



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_**_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_**_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Estimation et projection des
paramètres bâlois sous IFRS 9**

Préparé par : *Mme Leila BENMESSAOUD*
M. Youssouf HAROUNA KERZIKA

Sous la direction de : *M. Yassine EL QALLI (INSEA)*
Mme Zineb BENSEYED (MAZARS)
M. Hamza BENFDIL (MAZARS)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Yassine EL QALLI (INSEA)*
- *M. Abdellali FADLALLAH (INSEA)*
- *Mme Zineb BENSEYED (MAZARS)*

Juin 2019/ PFE N° 13

Résumé

La crise financière de 2008 a mis au jour les coûts systémiques d'une reconnaissance tardive des pertes de crédit de la part des banques et d'autres prêteurs. Avant la crise, les banques ne faisaient pas un provisionnement adéquat des pertes de crédit que les risques émergeant étaient susceptibles d'entraîner. En effet, la méthode de dépréciation dans IAS 39 reposait sur une approche à posteriori, ne reflétant dans les états financiers que les conséquences d'évènements déjà produits dans le passé.

À la suite de cette crise, les instances de normalisation comptable, notamment l'International Accounting Standards Board (IASB), ont publié en 2014 le document IFRS 9 Financial Instruments. IFRS 9 exige que les prêts consentis par les banques et autres établissements fassent l'objet de provisions fondées sur les pertes de crédit attendues. Les modèles sont impactés par des facteurs de positionnement dans le cycle économique et des paramètres de sensibilité macroéconomique estimés via des modèles économétriques pour la considération de l'information future dite Forward Looking.

La réglementation bâloise a défini certains paramètres qui permettent de calculer la provision pour le risque de crédit qui sont entre autre la probabilité de défaut (PD) et le taux de perte en cas de défaut (LGD). Notre travail repose sur l'estimation de ces paramètres au sens IFRS 9. Ainsi proposerons-nous des modèles tels celui de Vasiček pour la probabilité de défaut (PD) car ce dernier permet d'inclure deux variables dont l'une commune à toutes les contreparties (la composante systémique macroéconomique) et l'autre qui leur est spécifique (facteur idiosyncratique). Nous proposons aussi des modèles tels celui des modèles linéaires généralisé (GLM) car ceux-ci permettent une estimation stochastique des récupérations futures. Nous en déduisons par complémentarité le taux de perte en cas de défaut (LGD).

Mots clés : IFRS 9, Forward Looking, PD PIT, LGD, PD TTC, Merton, Vasiček, Copules, ChainLadder, De Vylder, Mack, GLM, Matrices de Migration

Abstract

The 2008 financial crisis exposed many problems when it comes to late recognition of credit risk. Before the crisis, banks were not adequately provisioning the credit losses that the emerging risks were likely to entail. Indeed, the impairment method used in IAS 39 were based on a post-facto approach, reflecting only the consequences of events that had already occurred in the past.

As a result of this crisis, accounting standards bodies, including the International Accounting Standards Board (IASB), published IFRS 9 Financial Instruments in 2014. IFRS 9 requires that loans given by banks and other institutions be subject to provisions based on expected credit losses (ECL). The models are impacted by the business cycle and macroeconomic sensitivity parameters estimated via econometric models in order to include the future information called Forward Looking.

The Basel regulation has defined certain parameters that allow the calculation of the provision for credit risk such as the probability of default (PD) and the loss given default (LGD). Our work proposes a technical approach to estimate these parameters under IFRS 9. Thus, we will propose models such as Vasiček for probability of default (PD) because it allows to include two variables, one common to all counterparties (the macroeconomic systemic component) and the other specific to each one (idiosyncratic factor). We will also propose models such as the Generalized Linear Models (GLM) because they are based on a stochastic estimation of future recuperation. Therefore, we would be able to discuss the possible values of Loss Given Default (LGD).

Keywords : IFRS 9, Forward Looking, PD PIT, LGD, PD TTC, Merton, Vasiček, Copulas, ChainLadder, De Vylder, Mack, GLM, Migration Matrices

Dédicace

À mes parents, qui ont oeuvré pour ma réussite, de par leur amour inconditionnel, leur soutien permanent, et tous les sacrifices consentis. Merci pour toutes ces longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans ma vie et merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de vous.

Mes soeurs Imane et Majda, vos encouragements et vos soutiens étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments pénibles, de solitude et de souffrance. Merci d'être toujours à mes côtés.

À mon frère Mohammed, en souvenir d'une enfance dont nous avons partagé les meilleurs et les plus agréables moments. Pour toute la complicité et l'entente qui nous unissent.

À la mémoire de ma soeur Wydad, qui a été toujours dans mon esprit et dans mon cœur, je te dédie aujourd'hui ce travail. Que Dieu, le miséricordieux, vous accueille dans son éternel paradis, cher ange.

À tous mes amis, à l'absurdité qui nous réunit... qui nous sépare... À vous Wiam, Meryem et Amal.

À Anass... pour ton soutien inconditionnel. Merci d'être toujours à mes côtés et de comprendre quand personne n'en est capable.

À mon binôme et cher ami Youssouf pour son soutien, sa persévérance, et son engagement. J'ai bien vu que tu penses que c'est difficile de me comprendre. Oui, tu as raison.. pas vraiment.

Leila

Dédicace

J'atteste qu'il n'y a pas de divinité en dehors d'Allah et que Mouhammad est son messager. Les mots sont insuffisants pour exprimer Ta gloire et Ta bonté Ô Allah. Je n'adore et ne vénère que toi. Je te remercie pour toute la grâce et le bonheur dont Tu m'as comblé Ô seigneur. Je suis et resterai Ton serviteur jusqu'à mon dernier souffle si Tu me le permets Ô Allah. Ma réussite et toute ma vie sont entre tes mains Ô Allah Tu gratifies qui Tu veux. Mets nous l'islam dans nos coeurs et facilite nous les bonnes oeuvres et éloignes nous de tout ce qui peut nous éloigner de Toi Ô Allah. Mets Ta bénédiction sur tout lecteur de ce mémoire que Tu nous as permis de compléter Ô seigneur.

Maman, je t'aime. Je veux bien te remercier mais tous les mots du monde ne suffisent pas pour le faire. Tu es ma mère et on ne peut jamais assez remercier une mère pour tous les sacrifices qu'elle entreprend pour la réussite de ses enfants. Je te dédie ma réussite dont tu as été le moteur.

Papa, je t'aime. S'il y a une chose dont je suis sûre, c'est que je ne suis l'homme d'aujourd'hui que grâce à toi. Tu m'as appris à apprendre de mes erreurs et à assumer mes choix. Si je parle de mon moteur de réussite alors saches que c'est toi qui est mon carburant et aussi mon guide.

Mes frères et soeurs, qu'Allah vous bénisse. Je remercie Allah pour la chance que j'ai de vous avoir. En effet, je ne pense pas qu'il existe plus chanceux que celui pour lequel toute sa famille s'engage dans sa réussite. Le simple fait de vous voir impliqués dans ma réussite boost mes matinées et me donne la force de ne jamais fléchir. Ce travail est pour vous. Je vous aime tous autant que vous êtes et je ne cesserai jamais de vous honorer In Shaa Allah.

Mes amis, ma seconde famille, sachez que vous aurez toujours de la place dans mon coeur et excusez mon absence de temps à autre j'étais occupé à faire sortir le meilleur de votre ami. Je vous dédie ce travail car après tout c'est comme si c'était le votre.

Une spéciale dédicace à vous tous qui avez de près ou de loin contribué à ma réussite que ce soit physiquement ou par vos prières. Qu'Allah vous rende cette aide multipliée.

Leila, binôme, être assez complexe à comprendre. Nous en avons vécu des moments, que ce soit durant ce mémoire ou durant nos 3 années en cycle d'ingénieur. Saches que c'était un plaisir de travailler avec toi et je te remercie pour tous les fous rires. Je nous souhaite vraiment le meilleur des avenirs.

Qu'Allah nous laisse tous ensemble en paix et en harmonie. Amen !

Votre bien aimé Youssouf

Remerciements

Nous rendons grâce à Allah pour sa clémence et sa miséricorde sans laquelle nous ne sommes rien.

Nous tenons à remercier notre encadrante Zineb Benseyed et aussi M. Sow Ibrahima, pour la confiance qu'ils nous ont accordé tout au long de ce stage.

Un grand merci également à Chorfi Abdellah, Benfdil Hamza et aussi Bamoussa Fatima Zahra pour leurs conseils avisés et pour le temps qu'ils ont consacré pour nous aider.

Plus généralement nous remercions toute l'équipe de Mazars pour son accueil chaleureux et les contacts enrichissants qu'on a pu avoir.

Nous tenons tout particulièrement à exprimer notre gratitude à notre professeur El Qalli Yassine pour son soutien sans faille et ses nombreux encouragements. Ce mémoire doit énormément à son implication sans compter et ses nombreux conseils toujours pertinents. Sans lui, ce mémoire ne serait pas ce qu'il est aujourd'hui.

Enfin, un grand merci à notre professeur FADLALLAH pour avoir accepté d'évaluer notre travail. Nous remercions au même titre tout le corps professoral de l'INSEA, qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance pour la formation de qualité nous ayant permis de faire ce travail.

