

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

INSEA



Projet de Fin d'Études

L'estimation de structure par terme des taux zéro coupon.

Préparé par : *Mlle Saoussan BOUCHAREB*

Sous la direction de : *Mme Fatima BAKKASS (INSEA)*

M. Abderrahim RAFIKI (Banque Al Maghrib)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat Finance

Devant le jury composé de :

- *Mme Fatima BAKKASS (INSEA)*
- *M. Abdel-Ilah YAAKOUBD (INSEA)*
- *M. Abderrahim RAFIKI (Banque Al Maghrib)*

Juin 2009

Dédicace

A mes chers parents,

Je n'ose pas imaginer une expression qui puisse résumer ma gratitude envers votre soutien et encouragement. Aucune dédicace ne saurait exprimer mon amour et mon respect pour vous. Trouvez en ce travail le fruit de votre dévouement et l'expression de mes sentiments les plus profonds.

A ma sœur Narjiss et mes frères : Youssef, Ismail et Zakaria,

Avec tout mon amour et mon affection, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de réussite.

A toute ma grande famille,

A toutes mes amies,

A tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin à réaliser ce travail.

Remerciements

Il m'est agréable de m'acquitter d'une dette de reconnaissance auprès de toutes les personnes dont l'intervention au cours de ce projet a favorisé son aboutissement.

Ainsi, je tiens à exprimer mes plus profonds remerciements à Mme Fatima BAKKASS, pour la disponibilité dont elle a fait preuve à mon égard, pour les conseils qu'elle m'a prodigués et pour ces encouragements.

Toute ma gratitude à M. Abderrahim RAFIKI qui m'a encadré tout au long de mon projet de fin d'étude avec le souci de m'apporter une formation complète et intéressante. Son accueil, sa confiance ont rendu ce stage intéressant. Je le remercie également pour sa patience, son aide et ces conseils précieux qui m'ont été d'un grand intérêt durant ce stage.

Je tiens aussi à exprimer mes plus sincères remerciements à Messieurs le directeur de la direction des opérations monétaires et de change M. Mounir RAZKI.

Je remercie également M. YAAKOUBD qui m'a fait l'honneur d'accepter de juger mon travail.

JE saisis aussi l'occasion pour remercier tout le corps professoral de l'INSEA pour la formation qu'il m'a prodiguée.

Mes vifs remerciements vont finalement à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

Le présent document constitue la synthèse de notre travail dans le cadre du projet de fin d'études effectué au sein de la Direction des Opérations Monétaires et de Change (DOMC) à Bank Al Maghrib. La perspective générale de ce travail est l'estimation de la structure par terme.

Nous définissons dans un premier temps le problème de l'estimation de la structure par terme et nous précisons aussi le schéma de l'estimation. Ensuite, nous définissons un ensemble de critères pour le choix de la méthode d'estimation. Il ressort de cette étude que la classe des modèles de Nelson et Siegel (1987) répond à la plupart des critères invoqués.

L'objectif de la deuxième partie est la détermination des facteurs de déformation de la structure par terme à l'aide d'une analyse factorielle. Les facteurs identifiés constituent le point de départ des travaux de Nelson et Siegel (1987). Nous cherchons ensuite à examiner la performance des différentes extensions du modèle de Nelson et Siegel dans le but d'estimer et de prévoir la structure par terme des taux d'intérêt.

Enfin, une conclusion générale dresse le bilan de cette recherche, et propose de possibles prolongements.

Table des matières

Dédicace.....	3
Remerciements.....	4
Résumé.....	5
Liste des abréviations.....	9
Liste des figures	10
Liste des tableaux.....	11
Introduction générale	12
Partie 1 :	
Chapitre 1 : Problématique de la structure par terme.	
I. Introduction.....	17
II. Structure par terme à coupon zéro ou des taux zéro ?	18
III. Le choix de la méthode d'estimation.....	19
Chapitre 2 : Définitions et Théories traditionnelles.	
1. Les différentes notions des taux d'intérêts.....	21
1.1 Taux nominal et taux réel	
1.2 Taux longs et taux courts	
1.3 Taux de rendement actuariel	
1.4 Taux Zéro-coupon	
1.5 Taux forward ou taux à terme	
2. Les théories économiques traditionnelles des taux d'intérêt.....	23
Chapitre 3 : Données et Méthodologie.	
I. Description des bases de données.....	25
II. Méthodologie.....	26
Partie 2 : Les facteurs de déformation de la structure par terme	
1. Introduction.....	30
2. Le principe de l'analyse en composante principale.....	31

3. Les facteurs de déformation de la structure par terme.....	32
3.1 Interprétation du premier facteur.....	32
3.2 Interprétation du second facteur.....	34
3.3 Interprétation du Troisième facteur.....	35
3.4 Conclusions.....	36

**Partie 3 : Le choix du modèle d'estimation de la structure par terme
 parmi la classe de Nelson et Siegel.**

1. Introduction.....	38
2. Les modèles d'estimation de la structure par terme.....	39
3. Les modèles de Nelson-Siegel.....	47
3.1 Le modèle de base à trois facteurs.	
3.2 Le modèles à 2 facteurs.	
3.3 Le modèles à 4 facteurs de Björk et Christensen (1999).	
3.4 Le modèle à 3 facteurs de Bliss (1997).	
3.5 Le modèle à 4 facteurs de Svensson.	
3.6 Le modèle ajusté de Svensson à 4 facteurs.	
3.7 Spécification générale du modèle.	
4. Procédure d'estimation.....	49
4.1 L'approche en deux étapes avec des paramètres d'échelle fixés.	
4.2 L'approche en deux étapes avec des paramètres d'échelle estimés.	
4.3 Les restrictions sur les paramètres d'échelle.	
4.4 Approche vectorielle à une étape.	
5. Les résultats de l'estimation.....	53
6. Les résultats de la prévision.....	55
7. Conclusions.....	57
Conclusion Générale.....	58
Annexes.....	60
Annexe 1 : Le filtre de Kalman.....	60
Annexe 2 : Statistiques descriptives.....	63
Annexe 3 : Tableau n°10 : Ajustement des modèles avec restrictions sur les paramètres.....	63
Annexe 4 : Tableau n°11 : Ajustement des modèles sans restrictions sur les paramètres.....	65

Annexe 5 : Tableau n°12 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l’approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (Horizon de prévision une journée).....	66
Annexe 6 : Tableau n°13 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l’approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (horizon de prévision 3 jours).....	67
Bibliographie	68

Liste des abréviations

BAM : Bank Al Maghrib.

BIS : la Banque des règlements internationaux (Bank for International Settlements).

NS2-2 : le modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle étant fixé.

NS2-2- λ : le modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle estimé.

NS2-3 : le modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle étant fixé.

NS2-3- λ : le modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle étant estimé.

NS2-4 : le modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle étant fixé.

NS2-4- λ : le modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes. Le paramètre d'échelle étant estimé.

NS1-2 : le modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes.

NS2-3 : le modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes.

NS2-4 : le modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs estimé en utilisant l'approche en deux étapes.

NS1-B: Le modèle de Bliss estimé en utilisant l'approche en une étape.

NS1-S: le modèle de Svensson estimé en utilisant l'approche en une étape.

NS1-AS: Le modèle de Svensson ajusté estimé en utilisant l'approche en une étape.

RMSE : La racine carrée de l'erreur quadratique moyen d'estimation. (root mean squared error)

TRMSPE: Trace Root Mean Squared Error.

RMSPE: Root Mean Squared Error.

Liste des figures

Graphique n°1 : Cercle des corrélations pour les deux axes principaux F1& F2.....	32
Graphique n°2 : Les composantes du modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs estimés par MATLAB pour les données du: 20/04/2009.....	40
Graphique n° 3 : L'estimation du modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs par MATLAB pour les données du 20/04/2009.....	41
Graphique n°4 : L'estimation des composantes du Modèle à quatre facteurs de Björk et Christensen par MATLAB pour les données du 20/04/2009.....	43
Figure n° 5 : L'estimation des différents modèles de Nelson et Siegel pour la courbe des taux moyenne de la période d'étude.....	50
Figure n° 6 : Comparaison entre les différents modèles de Nelson et Siegel estimés la date 20/05/2009.....	51

Liste des tableaux

Tableau n°1 : Le bilan des flux des deux opérations.....	67
Tableau n°2 : Les statistiques relatives aux cinq premiers axes factoriel de \mathfrak{R}^-	27
Tableau n°3 : la qualité de représentation des variables sur le premier axe.....	31
Tableau n°4 : les contributions des variables à la construction du premier axe (en %).....	33
Tableau n°5 : la qualité de représentation des variables sur le deuxième axe.....	34
Tableau n°6 : Contribution des variables à la construction du deuxième axe (en %).....	35
Tableau n°7 : les qualités de représentation des variables sur le troisième axe.....	35
Tableau n°8 : Contribution des variables à la construction du troisième axe (en %).....	35
Tableau n° 9 : les statistiques descriptives.....	63
Tableau n°10 : Estimation des paramètres avec les restrictions sur les paramètres.....	63
Tableau n°11 : Estimation des paramètres sans les restrictions sur les paramètres.....	64
Tableau n°12 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l'approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (Horizon de prévision une journée).....	66
Tableau n°13 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l'approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (Horizon de prévision 3 jours).....	12

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne .La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi ! »

Albert Einstein

Introduction

L'existence d'une multiplicité de taux d'intérêt est un fait patent de la réalité économique et financière. Taux du marché monétaire, interbancaire, obligataire, taux débiteurs, . . . des centaines de taux révèlent les relations complexes liant prêteurs et emprunteurs de capitaux.

Face à ce foisonnement du réel, la théorie économique met en avant un certain nombre de critères permettant de classer les taux d'intérêt. Les critères les plus souvent évoqués sont : la durée du prêt correspondant, son statut fiscal, la plus ou moins grande liquidité du titre support, le risque de défaillance de l'emprunteur, et enfin les clauses de remboursement. Chacun d'eux représente un facteur explicatif des taux d'intérêt, et a, en tant que tel, donné lieu à une littérature spécifique. Toutefois, le critère de la durée a été largement privilégié, tout simplement parce qu'il fait référence à ce qui fait « l'essence » du phénomène de l'intérêt : le temps. (La structure par terme des taux d'intérêt, Bisière, 1997).

L'étude de l'influence du facteur temps doit être menée sur la base des taux d'intérêt uniquement différenciés par la durée du titre support. L'actif idéal en la matière est un bon sans coupon, sans risque de défaut, et à valeur faciale normée à l'unité, c'est-à-dire un titre conférant à son détenteur le droit de recevoir une unité monétaire au moment de son échéance. Ordonnant alors les taux d'intérêt portés par ces titres en fonction de leur échéance, on obtient une structure par terme des taux d'intérêt. Bien entendu, « l'actif idéal » n'existe pas, et la structure des taux doit donc être estimée à partir des prix de marché des actifs réellement disponibles, et, en particulier, des actifs obligataires.

Expliquer la forme courante de la structure des taux, ainsi que ses déformations au cours du temps, constitue un problème crucial pour bon nombre d'acteurs économiques. Pour un État (et/ou une autorité monétaire), il conditionne sa capacité à infléchir la hiérarchie des taux, au service d'une politique économique donnée. Pour une banque commerciale, il définit les conditions de l'activité de transformation de terme. D'une manière générale, il intéresse tous les acteurs qui détiennent des actifs, et doivent gérer un risque de taux d'intérêt.

De nombreux modèles de la structure par terme des taux d'intérêt ont été développés ces vingt dernières années afin de tenter de répondre aux besoins des intermédiaires financiers (Zero coupon yield curves :technical documentation, BIS¹, No 25, Département Economique et Monétaire, Octobre 2005). En effet, divers changements sur les marchés financiers ont stimulé l'intérêt des investisseurs pour les instruments dits à revenus fixes.

De nouvelles techniques ont été développées afin de mieux gérer des portefeuilles composées d'actifs à revenus fixes dans le cadre d'une incertitude croissante sur les marchés financiers. Aujourd'hui, ces actifs sont de plus en plus rencontrés au sein des portefeuilles d'actifs financiers et sont abondamment utilisés afin de satisfaire une clientèle variée d'investisseurs aux objectifs parfois fort différents. Ces investisseurs en actifs à revenus fixes sont exposés à divers risques (comme le risque de liquidité et le risque de défaut). Le risque le

¹ BIS : International Bank of settlement (Banque des règlements internationaux)

plus fréquemment rencontré, et souvent le plus important, est le risque de taux d'intérêt, qui est lié à la variabilité du rapport entre le rendement des obligations et leurs prix, variabilité causée par des mouvements de taux d'intérêt.

En raison de la relation entre les prix des obligations et les taux d'intérêt, aucun segment de marché obligataire n'est à l'abri de ces fluctuations. D'autre part, la valorisation et la gestion d'autres actifs, qu'ils soient financiers ou non, nécessitent l'utilisation de taux d'intérêt et dépendent donc de leur stabilité. Il est ainsi nécessaire d'obtenir une meilleure compréhension du comportement des taux d'intérêt et des facteurs les influençant et de prévoir ce comportement.

Si l'étude de la courbe des taux permet aux financiers de valoriser et de gérer des produits financiers, cette courbe intéresse aussi les économistes puisqu'elle leur permet d'étudier les anticipations futures de taux d'intérêt. La plupart des banques centrales l'utilisent maintenant comme indicateur pour fixer la politique monétaire.

A première vue, ces deux aspects, économique et financier, sont distincts l'un de l'autre. Plusieurs travaux au niveau des banques centrales (France, Japon ...) révèlent un intérêt croissant des économistes pour les modèles financiers et notamment ceux de la structure par terme.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le présent travail qui va s'atteler à l'estimation de la structure par terme des taux d'intérêt marocains.

Première partie

- ✓ Problématique de l'estimation de la structure par terme.
- ✓ Définitions et Théories traditionnelles.
- ✓ Données et méthodologie.

Chapitre 1 :

**Problématique de l'estimation de
la structure par terme.**

I. Introduction :

Dans la littérature, on distingue trois approches du problème de l'estimation de la structure par terme : une approche purement empirique, une approche macroéconomique, et une approche microéconomique.

La première de ces approches met en œuvre des techniques de traitement de données (comme l'analyse factorielle) pour dégager les principaux facteurs explicatifs des déformations de la courbe des taux, ou encore procède à une analyse économétrique systématique des corrélations et causalités entre la structure des taux et un grand nombre de variables.

La seconde approche tente de replacer le problème des taux dans un cadre macroéconomique complet, type IS-LM, prenant en compte, notamment, le comportement spécifique de l'état (politique monétaire, politique de financement des déficits budgétaires et de gestion de l'encours de dette publique, . . .). Cette approche procède d'une *dissociation fonctionnelle* entre les taux d'intérêt aux diverses échéances, souvent exprimée sous la forme d'une opposition entre deux taux : le taux « court » et le taux « long ».

La troisième approche est celle de l'évaluation. Dans l'optique de l'évaluation, tous les actifs partagent une fonction commune : procurer à leurs détenteurs une protection contre les risques économiques. Le prix d'équilibre d'un actif est alors fixé, *via* les comportements individuels en incertitude, au vu des caractéristiques de l'assurance qu'il représente.

Le prix d'un actif est, en conséquence, lié au prix d'un autre, dans la mesure où ils offrent des protections comparables. Ceci est valable pour tous les actifs financiers, et, en particulier, pour les bons sans coupon.

La perspective générale de ce travail étant avant tout empirique, nous ne considérons ici que la première approche.

Définissons le problème de la construction. Nous supposons que nous connaissons les taux de rendements $R_t(\tau)$ ou les prix $P_t^c(\tau)$ de certaines obligations à coupon zéro. Comment pouvons nous en déduire la courbe continue des taux zéro $\mathfrak{R} = \{R_t(\tau) | \tau \in \mathbf{R}^+\}$?

