefeuille « titres de créance » d'AWB par les différentes méthodes de Value at Risk et par les programmes de stress testing.

Afin de comprendre la nature des risques liés aux activités de la banque et plus particulièrement à la salle des marchés, nous avons consacré le premier chapitre à la présentation de ceux-ci. Ensuite, nous avons étudié dans un second chapitre les produits de taux auxquels nous nous intéressons, à savoir « les titres de créance ». Les caractéristiques de celles-ci et les facteurs influençant leur prix nous ont permis de comprendre le risque qu'elles engendrent. Le « pricing » de ces dernières dans les normes du contexte marocain était une étape indispensable pour appliquer les méthodes d'évaluation du risque que nous avons adoptées.

La première approche de l'évaluation du risque de taux est celle de la Value at Risk. La VaR est sans doute la méthode la plus utilisée pour l'évaluation du risque au sein des banques, car c'est un indicateur global et synthétique qui résume tout le risque en un seul chiffre. Dans ce travail, nous avons appliqué trois méthodes de VaR, à savoir la méthode historique, la méthode paramétrique et la méthode de Monte-Carlo. La première, se basant sur la distribution empirique des rendements, n'utilise aucune hypothèse sur la distribution et échappe donc au risque de modèle. Cependant, elle ne tient compte que des crises ayant déjà eu lieu, et se base sur l'hypothèse grossière que le futur se comporte comme le passé, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité. La seconde méthode suppose que les rendements de notre portefeuille d'obligations sont normaux, une hypothèse assez restrictive et pas forcément réaliste. En effet, l'histoire a montré que les séries financières sont d'une part, asymétrique et d'autre part à queues épaisses. Cette méthode tend donc à sous-estimer les rendements extrêmes. Enfin, la méthode de Monte-Carlo combine les avantages des deux premières, car elle consiste à calculer la VaR à partir de données simulées, ne restant pas très liée à l'historique et n'adoptant pas forcément la distribution normale. Un backtesting des trois méthodes nous a permis de qualifier la VaR de Monte-Carlo comme la méthode la plus adéquate à un portefeuille d'obligations.

La deuxième approche repose sur les programmes de stress testing. En effet, les instances de réglementation incitent les banques à effectuer régulièrement des simulations de

crises pour se prémunir contre les pertes que pourraient provoquer d'éventuelles situations défavorables du marché. Nous avons étudié le cas d'un déplacement parallèle, d'un twist et d'un Butterfly. La situation la plus défavorable pour le portefeuille est celle du déplacement parallèle, entraînant une perte supérieure à 1,8% de la valeur du portefeuille.

Ensuite, nous avons appliqué la théorie des valeurs extrêmes pour modéliser le risque directement à partir de la queue de distribution. Cette méthode vient compléter le spectre des différentes méthodes de mesure du risque que nous avons déjà étudiées. Sa principale caractéristique est qu'elle tient compte explicitement des conditions extrêmes du marché qui sont généralement mal évaluées par les autres méthodes. En appliquant cette méthode à notre portefeuille, nous avons dégagé une VaR supérieure à celles calculées par les méthodes précédentes, cette dernière ne sous-estimant pas les rendements extrêmes.

Enfin, puisque la composition du portefeuille et les taux d'intérêt changent chaque jour, il en va de même pour le risque. Il était donc nécessaire de prévoir une application permettant d'automatiser ce calcul et de l'actualiser quotidiennement. Grâce à l'outil VBA et le logiciel Excel, nous avons développé une application permettant d'effectuer le calcul de toutes les méthodes de VaR pour n'importe quel portefeuille d'obligations.

Pour conclure, il serait judicieux de compléter ce travail en étudiant d'autres aspects du risque lié à la détention des titres. Par exemple, traiter le risque de liquidité qui est négligé par la Value at Risk serait pertinent. En effet, les modèles de VaR supposent que les positions visées peuvent être liquidées dans un délai correspondant à un horizon fixe et assez court. Or le prix du marché affiché ne pourrait servir de fondement à la valorisation d'un portefeuille devant être cédé dans un marché imparfaitement liquide. Ajouter une composante liée au risque de liquidité entraînera une meilleure évaluation du risque de marché du portefeuille et permettra une meilleure couverture contre ce dernier.

Bibliographie

Bibliographie

- Introduction à la gestion des risques, Thierry RONCALLI, 2001
- La Value At Risk, mémoire de fin d'études, 2007.
- Value at Risk, Philippe JORION, 2000.
- Manuel de la normalisation obligatoire du Marché des Valeurs du Trésor, Bank Al Maghrib.
- Marchés financiers et gestion de portefeuille, John HULL.
- Options, futures et autres actifs dérivés, John HULL.
- Notes du cours de marchés financiers, Mr Mohamed TAAMOUTI.