Table des matières

	Page
I Présentation des normes réglementaires	14
Chapitre 1: La norme IFRS 9	15
1.1 Présentation de la norme	15
1.1.1 Normes sur les instruments financiers	15
1.1.2 Arrivée de la norme IFRS 9	15
1.2 La classification et l'évaluation des instruments financiers	16
1.3 Instruments financiers, coût amorti et dépréciation	17
1.4 Comptabilité de couverture	18
1.5 Forward Looking	18
II Estimation des paramètres bâlois	20
Chapitre 1: Introduction	22
Chapitre 2: La probabilité de défaut (PD)	24
2.1 Calibrage des probabilités de défaut long terme PD TTC	25
2.1.1 Méthode des cohortes	25
2.1.2 Méthode du générateur	26
2.1.3 Horizon temporel d'estimation	27
2.2 Modélisation de la probabilité de défaut PIT	27
2.2.1 Préliminaire - modèle de base	28
2.2.2 Adaptation du modèle	29
2.2.3 Modèle de Vasiček	29
2.2.4 Modèle avec copule	30
2.3 Modèle basé sur les copules archimédiennes	35
Chapitre 3: Le taux de perte en cas de défaut (LGD)	37
3.1 Modélisation de la récupération par des méthodes déterministes	38
3.1.1 Méthode ChainLadder	38
3.1.2 Méthode factorielle des moindres carrés de De Vylder	39
3.2 Modélisation de la récupération par des méthodes stochastiques	41
3.2.1 Modèle de Mack (1993)	41
3.2.2 Modélisation GLM	42

III	Application et résultats	46
Chapitre 1:	Présentation des données	48
1.1	Données sur la Probabilité de Défaut	49
1.1.1	Description des classes de risque	49
1.1.2	Quelques statistiques	49
1.1.3	Mouvement de la population	50
1.2	Données sur le taux de perte en cas de défaut (LGD)	51
Chapitre 2:	Probabilités Through The Cycle (TTC)	53
2.1	Conception des matrices par la méthode des cohortes	54
2.1.1	Méthodologie	54
2.1.2	Critères de validité	54
2.1.3	Résultats	54
2.2	Conception des matrices par la méthode de générateurs	58
2.2.1	Méthodologie	58
2.2.2	Hypothèse principale	59
2.2.3	Résultats	59
2.3	Importance d'une approche Point In Time	60
Chapitre 3:	Probabilités Point In Time (PIT)	61
3.1	Introduction	62
3.2	Calibration du modèle	62
3.2.1	Adaptation des données	62
3.2.2	Calcul des paramètres : Seuils de défaut	63
3.2.3	Calcul des paramètres : Sensibilité aux chocs économiques	64
3.2.4	Calcul des paramètres : Cycles économiques	67
3.2.5	Étude de la qualité d'estimations faites	70
3.2.6	Préparation du modèle économique	73
3.2.7	Construction de modèle	77
3.3	Scénarios, Projections et Résultats	80
3.3.1	Scénarios macro-économiques	80
3.3.2	Résultats	81
3.4	Probabilités cumulées et extrapolation	82
3.4.1	Probabilités cumulées	82
3.4.2	Extrapolation	84
3.5	Approche basée sur les copules	85
3.5.1	Formule générale	85
3.5.2	Estimation du paramètre	86
3.5.3	Résultats	86
Chapitre 4:	Taux de perte en cas de défaut (LGD)	87
4.1	Vérification des hypothèses de la méthode ChainLadder	88
4.2	Vérification des hypothèses pour les autres méthodes	90

4.2.1	De Vylder	90
4.2.2	Mack ChainLadder	90
4.2.3	Modèles linéaires généralisés (GLM)	91
4.3	Estimation de la LGD	91
4.3.1	Remplissage des triangles par les différentes méthodes	91
Chapitre A:Présentation de l'organisme		98
A.1	Présentation	98
A.2	Les instances de gouvernance	99
A.2.1	Les règles du partnership intégré	99
A.2.2	10 années de croissance continue et robuste	100
A.3	Mazars au Maroc	102
A.3.1	Présentation	102
A.3.2	Organisation	102
A.3.3	Domaines d'expertise	102
Chapitre B:Tableau des effectifs détaillés		104
Chapitre C:Démonstrations		105
C.1	Démonstration de l'estimateur du maximum de vraisemblance du générateur	105
C.2	Démonstration de la loi de la variable aléatoire associé à une copule de Clayton	106
C.3	Démonstration du calcul des sensibilités	106
C.4	Démonstration Calcul du facteur macroéconomique	107
Chapitre D:Bibliothèques utilisées sur R		109

Table des figures

1	Classification des instruments financiers selon IFRS 9	17
2	Modèle à 3 niveaux des pertes attendues pour la dépréciation d'actifs financiers . . .	18
3	Différence entre PIT et TTC	18
4	Simulation de 2000 observations pour 2 variables aléatoires de lois marginales normale standard et de copule de Clayton (à droite) et de copule gaussienne (à gauche), Les copules ont le même taux de Kendall égal à 0.8	35
5	Exemples des fonctions de la famille exponentielle	43
6	Exemples de fonctions de lien et leur utilisation	44
7	Proportion des classes de risques à la fin de chaque année (2015,2016 et 2017)	50
8	Mouvement mensuel de la population	51
9	Montants récupérés simples	52
10	Montants récupérés cumulés	52
11	Graphe de transitions mensuelles du la matrice 5	55
12	Graphe dynamique des probabilités de défaut mensuelles entre Décembre 2014 et Décembre 2017 par classe	56
13	Graphe dynamique des probabilités de défaut trimestrielles entre Décembre 2014 et Décembre 2017 par classe	57
14	Estimation des éléments $\lambda_{i,j}$ du générateur avec un pas mensuel	59
15	Allure explicative des probabilités de défaut conditionnelles	62
16	probabilités conditionnelles par cohorte et par maturité	63
17	Seuils de défaut en fonction de la classe et de la marginalité	64
18	Calibration des sensibilités	67
19	Évolution historique des Z_{global} et $Z_{classes\ de\ risque}$	70
20	Evolution historique du taux de change	74
21	Evolution historique du prix du diamant	75
22	Evolution historique de l'inflation	75
23	Heatmap des corrélations	76
24	Significativité des coefficients de corrélation	76
25	Résultats de Regsubsets sur R	79
26	Coefficients de la régression du facteur macro-économique sur R	80
27	Indicateurs de la qualité de la modélisation	80
28	Résultats de la projection du facteur macroéconomique	81
29	les probabilités de défaut calibrées par le modèle de Vasiček	82

30	Probabilités de défaut cumulées par cohorte pour la classe 0	83
31	Allures des probabilités de défaut cumulées calibrées par le modèle de Vasiček	84
32	Allures des probabilités de défaut cumulées et extrapolées	85
33	Graphe des régressions entres les récupérations d'années de développement successives	88
34	Variance entre les moyennes des coefficients par années et les facteurs estimés par ChainLadder	89
35	Hypothèses pour la méthode de Mack	90
36	Récupérations selon les 4 méthodes	92
37	Récupérations selon la méthode GLM	93
38	Taux de récupérations selon la méthode GLM	93
39	Courbe du taux LGD selon la méthode GLM	94
40	Présence du groupe à l'international	99
41	Dates clés	101
42	Organigramme	102

Liste des tableaux

1	Représentation graphique des deux ensembles d'information : B_k (hachuré), $F_{i,I-i}$ (grisé)	41
2	Tableau récapitulatif des différentes méthodes énumérées dans ce chapitre	45
3	Classes de risque	49
4	Taux de défaut observé à la fin de chaque année (2015,2016 et 2017)	50
5	Matrice de transition mensuelle entre Décembre 2014 et Janvier 2015	55
6	Probabilités de défaut annuelles entre Décembre 2015 et Décembre 2016 selon les approches de calcul choisies et les classes	58
7	Matrice de transition annuelle entre Décembre 2014 et Décembre 2015	60
8	Probabilités de défaut annuelles de chaque classe entre Décembre 2015 et Décembre 2016	60
9	Calibration des sensibilités par maximum de vraisemblance	66
10	Comparaison	68
11	Corrélations entre Z global et Z classes de risque	70
12	Écart-type des estimateurs de seuils de défaut simulés	71
13	Coefficient de variation des estimateurs de seuil de défaut	72
14	Impact de l'incertitude liée à l'estimateur statistique des seuils en terme de PD	73
15	Résultats du test de racine unitaire de Dickey-Fuller	78
16	Probabilités de défaut cumulées par classe	83
17	Résultats des calibrations des fonctions d'extrapolation des PD cumulées	85
18	Mouvements mensuels de la population	104

Liste des abréviations

ECL : Expected Credit Loss

PD : Probabilité de défaut

PD PIT : Probabilité de défaut Point In Time

PD TTC : Probabilité de défaut Through The Cycle

EAD : Exposure At Default

IFRS : International Financial Reporting Standards

IASB : International Accounting Standards Board

LGD : Loss Given Default

IAS : International Accounting Standards

JV : Juste Valeur

OCI : Other Comprehensive Income

Première partie

Présentation des normes réglementaires

Chapitre 1

La norme IFRS 9

1.1 Présentation de la norme

1.1.1 Normes sur les instruments financiers

Les entreprises utilisent de plus en plus des instruments financiers complexes pour gérer les risques financiers que les mouvements de certaines variables (taux d'intérêt ou de change, cours des actions, cours des matières et produits de base par exemple) font peser sur leur activité.

La normalisation IAS a désiré dans un premier temps amener les entreprises à présenter une information détaillée de l'utilisation qu'elles faisaient de leurs instruments financiers. Ensuite, la normalisation s'est attachée à préciser les règles d'évaluation et de comptabilisation qui devaient être applicables.