Nous notons \mathfrak{T} l'ensemble des maturités observées. Soit \mathcal{G} un sous espace vectoriel de ε , l'espace vectoriel des fonctions réelles. Nous pouvons alors chercher une fonction $g \in \mathcal{G}$ vérifiant certaines conditions. Nous devons pour cela définir une méthode de décision. Une première méthode consiste à choisir une fonction g_1 qui vérifie par exemple :

$$g_1(\tau) = R_t(\tau) \quad \forall \tau \in \mathfrak{T}$$

C'est la technique d'interpolation, c'est-à-dire que la courbe estimée des taux zéro $g_1(\tau)$ passe exactement par les taux de rendement observés. Une autre méthode consiste à choisir un critère de minimisation entre les données observées et les valeurs théoriques :

$$g_2(\tau) = \min_{g \in \mathcal{G}} C(g, \mathfrak{T})$$

Cette seconde méthode est la plus fréquemment employée pour estimer la structure par terme. La raison principale est que la première est sensible aux données aberrantes.

La problématique de l'estimation de la structure par terme peut être résumée dans trois points :

- ✓ La modélisation des facteurs d'actualisation ou des taux d'intérêt ?
- ✓ Le choix de \mathcal{G} .

II. Structure par terme à coupon zéro ou des taux zéro ?

Cette question ne semble avoir aucun sens. Nous sommes cependant confrontés à un problème numérique fréquent : la reparamétrisation.

Par exemple McCulloch a choisis de construire la fonction d'actualisation, puis en déduire la courbe des taux zéro. Dans la méthode de proche en proche, ce sont les taux zéro coupon qui sont modélisés pour déduire ensuite la fonction d'actualisation.

Ces deux schémas ne donnent pas les mêmes résultats car ils ne sont pas équivalents d'un point de vue numérique. Il est donc nécessaire de choisir un schéma.

L'estimation de la structure par terme des coupons zéro reproduit assez mal la courbure des taux actuariels observés. Nous devons donc choisir une méthode basée sur l'estimation de la structure par terme des coupons zéro avec beaucoup de prudence.

Il est notamment important que la méthode d'estimation puisse reproduire localement des courbures assez prononcées, d'autant plus que l'économiste et le financier sont intéressés par les taux zéro, mais aussi des taux à terme. Le calcul des taux à terme fait intervenir une dérivation ou une différence finie.

Ces remarques plaident donc en faveur d'une méthode basée sur l'estimation des taux zéro.

III. Le choix de la méthode d'estimation :

Pour construire la structure par terme des taux d'intérêt, le financier ou l'économiste doit définir à priori l'ensemble \mathcal{G} . D'abord le choix de \mathcal{G} est guidé par l'utilisation de la courbe des taux zéro.

Ensuite des critères relativement simples doivent néanmoins permettre de faire une sélection de \mathcal{G} . On cherche, en effet, une fonction dont le nombre de paramètres à estimer reste raisonnable et dont la forme est suffisamment souple pour pouvoir s'adapter à des configurations de marché très différentes. On souhaite aussi que la courbe obtenue soit relativement lisse pour faciliter la lecture des taux à terme.

Compte tenu de ces critères, les familles d'interpolation issues de modèles théoriques ne sont pas satisfaisantes. Des comportements numériques erratiques et des durées d'estimation relativement longues rendent leur interprétation et leur utilisation souvent difficiles. On préfère donc retenir une fonction issue de la voie pragmatique.

Parmi ces fonctions, plusieurs spécifications sont disponibles. Les tests réalisés montrent cependant que la fonction proposée par Nelson et Siegel (1987) répond à la plupart des critères invoqués.

Pour toutes ces raisons, nous nous intéressons dans ce travail à cette classe de fonctions.

Nous commencerons l'étude par une analyse factorielle pour déterminer les facteurs de déformation de la structure par terme. Nous cherchons ensuite à examiner la performance des différentes extensions du modèle de Nelson et Siegel.

Nous évaluerons dans un premier temps leurs qualités d'ajustement aux données marocaines. Puisque la capacité du modèle à donner des prévisions est aussi importante, nous cherchons aussi à évaluer la capacité prédictive de cette classe de fonctions.

Chapitre 2 :

Définitions et Théories traditionnelles.

1. Les différentes notions des taux d'intérêts :

Le taux d'intérêt est le prix qu'il faut payer pour emprunter de l'argent, c'est aussi le prix que l'on reçoit quand on prête de l'argent. Ce prix s'exprime sous forme d'un taux. L'intérêt est donc la rémunération du service de prêt d'argent.

Le taux d'intérêt est en général annuel, mais il peut tout aussi bien être mensuel. Il faut donc en principe préciser la période concerné par ce prix. Cependant, quand on ne précise pas, on suppose implicitement qu'il s'agit d'un taux annuel.

1.1 Taux nominal et taux réel :

Le taux d'intérêt nominal est celui qui est fixé lors de l'opération d'emprunt ou de prêt, il est inscrit dans le contrat qui lie emprunteur et prêteur. Mais au fil du temps, l'inflation vient grignoter la valeur des sommes prêtées et emboursées. On calcule donc le taux d'intérêt réel en corrigeant le taux d'intérêt nominal des effets de l'inflation. Concrètement, quand le taux d'inflation est relativement faible, on peut se contenter, par approximation, de soustraire le taux d'inflation au taux d'intérêt nominal pour obtenir le taux d'intérêt réel (mais mathématiquement ce procédé n'est pas correct, même s'il donne des résultats très proches de ceux calculés correctement sur le plan mathématique).

Pour comprendre la notion du taux de rendement réel, prenons l'exemple d'un placement d'une année dans un instrument financier à échéance d'une année, une somme de $(1+R)$ unités monétaires.

Notons respectivement, P et π le niveau des prix initial et le taux d'inflation durant la durée de portage de l'instrument. Un capital réel de $(1/P)$ génère donc, à échéance, une valeur réelle de $(1+R)/P (1+\pi)$.

Le taux de rendement réel du r du placement est donc le suivant :

$$r = (1+R) / (1+\pi) - 1$$

Si les taux ne sont pas très élevés, il est commode d'approximer cette relation entre le taux r , le taux nominal R et le taux d'inflation π par :

$$r = R - \pi \text{ (relation de Fisher)}$$

Le taux d'intérêt réel est donc la différence entre le taux d'intérêt nominal et l'inflation, c'est-à-dire le taux d'intérêt après élimination des effets de l'inflation. Toutes choses étant égales par ailleurs, plus le taux d'inflation est élevé, plus les taux d'intérêt nominaux sont élevés.

1.2 Taux longs et taux courts :

Le taux long exprime l'offre et la demande de capitaux en tenant compte des perspectives d'inflation. La rémunération (le taux d'intérêt doit rester positif. On dit que les taux longs sont " le juge de paix". D'une part, ils reflètent la santé économique d'un pays et d'autres part, ils sont influencés par les anticipations des agents économiques d'un pays, anticipation sur l'inflation certes, mais aussi sur la politique économique, voir sur la politique ; en bref, sur tout ce qui peut modifier les données de l'économie.

Le taux court se forme de manière différente. Certes, sur le marché monétaire, l'offre et la demande de capitaux se confrontent, mais les acteurs ne sont pas les mêmes. Ce sont essentiellement des banques commerciales, des investisseurs institutionnels (assurances ou fond de pension) et des grandes entreprises sous le contrôle de la banque centrale.

On remarque souvent que les taux courts sont inférieurs aux taux longs (de l'ordre de 2 à 3 points), et c'est logique parce que l'argent est engagé pour moins longtemps. Mais quand la banque centrale intervient beaucoup, il peut se produire une inversion des taux, phénomène pervers qui consiste à mieux rémunérer l'argent placé à court terme que l'argent investi à long terme.

1.3 Taux de rendement actuariel :

Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui, appliqué à tous les flux, donne le prix de marché de l'obligation. Soit un titre à revenu fixe (une obligation par exemple), caractérisé, à un moment donné, par un prix de marché, un taux d'intérêt nominal, un régime d'amortissement et une échéance. Le taux de rendement actuariel est alors défini comme le taux d'actualisation permettant d'égaliser la valeur actuelle de la suite de cash-flows générés par ce titre à son prix de marché.

Le taux de rendement actuariel a est donc la solution de l'équation suivante :

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+a)^i}$$

Avec P : le prix du titre ; CF_i : le flux reçu en i ; n : la maturité du titre.

1.4 Taux Zéro-coupon :

Le taux zéro coupon (ZC) ou encore taux spot à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années, sans flux intermédiaires.

La plupart des taux observables sur le marché ne sont pas des taux zéro-coupon.

1.5 Taux forward ou taux à terme :

Le taux à terme à la date t , pour la date futur $t+n$, à l'échéance $t+m$ ($m>n$), est par définition le rapport de l'opération double, à la date t , comprenant l'achat d'un bon zéro coupon d'échéance $t+m$, et la vente d'un bon zéro coupon d'échéance $t+n$. On appelle ce taux à terme, noté $f(t, n, m)$, le taux à terme en t à m périodes pour $t + n$ (dans n périodes).

La limite de ce taux quand n tend vers m , noté $f(t, m)$, s'interprète comme le taux à terme instantané.

$$f(t, n, m) = -\log\left(\frac{B(t, m)}{B(t, n)}\right) \frac{1}{m-n} = \frac{my(t, m) - ny(t, n)}{m-n}$$

Le taux zéro coupon à une échéance donnée est la moyenne des taux à terme successifs. Algébriquement, en notant $y(t, ld)$ le taux zéro coupon en t d'échéance $t+ld$, et $f(t, id, d)$ le taux à terme en t pour la date $t+id$ d'échéance $t+id+d$, on a, par définition des taux à terme.

$$y(t, ld) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} f(t, id, d)$$

2. Les théories économiques du taux d'intérêt :

Historiquement, Fisher en 1896 fut le premier à envisager le rôle des anticipations des agents économiques afin d'expliquer la structure par terme. En univers certain, à l'équilibre, les taux à terme doivent coïncider avec les taux comptant futurs. Lorsqu'on introduit de l'incertitude, ce n'est plus nécessairement le cas ; la notion de valeurs attendues des taux comptant joue alors un rôle majeur. De manière générale, l'hypothèse d'anticipations est fondée sur le fait que le rendement obtenu par détention d'une obligation à long terme jusqu'à son échéance est égale au rendement attendu d'un investissement répété dans une série d'obligations à court terme. Selon l'hypothèse de préférence pour la liquidité, une prime de terme doit être introduite afin de prendre en compte le comportement vis-à-vis du risque des agents. Une prime est requise par les investisseurs pour qu'ils décident d'investir dans les instruments à long terme plus volatils.

L'hypothèse de segmentation du marché postule que les investisseurs ont des préférences distinctes et marquées quant au choix de la maturité de leurs investissements. Le marché global est alors divisé en une série de marchés distincts au sein desquels les agents économiques échangent des actifs à revenus fixes.

Finalement, dans la théorie de l'habitat préféré, les agents ont des préférences pour plusieurs maturités et peuvent être influencés par la présence de primes de terme. Cette dernière théorie essaie d'unifier les précédentes. Cependant, essentiellement en raison de problèmes de tests, on éprouve beaucoup de difficultés à faire un choix parmi toutes ces théories.

Chapitre 3 :

Données et méthodologie

I. Description des bases de données :

Nous rappelons que la courbe des taux doit révéler les différences de rendement dues au seul facteur maturité. Cela implique que nous devons éliminer l'influence d'autres facteurs. Il est important donc que nous utilisons les obligations à coupon zéro d'un seul et même émetteur.

La reconstitution de la courbe des taux est rendue nécessaire par le fait qu'il n'existe pas d'obligation zéro-coupon cotées sur le marché marocain. Par conséquent, il n'est pas possible d'obtenir les taux zéro-coupon pour un continuum de maturité.

Ainsi, Les données que nous utilisons sont des obligations portant des coupons qui ont fait l'objet des transactions sur les marchés marocains primaire et secondaire des bons de trésor. Nous avons utilisé les données du marché secondaire vu que les transactions sur le marché primaire ne sont pas suffisantes pour l'estimation de la structure par terme.

Nous notons aussi que les obligations sont exprimées en terme de leur taux actuariel². Le prix de l'obligation est alors égal au flux (coupons et principal) actualisé au taux actuariel.

Les données utilisées sont constituées de deux fichiers de données provenant de Bank Al Maghrib :

- 1) Les transactions quotidiennes sur les bons de trésor des deux marchés primaire et secondaire. La période d'étude s'étale sur la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009. Par conséquent la base de données est constituée de 1310 observations. Chaque ligne correspond à une obligation d'état, et les champs correspondent à :
 - ✓ La date d'observation.
 - ✓ L'échéance.
 - ✓ Le taux actuariel.

- 2) Les caractéristiques des obligations sélectionnées dans la première base de données. Ces caractéristiques sont les suivantes :
 - ✓ Code de l'obligation.
 - ✓ Maturité.
 - ✓ Jouissance.

² Soient c le montant du coupon annuel, n la maturité en année, F le principal, et P le prix de l'obligation. le taux actuariel y est défini par :

$$P = \frac{c}{1+y} + \frac{c}{(1+y)^2} + \dots + \frac{c}{(1+y)^n} + \frac{F}{(1+y)^n}$$

- ✓ Echéance.
- ✓ Taux de coupon.
- ✓ Nominale.

II. Méthodologie :

Les taux zéro coupon ne peuvent pas être directement observés sur les marchés primaire et secondaire des bons de trésor. On observe en pratique des obligations portant des coupons. Le problème est donc d'extraire des données disponibles les taux zéro coupon. La méthode dite de Bootstrap constitue une possibilité. Il s'agit d'une procédure en plusieurs étapes qui permet de reconstituer les taux zéro-coupon au comptant «pas à pas» i.e. segment par segment de maturité.

Nous notons que le détachement des coupons se fait annuellement pour toutes les obligations de notre base de données.

Les étapes de cette méthode "Bootstrap" sont les suivantes :

- 1) Calcul des prix des obligations à partir des taux actuariels et des taux de coupon comme étant la valeur actuelle des cash flow futurs :

$$P(t, m) = c \sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+r(t, m))^i} + \frac{100}{(1+r(t, m))^m}$$

Avec c le taux de coupon, $r(t, m)$ le taux actuariel de maturité m à la date t .

Nous rappelons qu'une obligation de durée de vie m peut s'interpréter comme un portefeuille constitué de m bons zéro-coupon payant un montant égal au coupon à chaque date de tombée, et d'un bon zéro-coupon payant le capital nominal à la date d'échéance de l'obligation. Le rendement actuariel de cette obligation peut donc s'interpréter comme une moyenne de taux d'intérêt de bon zéro-coupon.

On peut donc écrire :

$$P(t, m) = c \sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+r(t, m))^i} + \frac{100}{(1+r(t, m))^m} = c \sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+y(t, i))^i} + \frac{100}{(1+y(t, m))^m}$$

Le membre du milieu de cette relation correspond à la définition de la cotation d'une obligation. Le taux de rendement associé (r) est constant. Le membre de droite s'analyse comme un portefeuille de bons zéro-coupon d'échéances différentes. À chaque bon est associé un taux de rendement (y) spécifique. Le taux de rendement actuariel peut donc s'interpréter comme une moyenne de taux de rendement de bon zéro-coupon.

- 2) L'utilisation de la méthode analytique itérative :

Le taux zéro coupon d'un actif de maturité un an et distribuant un coupon C_1 au bout d'un an est égal au taux de ce placement puisque celui-ci est déjà un titre zéro coupon. On a donc : $y(t,1)=C_1$.