Webographie :

http://www.europarl.europa.eu/workingpapers/econ/pdf/116_fr.pdf

http://pedagogie.ac-guadeloupe.fr/files/File/ses/taux_dint_r_t_pdf_4bca194522.pdf

http://aygosi.pagesperso-orange.fr/taux_interet.html

<http://mistis.inrialpes.fr/people/girard/Fichiers/CFS.pdf>

http://www.acimonaco.com/document/Calcul_de_taux.pdf

<http://blog.wikimemoires.com/2011/02/les-marches-des-capitaux-marches-monetaires-et-financiers/>

Annexe I : Courbe de taux Affichée par BAM

TAUX DE REFERENCE DU MARCHE SECONDAIRE DES BONS DU TRESOR (Courbe des taux)

Date :20/05/2013

En millions de dirhams

Echéance	Transactions	Taux moyen pondéré	Date de valeur
02/06/2013	2 046.56	3,918%	20/05/2013
29/07/2013	50.12	3,930%	20/05/2013
11/11/2013	50.05	4,110%	20/05/2013
18/11/2013	25.00	4,150%	20/05/2013
17/03/2014	29.54	4,215%	20/05/2013
05/05/2014	127.59	4,250%	20/05/2013
18/05/2014	28.36	4,260%	20/05/2013
16/11/2014	353.40	4,460%	20/05/2013
03/11/2015	1 516.96	4,747%	20/05/2013
17/07/2017	49.99	4,900%	16/05/2013
16/04/2018	24.00	4,980%	16/05/2013
28/02/2020	150.66	5,171%	16/05/2013
19/04/2021	75.62	5,330%	13/05/2013
03/05/2030	346.08	5,159%	06/02/2013
04/12/2036	12.48	4,681%	18/04/2013
Total	4886.41		

Cette courbe sert de référence et représente l'ensemble des transactions effectuées par la banque centrale sur les bons du trésor en précisant le montant de ces transactions ainsi que les taux auxquels elles ont été effectuées. En principe, le programme est tel que la courbe est quotidiennement mise à jour.

Annexe II : Pricer Obligations

Priceur Obligations	
Date de valeur 25/05/2013	ISIN 201233
Emission 18/03/2013	Jouissance 18/03/2013
Échéance 16/09/2013	Nominal 100 000
Taux facial 4,09%	
Coupon couru 772,56	Taux de rdt 4,00%
Dirty Price 100 791,03	Clean Price 100,79%

Annexe III : Sorties de E-views

Test de stationnarité de Dickey-Fuller appliqué au TMP. De la même manière, le test a été appliqué aux autres maturités.

Premier test : avec tendance

Null Hypothesis: TMP has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-14.40781	0.0000
Test critical values :		
1% level	-3.962902	
5% level	-3.412186	
10% level	-3.128017	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable : D(TMP)
Method : Least Squares
Date : 06/15/13 Time : 09 :53
Sample (adjusted) : 1/02/2008 3/06/2013
Included observations : 1891 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.198094	0.013749	-14.40781	0.0000
C	0.006670	0.000466	14.30261	0.0000
@TREND(1/01/2008)	-1.96 ^E -07	5.20 ^E -08	-3.770518	0.0002
R-squared	0.099058	Mean dependent var		-2.30 ^E -06
Adjusted R-squared	0.098104	S.D. dependent var		0.001254
S.E. of regression	0.001191	Akaike info criterion		-10.62648
Sum squared resid	0.002678	Schwarz criterion		-10.61768
Log likelihood	10050.34	Hannan-Quinn criter.		-10.62324
F-statistic	103.7925	Durbin-Watson stat		1.994430
Prob(F-statistic)	0.000000			

La série n'a pas de tendance.

Deuxième test : avec constante

Null Hypothesis: TMP has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-13.85730	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.433607	
5% level	-2.862865	
10% level	-2.567522	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(TMP)
 Method: Least Squares
 Date: 06/15/13 Time: 09:55
 Sample (adjusted): 1/02/2008 3/06/2013
 Included observations: 1891 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.184512	0.013315	-13.85730	0.0000
C	0.006039	0.000437	13.82459	0.0000
R-squared	0.092274	Mean dependent var		-2.30E-06
Adjusted R-squared	0.091794	S.D. dependent var		0.001254
S.E. of regression	0.001195	Akaike info criterion		-10.62003
Sum squared resid	0.002698	Schwarz criterion		-10.61417
Log likelihood	10043.24	Hannan-Quinn criter.		-10.61787
F-statistic	192.0247	Durbin-Watson stat		2.006600
Prob(F-statistic)	0.000000			