Le prédécesseur de l'**International Accounting Standards Board (IASB)**, à savoir l'**International Accounting Standards Committee (IASC)**, avait commencé à se pencher sur les instruments financiers en 1988. Les instruments financiers continuent de figurer depuis lors dans le programme de travail des organismes internationaux de normalisation. Incapable de dégager un consensus sur les questions d'évaluation, l'IASC s'en est tenu aux questions de présentation et d'informations à fournir lorsqu'il a publié l'International Accounting Standard 32 (IAS 32), *Instruments financiers : Informations à fournir et présentation*, en 1995. Le travail s'est poursuivi et a donné lieu à la publication, en 1999, de l'IAS 39, *Instruments financiers : Comptabilisation et évaluation*, qui portait sur les questions qui n'étaient pas abordées dans l'IAS 32.

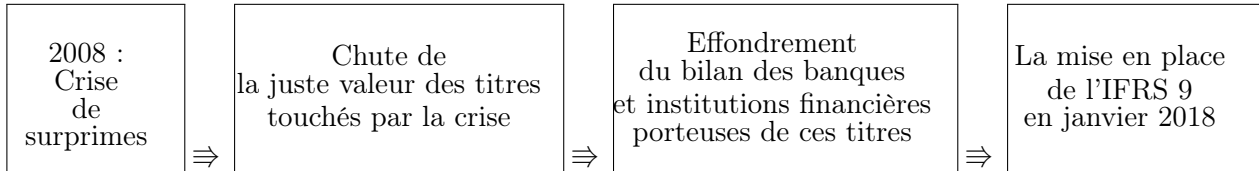
Pour les premiers adoptants, la norme modifie la façon dont ils comptabilisent leurs instruments financiers et impliquera des changements importants dans les systèmes, les procédures et la documentation. Certaines modifications de la norme IAS 39 affectent les préparateurs de comptes en IFRS, dans des domaines tels que la classification des actifs, les règles de décomptabilisation et d'autres domaines clés, notamment la gestion du risque de crédit.

1.1.2 Arrivée de la norme IFRS 9

Dans le contexte de révision d'amélioration de la normalisation, l'IASB a publié en *juillet 2014* la version finale de la norme « **IFRS 9 - Instruments financiers** » en remplacement de la norme « **IAS 39 Instruments financiers : comptabilisation et évaluation** ».

En effet, suite à la *crise économique de 2008*, le rapport Normes comptables et crise financière, daté du *31 octobre 2009*, a montré que cette évaluation en juste valeur proposée par l'IAS 39 a été un facteur d'accélération de cette crise.

Considérée comme complexe, restrictive et inadéquate vis-à-vis de la réalité pratique d'une gestion d'instruments financiers au sein d'une organisation financière, la norme IAS 39 doit alors être remplacée par la norme IFRS 9 entrée en application le 1er janvier 2018 pour les banques et les sociétés d'assurances.



La norme IAS 39, se basant sur des règles, ne reflète pas efficacement la gestion des risques des entreprises. Elle est plus volatile au niveau des résultats. Contrairement à cette dernière, la norme IFRS 9 se base sur des principes avec une meilleure gestion des risques. Elle est jugée plus ouverte et moins volatile des résultats. Cette nouvelle norme s'articule autour trois piliers à savoir :

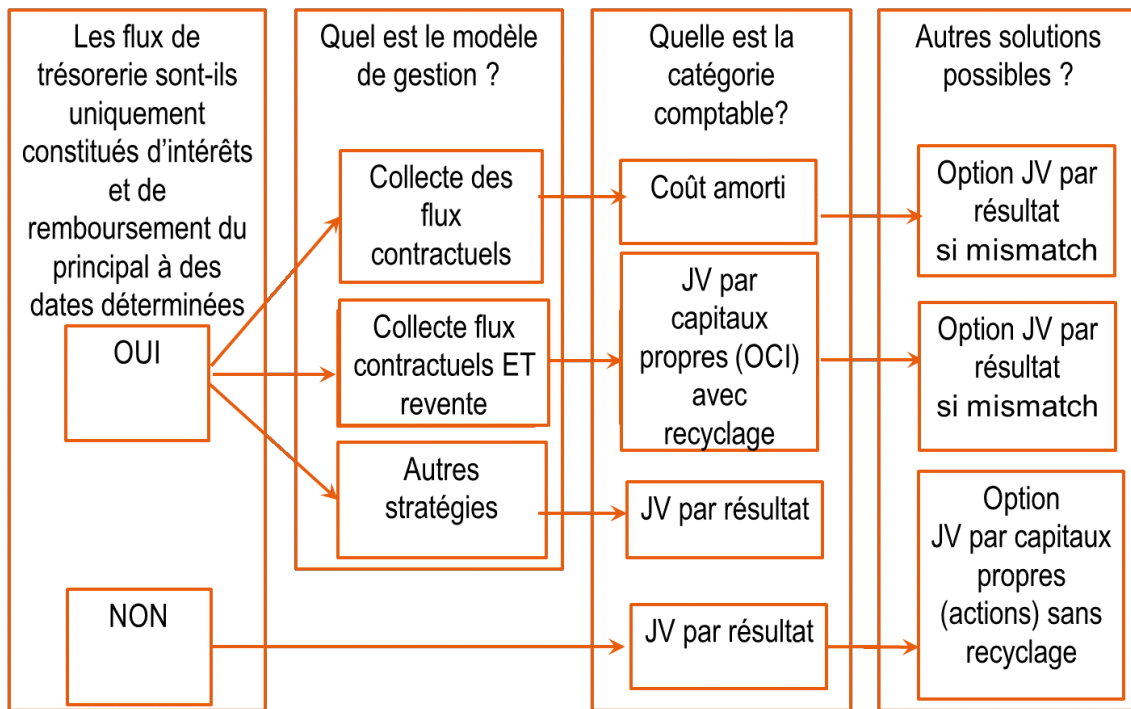
- Classification et l'évaluation des instruments financiers ;
- Instruments financiers, coût amorti et dépréciation ;
- Comptabilité de couverture.

1.2 La classification et l'évaluation des instruments financiers

Le classement est basé sur une évaluation de la façon dont l'instrument est géré (le business model de l'entité) et des caractéristiques contractuelles de ses flux de trésorerie.

En fonction de la catégorie à laquelle ils sont rattachés, leur évaluation est réalisée selon la méthode du coût amorti ou de la juste valeur (en résultat ou en capitaux propres) remplaçant les différentes règles d'IAS 39.

La méthode de coût amorti est pertinente dès lors que l'entreprise a l'intention de conserver un titre jusqu'à son échéance car cela donne une stabilité au résultat. A l'inverse, lorsque l'entreprise détient un instrument financier à des fins de transaction, la comptabilisation à la juste valeur permet de tenir compte de la volatilité des marchés financiers.



Source: Le Blog des Fonctions Financières

FIGURE 1 – Classification des instruments financiers selon IFRS 9

1.3 Instruments financiers, coût amorti et dépréciation

Les instruments financiers de dette des catégories coût amorti ou juste valeur doivent se calculer par le nouveau modèle de dépréciation. Il repose sur les flux de trésorerie attendus (modèle des pertes attendues) et comporte trois niveaux (figure 2).

En évaluant les pertes attendues, nous classons initialement tous les actifs dans le premier niveau. Leurs pertes attendues sur 12 mois sont comptabilisées en charges à la première date du bilan. Ces pertes correspondent à la valeur actuelle des défauts de paiement attendus à partir des potentiels cas de défaillance des 12 prochains mois.

L'intérêt perçu est calculé sur la base de la valeur comptable brute – donc en utilisant la méthode du taux d'intérêt effectif – sur la valeur comptable avant la prise en compte de la dépréciation attendue.

Si le risque de crédit a sensiblement augmenté, l'instrument financier est classé en niveau 2. L'entreprise doit alors comptabiliser une dépréciation à hauteur des pertes attendues sur la durée de vie de l'actif financier («lifetime expected credit losses») dans le compte de résultat.

S'il existe, le jour du bilan, des indications objectives suggérant un défaut avéré, l'instrument financier est classé en niveau 3. Le calcul de la dépréciation se fait alors de manière analogue au modèle de dépréciation actuel, sur la base de la valeur comptable nette.

Pour appliquer le modèle des pertes attendues, les entreprises ont besoin d'autres informations que pour l'actuel modèle de dépréciation. L'introduction de ce modèle demande beaucoup de travail et d'importantes adaptations du système.

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
<p>Risque de crédit Lors de l'entrée au bilan et en l'absence d'une augmentation significative du risque de crédit</p>	<p>Risque de crédit Augmentation significative du risque de crédit</p>	<p>Risque de crédit Présence d'une indication objective suggérant la dépréciation</p>
<p>Comptabilisation de la provision pour risque Dépréciation à hauteur de la perte de crédit attendue sur 12 mois</p>	<p>Comptabilisation de la provision pour risque Dépréciation à hauteur de la perte de crédit attendue sur la durée de vie</p>	<p>Comptabilisation de la provision pour risque Dépréciation à hauteur de la perte de crédit attendue sur la durée de vie</p>
<p>Intérêt perçu Sur la base de la valeur comptable brute</p>	<p>Intérêt perçu Sur la base de la valeur comptable brute</p>	<p>Intérêt perçu Sur la base de la valeur comptable nette</p>

Source: PwC Disclose

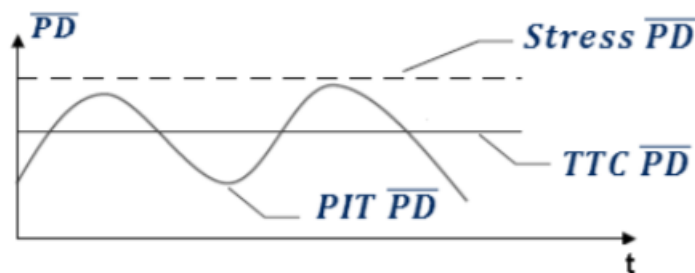
FIGURE 2 – Modèle à 3 niveaux des pertes attendues pour la dépréciation d'actifs financiers

1.4 Comptabilité de couverture

La comptabilité de couverture selon IFRS 9 apporte des simplifications et de nouvelles possibilités de couverture afin que les entreprises revoient leur stratégie de couverture. Pour celles qui n'ont pas encore de comptabilité de couverture, c'est le bon moment pour profiter de l'introduction d'IFRS 9 et intégrer dans la comptabilité des modèles attrayants de couverture.