Le taux zéro coupon d'une obligation de maturité 2 ans et distribuant un coupon C_2 annuellement se calcule en remplaçant le coupon intermédiaire C_2 distribué au bout d'un an au taux zéro coupon 1 an $y(t,1)$.

Si l'on procède aux deux opérations suivantes : prêt d'un montant unitaire sur deux ans et empreint d'un montant $\frac{C_2}{(1+y_1)}$ au taux r_1 sur un an. Le bilan des flux de ces deux opérations est donné dans le tableau suivant :

Tableau n° 1 : Le bilan des flux des deux opérations.

Date	Empreint	Prêt	Total
0	$\frac{C_2}{(1+y_1)}$	-1	$\frac{C_2}{(1+y_1)} - 1$
1 an	- C_2	C_2	0
2 ans	0	$1+C_2$	$1+C_2$

Source : la structure par terme des taux d'intérêt, Christophe Bisière.

On a créé par cette opération un actif synthétique ne détachant pas de coupon intermédiaire. Le taux de rendement interne de cette opération est donc le même que celui d'un prêt zéro coupon. On en déduit donc le taux zéro coupon y_2 du 2 ans :

$$P - \frac{C_2}{(1+y_1)} = \frac{C_2}{(1+y_2)}$$

D'où

$$y_2 = \left[\frac{1 + C_2}{P - \frac{C_2}{(1+y_1)}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

En utilisant les taux zéro coupon 1 an et 2 ans, on peut calculer de la même manière le taux zéro coupon 3ans.

On procède ainsi par itérations successives pour les autres taux zéro coupon en utilisant les taux zéro coupon déterminés précédemment. Ce mécanisme peut être résumé par la formule récursive du taux zéro coupon n ans en fonction des $n-1$ taux zéro coupon précédents :

$$y_n = \left[\frac{1 + C_n}{P - C_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + y_i)^i}} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Deuxième partie :

Les facteurs de déformation
de la structure par terme

1. Introduction :

Dans ce chapitre nous cherchons à extraire des facteurs qui permettent de résumer la courbe des taux d'intérêt. L'étude de la structure par terme se ramène alors à l'analyse de ces facteurs. La méthode requise est l'analyse factorielle des données, en particulier l'analyse en composantes principales.

Cette étude statistique de la structure par terme a des prolongements naturels dans la deuxième partie de ce travail. En effet, l'analyse Financière fait largement appel à la notion de facteurs. Comprendre quels sont les facteurs qui déforment la courbe des taux permet donc de mieux appréhender les points forts et faibles des modèles financiers.

2. Le principe de l'analyse en composante principale :

Considérons n observations de k variables. Nous pouvons alors représenter chaque observation par un point de l'espace vectoriel \mathbb{R}^k . Lorsque k est supérieur à trois, il est difficile de décrire graphiquement ces données. BOUROCHE et SAPORTA (1992) définissent alors l'analyse en composantes principales (ACP) comme "une méthode de réduction du nombre de caractères". Nous obtenons ainsi une reformulation de l'information de manière à ce qu'elle soit plus facile à interpréter.

Soit y_j^i la valeur prise par la $j^{\text{ème}}$ variable pour la $i^{\text{ème}}$ observation. Nous notons :

$$y_j^i = \begin{pmatrix} y_i^1 \\ \vdots \\ y_i^k \end{pmatrix}$$

Soient \mathfrak{J} un axe factoriel et y un point de \mathbb{R}^k . Nous définissons l'axe factoriel par la combinaison linéaire suivante :

$$\mathfrak{J}(y) = v^T y$$

avec v vecteur de dimension $k \times 1$. L'analyse factorielle correspond à une projection linéaire des points y_j^i sur le sous-espace vectoriel engendré par les axes factoriels. Pour l'analyse en composantes principales, nous choisissons les vecteurs v de telle façon que l'inertie du nuage projeté soit maximal. Nous pouvons les obtenir de façon récursive : le premier facteur est le sous-espace vectoriel de dimension un d'inertie maximale, pour le second facteur, nous cherchons le sous-espace vectoriel d'inertie maximale orthogonale au précédent, etc. Notons que les vecteurs v sont les vecteurs propres associés à la matrice de covariance des données centrées et réduite \tilde{y}_j^i .

Si nous définissons la variance totale par la somme des variances des différentes variables, celle-ci est égale à k pour les données \hat{y}_j^i . Soit λ_j la variance associée au $j^{\text{ème}}$ facteur. Nous avons

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \mathfrak{J}_j(\tilde{y}_i)^2$$

Et

$$k = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

Avec la décomposition ordonnée $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$. Nous pouvons alors mesurer la qualité de représentation d'un axe factoriel par l'expression suivante

$$\varphi_j = \frac{\lambda_j}{k}$$

L'intérêt de l'analyse en composantes principales consiste à construire un nombre relativement petit d'axes factoriels permettant d'expliquer le maximum de la variance.

Nous notons v_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur propre. Le tableau de saturation est constitué des k vecteurs $v_j \sqrt{\lambda_j}$. Il permet de construire le cercle des corrélations, la qualité de représentation et la contribution des variables à la construction des axes. Pour les observations la qualité de représentation peut être fort intéressante.

3. Les facteurs de déformation de la structure par terme:

LITTERMAN et SCHEINKMAN (1991) sont parmi les premiers à utiliser les méthodes factorielles pour analyser la structure par terme des taux d'intérêt. DE BANDT et LESNE (1991) appliquent cette méthodologie aux données françaises pour concevoir des stratégies de couverture et d'immunisation³.

A partir des données construites dans la première partie, nous cherchons à élaborer des facteurs linéaires représentatifs pour la période d'étude. Nous rappelons que la structure par terme \mathfrak{R} est une courbe continue, c'est pourquoi nous ne pouvons pas mener une analyse en composantes principales sur \mathfrak{R} et nous devons par conséquent plutôt considérer un ensemble fini \mathfrak{R}^- , sous ensemble de \mathfrak{R} , pour effectuer ce type d'analyse. Nous choisissons :

$$\mathfrak{R}^- = \left\{ R\left(\frac{3}{12}\right), R\left(\frac{6}{12}\right), R(1), R(2), R(5), R(10), R(15), R(20) \right\}$$

Il n'existe pas de méthode générale pour justifier le choix des maturités. Nous pensons que les maturités sélectionnées permettent de bien rendre compte des différentes parties (courte, moyenne et longue) de la courbe des taux. Nous reportons dans le tableau suivant les statistiques relatives aux cinq premiers axes factoriels de \mathfrak{R}^- .

Tableau n°2 : Les statistiques relatives aux cinq premiers axes factoriels de \mathfrak{R}^- .

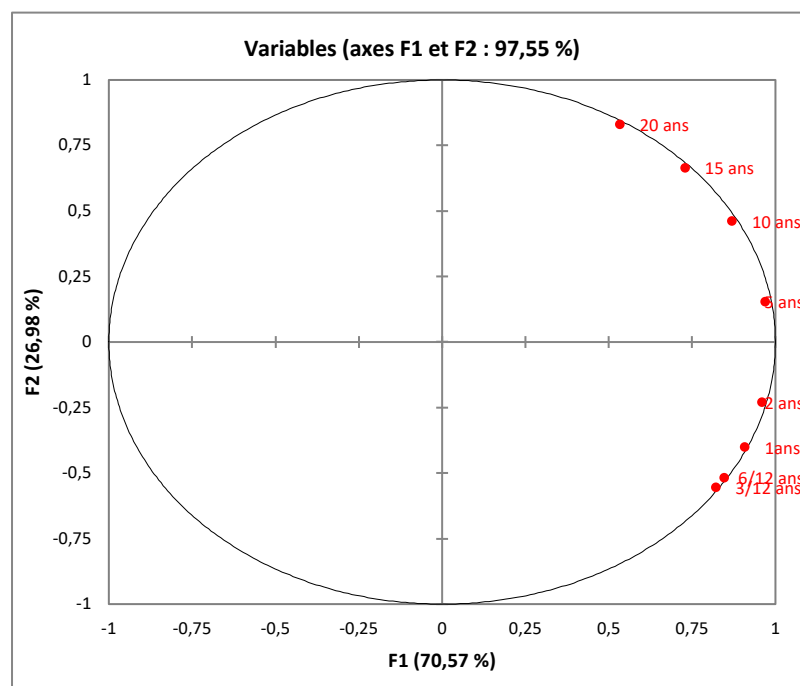
	F1	F2	F3	F4	F5
Valeur propre	5,646	2,158	0,077	0,050	0,027
Variabilité (%)	70,575	26,977	0,964	0,629	0,336
% cumulé	70,575	97,552	98,516	99,144	99,481

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

³ La couverture contre le risque de taux des produits à flux déterministes par immunisation contre les principaux facteurs de déformation de la courbe des taux.

La qualité de représentation du quatrième axe est très faible (de l'ordre de 0,6%). Aussi, nous ne décidons de retenir que les trois premiers axes factoriels comme facteurs significatifs. Nous remarquons que cet espace factoriel explique 98,5% de la variance totale. Cependant, nous notons que la qualité de représentation est très différente selon le facteur considéré. Le premier axe factoriel a une qualité de représentation importante : c'est le facteur majeur. Celle du second facteur n'est pas négligeable (de l'ordre de 26,9%). Le troisième axe factoriel est marginal, puisqu'il explique moins de 1% de la variance totale. Le graphique 1 représente le cercle des corrélations pour les deux axes principaux (que nous appelons aussi le plan principal). Nous remarquons que les maturités sont parfaitement ordonnées. Nous distinguons déjà deux groupes, les taux dont la maturité est inférieure ou égale à deux ans et ceux de maturités plus élevées.

Graphique n°1 : Cercle des corrélations pour les deux axes principaux F1 & F2



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

3.1 Interprétation du premier facteur :

C'est le facteur prépondérant qui explique une très grande partie de la variance de la courbe des taux. L'expression de ce facteur est

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\mathcal{R}^-) = & 0,821 \times R\left(\frac{3}{12}\right) + 0,847 \times R\left(\frac{6}{12}\right) + 0,908 \times R(1) + 0,960 \times R(2) \\ & + 0,969 \times R(5) + 0,870 \times R(10) + 0,728 \times R(15) + 0,533 \times R(20) \end{aligned}$$

Nous pouvons dégager une première interprétation de ce facteur. Il apparaît qu'il dépend positivement de l'ensemble des taux d'intérêt zéro coupon de \mathcal{R}^- et que les coefficients qui le déterminent sont assez proches les uns des autres. Aussi, nous interprétons cet axe factoriel comme un "facteur de niveau" de la courbe des taux. L'expression utilisée par DE BANDT et LESNE, a l'avantage d'être explicite. Nous pouvons considérer la valeur prise par ce facteur comme un indicateur du niveau global de la courbe des taux.

Tableau n°3 : la qualité de représentation des variables sur le premier axe.

variables	Qualités de représentation
3/12 ans	67,3
6/12 ans	71,8
1ans	82,5
2 ans	92,1
5 ans	93,8
10 ans	75,6
15 ans	53,1
20 ans	28,4

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

La qualité de représentation dépend de la portion de la courbe des taux à laquelle appartient la maturité. Pour les maturités de moins d'un an et supérieure à 5ans, la qualité de représentation est toujours inférieure à 90%. Le tableau des contributions confirme cette singularité des deux parties de la courbe des taux. Une explication possible est la grande volatilité du taux court et taux long sur la période d'étude. C'est pourquoi les taux moyens sont davantage représentatifs pour construire un indicateur du niveau.

Tableau n°4 : les contributions des variables à la construction du premier axe (en %).

Variabes	Contributions (%) :
3/12 ans	11,924
6/12 ans	12,712
1ans	14,609
2 ans	16,309
5 ans	16,620
10 ans	13,395
15 ans	9,398
20 ans	5,033

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

3.2 Interprétation du second facteur :

Nous rappelons que le second axe factoriel est aussi un axe important, puisqu'il représente 26,9% de la variance. L'expression de ce facteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(\mathfrak{R}^-) = & -0,554 \times R\left(\frac{3}{12}\right) - 0,517 \times R\left(\frac{6}{12}\right) - 0,402 \times R(1) - 0,23 \times R(2) \\ & + 0,155 \times R(5) + 0,461 \times R(10) + 0,665 \times R(15) + 0,831 \times R(20) \end{aligned}$$

Les coefficients de cet axe sont presque monotones croissants avec la maturité. Ils sont négatifs pour les maturités courtes, et deviennent positifs pour les maturités plus longues. La valeur du score dépend donc de la position des taux courts par rapport au taux taux longs. Si les taux court augmentent ou si les taux longs diminuent, le score diminue. Nous pouvons donc penser que ce score sera négatif si la courbe des taux est inversée. C'est donc un "facteur de pente" de la courbe des taux. Nous obtenons des résultats similaires à ceux de LITTERMAN et SCHEINKMAN (1991), DE BANDT et LESNE (1991), BüLHER et ZIMMERMANN (1996) et BLISS (1997).

Tableau n°5 : la qualité de représentation des variables sur le deuxième axe.

Variables	Qualité de représentation
3/12 ans	11,7
6/12 ans	12,4
1ans	3,2
2 ans	0,1
5 ans	0,7
10 ans	4,1
15 ans	9,3
20 ans	9,8

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

Nous remarquons qu'il y a une asymétrie entre les taux courts et les taux longs. Ainsi, l'intensité des coefficients associés aux taux courts est plus élevée. La qualité de représentation dépend du segment de la courbe des taux. Les taux courts sont mieux représentés, les taux moyens ont une qualité de représentation très faible et celle des taux longs est proche de 10%. Si nous comparons les contributions des différentes maturités nous retrouvons ce découpage. En particulier, on constate une différence importante entre les taux courts et les taux longs. Cette axe factoriel privilégie donc la partie courte, c'est-à-dire la partie qui détermine la pente de la courbe des taux.

Tableau n°6 : Contribution des variables à la construction du deuxième axe (en %).

Variables	Contribution
3/12 ans	22,823
6/12 ans	24,125
1ans	6,233
2 ans	0,217
5 ans	1,320
10 ans	8,003
15 ans	18,098
20 ans	19,182

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

L'analyse du deuxième facteur conduit DE BANDT et LESNE (1991) à la conclusion suivante :

En ce qui concerne le facteur 2, il est négativement corrélé avec les taux courts et positivement avec les taux longs : nous dirons que ce facteur s'interprète comme un facteur de pente de la courbe des taux, puisqu'une réalisation positive de ce facteur à une date donnée contribue à accroître l'écart entre taux courts et longs.

3.3 Interprétation du Troisième facteur :

Ce troisième facteur est un facteur marginal, puisqu'il explique moins de 0,9% de l'inertie totale. Son expression est

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_3(\mathfrak{R}^-) = & -0,033 \times R\left(\frac{3}{12}\right) - 0,059 \times R\left(\frac{6}{12}\right) - 0,050 \times R(1) - 0,022 \times R(2) \\ & + 0,166 \times R(5) + 0,136 \times R(10) - 0,107 \times R(15) - 0,11 \times R(20) \end{aligned}$$

Du fait même de sa qualité de représentation, nous devons être très prudents dans l'interprétation de ce facteur. Pour LITTERMAN et SCHEINKMAN (1991), il s'agit d'un facteur lié à la volatilité des taux. DE BANDT et LESNE (1991) estiment que c'est un "facteur de courbature" de la structure par terme.

Tableau n°7 : les qualités de représentation des variables sur le troisième axe.

Variables	Qualités de représentation
3/12 ans	0,1
6/12 ans	0,3
1ans	0,2
2 ans	0,1

5 ans	2,8
10 ans	1,9
15 ans	1,1
20 ans	1,2

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

Les résultats de la qualité de représentation et de la contribution des variables sont assez singuliers. Les maturités les mieux représentées sont les maturités longues. Ce sont les mêmes maturités qui contribuent le plus à la déformation de l'axe factoriel.