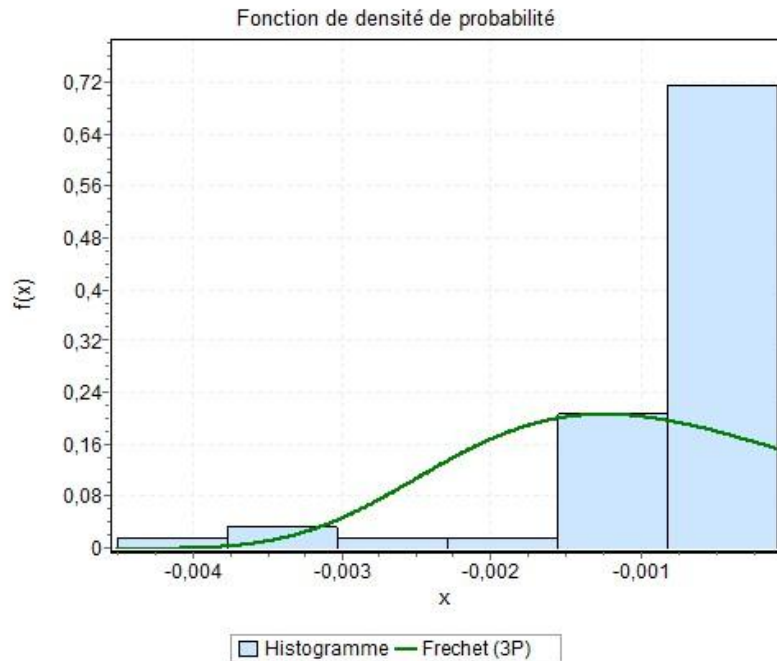
La série est donc stationnaire avec constante.

Annexe IV : Sorties de Easyfit

Résultats d'ajustage		
#	Distribution	Paramètres
1	Frechet (3P)	$\alpha=1,9147E+8$ $\beta=2,5063E+5$ $\gamma=-2,5063E+5$
2	Gen. Extreme Value	$k=-1,4969$ $\sigma=6,6049E-4$ $\mu=-5,6592E-4$
3	Gumbel Max	$\sigma=6,8028E-4$ $\mu=-0,0011$
4	Weibull (3P)	$\alpha=3,8196E+8$ $\beta=1,5942E+5$ $\gamma=-1,5942E+5$

Qualité d'ajustement : Fréchet.

Frechet (3P) [#1]					
Kolmogorov-Smirnov					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	0,3369				
Valeur de P	7,0094E-7				
Rang	4				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	0,13253	0,15144	0,16823	0,18812	0,20184
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Anderson-Darling					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	10,527				
Rang	2				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	1,3749	1,9286	2,5018	3,2892	3,9074
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Khi-Carré					
Degrés de liberté	3				
Statistique	15,165				
Valeur de P	0,00168				
Rang	2				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	4,6416	6,2514	7,8147	9,8374	11,345
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui



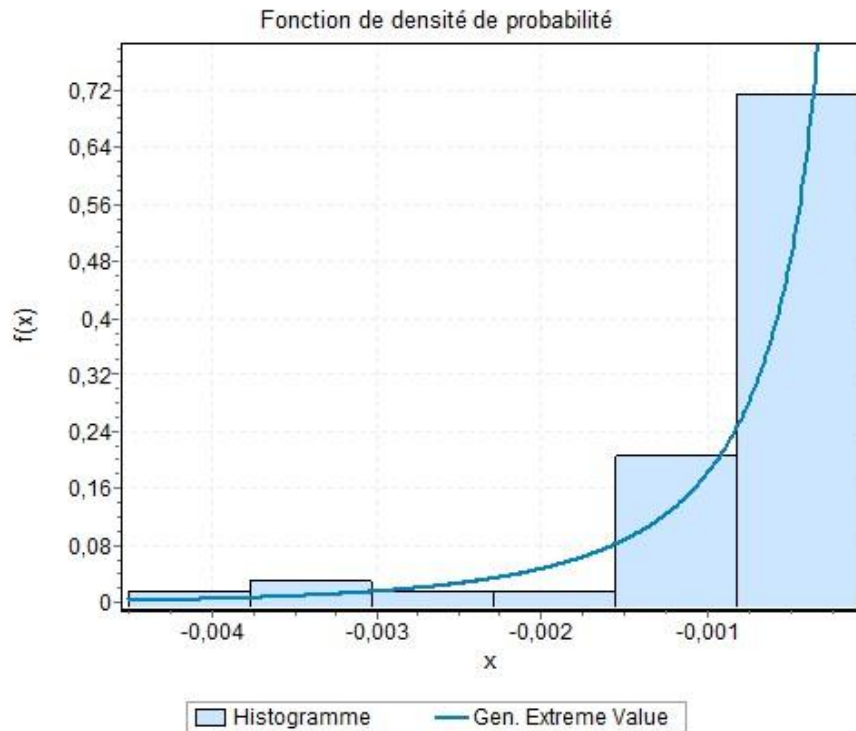
Qualité d'ajustement : GEV

Qualité d'ajustement - Synthèse

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Khi-Carré	
		Statistique	Rang	Statistique	Rang	Statistique	Rang
1	Gen. Extreme Value	0,06652	1	21,71	1	N/A	

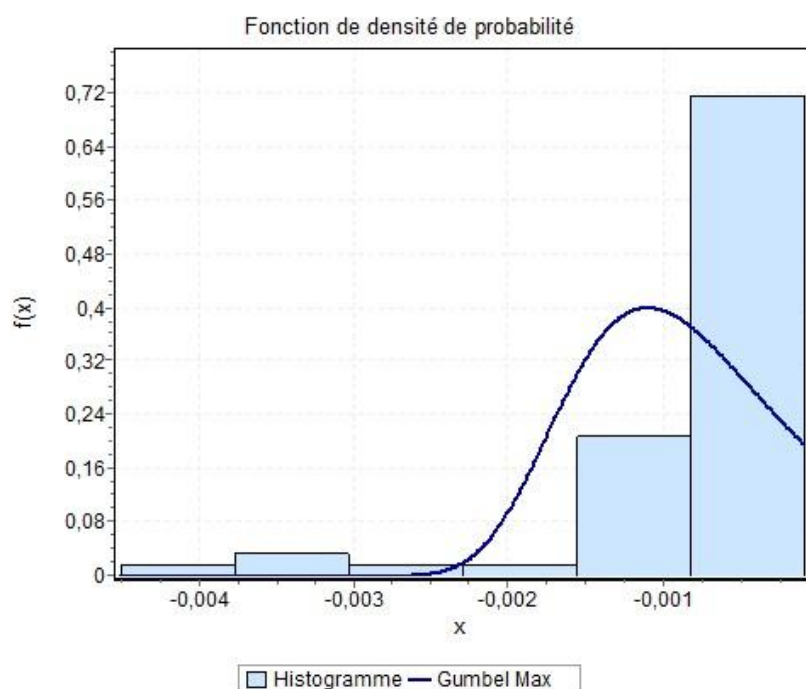
Qualité d'ajustement - Détails

Gen. Extreme Value [#1]						
Kolmogorov-Smirnov						
Taille de l'échantillon	63					
Statistique	0,06652					
Valeur de P	0,92563					
Rang	1					
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	
Valeur critique	0,13253	0,15144	0,16823	0,18812	0,20184	
Rejeter?	Non	Non	Non	Non	Non	
Anderson-Darling						
Taille de l'échantillon	63					
Statistique	21,71					
Rang	1					
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	
Valeur critique	1,3749	1,9286	2,5018	3,2892	3,9074	
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	



Qualité d'ajustement : Gumbel

Gumbel Max [#3]					
Kolmogorov-Smirnov					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	0,30218				
Valeur de P	1,3373E-5				
Rang	3				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	0,13253	0,15144	0,16823	0,18812	0,20184
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Anderson-Darling					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	16,449				
Rang	3				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	1,3749	1,9286	2,5018	3,2892	3,9074
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Khi-Carré					
Degrés de liberté	4				
Statistique	17,336				
Valeur de P	0,00166				
Rang	3				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	5,9886	7,7794	9,4877	11,668	13,277
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui



Qualité d'ajustement : Weibull

Weibull (3P) [#4]					
Kolmogorov-Smirnov					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	0,16364				
Valeur de P	0,06087				
Rang	2				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	0,13253	0,15144	0,16823	0,18812	0,20184
Rejeter?	Oui	Oui	Non	Non	Non
Anderson-Darling					
Taille de l'échantillon	63				
Statistique	2,9069				
Rang	1				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	1,3749	1,9286	2,5018	3,2892	3,9074
Rejeter?	Oui	Oui	Oui	Non	Non
Khi-Carré					
Degrés de liberté	4				
Statistique	6,4326				
Valeur de P	0,16908				
Rang	1				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valeur critique	5,9886	7,7794	9,4877	11,668	13,277
Rejeter?	Oui	Non	Non	Non	Non