1.5 Forward Looking

La principale valeur ajoutée d'IFRS 9 est qu'elle intègre une comptabilisation des pertes potentielles dès l'origination du prêt. On passe aussi d'un modèle de probabilité de défaut TTC à un modèle PIT. La principale différence est présentée comme suit :



Source: Journal of Applied Finance & Banking, vol. 5, no. 5, 2015, 63-72

FIGURE 3 – Différence entre PIT et TTC

Les modèles sont impactés par des facteurs de positionnement dans le cycle économique et des paramètres de sensibilité macroéconomique estimés via des modèles économétriques pour la considération de l'information future dite Forward Looking. Cette notion possède deux propriétés à la base des changements opérés au sein des modèles de probabilité de défaut Point In Time (PD

PIT) et des taux de perte en cas de défaut (LGD). Tout d'abord, la mesure doit refléter tout risque de détérioration future des créances au regard de leur probabilité de survenance, puis leur estimation doit tenir compte de l'ensemble des informations disponibles eu égard notamment aux conditions économiques actuelles et futures.

Deuxième partie

Estimation des paramètres bâlois

Tous les modèles sont faux. Certains sont utiles.
(George Box)

Chapitre 1

Introduction

L'exigence de fonds propres affine l'accord de 1988 de Bâle et cherche à rendre les fonds propres cohérents avec les risques encourus par les établissements financiers. Parmi les nouveautés, signalons la prise en compte des risques opérationnels (fraude et pannes de système) et des risques de marché, en complément du risque de crédit ou de contrepartie.

Nous trouvons alors la définition de la perte de crédit attendue (Expected Credit Loss) décrite par des risques qui s'expriment comme des probabilités :

$$\mathbf{ECL = PD * LGD * EAD}$$

Avec

La probabilité de défaut (PD)

Ce paramètre indique, pour un horizon donné, la probabilité qu'un particulier ou une entreprise fasse défaut. C'est un pourcentage, qui dépend des facteurs macroéconomiques et de facteurs intrinsèques à chaque contrepartie.

On distingue les probabilités de défaut TTC (Through The Cycle) des probabilités PIT (Point In Time) :

— Les premières renseignent sur les probabilités de défaut à long terme : ces probabilités sont interprétées comme des valeurs moyennes sur plusieurs cycles économiques et donc indépendantes des fluctuations économiques ;

— les secondes donnent les probabilités de défaut à un instant donné. Ce sont donc des valeurs conditionnées à l'état général de l'économie à ce moment précis.

Les agences de classe de risques adoptent plutôt une démarche de classe de risque TTC. Notre but en revanche, est de calculer des probabilités PIT.

L'exposition en cas de défaut (EAD)

L'EAD ou Exposure At Default est, dans le cas d'une obligation, le nominal (exprimé en monnaie). C'est donc le montant maximal que l'on peut perdre en cas de défaut. Les expositions sont connues a priori et donc considérées déterministes.

Le taux de perte en cas de défaut (LGD)

Le LGD ou Loss Given Default est le pourcentage de l'EAD qui est perdu en cas de défaut. Symétriquement, on peut définir le taux de recouvrement (« recovery rate »), i.e. la valeur restante (en terme d'EAD) de l'obligation après le défaut :

$$LGD = 1 - Recovery\ Rate$$

Le LGD dépend de plusieurs facteurs dont les principaux sont :

- la séniorité (le LGD décroît avec la séniorité. Ainsi, le LGD d'une dette Senior est plus faible que celle d'une dette Mezzanine ou Junior et le LGD d'une dette Mezzanine est plus faible que celle d'une dette Junior);
- le collatéral ou la garantie attachée à l'obligation (ce qui permet de mitiger l'impact d'un défaut, même si la valeur du collatéral peut fluctuer pendant la procédure de recouvrement);
- le type d'emprunteur (entreprises privées, souverains . . .);
- le type d'obligation;
- le secteur d'activité;
- le pays.

Le LGD est ainsi variable d'une contrepartie à une autre.

Pour le risque de crédit, les banques peuvent employer différents mécanismes d'évaluation :

- La méthode dite « standard » consiste à utiliser des systèmes de classe de risque fournis par des organismes externes (agences de classe de risque);
- Les méthodes plus sophistiquées (méthodes IRB) avec la méthode dite IRB-fondation et celle dite IRB-avancée impliquent des méthodologies internes et propres à l'établissement financier d'évaluation de cotes ou de notes, afin de peser le risque relatif du crédit.

Ainsi, en méthode standard, les PD et les LGD sont imposés par le régulateur, soit directement pour la LGD, soit en imposant un organisme de classe de risque (Cotation BDF, Standard & Poor's...)

En méthode IRB-fondation, la banque estime sa PD et le LGD reste imposé par le régulateur. En méthode IRB-avancée, la banque maîtrise toutes ses composantes.

Le choix de la méthode permet à une banque d'identifier ses risques propres en fonction de sa gestion. Une banque qui voudrait être au plus près de sa réalité tendra vers le choix d'une méthode avancée.

La détermination d'un LGD demande ainsi la gestion et l'historisation de plus de 150 données mensuelles sur un minimum de cinq ans sur chacun des crédits accordés.

Nous allons tout au long de notre travail nous intéresser aux estimations de la PD et du LGD par des méthodes variées.

Chapitre 2

La probabilité de défaut (PD)

	Page
2.1 Calibrage des probabilités de défaut long terme PD TTC	25
2.1.1 Méthode des cohortes	25
2.1.2 Méthode du générateur	26
2.1.3 Horizon temporel d'estimation	27
2.2 Modélisation de la probabilité de défaut PIT	27
2.2.1 Préliminaire - modèle de base	28
2.2.2 Adaptation du modèle	29
2.2.3 Modèle de Vasiček	29
2.2.4 Modèle avec copule	30
2.3 Modèle basé sur les copules archimédiennes	35

2.1 Calibrage des probabilités de défaut long terme PD TTC

La première étape dans la détermination des PD PIT est le calcul des probabilités de défaut TTC (i.e. à long terme). En effet, les premières sont simplement des déviations par rapport aux secondes, déviations liées à un facteur (l'état général de l'économie par exemple) associé à un modèle. En revanche, la détermination des PD TTC ne fait pas intervenir de modèle.

On suppose que l'on peut regrouper les contreparties en C classes homogènes, les contreparties d'une même classe i ayant la même probabilité TTC, notée P_c , de faire défaut :

$$P_c = P(\{\text{Une contrepartie de la classe } C \text{ fait défaut}\})$$

Dans ce chapitre différentes méthodes de calcul des probabilités de défaut TTC sont présentées puis appliquées à des données réelles.

2.1.1 Méthode des cohortes

Cette méthode fournit un estimateur en temps discret des PD TTC. En effet, elle fait l'hypothèse que les migrations qui se sont déjà produites d'une classe vers une autre par le passé vont se reproduire dans des proportions équivalentes.

Cette méthode consiste en l'estimation de probabilités empiriques de transition sur la base d'un historique de classe de risques sur une période suffisamment longue. Bien entendu, plus l'historique sera profond, plus l'estimation des transitions sera précise.

On se donne un horizon (par exemple 1 an si l'on veut des probabilités annuelles). Soit $n_i(t)$ le nombre de contreparties dans l'état i à la date t , $1 \leq i \leq K - 1$, l'état de départ ne pouvant pas être le défaut.

Soit $n_{i,j}(t)$ le nombre de contreparties qui migrent de i vers j à l'horizon considéré $1 \leq j \leq K$, les contreparties peuvent soit migrer vers une classe de risque saine soit faire défaut. L'estimateur de la probabilité de migration est :

$$P_{i,j}(t) = \frac{n_{i,j}(t)}{n_i(t)}$$

En particulier, l'estimateur de la probabilité de défaut à une date donnée est alors le ratio entre le nombre de défauts observés en fin de période divisé par le nombre de contreparties présentes en début de période :

$$P_i(t) = \frac{d_i(t)}{n_i(t)}$$

Une contrepartie peut cesser d'être observée avant la fin de la période. Cependant il est difficile d'avoir l'information relative à celle-ci. Nous ne considérons alors que les contreparties qui démarrent d'un état sain et qui migrent vers un état sain ou font défaut.

Une conséquence importante de cette méthode est qu'elle assigne une probabilité nulle si l'on n'observe aucune transition d'un état à un autre dans l'historique. Or, bien que très faibles, les probabilités de transition sont non nulles : il est toujours possible qu'une transition ait lieu.

Une telle estimation n'est cependant pas suffisante. En effet, il est toujours dangereux de considérer sans précaution que ce qui s'est déjà produit va se reproduire. Les probabilités de migrations

entre classe de risques financières varient en fonction des conditions économiques.