Tableau n°8 : Contribution des variables à la construction du troisième axe (en %).

Variabes	Contributions des variables (%)
3/12 ans	1,382
6/12 ans	4,523
1ans	3,182
2 ans	0,648
5 ans	35,836
10 ans	24,048
15 ans	14,721
20 ans	15,660

Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

Vu la difficulté d'interprétation de ce troisième facteur, nous pensons qu'il est préférable de ne pas en tenir compte. Finalement, deux facteurs influencent la courbe des taux : un facteur de niveau et un facteur de pente.

3.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous montrons que la déformation de la structure par terme des taux d'intérêt dépend de trois facteurs, un facteur de niveau, un facteur de pente et un facteur de courbature. Nous pouvons prolonger cette étude principalement dans deux directions. Il serait intéressant de chercher s'il existe des facteurs spécifiques aux différents segments (court, moyen et long) de la courbe des taux. Nous pouvons aussi prolonger l'étude à la recherche des déterminants des deux facteurs mis en exergue par notre analyse.

Troisième partie :

Estimation de la structure
par terme

1. Introduction :

La précision des estimations de la structure par terme est d'une importance cruciale dans de nombreux domaines de la finance. La capacité du modèle à donner des prévisions est aussi importante. Il n'est pas surprenant donc qu'un effort considérable était consacré à la question de la modélisation, l'estimation optimale, et la prévision de la structure par terme des taux d'intérêt. Une classe de fonctions qui a ce potentiel de produire des réponses satisfaisantes pour les deux questions de la qualité d'ajustement et de la capacité de prévision, est la classe des modèles de Nelson et Siegel (1987).

Nelson et Siegel ont proposé une fonction paramétrique flexible qui peut capturer une large gamme de formes de la courbe des taux. Plusieurs extensions du modèle de Nelson et Siegel ont été proposés dans le but d'augmenter la flexibilité du modèle.

Malgré le manque des soubassements théoriques de cette classe de fonctions, la Banque des règlements internationaux⁴ (Bank for International Settlements ou BIS) affirme dans son rapport annuel (2005) que neuf parmi une trentaine de banques centrales qui rapportent régulièrement l'estimation de la courbe des taux à BIS, utilisent Nelson et Siegel ou ses extensions.

Comme le modèle de Nelson et Siegel est largement utilisé par les financiers, ceci le classe parmi les modèles de la structure par terme les plus populaires.

En 2006, Diebold et Li ont montré que le modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs peut être utilisé pour prédire la structure par terme. En utilisant une procédure d'estimation à une étape, ils démontrent que le modèle est plus performant que d'autres modèles concurrents, en particulier pour des horizons de prévision très longs. Mönch (2006) confirme partiellement ces résultats et Fabozzi, Martellini, et Priaulet (2005) montrent que le modèle de Nelson et Siegel produit des prévisions qui ne sont pas uniquement statistiquement exactes mais aussi économiquement significatives. Ils peuvent être utilisés pour générer des rendements considérables.

En raison de ces succès, il n'est pas surprenant que cette classe de modèles est de plus en plus utilisée dans plusieurs autres applications. Par exemple, Diebold, Rudebusch, et Aruoba (2006) utilisent ce modèle dans l'étude de l'interaction entre la macroéconomie et la courbe des taux, tandis que Diebold, Ji, et Li (2006) l'appliquent dans l'identification de la source du risque systématique et la construction d'une mesure généralisée de la duration.

Cependant, la plupart de ces recherches se concentrent uniquement sur le modèle de base de Nelson et Siegel. Les extensions du modèle tel que le modèle de Svensson, n'ont pas encore fait l'objet de plusieurs études. Dans ce chapitre nous cherchons à examiner la performance de différentes extensions du modèle de Nelson et Siegel. Nous essayons de concilier entre la qualité d'ajustement de l'échantillon et la performance des prévisions.

⁴ C'est la plus ancienne institution financière internationale. Son statut juridique est celui d'une société anonyme, dont les actionnaires sont des banques centrales.

Plus le modèle est flexible plus la qualité de l'ajustement est meilleure mais la question qui se pose est à quel point ce modèle peut produire des prévisions exactes. Afin de mener cette étude nous utilisons les données construites dans la première partie.

2. Les modèles de Nelson-Siegel :

2.1 Le modèle de base à trois facteurs :

Nelson et Siegel (1987) proposent une classe de fonctions mathématiques pour estimer la courbe des taux à terme à une date donnée. La courbe des taux à terme résultante de l'approximation de Nelson et Siegel est la solution d'une équation différentielle de second ordre :

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)$$

Nous déterminons les paramètres $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ et $\beta_{3,t}$ en utilisant des conditions initiales et λ_t une constante associée à l'équation. La courbe du taux spot obtenue est sous la forme suivante :

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \right)$$

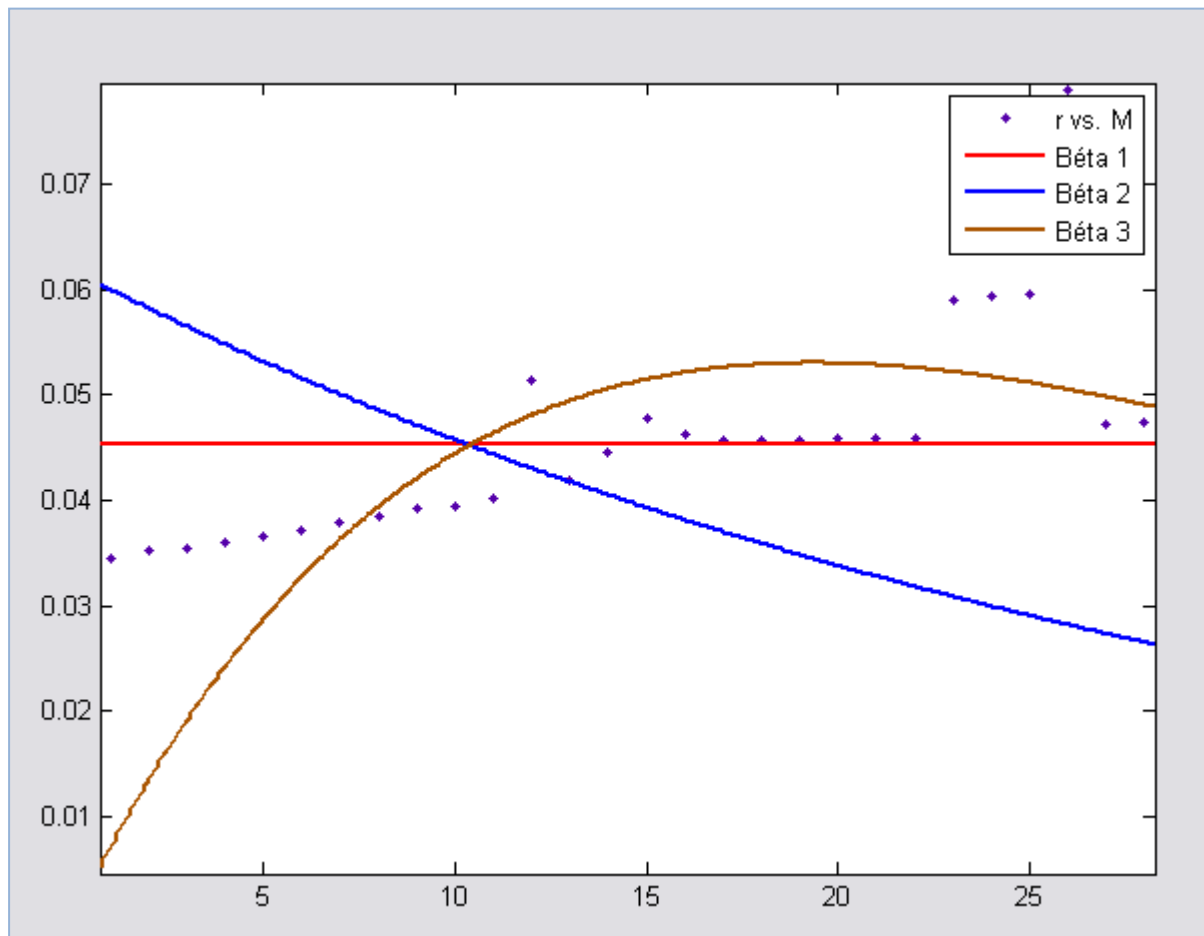
Plusieurs raisons ont fait de Nelson et Siegel une méthode très populaire d'estimation de la structure par terme. D'abord, C'est une méthode qui fournit une approximation parcimonieuse de la courbe des taux en utilisant un nombre limité de paramètres (contrairement par exemple à la méthode des splines). Les trois composantes $\left[1, \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}, \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \right]$ donnent au modèle plus de flexibilité pour capturer une gamme de formes qui peuvent s'adapter à des configurations de marché très différentes.

En outre, Nous pouvons à l'aide de ce modèle produire une courbe des taux qui commence par une valeur du taux court instantané facilement calculé $\beta_{1,t} + \beta_{2,t}$ et se termine par une valeur finie du taux à une maturité infinie $\beta_{1,t}$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{1,t}$$

Finalement, comme nous avons montré dans la deuxième partie de ce travail, les composantes du modèle ont une interprétation claire comme des composantes de court, moyen et long terme. Ces étiquettes sont le résultat de la contribution de chaque élément dans la courbe des taux. La figure suivante représente la valeur de chaque composante en fonction de la maturité.

Graphique n°2 : Les composantes du modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs estimés par MATLAB pour la date d'observation : 20/04/2009



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la date d'observation est le 20/04/2009)

Nous considérons que la composante de long terme est la composante associée à $\beta_{1,t}$, vu qu'elle est constante pour toutes les maturités. La composante associée à $\beta_{2,t}$: $\left(\frac{1-\exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}\right)$ est appelée la composante de court terme. Elle décroît vers 0 comme une fonction exponentielle. Le taux de décroissance est déterminé par le paramètre λ_t . Plus la valeur de λ_t est petite plus le taux de décroissance est grand. La composante du moyen terme $\left(\frac{1-\exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)\right)$ commence par 0 et croît pour les maturités moyennes puis elle décroît vers zéro. Le paramètre λ_t détermine à quelle maturité cette composante atteint son maximum.

Bien que le modèle de Nelson et Siegel a été considéré au départ comme un modèle statique qui ne prend pas en considération l'évolution intertemporelle de la structure par terme ; Diebold et Li (2006) montrent que les coefficients $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ et $\beta_{3,t}$ peuvent être interprétés comme étant trois facteurs dynamiques. En outre, les auteurs montrent que les étiquettes : niveau, pente et courbature sont appropriés pour ces facteurs. Le facteur de long

terme $\beta_{1,t}$ gouverne le niveau de la courbe tandis que $\beta_{2,t}$ et $\beta_{3,t}$ gouvernent sa pente et sa courbature respectivement.

Bien que le modèle de Nelson et Siegel puisse capturer une large gamme de formes, il ne peut pas reproduire toutes les formes possibles de la courbe des taux. Pour remédier à ce problème, plusieurs spécifications plus flexibles du modèle ont été proposées pour que le modèle s'ajuste mieux à des formes plus compliquées (exemple : les formes avec plus d'un minimum ou/et maximum) les extensions du modèle Nelson et Siegel ont pu augmenter la flexibilité du modèle en introduisant des facteurs additionnels, plus de paramètres d'échelle, ou en combinant les deux.

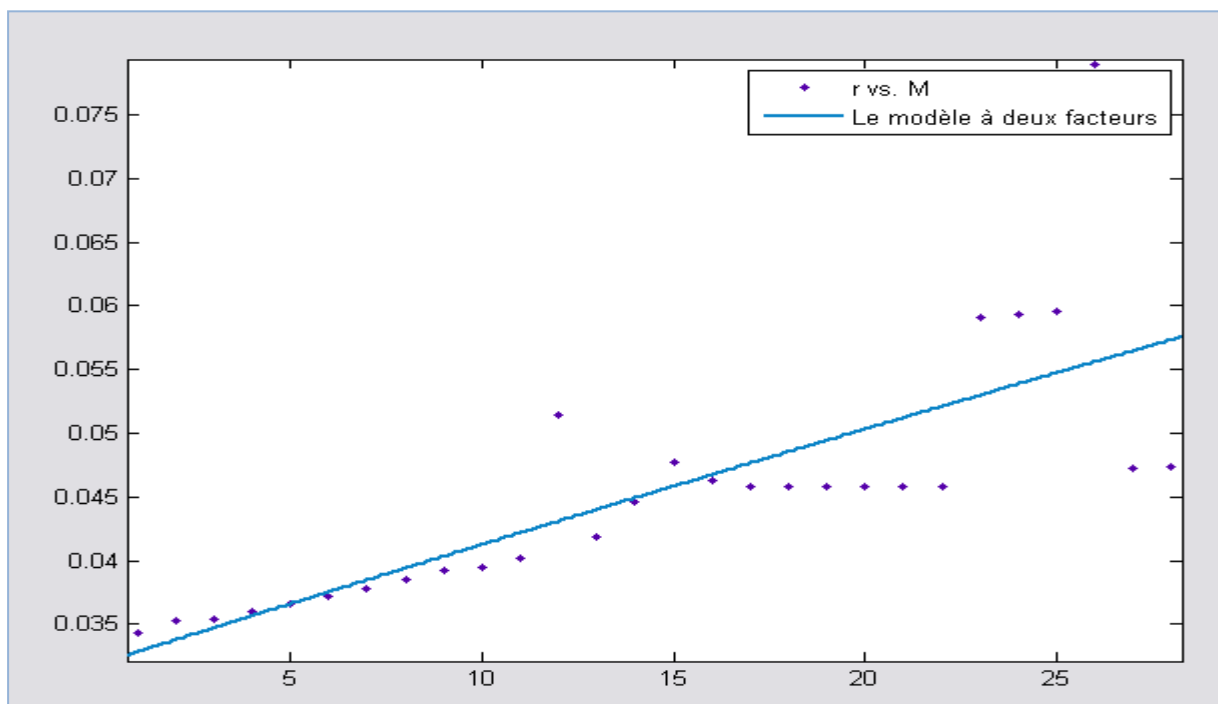
2.2 Le modèle à 2 facteurs :

Le premier modèle que nous considérons est une restriction plutôt qu'une extension du modèle de base à trois facteurs. Litterman et Scheinman (1991), ont montré que le troisième facteur a toujours un pouvoir d'explication très petit, et la variabilité de la courbe des taux est déjà capturée en grande partie par les deux premiers facteurs.

En comparaison avec le modèle de base de Nelson et Siegel, le modèle à deux facteurs contient uniquement les facteurs de niveau et de pente.

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} \right)$$

Tableau n° 3: L'estimation du modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs pour les données du 20/04/2009.



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la date d'observation est le 20/04/2009)

2.3 Le modèle à 4 facteurs de Björk et Christensen (1999) :

Le modèle de Nelson et Siegel peut être étendu de plusieurs façons pour augmenter la flexibilité. De point de vue de l'estimation, la façon la plus facile est d'introduire des facteurs additionnels. Björk et Christensen (1999) proposent d'ajouter un quatrième facteur à l'approximation de la courbe des taux à terme :

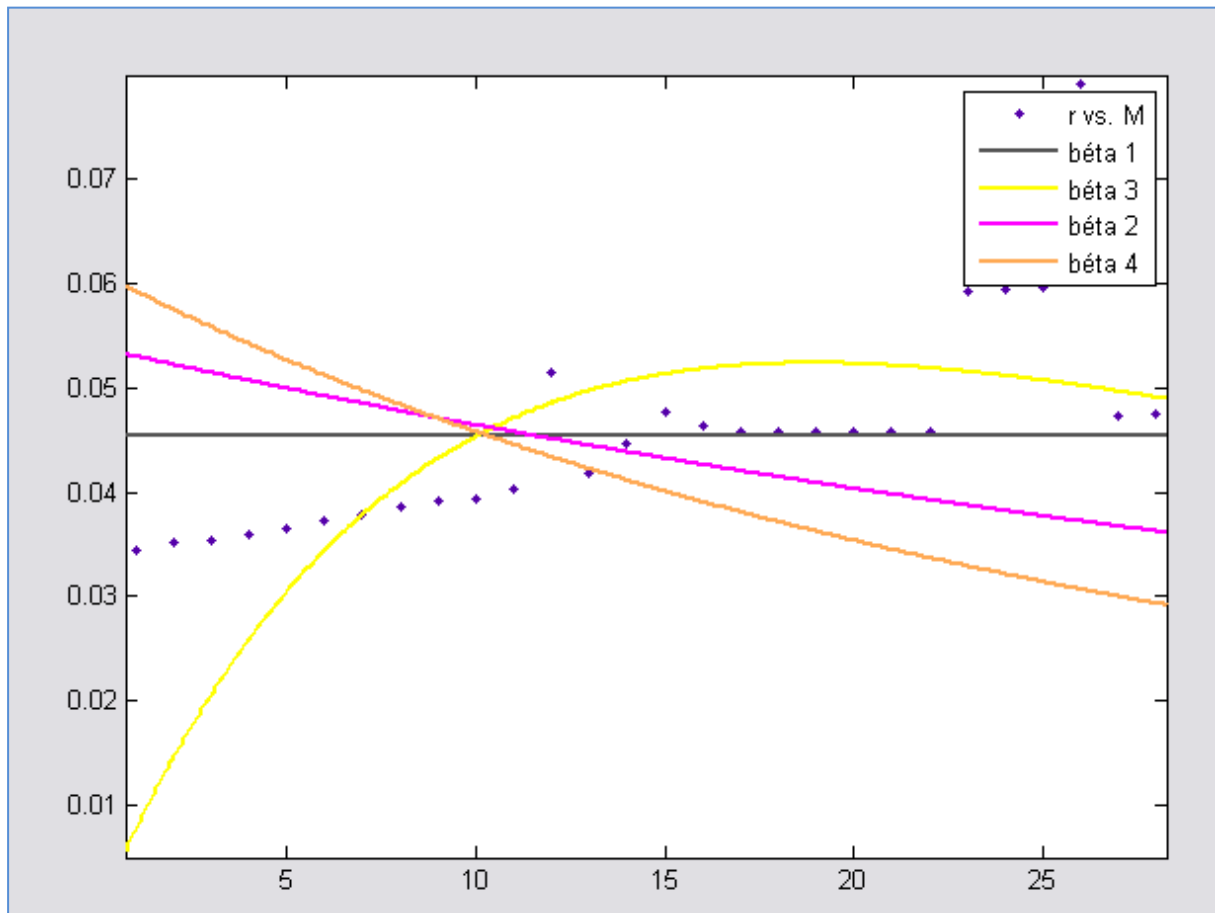
$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{4,t} \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)$$

La courbe des taux du modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs est donc donné par :

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \right) + \beta_{4,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)} \right)$$

La quatrième composante $\left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)} \right)$, ressemble à la deuxième composante dans la mesure où elle affecte les maturités du court terme. La différence réside dans le fait qu'elle décroît vers zéro avec un taux de décroissance plus grand.

Tableau n°4 : L'estimation des composantes du Modèle à quatre facteurs de Björk et Christensen par MATLAB.



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la date d'observation est le 20/04/2009)

Le facteur $\beta_{4,t}$ peut être interprété comme étant un deuxième facteur de pente. Ainsi, le modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs capture la pente de la structure par terme par la somme pondérée de $\beta_{2,t}$ et $\beta_{4,t}$. Le taux court instantané est donc

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} + \beta_{4,t}$$

Diebold, Rudebusch, et Aruoba (2006) montrent que ce modèle améliore la qualité d'ajustement de la structure par terme.

Bjork et Christensen (1999) considèrent aussi un modèle à cinq facteurs :

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{3,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{4,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) + \beta_{5,t} \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)$$

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{\tau}{2\lambda_t} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} \right) + \beta_{4,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_t}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_t}\right) \right) \\ + \beta_{5,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)}{\left(\frac{2\tau}{\lambda_t}\right)} \right)$$

Et Diebold, Rudebusch et Aruoba (2006) montrent que l'ajout d'un facteur additionnel entraîne une amélioration négligeable de la qualité de l'ajustement. Le problème avec le modèle à cinq facteurs est que ce modèle contient une composante linéaire en τ . Par conséquent, le modèle implique une croissance linéaire des taux instantanés de long terme et des taux à terme.

2.4 Le modèle à 3 facteurs de Bliss (1997) :

Une autre façon pour rendre le modèle de Nelson et Siegel plus flexible consiste à enlever la restriction sur les deux composantes de pente et de courbature qui sont gouverné par le même paramètre d'échelle. Bliss (1997) estime la structure par terme des taux d'intérêt avec un modèle de Nelson et Siegel à trois facteurs mais avec deux paramètres d'échelle $\lambda_{1,t}$ et $\lambda_{2,t}$. La courbe des taux à terme et la courbe des taux spot sont données par

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)$$

Et

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right) \right)$$

Evidemment, le modèle de Bliss serait différent du modèle de base si $\lambda_{1,t} \neq \lambda_{2,t}$.

Nelson et Siegel considèrent aussi une approximation du taux à terme avec différents paramètres d'échelle. La courbe des taux à terme est aussi la solution d'une équation différentielle de second ordre mais maintenant avec des racines réels inégaux. La courbe des taux à terme obtenue est donnée par :

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{3,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)$$

Nous avons besoin d'un terme additionnel $\left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)$ pour obtenir le facteur de courbature. Autrement, le modèle contient deux facteurs de pente à condition que les deux paramètres d'échelle soient différents. Ainsi, ce modèle ressemble au modèle à deux facteurs.

2.5 Le modèle à 4 facteurs de Svensson :

Un autre modèle très utilisé par les banques centrales (voir BIS, 2005) est le modèle à quatre facteurs de Svensson (1994). Afin d'améliorer la flexibilité et l'ajustement du modèle de Nelson et Siegel, Svensson propose d'ajouter un autre facteur de courbature avec un paramètre d'échelle différent. Les courbes des taux résultantes :

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{4,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)$$

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)\right)$$

$$+ \beta_{4,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)\right)$$

La quatrième composante $\left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)\right)$ introduit une seconde composante du moyen terme. Le modèle de Svensson est capable de produire des formes de la courbe des taux avec plus d'un minimum /maximum locale.

Nous notons que puisque la quatrième composante affecte essentiellement les maturités du moyen terme les propriétés limites du modèle de base restent valables :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{1,t}$$

2.6 Le modèle ajusté de Svensson à 4 facteurs :

Le problème majeur du modèle de Svensson est qu'il est très non linéaire ce qui rend l'estimation du modèle plus compliquée. Un problème de multicolinéarité apparaît lorsque les deux paramètres $\lambda_{1,t}$ et $\lambda_{2,t}$ prennent des valeurs similaires. Le modèle de Svensson se réduit ainsi au modèle de base avec un facteur de courbature égale à la somme de $\beta_{3,t}$ et $\beta_{4,t}$. Uniquement la somme de ces deux paramètres qui peut être estimée efficacement et non pas les deux paramètres séparément.

Afin de remédier à ce problème de multicolinéarité, il faut être certain que les deux composantes du moyen terme sont différentes lorsque $\lambda_{1,t} \simeq \lambda_{2,t}$. Le modèle de Svensson ajusté vérifie de cette propriété :

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{3,t} \left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)$$

$$+ \beta_{4,t} \left(\exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right) + \left(\frac{2\tau}{\lambda_{2,t}} - 1\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_{2,t}}\right)\right)$$

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{1,t}}\right)} \right) \\ + \beta_{4,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right) - \exp\left(-\frac{2\tau}{\lambda_{2,t}}\right)}{\left(\frac{\tau}{\lambda_{2,t}}\right)} \right)$$

L'ajout de la seconde composante de courbature assure que la multicolinéarité n'est plus un problème. La nouvelle composante commence aussi à zéro et croit ensuite pour les maturités moyennes avec un taux d'accroissement plus grand que celui de la première composante de la courbature, et revient après à zéro plus vite aussi.

2.7 Spécification générale du modèle :

Nous pouvons résumer les différentes spécifications du modèle de Nelson et Siegel que nous examinons peuvent dans un modèle général. Nous considérons en particulier la représentation générale suivante :

$$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\beta_t = \mu + \phi \beta_{t-1} + v_t \quad (2)$$

L'équation de mesure (l'équation 1) spécifie le vecteur des rendements qui contient N différentes maturités, $Y_t = [y_t(\tau_1) \dots y_t(\tau_N)]'$, comme une somme de la courbe des taux de Nelson et Siegel $X_t \beta_t$, et un vecteur des erreurs qui sont supposés indépendants pour toutes les maturités mais avec des variances différentes $\sigma^2(\tau_i)$. Les courbes des taux spot de Nelson Siegel sont ceux discutées dans la section précédente avec β_t ($K \times 1$) est le vecteur des facteurs et X_t ($N \times K$) est la matrice des composantes associées à ces facteurs.

Chaque modèle de Nelson et Siegel décrit dans la section précédente est un cas particulier de l'équation (l'équation 1).

Si nous intéressons uniquement à l'estimation de la structure par terme, l'équation de mesure est suffisante. Cependant, la construction des prévisions nécessite le choix d'un modèle pour la dynamique des facteurs.

Nous suivons dans cette étude les travaux de Diebold et Li (2006) et Diebold, Rudebusch et Aruoba (2006) en ajustant à la dynamique des facteurs un processus autorégressif de premier ordre (l'équation 18). On peut utiliser soit des processus individuels AR(1) ou un processus multivarié VAR(1)⁵.

Le vecteur μ et la matrice ϕ sont de dimension ($K \times 1$) et ($K \times K$) respectivement.

⁵ Nous choisissons des spécifications simples de l'équation d'état pour limiter le nombre des paramètres du système afin de faciliter l'estimation. En outre, avec un grand nombre de paramètres nous risquons d'avoir des résultats aberrants.

Nous supposons que les erreurs des équations de mesure et d'état sont orthogonales et suivent une loi normale.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ 0_{K \times 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

Avec H une matrice (N×N) que nous supposons diagonale et Q une matrice (K×K).

3. Procédure d'estimation :

Il existe plusieurs approches d'estimation des facteurs et des paramètres du modèle générale de Nelson et Siegel. Certaines approches estiment les deux équations de mesure et d'état simultanément et d'autres les estiment séparément.

L'approche la plus simple est celle utilisée par exemple par Fabozzi et Al (2005) et Diebold et Li (2006) qui consiste à estimer le système d'équation en deux étapes. Dans la première étape, l'équation de mesure est considérée comme un modèle et la méthode des moindres carrés est utilisée pour estimer l'équation pour chaque date d'observation séparément. Dans la deuxième étape les modèles des séries temporelles des facteurs estimés sont identifiés.

La deuxième approche est une approche en une étape dans laquelle tous les paramètres sont estimés simultanément. Cette approche utilise le filtre de kalman⁶ pour estimer les facteurs.

3.1 L'approche à deux étapes avec des paramètres d'échelle fixés:

Au lieu de traiter λ_t comme un paramètre inconnu, Diebold et Li (2006) suggèrent de fixer ce paramètre pour estimer le modèle à trois facteurs de Nelson et Siegel. Ainsi, l'équation non linéaire de mesure devient linéaire et peut être estimée en utilisant un simple moindre carré ordinaire. Le paramètre d'échelle λ_t détermine la maturité à laquelle la composante du modèle associée au facteur de courbure atteint son maximum.

La première étape de l'estimation produit les séries temporelles des K facteurs ; $\{\beta_{i,t}\}_{t=1}^T$ pour $i=1, \dots, K$. L'étape suivante est l'estimation de la dynamique des facteurs dans l'équation d'état.

Nous utilisons l'approche d'estimation en deux étapes avec des paramètres d'échelle fixés pour estimer les modèles de Nelson et Siegel à deux, trois et quatre facteurs. Cependant, l'utilisation des paramètres d'échelles fixés dans le cas des modèles contenant deux paramètres d'échelle peut donner des résultats aberrants.

⁶ Voir l'annexe n°1.

Nous notons NS2-2, NS2-3 et NS2-4 respectivement les modèles de Nelson et Siegel à deux, trois et quatre facteurs avec des paramètres d'échelle fixés. Les suffixes "-AR" et "-VAR" sont ajoutés pour indiquer le modèle associé aux facteurs.

3.2 L'approche à deux étapes avec des paramètres d'échelle estimés :

Lorsque les paramètres d'échelle sont estimés en parallèle avec les facteurs, l'estimation de l'équation non linéaire se fait à l'aide des moindres carrés non linéaires.

Nous notons dans ce cas les modèles à deux, trois et quatre facteurs par NS2-2- λ , NS2-3- λ , et NS2-4- λ respectivement.

3.3 Les restrictions sur les paramètres d'échelle :

La procédure d'estimation non linéaire des facteurs peut parfois donner des résultats aberrants. Un exemple d'estimation du modèle de Svensson qui donne des résultats aberrants, est donné par Gimeno et Nave (2006).

La structure du modèle non linéaire semble poser des difficultés sérieuses au niveau de la procédure d'estimation pour arriver à des estimations raisonnables. Une autre raison c'est le comportement des composantes associées aux facteurs lorsque les paramètres d'échelle prennent des valeurs extrêmes. Ainsi, le problème de multicollinéarité apparaît et quelques facteurs ne peuvent pas être identifiés efficacement. Afin de comprendre ce comportement nous avons besoin d'examiner les composantes du modèle comme étant des fonctions de λ_t .

Nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{\lambda_t \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{(\frac{\tau}{\lambda_t})} \right] = 0 ; \quad \lim_{\lambda_t \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{(\frac{\tau}{\lambda_t})} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t}) \right] = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{\lambda_t \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{(\frac{\tau}{\lambda_t})} \right] = 1 ; \quad \lim_{\lambda_t \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t})}{(\frac{\tau}{\lambda_t})} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_t}) \right] = 0 \quad (5)$$

Les résultats (Voir l'équation 4) montrent que pour des valeurs petites de λ_t les facteurs de pente et de courbature deviennent non identifiables ce qui peut donner des estimations aberrantes. Pour des valeurs très grandes de λ_t , le facteur de courbature est non identifiable. En outre, les facteurs de niveau et de pente ne sont pas identifiés séparément et peuvent prendre des valeurs extrêmes.

Si nous intéressons uniquement à l'estimation de la structure par terme à un point donné dans le temps, cette question de non identification des facteurs n'est pas nécessairement un problème. Bien que l'estimation des facteurs donne des valeurs extrêmes, le modèle s'ajuste toujours aux données. Le problème apparaît lors de l'estimation de la dynamique des facteurs dans la deuxième étape.

Afin d'éviter des estimations aberrantes des facteurs, nous imposons des restrictions sur les paramètres d'échelle. En imposant à la composante associée au facteur de courbature qu'elle atteigne son maximum pour les maturités entre 1an et 5ans, les paramètres d'échelle se trouveront forcément dans l'intervalle [6,69 ; 33,46].

3.4 Approche vectorielle en une étape :

L'approche alternative de l'approche en deux étapes consiste à estimer tous les paramètres simultanément. Afin d'obtenir les estimations optimales des facteurs, cette approche utilise des estimations des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance puis applique le filtre de Kalman⁷. La fonction de vraisemblance correspondante à notre système est donnée par :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|f_{t|t-1}|) - \frac{1}{2} \eta'_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \right] \quad (6)$$

C'est une fonction de $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \beta_t, \mu, \phi, H, Q)$ tel que :

$\eta_{t|t-1} \equiv y_t - y_{t|t-1}$ avec $y_{t|t-1}$ le vecteur des rendements estimés.