Les matrices de transition construites de cette manière ne prennent pas en compte les possibilités de variations en fonction des conditions économiques. L'une des faiblesses de ces matrices est donc leur rigidité et l'impossibilité de conditionner les probabilités de migration à des variables économiques.

2.1.2 Méthode du générateur

On se place maintenant en temps continu et on suppose un comportement markovien des migrations.

Soit P_t la matrice de transition d'une chaîne de Markov continue et homogène d'espace d'état $[1 \dots K]$. Le générateur, noté Λ , est une matrice de dimension $K \times K$ telle que :

$$P_t = \exp(\Lambda t), \quad \forall t \geq 0$$

Où Λt est la matrice Λ dont chaque élément est multiplié par t et la fonction exponentielle est l'exponentielle matricielle.

Le fait de supposer la chaîne de Markov homogène implique en particulier que la matrice Λ ne dépend pas du temps. Ainsi, pour obtenir un estimateur de la matrice de transition à un horizon T donné, il suffit d'obtenir un estimateur de la matrice Λ à cet horizon :

$$\hat{P}_T = \exp(\hat{\Lambda} T)$$

En particulier, l'estimateur de la matrice 1 an est :

$$\hat{P}_1 = \exp(\hat{\Lambda})$$

Les éléments $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq K-1; 1 \leq j \leq K}$ du générateur vérifient :

$$\lambda_{i,j} \geq 0, \quad \forall j \neq i$$

$$\lambda_{i,i} = - \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}$$

On peut interpréter les éléments du générateur comme suit : le temps passé dans l'état i suit une loi exponentielle de paramètre λ_i (avec $\lambda_i = -\lambda_{i,i}$) et la probabilité de migrer vers l'état j à partir de l'état i sachant qu'une migration a lieu est $\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_i}$.

Pour estimer les éléments du générateur sous l'hypothèse d'homogénéité temporelle, on utilise l'estimateur du maximum de vraisemblance (la démonstration est donnée en annexe C.1) :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{i,j} = \frac{N_{i,j}(T)}{\int_0^T Y_i(s) ds}, & \forall j \neq i \\ \hat{\lambda}_{i,i} = - \sum_{j \neq i} \hat{\lambda}_{i,j} \end{cases}$$

Où $N_{i,j}(T)$ compte le nombre de transition de i vers j entre 0 et T et $Y_i(s)$ est le nombre de contreparties de la classe de risque i à la date s . Ainsi, le dénominateur est le nombre total d'années (non forcément entier) que les contreparties de la base ont passées dans l'état i . Il capture toutes les

migrations vers l'état i , même lorsque la contrepartie reste dans cet état pour un temps très court. Cette méthode présente plusieurs avantages :

- Elle permet d'obtenir des probabilités non nulles pour toutes les classes de risque (à la différence de la méthode des cohortes) ;
- Une fois le générateur estimé, on obtient l'estimateur de la matrice de transition pour des horizons arbitraires ;
- Cette méthode utilise plus d'information que pour l'estimateur des cohortes : on tient compte des dates précises de changement de classe de risque (en pratique, le pas adopté par les agences internationales est le pas journalier). Par exemple, avec un pas annuel, pour une contrepartie qui n'est plus observée en milieu d'année, on utiliserait l'information de cette contrepartie jusqu'en milieu d'année alors que l'estimateur des cohortes ne tiendrait pas compte de cette contrepartie.

Le problème dual, estimer un générateur à partir d'une matrice de transition donnée, est plus compliqué (des conditions sur la matrice de transition sont nécessaires pour l'existence d'un générateur). Nous ne l'aborderons pas ici.

2.1.3 Horizon temporel d'estimation

Toutes les matrices de migration sont calculées pour des horizons fixes. Dans le cas continu (méthode du générateur), on peut calculer la matrice pour tous les horizons. Dans le cas discret, l'hypothèse de comportement Markovien permet, à partir de la matrice 1 an, de calculer les matrices pour d'autres horizons. Par exemple, si on veut une matrice de transition mensuelle, on peut la calculer ainsi :

$$P_{mensuelle} = P_{annuelle}^{1/12}$$

(Entendu au sens matriciel, $P_{mensuelle}$ est la solution de l'équation : $X^{12} = P_{annuelle}$).

Dans tous les cas il est important de s'assurer que l'horizon des matrices utilisées correspond à l'horizon du risque. Par exemple, pour un risque à 2 ans, il est cohérent d'utiliser une matrice à horizon 2 ans plutôt que des matrices 1 an.

2.2 Modélisation de la probabilité de défaut PIT

Les probabilités TTC sont un premier indicateur des probabilités de défaut. Mais cet indicateur est imparfait car nous remarquons qu'historiquement, la probabilité de défaut varie en fonction des conditions économiques : plus elles sont bonnes et plus la probabilité de défaut est faible.

Ainsi, nous allons plutôt calculer des probabilités de défaut Point-In-Time (PD PIT), probabilités conditionnelles à un facteur (qui représente l'état de l'économie monde à un instant donné). Cette analyse est détaillée dans la partie 3.2.

Dans cette partie, nous présentons dans un premier temps le modèle de la firme de Merton, qui nous servira de base théorique, puis après avoir détaillé le cadre de modélisation, nous allons étudier plusieurs modèles à facteurs.

2.2.1 Préliminaire - modèle de base

Le modèle de la firme de Merton (1974) [4] va nous servir de base théorique pour les modèles développés par la suite. Nous allons fonder nos raisonnements et les modèles constitués sur l'idée de Merton.

Ce modèle est construit à partir d'une représentation simplifiée du bilan d'une entreprise : le passif est composé d'une dette obligataire (un zéro-coupon d'échéance T et de nominal B) et de fonds propres. A la date t , les actifs (en valeur de marché) valent A_t et les fonds propres valent E_t .

Le modèle de Merton repose sur une hypothèse fondamentale à savoir : Les actifs de la firme suivent une diffusion de type Black & Scholes (mouvement brownien géométrique) :

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t, \quad A_0 > 0$$

Où

- μ est la moyenne du rendement des actifs.
- σ est la volatilité du rendement des actifs.
- W_t est un mouvement Brownien

Nous trouvons ainsi la valeur des actifs à chaque instant :

$$A_t = A_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

A la date T , si les actifs sont supérieurs au nominal de l'obligation, l'entreprise peut rembourser sa dette et les fonds propres sont égaux à la différence entre ces deux valeurs . En revanche, si les actifs sont inférieurs au nominal, l'entreprise est en défaut et les prêteurs reçoivent A_T .

Ainsi, les fonds propres valent :

$$E_t = \max(A_t - B, 0)$$

La valeur de la firme est donc un call sur les actifs, de strike B et de maturité T . En supposant le taux sans risque constant égal à r , Merton obtient la valeur des fonds propres à chaque date (formule de Black & Scholes) :

$$E_0 = A_0 \Phi(d_1) - B \exp(-rT) \Phi(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{B}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{B}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Le défaut a lieu lorsque la firme ne peut plus honorer son engagement à un certain horizon parce que la valeur de ses actifs est inférieur à cet engagement. Ainsi, la probabilité de défaut de la firme

s'écrit :

$$\begin{aligned} P(A_T < B) &= P\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t < \ln\left(\frac{B}{A_0}\right)\right) \\ &= P\left(N(0,1) < \frac{\ln\left(\frac{B}{A_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{B}{A_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Ce modèle permet de mettre en évidence la relation comptable qui existe entre la valeur des actifs et la valeur de la dette : si les actifs baissent ou la dette augmente, la probabilité de défaut augmente.

2.2.2 Adaptation du modèle

Dans la suite on considère n contreparties indexées par i appartenant à $[1 \dots n]$. Le défaut est modélisé à partir d'une variable indicatrice $Y_{i,t}$ qui prend la valeur 1 si la contrepartie i a fait défaut à la date t et 0 sinon (système à 2 états) :

$$Y_{i,t} = \begin{cases} 1 & \text{si en défaut à la date } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet événement, discret, est transformé en événement continu par l'introduction d'une variable latente. Cette variable, notée $X_{i,t}$, caractérise la santé de l'emprunteur. En se plaçant dans le cadre du modèle de la firme de Merton, le défaut correspond alors au fait pour cette variable de tomber sous un seuil fixé.

$$\{Y_{i,t} = 1\} \Leftrightarrow \{X_{i,t} \leq B_{i,t}\}$$

On suppose que le facteur qui différencie une contrepartie à une autre est sa classe de risque à un instant donné.

2.2.3 Modèle de Vasiček

C'est le modèle standard dans la réglementation Bâle II, il nous servira de référence pour la comparaison avec les autres modèles.

Dans le modèle de Vasiček [5], on suppose que chaque $X_{i,t}$ suit une loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire. On en déduit ainsi une expression du seuil en fonction de la probabilité de défaut empirique :

$$P_i = \mathbb{P}(X_{i,T} \leq b_{i,T}) \Rightarrow b_{i,T} = \Phi^{-1}(P_i)$$

Avec Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

La dynamique de X est décomposée en 2 termes : un facteur commun à toutes les contre-parties (facteur systémique) noté Z et un facteur spécifique (facteur idiosyncratique) noté ϵ . Ces facteurs sont reliés par une variable ρ :

$$X_{i,t} = \sqrt{\rho_{r(i),t}} Z_t + \sqrt{1 - \rho_{r(i),t}} \epsilon_{r(i),t}$$

Où Z et ϵ sont des variables aléatoires indépendantes et suivent des lois gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$, les ϵ_i

sont indépendants entre les contreparties et $r(i)$ est la classe de la contrepartie i .