Et $f_{t|t-1} \equiv \mathbb{E}[\eta'_{t|t-1} \eta_{t|t-1}]$

Notons que les paramètres d'échelle sont supposés constants sur la période d'estimation.

Puisque l'estimation se base sur l'information provenant simultanément des données transversales et des séries temporelles des taux d'intérêt, le risque que les estimations prennent des valeurs extrêmes est minime. En outre, la dynamique des facteurs est prise en considération dans l'optimisation de la fonction de vraisemblance. Ainsi, on n'a plus besoin de faire des restrictions sur les paramètres d'échelle.

Nous notons les différents modèles que nous estimons en utilisant l'approche en une étape par : NS1-2, NS1-3, NS1-4, NS1-B, NS1-S et NS1-AS.

4. Les résultats de l'estimation :

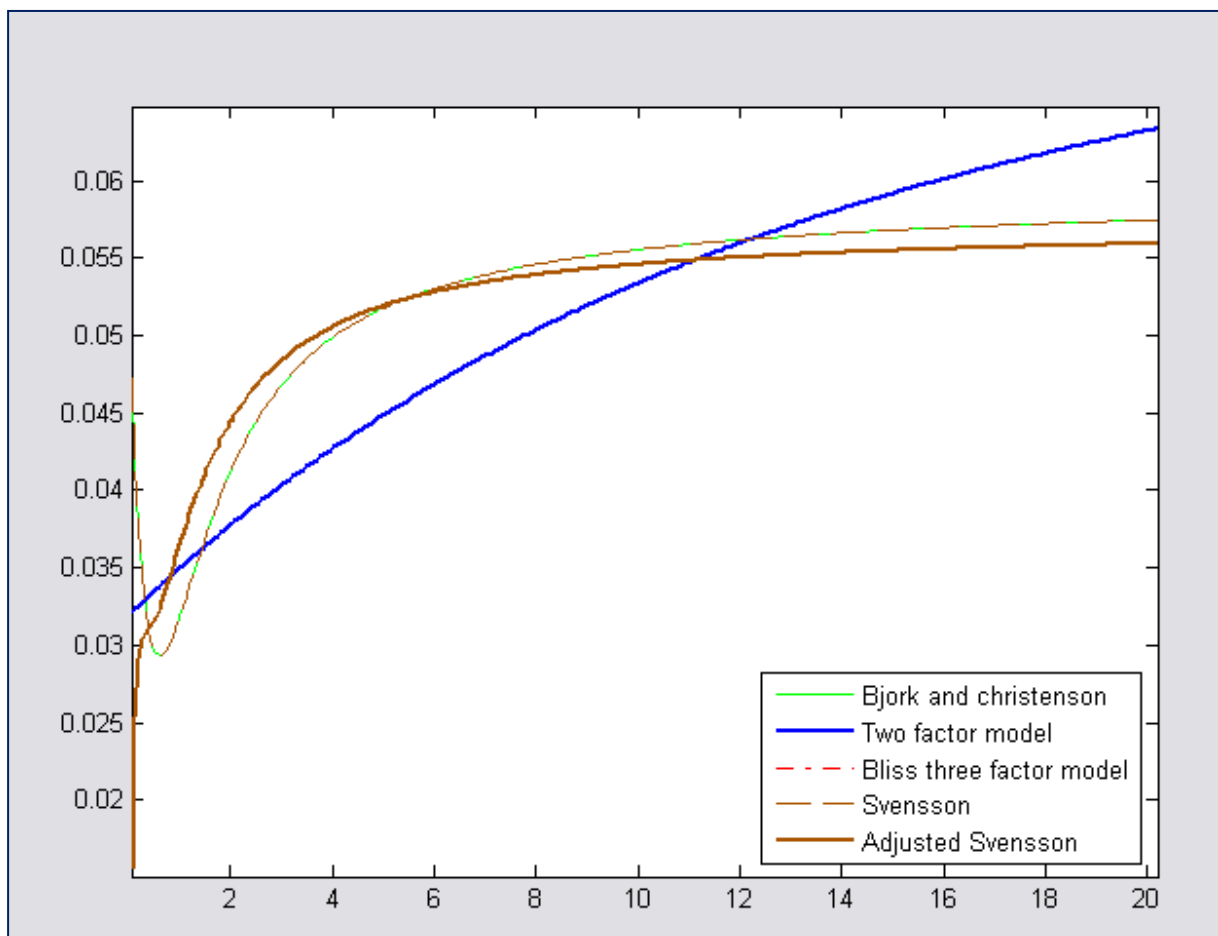
Dans cette section nous discutons les résultats de l'estimation de la structure par terme en utilisant la classe des modèles de Nelson et Siegel. Nous nous intéressons à la première étape de l'approche d'estimation en deux étapes puisque l'utilisation de l'approche en une étape utilise l'information sur les séries temporelles (futurs). Cette information n'est pas disponible si on veut estimer la structure par terme à une date donnée.

⁷ Voir l'annexe n°1.

Nous nous attendons que les modèles les plus flexibles donnent les meilleures qualités d'ajustement puisqu'ils reproduisent une plus grande gamme de formes de la courbe des taux. Cependant, l'amélioration de la flexibilité peut provenir de l'ajout des paramètres d'échelle additionnels ou bien des facteurs additionnels. Ainsi, la question qui se pose : quelle est l'option qui améliore le plus la qualité d'ajustement ?

La figure suivante montre que tous les modèles s'ajustent bien aux données de la courbe des taux moyenne de la période d'étude. La seule exception c'est le modèle à deux facteurs avec un paramètre d'échelle fixé. C'est probablement à cause du manque de la composante de courbature.

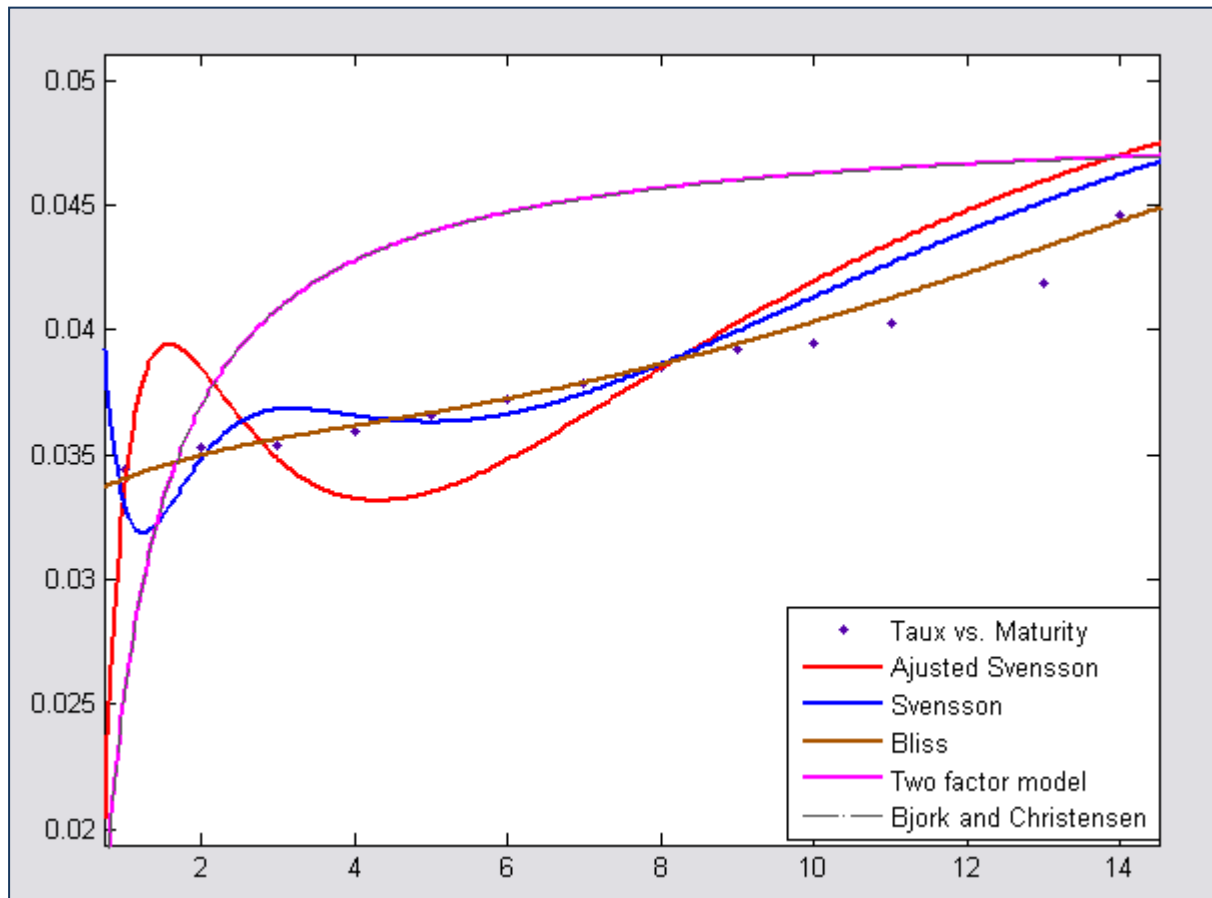
Figure n° 5: L'estimation des différents modèles de Nelson et Siegel pour la courbe des taux moyenne de la période d'étude.



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM (la période entre 02/01/2004 et 15/05/2009)

Bien que l'ajustement de la courbe moyenne soit presque identique pour tous les modèles, la figure 6 montre que les ajustements des différents modèles pour une seule date d'observation de la période d'étude (20 avril 2009) peuvent être très différents.

Figure n° 6: Comparaison entre les différents modèles de Nelson et Siegel estimés la date 20/05/2009.



Source : fait par nos soins, données provenant de BAM.

La figure montre que le modèle à deux facteurs et le modèle de Björk et Christensen à trois facteurs ne sont pas capables de s'ajuster aux formes les plus complexes de la courbe des taux. Graphiquement, le meilleur ajustement est obtenu à l'aide du modèle à quatre facteurs de Svensson et le modèle de Svensson ajusté qui donnent des courbes qui ont presque la même forme.

Le tableau 10 (voir l'annexe n° 3) rapporte les résultats d'estimation de tous les modèles en tenant compte des restrictions sur les paramètres d'échelle.

La meilleure qualité d'ajustement des modèles, telle que jugé par un certain nombre de critères indiqués dans le tableau (écart-type des erreurs, la racine carrée de l'erreur quadratique moyen RMSE, l'erreur moyenne absolue, le minimum et le maximum des erreurs) sont représentés par des caractères gras.

Nous résumons les résultats en faisant les observations suivantes :

Les modèles qui permettent d'atteindre le meilleur ajustement sont en effet les plus flexibles, en particulier le modèle Svensson ajusté. Pour presque toutes les échéances indiquées dans le tableau, les deux modèles de Svensson donnent les meilleurs résultats pour tous les critères. A l'exception du modèle à deux-facteurs, tous les autres modèles sont relativement similaires.

Dahlquist et Svensson (1996) et Diebold, Rudebusch, et Aruoba (2006b) démontrent que le modèle à trois facteurs estime bien la structure par terme par rapport aux modèles les plus sophistiqués. Il est donc intéressant d'examiner les résultats des autres modèles par rapport à ceux des modèles de Svensson, et aussi les comparer entre eux.

A partir des modèles à deux, et à trois facteurs, nous pouvons juger quelle extension donne le plus grand gain : estimer λ_t ou ajouter un facteur. À partir du tableau 10, il est clair que, pour le modèle à deux facteurs l'ajout d'un facteur de courbature améliore beaucoup plus la qualité d'ajustement par rapport l'estimation de λ_t pour les facteurs de niveau et de pente. Les résultats du modèle à trois facteurs sont identiques à ceux du modèle à deux facteurs, mais l'amélioration est plus importante en passant du modèle à deux facteurs à celui à trois facteurs que de passer du modèle à trois facteurs à celui à quatre facteurs.

L'estimation de λ_t au lieu de l'utilisation d'une valeur fixe améliore l'ajustement de chaque modèle, même si en termes absolus les améliorations sont mineures. Une autre comparaison à faire est celle entre le modèle à trois facteurs avec l'estimation de λ_t et le modèle de Bliss. Nous rappelons que le modèle de Bliss n'impose pas les mêmes paramètres d'échelle pour les facteurs de pente et de courbature.

Pour toutes les maturités Bliss améliore légèrement la qualité d'ajustement. Toutefois, le modèle à quatre facteurs avec l'estimation de λ_t est toujours plus précis que le modèle de Bliss, ce qui montre qu'il est plus avantageux d'ajouter un deuxième facteur de pente que d'utiliser des paramètres d'échelle distincts.

En fait, la différence entre le modèle à quatre facteurs, avec λ_t estimée et le meilleur modèle n'est qu'une différence marginale qui ne dépasse pas 0,6 points de base. Cela signifie que, l'introduction d'un facteur de courbature supplémentaire avec des paramètres d'échelle différents ou un facteur de pente supplémentaire avec les mêmes paramètres d'échelle ne semble pas donner des résultats très différents.

Et enfin, nous remarquons que le modèle de Svensson ajusté est légèrement meilleur que le modèle de Svensson.

Pour résumer, les meilleurs modèles sont en effet les modèles qui permettent plus de flexibilité de la courbe des taux, notamment les modèles de Svensson et Svensson ajusté. Cependant, le modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs fournit une bonne estimation de la structure par terme et il a l'avantage d'être facile à estimer. Cette facilité est dû au fait que la non linéarité du modèle provient d'un seul paramètre d'échelle au lieu de deux.

Enfin, si ce facteur de pente additionnelle améliore la qualité d'ajustement du modèle, est ce qu'il améliore aussi la performance des prévisions ?

Avant d'entamer la discussion des résultats de la prévision, nous allons d'abord examiner l'effet des restrictions sur les paramètres d'échelle et leurs effets sur la qualité d'ajustement du modèle. Les restrictions sur les paramètres d'échelle signifient que certaines formes de la courbe des taux sont sacrifiées. Pour évaluer l'effet de cette restriction nous rapportons dans le tableau n°11 les résultats de l'estimation des modèles qui contiennent un ou deux paramètres d'échelle.

La comparaison des deux tableaux (10 et 11) montre que les modèles qui ne prennent pas en considération les restrictions sur les paramètres d'échelle s'ajustent mieux à la structure par terme des taux d'intérêt. Toutefois, pour le modèle à deux facteurs la différence est importante puisque pour un modèle avec seulement deux facteurs l'ajout d'un paramètre supplémentaire peut faire une grande différence. Pour tous les autres modèles, les différences sont marginales.

Ainsi, les résultats montrent que l'imposition de restrictions ou non n'influence pas la qualité de l'ajustement des modèles. Néanmoins, la raison pour laquelle les restrictions sont utiles apparaît lorsque l'on examine les séries chronologiques des facteurs. Comme ces séries sont modélisées dans la deuxième étape de l'approche en deux étapes, il est important de s'assurer que ces séries ne présentent pas des valeurs aberrantes. Ceci n'est pas nécessairement le cas lorsqu'on utilise l'approche d'estimation sans restrictions sur les paramètres d'échelle.

5. Les résultats de prévision :

Nous suivons la même démarche pour évaluer la performance des prévisions des différents modèles de Nelson et Siegel. Cependant, les modèles qui s'ajustent le mieux aux données de la période d'étude ne sont pas nécessairement capable de donner les meilleures prévisions à cause du risque du surapprentissage⁸ (overfitting). Ce sera particulièrement le cas lorsque les modèles sont estimés par la procédure en deux étapes puisque la première étape ne prend pas en considération la dynamique des facteurs.