Les variables $X_{i,t}(1 \leq i \leq n)$ sont ainsi corrélées à travers le paramètre ρ , compris entre 0 et 1, et on a :

$$\begin{aligned} \text{corr}(X_{i,t}, X_{j,t}) &= \mathbb{E}(X_{i,t}X_{j,t}) - E(X_{i,t})E(X_{j,t}) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sqrt{\rho_{r(i)}}Z_t + \sqrt{1 - \rho_{r(i)}}\epsilon_{i,t}\right)\left(\sqrt{\rho_{r(j)}}Z_t + \sqrt{1 - \rho_{r(j)}}\epsilon_{j,t}\right)\right) \\ &= \sqrt{\rho_{r(i)}\rho_{r(j)}} \end{aligned}$$

On parle de modèle à 1 facteur en référence au facteur systémique Z unique pour toutes les contreparties (et donc pour toutes les classes de risque) qui reflète l'état globale de l'économie.

La variable d'intérêt est la probabilité PIT, i.e. la probabilité de défaut conditionnellement au cycle économique :

$$\begin{aligned} p_{r(i)}(Z_t) &= P(X_{i,t} \leq B_{r(i),t} | Z_t) \\ &= P\left(\epsilon_{i,t} \leq \frac{B_{r(i),t} - \sqrt{\rho_{r(i)}}Z_t}{\sqrt{1 - \rho_{r(i)}}} | Z_t\right) \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit,

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P_{r(i)}) - \sqrt{\rho_{r(i)}}Z_t}{\sqrt{1 - \rho_{r(i)}}}\right)$$

Dans la suite, pour alléger les notations, on utilisera la notation $p_i(Z)$ plutôt que $p_{r(i)}(Z)$. Dans ce modèle, la corrélation entre le défaut des contreparties est non nulle et est influencée par ρ .

$$\begin{aligned} \text{corr}(Y_i, Y_j) &= \frac{\text{cov}(Y_i, Y_j)}{\sqrt{\text{var}(Y_i)\text{var}(Y_j)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X_i < B_{r(i)}}\mathbf{1}_{X_j < B_{r(j)}}\right) - \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X_i < B_{r(i)}}\right)\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X_j < B_{r(j)}}\right)}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}(p_i(Z)p_j(Z)) - P_iP_j}{\sqrt{P_i(1 - P_i)P_j(1 - P_j)}} \geq 0 \end{aligned}$$

2.2.4 Modèle avec copule

Le modèle de Vasiček repose sur une structure de corrélation linéaire. Un autre moyen de modéliser la dépendance est d'introduire le concept de copules. Nous nous sommes basés sur les travaux de Puzanova [9] dans le développement du modèle. L'introduction des copules présente 2 avantages principaux :

- Elles sont utiles pour construire des modèles multivariés dont la structure de dépendance est non Gaussienne
- La dépendance induite est plus générale que la corrélation linéaire. Après un rappel sur la théorie générale des copules, on introduira un modèle à facteur basé sur des copules archimédiennes.

Définition et propriétés générales des copules

Définition 1 Une copule C de dimension d est une fonction de $[0, 1]^d$ dans $[0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (u_1 \dots u_d) \in [0, 1]^d$, $C(u_1 \dots u_d)$ est croissante par rapport à chaque u_i

- $C(1, \dots, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \forall i \in [1, d]$ et $u_i \in [0, 1]$
- $\forall (a_1 \dots a_d), (b_1 \dots b_d) \in [0, 1]^d$, avec $\forall i, a_i \leq b_i$, on a :

$$\sum_{i_1=1}^{a_1} \dots \sum_{i_d=1}^{a_d} (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{i_1}, \dots, u_{i_d}) \geq 0$$

Une copule est une fonction de répartition sur $[0, 1]^d$ dont les marginales sont distribuées selon une loi uniforme. Ainsi, une copule C est une fonction qui, étant donné un vecteur de variables aléatoires (U_1, \dots, U_d) , à (u_1, \dots, u_d) associe la fonction de répartition $\mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$ où $\mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i \forall i$.

Théorème 1 (Sklar) Soit une fonction de répartition F dont les marginales sont notées F_1, \dots, F_d . Alors il existe une copule $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ telle que, $\forall x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$,

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (2.1)$$

Si F_1, \dots, F_d sont continues alors C est unique.

Réciproquement, si C est une copule et F_1, \dots, F_d des fonctions de répartitions, alors F définie par l'équation 2.2.4 est une fonction de répartition de lois marginales F_1, \dots, F_d .

En pratique, la loi jointe de pertes d'un portefeuille de crédit peut être difficile à évaluer.

En revanche, il est souvent plus simple de trouver les lois marginales. Le théorème de Sklar est alors très utile puisqu'il permet alors de relier les marginales à la loi jointe.

Si F_1, \dots, F_d sont continues, on a $F_i^{-1}(F_i(y)) = y$. En posant alors $y_i = F_i(y) \forall i \leq d$, nous obtenons l'expression suivante pour la copule C :

$$C(y_1, \dots, y_d) = F(F_1^{-1}(y_1), \dots, F_d^{-1}(y_d)) \quad (2.2)$$

Cette dernière équation permet de construire une copule à partir d'une distribution multivariée dont les marginales sont continues. Cela conduit à définir la copule associée à une fonction de répartition multivariée.

Définition 2 Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ de fonction de répartition F et de lois marginales F_1, \dots, F_d continues.

La copule de X (ou de F) est la loi de $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$

Propriété 1 (Invariance par transformation croissante). Soit (X_1, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires dont les distributions marginales sont continues et de loi la copule C . Soient G_1, \dots, G_d des fonctions strictement croissantes.

Alors le vecteur aléatoire $(G_1(X_1), \dots, G_d(X_d))$ est distribué selon la copule C .

Il est parfois utile d'appliquer une transformation à des données. Le résultat précédent indique que, tant que la transformation est strictement croissante, les nouvelles données ont la même distribution que les données de départ.

On définit ensuite les concepts de dépendance dans les queues de distribution.

Définition 3 (Queue de dépendance supérieure). Soit une copule $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Le coefficient de dépendance supérieure est défini par :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u) + 1 - 2u}{1 - u}$$

On dit qu'une copule admet une queue de dépendance supérieure si $\lambda_U > 0$.

Définition 4 (Queue de dépendance inférieure). Soit une copule $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Le coefficient de dépendance inférieure est défini par :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

On dit qu'une copule admet une queue de dépendance inférieure si $\lambda_L > 0$.

On définit ensuite une mesure de dépendance dans le cadre de copule.

Definition 5 (Taux de Kendall). Soient 2 variables aléatoires X et Y de copule $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Le coefficient de dépendance de Kendall est défini par :

$$\tau_K(X, Y) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Cette mesure de dépendance présente l'avantage d'être invariante par transformation croissante.

On peut distinguer 2 grandes classes de copules : les copules elliptiques et les copules archimédiennes. Les premières sont construites à partir du théorème de Sklar et de lois elliptiques, à la différence des secondes. Dans la suite on présente brièvement ces 2 types de copules.

Les copules elliptiques

La copule elliptique la plus classique est la copule gaussienne. C'est la copule d'une variable aléatoire distribuée selon une loi normale multivariée standard. En utilisant le théorème de Sklar et l'équation (2.2), on obtient la forme suivante pour la copule Gaussienne en dimension d , de matrice de corrélation notée R :

$$C_R(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

Dans le modèle de Vasiček, les variables X suivent une copule Gaussienne. En effet, le vecteur $(X_{1,t}, \dots, X_{d,t})$ suit une loi normale multivariée de matrice de corrélation :

$$\forall(i, j), R_{i,i} = 1, \quad R_{i,j} = \sqrt{\rho_i \rho_j}$$

Une autre copule elliptique classique est la copule de Student. C'est la copule d'une variable aléatoire distribuée selon une loi de Student multivariée standard. En utilisant le théorème de Sklar et l'équation (2.2), on obtient la forme suivante pour la copule de Student en dimension d , de matrice de corrélation notée R et de degrés de liberté ν :

$$C_{\nu,R}(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu,R}(t^{-1}(u_1), \dots, t^{-1}(u_d))$$

Les copules archimédienne

On définit d'abord les copules archimédiennes en dimension 2.

Propriété 2 Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ une fonction continue et strictement décroissante telle que $\phi(0) = \infty$ et $\phi(1) = 0$ et d'inverse ϕ^{-1} . Soit $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

Alors C est une copule si et seulement ϕ est convexe.

Définition 6 (Copule archimédienne). Une copule de la forme ci-dessus est appelée une copule archimédienne bivariable de générateur la fonction ϕ .

Exemple : la copule de Clayton en dimension 2.

Soit un générateur ϕ défini par $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$, avec $\theta > 0$. ce qui implique $\phi(t)^{-1} = (1 + t)^{-\frac{1}{\theta}}$. Ce générateur définit la copule de Clayton dont l'expression est donnée par :

$$C(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

On souhaite maintenant étendre les résultats en dimension d , avec $d \geq 3$, en particulier savoir sous quelles conditions

$$\phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)) \tag{2.3}$$

est une copule.

Pour que la fonction définie par l'équation soit une copule, il n'est pas suffisant que ϕ satisfasse les conditions d'un générateur énoncées dans la proposition (en dimension 2). Il faut également que l'inverse du générateur, ϕ^{-1} , soit complètement monotone.

Un candidat naturel pour ϕ est l'inverse de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive ou nulle.