5.1 Procédure de prévision :

La procédure de prévision que nous adoptons consiste à prédire d'abord l'évolution des facteurs en utilisant l'équation d'état et par la suite substituer ces prévisions dans l'équation de mesure pour obtenir les prévisions des taux d'intérêt. La prévision $\hat{\beta}_{T+h}$ est obtenue à l'aide de l'équation d'état :

$$\hat{\beta}_{T+h} = [I_K - \hat{\Phi}^h] [I_K - \hat{\Phi}]^{-1} \hat{\mu} + \hat{\Phi}^h \beta_T$$

Avec I_k est la matrice unitaire ($K \times K$), $\hat{\mu}$ et $\hat{\Phi}$ les estimations de l'équation d'état.

⁸ Un modèle dans une situation de surapprentissage qui perd ses pouvoirs de prédiction sur de nouveaux échantillons.

5.2 Les modèles concurrents :

5.2.1 Marche aléatoire :

Nous considérons trois modèles concurrents⁹ pour juger de la capacité prédictive de la classe des modèles de Nelson-Siegel. Le premier qui est le modèle de référence : la marche aléatoire (Random walk RW).

$$y_t(\tau_i) = y_{t-1}(\tau_i) + \varepsilon_t(\tau_i), \quad \varepsilon_t(\tau_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\tau_i))$$

5.2.2 Modèle autorégressive d'ordre 1 AR(1) :

Le deuxième modèle que nous considérons est le modèle autorégressive d'ordre 1 :

$$y_t(\tau_i) = \mu(\tau_i) + \phi(\tau_i)y_{t-1}(\tau_i) + \varepsilon_t(\tau_i), \quad \varepsilon_t(\tau_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\tau_i))$$

5.2.3 Modèle VAR(1) :

Le dernier modèle est le modèle multivarié autorégressive d'ordre 1. L'inconvénient de ce modèle dans la prévision des taux futurs est que seules les échéances qui sont incluses dans le modèle peuvent être prévues. Pour limiter le nombre des paramètres que nous devons estimer, nous choisissons un modèle VAR (1) dans lequel les retards de rendements sont remplacés par les trois premiers facteurs identifiés dans la deuxième partie de ce travail. La raison derrière ce choix est que ces facteurs expliquent plus de 98,5% de la variation totale des taux d'intérêt et aussi à cause de leurs interprétations comme étant des facteurs de niveau, de pente et de courbure.

Nous utilisons la matrice des facteurs F_{t-1} identifiée dans l'analyse factorielle constitué de 13 maturité (les données utilisées sont les observations jusqu'à l'observation t-1). Le modèle VAR(1) est donc donnée par :

$$Y_t = \mu + \Phi F_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Avec $Y_t = \left[y_t\left(\frac{3}{12}\right), \dots, y_t(10) \right]'$, μ un vecteur (13×1) et ϕ une matrice (13×3) et Σ une matrice (13×13).

Une différence importante entre le modèle de Nelson-Siegel et le modèle VAR est que ce dernier n'impose pas une forme paramétrique sur l'équation de mesure. Le modèle VAR (1) peut donc être utilisé pour déterminer si les composantes associées aux facteurs de la classe des modèles de Nelson-Siegel sont utiles pour la prévision des taux d'intérêts.

⁹ Beaucoup d'auteurs utilisent ces modèles qu'on a choisis pour confronter leurs capacités prédictives à celles des modèles de Nelson et Siegel (exemple : Michiel de Pooter, 2007)

5.3 Evaluation des prévisions :

Nous utilisons un certain nombre de critères d'évaluation de l'erreur de la prévision des différents modèles examinés. Nous rapportons en particulier dans le tableau n°1 la racine carrée de l'erreur quadratique moyen de prévision (RMSPE : Root Mean Squared Error) et la trace de la matrice des racines carrées des erreurs quadratiques moyens de prévision de tous les échéances (TRMSPE : Trace Root Mean Squared Error). Ce dernier résume les erreurs de prévision de toutes les échéances ce qui donne un indicateur de performance permettant une comparaison directe entre les modèles.

5.4 Les résultats des prévisions :

Les résultats de la prévision sont présentés dans les tableaux 5 - 8. La première ligne de chaque tableau indique le (T) RMSPE pour le modèle de la marche aléatoire. Toutes les autres lignes sont relatives aux (T) RMSPE des modèle par rapport à la marche aléatoire, y compris la deuxième et la troisième ligne qui montrent les résultats du modèles AR (1). Les caractères gras indiquent la surperformance des modèles par rapport à la marche aléatoire.

Pour un horizon de prévision de 1 mois et avec la méthode d'estimation en deux étapes, c'est principalement le modèle à quatre facteurs qui fonctionne bien pour les maturités inférieures à un an. Selon le test de White le 15% de la surperformance par rapport à la marche aléatoire de la maturité de trois mois est significative au niveau de 5%. Le modèle à quatre facteurs avec un modèle VAR (1) pour la dynamique des facteurs est mieux que le modèle à quatre facteurs avec un modèle AR (1).

Le tableau 6 indique que, pour un horizon de 3 mois pour tous les modèles, les meilleurs résultats sont obtenus pour les maturités courtes en utilisant un modèle VAR pour la dynamique des facteurs, au lieu des modèles AR et RW. Il est intéressant de noter que les modèles à quatre facteurs de Svensson et de Svensson ajusté ne produisent pas seulement de bonnes estimations de la structure par terme, mais ils fournissent aussi des prévisions précises pour les maturités courtes. Le modèle à quatre facteurs est le modèle qui donne les meilleurs résultats avec le modèle NS2-4- λ -VAR est légèrement mieux que le modèle NS2-4-VAR.

Il est intéressant de noter que l'ajout d'un deuxième facteur de pente non seulement améliore la qualité d'ajustement du modèle, mais aussi la performance de la prévision. En fait, l'ajout de facteurs en général semble améliorer la performance de la prévision.

L'imposition de Nelson-Siegel d'une structure exponentielle sur les composantes associées aux facteurs aide à améliorer la capacité prédictive du modèle par rapport aux modèles de rendement l'AR (1) et VAR (1).

6. Conclusion :

Dans cette partie nous avons examiné la qualité de l'ajustement des différents modèles de la classe de Nelson et Siegel et leurs capacités prédictive. Les résultats de l'estimation montrent que les modèles les plus sophistiqués améliorent la qualité d'ajustement du modèle originel. Le modèle à quatre facteurs donne des résultats proches de ceux de Svensson mais il a l'avantage d'être facile à estimer.

En plus de l'amélioration de la qualité d'ajustement du modèle de base de Nelson et Siegel, le modèle à quatre facteurs est aussi performant au niveau de la prévision.

Nous pouvons prolonger cette étude principalement dans deux directions. D'abord l'utilisation des variables macroéconomiques peut améliorer les résultats des prévisions. Il serait intéressant aussi d'utiliser les techniques de l'inférence bayésienne pour le choix du modèle.

Conclusion Générale

La structure par terme des taux d'intérêt constitue actuellement l'un des outils les plus intéressants dans l'analyse économique et financière. Les économistes s'intéressent aux anticipations futures des taux d'intérêt et la plupart des banques centrales l'utilisent maintenant pour fixer leurs politiques monétaires. Pour les financiers, l'étude de la structure par terme permet de valoriser et de gérer les produits financiers. Elle constitue aussi l'un des pôles de la recherche en finance.

La perspective générale de cette étude est celle de la modélisation de la structure par terme, car la littérature financière sur ce domaine est relativement importante et il est souvent difficile de s'y retrouver. Ce travail permettra à Banque Al Maghrib de mettre à la disposition des différents acteurs du marché financier d'une façon quotidienne la courbe des taux des bons de trésor marocain. L'estimation de cette dernière se fait actuellement à l'aide d'une simple interpolation linéaire.

La première partie de ce travail est constituée de trois chapitres. Nous avons consacré le premier chapitre à la définition du problème de l'estimation de la structure par terme. Nous précisons aussi dans ce chapitre le schéma de l'estimation. Tous les arguments plaident en faveur d'une méthode basée sur l'estimation des taux zéro.

Nous avons défini un ensemble de critères pour le choix de la méthode d'estimation. Il ressort de cette étude que la classe des modèles de Nelson et Siegel répond à la plupart des critères invoqués.

Le deuxième chapitre vient pour présenter au lecteur les différentes notions du taux d'intérêt ainsi que ces théories traditionnelles les plus connues.

La seconde partie a été consacrée à la détermination des facteurs de déformation de la structure par terme. La notion de facteur est abondamment utilisée en théorie financière et la plupart des modèles financiers de la structure par terme sont des modèles à un seul facteur. Cependant, ils expliquent difficilement les prix des actifs (Canabarro, 1995). La prise en compte de plusieurs facteurs conduit à une modélisation plus pertinente de la structure par terme des taux d'intérêt.

Nous montrons que la déformation de la structure par terme des taux d'intérêt dépend de trois facteurs, un facteur de niveau, un facteur de pente et un facteur de courbature.

Dans la troisième partie nous examinons différentes extensions du modèle de Nelson et Siegel (1987) dans le but de choisir un modèle permettant d'estimer et de prévoir la structure par terme marocaine des taux d'intérêt. Identiquement à ce que nous attendions, nous avons trouvé que l'utilisation des modèles plus flexibles permet d'obtenir les meilleures qualités d'ajustement aux données marocaines. En outre, nous avons trouvé que la capacité prédictive des modèles s'améliore aussi avec l'augmentation de la flexibilité. En particulier, le

modèle de Nelson et Siegel à quatre facteurs semble donner de bonnes prévisions comparativement à d'autres modèles concurrents.

Les perspectives de recherche sont nombreuses, et beaucoup semblent prometteuses. Toutes les tentatives en la matière, sont évidemment d'une importance cruciale puisque les données marocaines n'ont pas encore fait l'objet de plusieurs études dans ce domaine.

Il est intéressant d'analyser les déterminants microéconomiques de la structure des taux, dans l'optique de la théorie des choix rationnels en incertitude.

On peut aussi tenter de replacer le problème des taux dans un cadre macroéconomique complet, type IS-LM, prenant en compte, notamment, le comportement spécifique de l'état (politique monétaire, politique de financement des déficits budgétaires et de gestion de l'encours de dette publique, . . .).

Au terme de ce travail, nous avons conscience d'avoir posé plus de questions que nous avons donné de réponses. Cependant, nous espérons que le lecteur a perçu l'importance des modèles purement empiriques de la structure par terme.

Annexe 1 : Filtre de kalman.

Modèle linéaire

Le Filtre de Kalman est une approche statistique, d'assimilation de données, dont le principe est de corriger la trajectoire du modèle en combinant les observations avec l'information fournie par le modèle de façon à minimiser l'erreur entre l'état vrai et l'état filtré.

Considérons la représentation stochastique de l'espace d'état suivante:

$$X_{k+1} = M_k X_k + B_k u_k + G_k W_k$$

Avec M_k est la dynamique linéaire, u_k est le terme de forçage projeté sur les variables par la matrice B_k et G_k est la matrice d'entrée de bruit W_k qui est un bruit Gaussien de moyenne zéro et de matrice de covariance Q_k .

L'observation Z_k est reliée à l'état du modèle (inconnu) X_k par la relation, dite équation d'observations, suivante

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

Avec H_k est un opérateur linéaire d'observation et V_k représente l'erreur sur les observations produit par un bruit Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance R_k . L'état initial X_0 est supposé être Gaussien avec une moyenne X_0 est une matrice de covariance P_0 .

Afin d'obtenir l'état optimal du système on doit combiner les observations Z_k avec l'information fournie par le modèle X_k . Pour résoudre ce problème de filtrage on doit déterminer la densité de probabilité conditionnelle de l'état X_k sachant l'historique des mesures pris Z_1, \dots, Z_l . Cette densité de probabilité est Gaussienne (puisque'on est dans un cas linéaire) et donc complètement caractériser par sa moyenne $X_{k/l}$ et sa matrice de covariance $P_{k/l}$

L'algorithme :

Initialisation de l'état du système et de sa matrice de covariance

$$X_{0/0} = X_0 \qquad P_{0/0} = P_0$$

Calcul de l'estimation $X_{k/k-1}$ de l'état du système à l'instant k à partir des mesures disponibles à l'instant $k-1$

$$X_{k/k-1} = M_k X_{k-1/k-1} + B_k u_k$$

Mise à jour intermédiaire de la matrice de covariance de l'état en tenant compte de l'évolution prévue par l'équation d'évolution de l'état

$$P_{k/k-1} = M_k P_{k-1/k-1} M_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

Calcul du gain du filtre optimal (qui peut être calculé a priori)

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T \left(H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k \right)^{-1}$$

Mise à jour de la matrice de covariance de l'état

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}$$

Réactualisation de l'estimation de l'état

$$X_{k/k} = X_{k/k-1} + K_k (Z_k - H_k X_{k/k-1})$$

Le gain optimal (de Kalman) tient compte des caractéristiques statistiques du bruit de mesure mais ne dépend pas des données mesurées donc il peut être calculé a priori.

Le cas d'un processus stationnaire représenté dans l'espace d'état par les équations suivantes:

$$X_{k+1} = M X_k + B u_k + G W_k$$

$$Z_k = H X_k + V_k$$

Modèle non-linéaire :

Dans le filtre de Kalman classique, le modèle d'évolution et l'opérateur d'observation sont supposés linéaires. Cependant, il arrive souvent que l'hypothèse de linéarité ne soit pas valide. Dans ce cas, il est possible de généraliser le filtre de Kalman en utilisant des formes linéarisées de l'opérateur d'observation et du modèle d'évolution. Ce filtre est appelé filtre de Kalman étendu (EKF).

Les cinq étapes de l'analyse peuvent alors s'écrire ainsi :

Calcul de la matrice de gain \mathbf{K} au temps t_i :

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^f \mathbf{H}_i^T \left(\mathbf{H}_i \mathbf{P}_i^f \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i \right)^{-1} .$$

Analyse au temps t_i à l'aide de l'opérateur d'observation non-linéaire :

$$\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}_i \left(\mathbf{y}_i^o - H_i \mathbf{x}_i^f \right)$$

Calcul de la matrice de covariance d'erreur d'analyse au temps t_i :

$$\mathbf{P}_i^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_i^f$$

Prévision au temps t_{i+1} par propagation de l'analyse de t_i à t_{i+1} par le modèle non-linéaire d'évolution :

$$\mathbf{x}_{i+1}^f = M_{i \rightarrow i+1}(\mathbf{x}_i^a).$$

Calcul de la matrice de covariance d'erreur de prévision au temps t_{i+1} par propagation de la matrice de covariance d'erreur d'analyse de t_i à t_{i+1} par le modèle linéaire d'évolution :

$$\mathbf{P}_{i+1}^f = \mathbf{M}_{i \rightarrow i+1} \mathbf{P}_i^a \mathbf{M}_{i \rightarrow i+1}^T + \mathbf{Q}_{i+1}$$

A noter que, bien que le filtre de Kalman soit une analyse optimale, le filtre de Kalman étendu perd cette qualité (il ne fournit pas la solution de variance minimale). Néanmoins, l'utilisation du filtre de Kalman étendu dans un cadre faiblement non-linéaire permet d'obtenir de bonnes analyses. De plus, la linéarisation du modèle d'évolution M peut interagir avec les erreurs du modèle de manière assez compliquée.

Annexe 2 : Statistiques descriptives.