Définition 7 (Transformée de Laplace). Soit X une variable aléatoire positive ou nulle de fonction de répartition F . La transformée de Laplace de X est :

$$L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \quad \forall s \geq 0$$

Si de plus X admet une densité notée f on a également :

$$L_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad \forall s \geq 0$$

La transformée de Laplace d'une variable X satisfait les conditions pour être un générateur d'une copule archimédienne.

En effet, c'est une fonction continue, strictement décroissante, complètement monotone et qui va de $[0, \infty]$ dans $[0, 1]$. De plus $L_X(0) = 1$ et $L_X(\infty) = 0$ (par convention). Ainsi, l'inverse de la transformée de Laplace satisfait bien les conditions pour être un générateur et en posant $\phi(t) = L_X^{-1}(t)$ on obtient une copule en dimension d de la forme 2.3.

Le théorème suivant, inspiré de l'approche de Marshall-Olkin, indique comment construire des variables aléatoires ayant comme distribution une copule archimédienne de générateur l'inverse d'une

transformée de Laplace. En particulier, il donne un moyen de simuler suivant une telle copule. Nous ferons le lien avec le risque de crédit à partir de ce théorème.

Théorème 2 Soit ψ une variable aléatoire positive ou nulle, de transformée de Laplace L_ψ . Soit $\phi(t) = L_\psi^{-1}(t)$ l'inverse de la transformée de Laplace.

Alors il existe des variables aléatoires V_1, \dots, V_d identiquement distribuées définies sur $[0, 1]$, indépendantes sachant ψ et dont la distribution conditionnelle est donnée par :

$$P(V_i \leq v_i | \psi) = \exp(-\psi \phi(v_i)) \quad \forall i \leq d$$

De plus, le vecteur (V_1, \dots, V_d) est distribué selon une copule archimédienne de générateur ϕ , i.e.

$$P(V_1 \leq v_1, \dots, V_d \leq v_d) = \phi^{-1}(\phi(v_1) + \dots + \phi(v_d))$$

Démonstration Soit $(U_i)_{i \leq d}$ un vecteur de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendantes de ψ . On pose $V_i := \phi^{-1}\left(-\frac{\log(U_i)}{\psi}\right) \forall i \leq d$.

Alors, les V_i sont définis sur $[0, 1]$ et identiquement distribués. De plus, sachant ψ , les V_i sont indépendants et de loi conditionnelle :

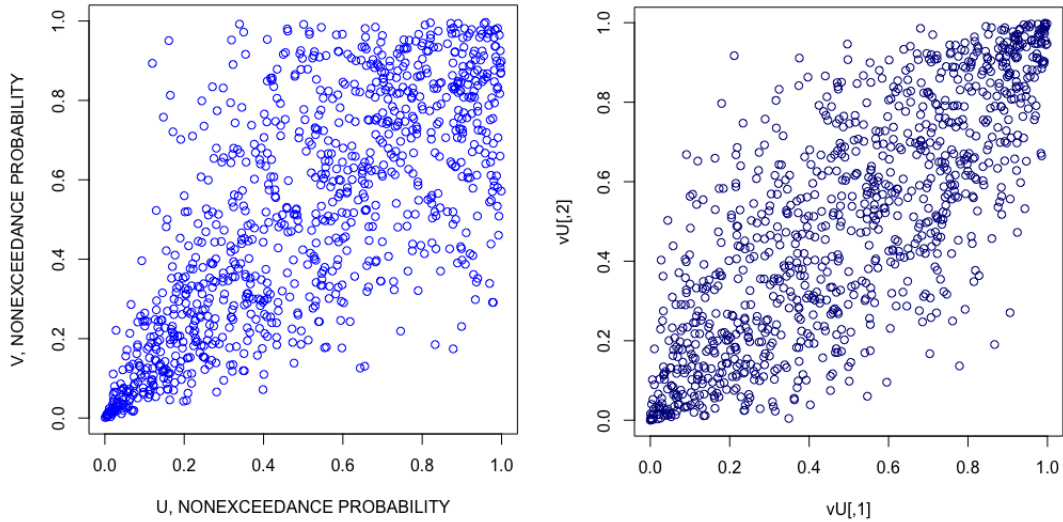
$$\begin{aligned} P(V_i \leq v_i | \psi) &= P\left(-\frac{\log(U_i)}{\psi} \geq \phi(v_i) | \psi\right) \\ &= P(U_i \leq \exp(-\psi \phi(v_i)) | \psi) \\ &= \exp(-\psi \phi(v_i)) \end{aligned}$$

La décroissance de ϕ est utilisée pour la première égalité et l'indépendance entre U_i et ψ pour la troisième égalité.

Calculons maintenant la loi du vecteur (V_1, \dots, V_d) :

$$\begin{aligned} P(V_1 \leq v_1, \dots, V_d \leq v_d) &= \mathbb{E}(P(V_1 \leq v_1, \dots, V_d \leq v_d | \psi)) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^d P(V_i \leq v_i | \psi)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^d \exp(-\psi \phi(v_i))\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(-\psi \sum_{i=1}^d \phi(v_i)\right)\right) = L_\psi\left(\sum_{i=1}^d \phi(v_i)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^d \phi(v_i)\right) \end{aligned}$$

A titre d'exemple, sont présentés en figure 4 les dépendogrammes pour une copule gaussienne et pour une copule de Clayton ayant le même taux de Kendall. Nous avons utilisé le package "**copBasic**" sur **R** pour faire ces simulations.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 4 – Simulation de 2000 observations pour 2 variables aléatoires de lois marginales normale standard et de copule de Clayton (à droite) et de copule gaussienne (à gauche). Les copules ont le même taux de Kendall égal à 0.8

2.3 Modèle basé sur les copules archimédiennes

On rappelle que la variable indicatrice de défaut Y est transformée en variable continue par l'introduction de la variable latente X .

Soit ψ une variable aléatoire non négative, de transformée de Laplace notée L_ψ . Soit $\phi(t) = L_\psi^{-1}(t)$ l'inverse de la transformée de Laplace (et donc $\phi^{-1}(t) = L_\psi(t)$).

Soient des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , indépendantes conditionnellement à ψ et de loi conditionnelle :

$$P(X_i \leq x_i | \psi) = \exp(-\psi \phi(x_i)) \quad \forall i \leq n$$

Alors, d'après le théorème 2, le vecteur (X_1, \dots, X_n) , suit une loi caractérisée par la copule archimédienne de générateur ϕ . Ce vecteur est le vecteur des actifs.

On peut calculer la probabilité PIT, conditionnellement à ψ :

$$p_i(\psi) = P(Y_{i,t} = 1 | \psi) = P(X_{i,t} \leq B_{r(i)} | \psi)$$

$B_{r(i)}$ se ré-exprime comme la probabilité de défaut TTC de la classe de risque i :

$$P(Y_i = 1) = \mathbb{E}_\psi(p_i(\psi)) = L_\psi\left(L_\psi^{-1}(B_{r(i)})\right) = B_{r(i)}$$

La PD PIT se récrit alors comme :

$$p_i(\psi) = \exp(-\psi \phi(P_i))$$

Ainsi le modèle à copules s'interprète comme un modèle à 1 facteur (la variable ψ influence toutes les contreparties), la différenciation selon la classe de risque intervenant au travers des probabilités de défaut. En cela ce modèle se rapproche du modèle de Vasiček.

La différence entre les 2 modèles réside dans la structure de dépendance des variables latentes et donc des variables de défaut.

La faiblesse de ce modèle à copules est de n'avoir qu'un seul paramètre pour décrire les différentes classes de risque. Néanmoins, pour construire les variables suivant la loi caractérisée par une copule, on impose entièrement la fonctionnelle pour la variable d'intérêt $p_i(\psi)$. Par ailleurs, considérer une variable ψ par classe permet de disposer de $K-1$ paramètres (un θ pour chaque classe) mais nécessite de spécifier une structure de dépendance entre les ψ_i , ce qui complique énormément le modèle (sauf dans le cas de ψ_i indépendants entre les classes, ce qui est peu réaliste car ça veut dire qu'aucun facteur n'influence simultanément toutes les classes de risque).

Chapitre 3

Le taux de perte en cas de défaut (LGD)

	Page
3.1 Modélisation de la récupération par des méthodes déterministes	38
3.1.1 Méthode ChainLadder	38
3.1.2 Méthode factorielle des moindres carrés de De Vylder	39
3.2 Modélisation de la récupération par des méthodes stochastiques	41
3.2.1 Modèle de Mack (1993)	41
3.2.2 Modélisation GLM	42

Le LGD ou Loss Given Default est un des trois paramètres qui permettent le calcul de la provision pour le risque de crédit introduite par la réglementation Bâle II. Il correspond à l'évaluation du taux de perte encourue en cas de défaut de la part d'une contrepartie.

Exemple : $LGD = 100\%$: perte du total du montant donné comme crédit en cas de défaut d'une contrepartie.

3.1 Modélisation de la récupération par des méthodes déterministes

La récupération représente la part du crédit qui est récupérée après un défaut éventuel d'une contrepartie. Le lien entre la récupération et le LGD c'est le fait que ce dernier représente le complémentaire du taux de récupération. En effet, nous avons

$$LGD = 1 - \text{Taux de Récupération}$$

Nous allons modéliser la récupération par des méthodes célèbres en actuariat dont certaines déterministes et d'autres stochastiques.

La principale différence entre les méthodes stochastiques et celles déterministes est l'existence de l'erreur et la possibilité de donner des intervalles de confiance pour nos estimations.

3.1.1 Méthode ChainLadder

La méthode Chain Ladder est une méthode déterministe fréquemment utilisée car facile à mettre en œuvre. Elle s'applique à des triangles de paiements cumulés ou des triangles de charges.