Tableau n° 9 : les statistiques descriptives

Statistique	3/12 ans	6/12 ans	1ans	2 ans	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
Nb.								
d'observations	1310	1310	1310	1310	1310	1310	1310	1310
Minimum	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
Maximum	0,040	0,039	0,040	0,041	0,050	0,054	0,059	0,071
Amplitude	0,020	0,019	0,020	0,021	0,030	0,034	0,039	0,051
1er Quartile	0,026	0,027	0,028	0,031	0,038	0,041	0,044	0,045
Médiane	0,028	0,029	0,030	0,033	0,039	0,044	0,048	0,049
3ème Quartile	0,034	0,034	0,035	0,037	0,040	0,048	0,054	0,060
Somme	38,504	39,426	41,378	44,204	50,679	57,662	63,073	67,055
Moyenne	0,029	0,030	0,032	0,034	0,039	0,044	0,048	0,051
Variance (n)	0,000020	0,000018	0,000014	0,000010	0,000012	0,000027	0,000044	0,000075
Variance (n-1)	0,000021	0,000018	0,000014	0,000010	0,000012	0,000028	0,000044	0,000075
Ecart-type (n)	0,005	0,004	0,004	0,003	0,004	0,005	0,007	0,009
Ecart-type (n-1)	0,005	0,004	0,004	0,003	0,004	0,005	0,007	0,009
Coefficient de variation	0,155	0,143	0,122	0,095	0,092	0,120	0,138	0,169

Annexe 3 :

Tableau n°10 : Ajustement des modèles avec restrictions sur les paramètres.

	NS2-2	NS2-3	NS2-4	NS2-2-λ	NS2-3-λ	NS2-4-λ	NS2-B	NS2-S	NS2-AS
Maturité									
	Erreur moyenne								
3/12	6,55	-0,97	1,47	5,06	-0,26	1,65	1,09	1,5	1,36
6/12	3,06	-0,93	-0,86	1,67	-0,75	-0,97	-0,92	-0,92	-0,93
1	-0,23	0,5	-0,98	-0,52	0,22	-1,07	-0,98	-0,98	-0,87
2	-6,52	-2,17	-2,34	-4,3	-2,42	-2,23	-2,31	-2,31	-2,28
5	-5,5	-4,36	-2,86	-3,55	-4,13	-2,95	-2,92	-2,92	-3,12
10	2,53	-2,4	-3,97	-2,82	-2,44	-3,87	-3,75	-3,94	-3,69
	écart-type des erreurs								
3/12	32,06	8,59	3,12	17,09	5,25	2,74	3,98	2,59	2,23
6/12	15,88	4,12	4,11	9,07	4,2	3,94	4,05	3,96	3,91
1	9,23	8,11	5,49	8,26	6,7	5,46	6,17	5,42	5,33
2	16,53	4,72	4,7	8,57	4,77	4,46	4,57	4,4	4,45
5	7,21	5,9	4,74	6,14	5,4	4,62	5,11	4,67	4,6
10	20,07	7,12	5,15	10,26	6,08	4,93	5,3	4,73	4,89
	Erreur quadratique moyenne								

3/12	32,72	8,64	3,45	17,82	5,26	3,2	4,12	3	2,62
6/12	16,17	4,23	4,19	9,22	4,27	4,06	4,14	4,07	4,02
1	9,24	8,12	5,58	8,28	6,7	5,56	6,21	6,21	5,4
2	17,77	5,2	5,25	9,59	5,35	4,98	5,14	5,14	5
5	9,07	7,34	5,54	7,09	6,8	5,48	5,98	5,98	5,55
10	20,23	7,52	6,5	10,94	6,55	6,27	6,5	6,5	6,12
Erreur absolue moyenne									
3/12	25,26	6,39	2,76	12,64	3,71	2,55	3,06	2,34	1,93
6/12	12,19	3,06	3,03	6,19	3,1	2,95	3	2,94	2,97
1	7,45	6,37	4,51	6,58	5,24	4,42	4,84	4,35	4,25
2	13,71	3,7	3,75	6,81	3,75	3,58	3,63	3,56	3,64
5	7,45	6,13	4,33	5,88	5,53	4,21	4,75	4,19	4,29
10	15,71	5,91	5,25	8,31	5,21	5,06	5,14	4,98	4,94
Erreur minimale									
3/12	-86,81	-34,51	-11,65	-49,15	-22,38	-7,83	-16,67	-5,98	-4,13
6/12	-40	-14,11	-13,82	-20,69	-13,29	-12,66	-13,02	-12,63	-12,72
1	-20,74	-18,33	-17,91	-20,75	-16,61	-20,7	-20,31	-20,07	-19,69
2	-46,9	-19,05	-20,1	-27,83	-21,67	-18,32	-19,22	-17,15	-16,75
5	-27,39	-19,89	-20,23	-18,38	-17,2	-23,54	-17,2	-23,59	-23,46
10	-37,58	-25,57	-18,38	-41,31	-18,39	-18,37	-18,39	-19,09	-19,28
Erreur maximale									
3/12	75,52	21,75	10,6	54,67	12,43	9,03	12,44	8,97	897
6/12	44,64	21,81	22,1	34,28	221,16	22,09	22,2	21,22	1855
1	28,83	26,69	13,48	22,14	21,99	12,03	17,86	11,96	1189
2	36,97	16,64	16,97	22,28	18,98	16,98	18,67	18,91	1833
5	20,39	18,62	12,37	19,48	13,39	10,2	13,39	10,87	1153
10	53,93	16,41	7,96	24,75	17,02	7,97	9,25	8,05	745
Autocorrélation d'ordre 1 de l'erreur p1									
3/12	0,907	0,795	0,483	0,817	0,689	0,483	0,473	0,417	0,435
6/12	0,875	0,276	0,27	0,688	0,248	0,278	0,271	0,244	0,322
1	0,659	0,582	0,386	0,615	0,51	0,39	0,417	0,378	0,369
2	0,913	0,649	0,628	0,759	0,613	0,615	0,625	0,597	0,622
5	0,805	0,74	0,644	0,746	0,696	0,642	0,606	0,602	0,609
10	0,889	0,627	0,488	0,706	0,55	0,442	0,408	0,405	0,438
Autocorrélation d'ordre 2 de l'erreur p12									
3/12	0,347	0,087	0,102	0,281	0,023	0,192	0,052	0,174	0,119
6/12	0,43	0,203	0,188	0,304	0,159	0,239	0,215	0,22	0,24
1	0,375	0,296	0,37	0,311	0,338	0,356	0,33	0,353	0,356
2	0,295	0,129	0,132	0,091	0,129	0,1	0,102	0,102	0,108
5	0,099	0,046	-0,092	-0,06	0,099	-0,112	-0,122	-0,122	-0,121
10	0,394	0,297	0,305	0,19	0,205	0,298	0,264	0,264	0,25

Annexe 4 :

Tableau n°11 : Ajustement des modèles sans restrictions sur les paramètres.

	NS2-2-λ	NS2-3-λ	NS2-4-λ	NS2-B	NS2-S	NS2-AS
Maturité						
Erreur moyenne						
3/12	4,36	-0,41	1,67	1,52	1,33	0,85
6/12	0,34	-0,82	-0,98	-0,88	-0,37	0,1
1	-1,3	-0,27	-1,1	-0,99	-1,15	-1,1
2	-3,45	-2,33	-2,23	-2,31	-2,31	-2,43
5	-1,95	-4,32	-2,91	-2,91	-2,94	-2,83
10	-5,42	-2,15	-3,93	-3,82	-3,49	-3,63
écart-type des erreurs						
3/12	11,18	5,12	2,82	2,96	2,32	2,29
6/12	6,03	4,14	3,97	3,93	3,7	3,45
1	8,14	6,57	5,41	5,65	5,33	5,15
2	6,43	4,67	4,55	4,4	4,4	4,37
5	6,37	5,11	4,55	4,52	4,37	4,39
10	8,63	5,67	4,94	4,38	4,2	4,33
Erreur quadratique moyenne						
3/12	12	5,13	3,28	3,33	2,67	2,45
6/12	6,04	4,22	4,09	4,03	3,72	3,45
1	8,25	6,58	5,52	5,73	5,45	5,27
2	7,3	5,22	5,06	4,96	4,96	5
5	6,66	6,69	5,41	5,38	5,26	5,22
10	10,19	6,07	6,31	5,81	5,46	5,65
Erreur absolue moyenne						
3/12	8,72	3,58	2,62	2,58	1,91	1,58
6/12	4,54	3,03	2,97	2,9	2,75	0,29
1	6,73	5,16	4,46	4,57	4,24	4,14
2	5,42	3,67	3,65	3,56	3,56	3,67
5	5,4	5,39	4,21	4,16	3,95	3,96
10	7,89	4,88	5,12	4,79	4,45	4,63
Erreur minimale						
3/12	-41,06	-22,44	-8,14	-7,63	-3,96	-12,38
6/12	-19,68	-13,33	-12,8	-12,9	-12,72	-12,77
1	-20,75	-16,69	-20,78	-20,1	-20,32	-20,27
2	-21,66	-21,67	-18,01	-17,15	-17,15	-17,17
5	-17,24	-17,25	-23,13	-16,94	-23,46	-23,31
10	-41,02	-17,03	-16,49	-17,09	-15,66	-18,51

Erreur maximale						
3/12	36,29	11,32	9,15	9,58	9,02	9,17
6/12	17,93	22,18	22,03	22,19	15,79	9,46
1	21,98	22	11,81	12,01	19,9	11,9
2	18,08	18,89	17,32	18,91	18,91	19,2
5	19,47	9,32	8,84	9,37	8,62	8,66
10	20,54	16,97	7,79	7,86	7,93	8,32
Autocorrélation d'ordre 1 de l'erreur ρ_1						
3/12	7,48	6,54	4,77	5,05	3,85	3,46
6/12	4,83	2,42	2,7	2,83	2,41	2,45
1	6,09	5,1	3,93	3,89	3,99	4,16
2	6,88	6,07	6,17	6,03	6,18	6,14
5	7,69	6,92	6,44	6,38	6,01	6,08
10	5,51	5,51	4,83	4,02	3,89	3,98
Autocorrélation d'ordre 2 de l'erreur ρ_{12}						
3/12	0,305	0,01	0,139	0,146	0,1	0,122
6/12	0,266	0,154	0,216	0,236	0,241	0,23
1	0,343	0,339	0,358	0,349	0,354	0,36
2	0,058	0,127	0,109	0,09	0,061	0,08
5	0,136	-0,133	-0,099	-0,175	-0,181	-0,182
10	0,231	0,217	0,264	0,243	0,241	0,215

Annexe 5 :

Tableau n°12 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l'approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (Horizon de prévision une journée)

Maturité	TRMSPE	RMSPE					
		3 m	6 m	1 an	2ans	5 ans	10 ans
RW	101,59	21,18	21,82	25,71	29,12	30,48	27,95
AR	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00
VAR	1,01	0,95	0,99	1,03	1,07	1,01	1,07
NS2-2-AR	1,18	1,44	1,05	1,07	1,27	1,04	1,26
NS2-2-VAR	1,19	1,55	1,12	1,05	1,24	1,03	1,28
NS2-3-AR	1,02	0,98	1,07	1,07	1,07	1,02	1,03
NS2-3-VAR	1,01	0,87	0,97	1,02	1,02	1,03	1,03
NS2-4-AR	1,07	1,26	1,23	1,18	1,13	1,04	1,01
NS2-4-VAR	0,99	0,85	0,94	0,98	1,06	1,02	1,03
NS2-2- λ -AR	1,68	1,01	1,38	1,88	2,17	1,85	1,45
NS2-2- λ -VAR	1,66	1,05	1,34	1,83	2,12	1,82	1,44
NS2-3- λ -AR	1,23	1,26	1,41	1,36	1,33	1,25	1,15
NS2-3- λ -VAR	1,21	1,05	1,26	1,30	1,33	1,26	1,19

NS2-4- λ -AR	1,10	1,26	1,26	1,20	1,18	1,09	1,06
NS2-4- λ -VAR	1,00	0,90	0,97	1,00	1,08	1,03	1,06
NS2-B-AR	1,18	1,30	1,36	1,23	1,16	1,22	1,19
NS2-B-VAR	1,14	1,06	1,16	1,12	1,12	1,19	1,21
NS2-S-AR	1,30	1,36	1,53	1,47	1,40	1,32	1,30
NS2-S-VAR	1,11	0,98	1,12	1,12	1,13	1,14	1,22
NS2-AS-AR	1,29	1,42	1,52	1,45	1,40	1,31	1,20
NS2-AS-VAR	1,24	1,18	1,30	1,30	1,33	1,28	1,22

Annexe 6 :

Tableau n°13 : Comparaison entre les modèles de Nelson et Siegel (estimés en utilisant l'approche en deux étapes) et les modèles concurrents (RW, AR, VAR). (horizon de prévision 3 jours)

TRMSPE		RMSPE					
		3 m	6 m	1 an	2ans	5 ans	10 ans
Maturité							
RW	197.03	48.59	51.68	55.68	60.20	57.57	50.08
AR	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
VAR	1.01	0.89	0.98	1.05	1.07	1.03	1.08
NS2-2-AR	1.03	0.89	0.97	1.05	1.10	1.02	1.13
NS2-2-VAR	1.04	0.96	0.99	1.03	1.08	1.03	1.16
NS2-3-AR	1.01	1.01	1.07	1.08	1.06	1.02	1.00
NS2-3-VAR	1.00	0.85	0.96	1.03	1.06	1.04	1.03
NS2-4-AR	1.08	1.22	1.20	1.18	1.13	1.04	1.00
NS2-4-VAR	0.99	0.81	0.92	0.99	1.04	1.03	1.05
NS2-2- λ -AR	1.20	0.95	1.13	1.29	1.38	1.27	1.15
NS2-2- λ -VAR	1.18	0.96	1.11	1.25	1.33	1.25	1.16
NS2-3- λ -AR	1.07	1.17	1.22	1.20	1.13	1.05	1.02
NS2-3- λ -VAR	0.99	0.93	1.03	1.06	1.03	0.99	1.05
NS2-4- λ -AR	1.08	1.16	1.17	1.17	1.14	1.06	1.02
NS2-4- λ -VAR	0.95	0.79	0.89	0.96	1.01	0.99	1.04
NS2-B-AR	1.11	1.19	1.23	1.19	1.13	1.11	1.10
NS2-B-VAR	1.03	0.91	1.00	1.03	1.03	1.06	1.14
NS2-S-AR	1.27	1.32	1.41	1.43	1.37	1.25	1.22
NS2-S-VAR	1.00	0.85	0.95	0.99	1.02	1.02	1.14
NS2-AS-AR	1.16	1.26	1.31	1.29	1.22	1.13	1.08
NS2-AS-VAR	1.00	0.94	1.01	1.04	1.03	1.01	1.08

Bibliographie :

- ✓ Zero-coupon yield curves: technical documentation, BIS Papers, No 25, Monetary and Economic Department, October 2005
- ✓ The U.S. Treasury yield curve: 1961 to the present. Refet S. Gürkaynak, Brian Sackb, Jonathan H. Wrightc. November 2006.
- ✓ Estimating the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy Analysis Magnus, Dahlquist and Lars E. O. Svensson, 1996.
- ✓ Kalman filtering: implementation with MATLAB, Rachel Kleinbauer, November 2004.
- ✓ La théorie des anticipations de la structure par terme : test à partir des titres publics français. Eric Jondeau and Roland Ricard, 1998.
- ✓ Application of the Kalman filter for estimating continuous time term structure models: evidence from the UK and Germany, Rana Chatterjee, 2003.
- ✓ Filtre de Kalman. Berrada Mohamed. Octobre 18, 2006
- ✓ Modèles de la courbe des taux, ENSAE - DEA MASE Université Paris IX Dauphine, Philippe PRIAULET,
- ✓ A comparison of yield curve estimation techniques using UK data, Michalis Ioannides, 2001.
- ✓ Modèles factoriels de la structure par terme des taux d'intérêt : Théorie et application économétrique, 1995.
- ✓ Estimation de modèles de la structure par terme des taux d'intérêt, Laurence Broze, Olivier Scaillet, Jean-Michel Zakoian, 1995.
- ✓ Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, Mark Fisher, September 1994.