L'idée de cette méthode est que l'évolution des montants cumulés est gouvernée par des facteurs de développement (link ratios notés λ_j) qui ne dépendent pas de l'année de survenance.

$$C_{i,j+1} = \lambda_j \cdot C_{i,j}$$

où $C_{i,j}$ désigne dans notre cas le montant cumulé des récupérations de l'année i pour j années de développement.

Disposant d'un triangle de n années (c'est à dire que l'on a $\frac{n(n+1)}{2}$ observations), l'estimateur du facteur de déroulement λ_k est donné par :

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1$$

L'estimation des montants cumulés futurs (la partie non observable dans le triangle) s'obtient alors par

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n+1-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1}) \times C_{i,n+1-i}$$

pour $i = 2, \dots, n$ et $j = n+2-i, \dots, n$

A partir des charges ultimes estimées $\hat{C}_{i,n}$, il est alors possible d'estimer les montants de provisions par année de survenance :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

et la provision globale

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i$$

Pour les récupérations à long terme (celles pouvant aller à plusieurs dizaines d'années), le triangle n'est pas parfois complet faute d'indisponibilité de la donnée sur la récupération. Cela conduit à une sous estimation des montants susceptibles d'être récupérés à l'ultime. Il est donc nécessaire d'estimer une queue de développement du triangle. Nous présentons plus tard une méthode d'estimation de cette queue de développement.

Critiques de la méthode Chain-Ladder

Nous avons vu que cette méthode a l'avantage d'être aisée à appliquer. Cependant, elle repose sur des hypothèses qui peuvent ne pas s'avérer réalistes dans la pratique.

En effet, le schéma de développement, selon lequel le cumul d'une année de développement est proportionnel à celui de l'année précédente, doit être similaire pour toutes les années d'origine.

Ainsi, ce schéma ne tient pas compte d'une évolution probable dans le déroulement des récupérations des montants au cours du temps. Par exemple, en cas de changement de jurisprudence, il peut y avoir une variation notable au niveau des montants récupérés. Ou encore en cas de changement de management au niveau de la gestion des risques visant à accélérer ou ralentir les rythmes de récupération. Pour résumer, cette méthode repose sur l'hypothèse d'une très grande stabilité au niveau des facteurs de développement de la récupération.

D'autre part, l'instabilité de la prévision des récupérations finales pour les années récentes est très importante. De fait, la récupération finale correspondant à la dernière année de survenance du triangle est le résultat du produit de J estimations de facteurs de développement F^k , $k \in 0, \dots, J$. Ce qui induit une forte sensibilité à la première valeur.

3.1.2 Méthode factorielle des moindres carrés de De Vylder

Cette méthode a été introduite par De Vylder [1978].

Hypothèses du modèle

Ce modèle se base sur les incréments $(Z_{i,k})_{i,k}$, et tient sur la relation suivante :
 $\forall i \in 0, \dots, I, k \in 0, \dots, J, Z_{i,k} = z_i y_k \lambda_{i+k}$, c'est-à-dire que l'incrément s'exprime comme le produit des paramètres z_i (traduisant l'effet de l'année d'origine i), y_k (pour l'effet de l'année de développement k), et λ_{i+k} (qui correspond à l'impact de l'année calendaire, soit $i+k$; ce facteur représente l'inflation annuelle).

Notons que sans contrainte supplémentaire, le modèle n'est pas identifiable : les triplés $(az_i, \frac{y_k \cdot a}{z_i}, \lambda_{i+k})$ fournissent les mêmes résultats pour tout a non nul.

Par ailleurs, dans le cadre d'une inflation constante dans le triangle ($\lambda = cte$), nous pouvons envisager l'hypothèse supplémentaire : $\sum_{k=0}^J y_k = 1$, et l'on interprète alors facilement les deux

autres paramètres. De fait,

$$\sum_{k=0}^J Z_{i,k} = z_i \sum_{k=0}^J y_k = z_i$$

Autrement dit z_i représente la charge de sinistre ultime de l'année i , et $y_k = \frac{Z_{i,k}}{z_i}$ la part de cette charge totale qui a été payée lors de l'année de développement k . Cette contrainte d'inflation constante sera conservée pour la suite.

Estimateurs du modèle

Les estimateurs s'obtiennent par minimisation des moindres carrés pondérés :

$$\Delta = \sum_{i=0}^I \sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} (Z_{i,k} - z_i y_k)^2$$

On aboutit donc au système :

$$\forall 0 \leq i \leq I, 0 \leq k \leq J \begin{cases} z_i = \frac{\sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} Z_{i,k} y_k}{\sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} y_k^2} \\ y_k = \frac{\sum_{i=0}^{I-k} w_{i,k} Z_{i,k} z_i}{\sum_{i=0}^{I-k} w_{i,k} z_i^2} \end{cases}$$

On peut voir que la solution du système d'équation n'est pas explicite. En revanche, il peut se résoudre de manière récursive. Pour cela, on réécrit le système précédent comme suit :

$$\begin{cases} z_i = f_i(y_0, \dots, y_J) \\ y_k = g_k(z_0, \dots, z_I) \end{cases}$$

On raisonne alors par suites de solutions, en choisissant arbitrairement la solution initiale $(y_k^{(0)})_{k=0, \dots, J}$ tout en sachant que du choix de la solution initiale va dépendre la vitesse de convergence, puis en itérant de la manière suivante :

$$\forall m \geq 1 \begin{cases} z_i^{(m)} = f_i(y_0^{(m-1)}, \dots, y_J^{(m-1)}) \\ y_k^{(m)} = g_k(z_0^{(m-1)}, \dots, z_I^{(m-1)}) \end{cases}$$

Finalement, les termes des deux suites $(z_0^{(m)}, \dots, z_I^{(m)})_{m \leq 1}$ et $(y_0^{(m)}, \dots, y_I^{(m)})_{m \leq 1}$ convergent vers les solutions $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_I)$ et $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_J)$.

Limites de cette méthode

Nous avons $(2I + J + 1)$ paramètres à estimer, ce qui peut nous conduire, sans contrainte préalable sur le modèle, à une surparamétrisation ; le modèle ne sera pas identifiable.

D'un point de vue de la qualité de l'estimation, les performances sur l'ensemble d'apprentissage (i.e. les données ayant servi à la construction du modèle) seront meilleures que dans le cas de Chain-Ladder par exemple. En revanche, elles seront probablement plus mauvaises pour les nouvelles données (en termes de prédiction) du fait de la trop forte variance des estimateurs locaux.

3.2 Modélisation de la récupération par des méthodes stochastiques

L'idée dans cette partie est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, notamment par la construction d'intervalles de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant des provisions. Pour cela, les méthodes stochastiques sont adaptées, puisqu'elles considèrent les réserves sous un angle probabiliste en considérant leur distribution.

Introduisons la notion d'information disponible par les données observées avant l'année de développement $I - i$, pour l'année de survenance i :

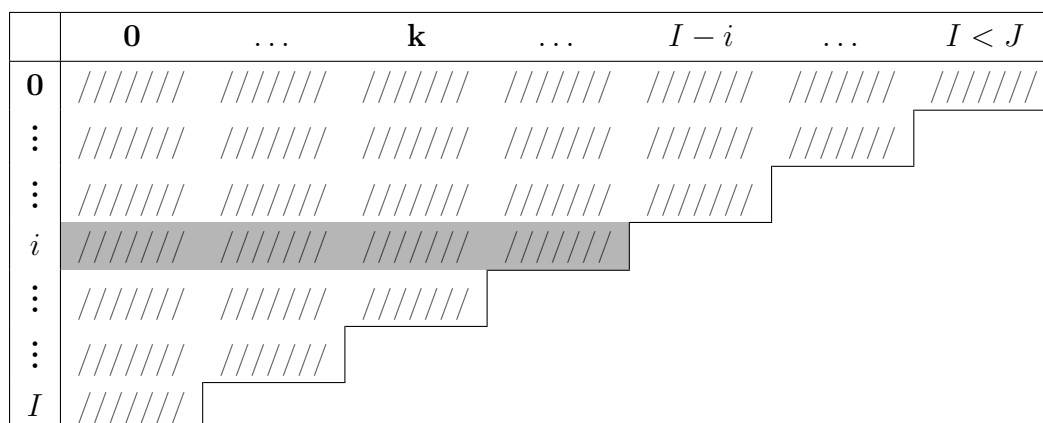
$$F_{i,I-i} := \{C_{i,k}, k = 0, \dots, I - i\}$$

Posons également l'ensemble d'information suivant :

$$B_k = \{C_{i,k} | j \leq k, i + j \leq I\}$$

qui correspond à l'information disponible à la date actuelle et qui concerne une année de développement antérieure à k .

À titre d'illustration, la figure ci-après schématise bien les deux ensembles :



Source: Auteurs.

TABLE 1 – Représentation graphique des deux ensembles d'information : B_k (hachuré), $F_{i,I-i}$ (grisé)

3.2.1 Modèle de Mack (1993)

Hypothèses du modèle

Le modèle proposé par Mack [1993] est un modèle non paramétrique, conditionnel à la réalisation du triangle, et qui permet d'estimer les erreurs commises lors du calcul des réserves. Il s'agit en fait d'un modèle stochastique pour la méthode de Chain-Ladder. Les hypothèses sous-jacentes à ce modèle sont les suivantes :

(H1) Les récupérations cumulées $C_{i,k}$ sont indépendantes par année d'accident i.e $\forall i, j \{C_{i,1}, \dots, C_{i,J}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,J}\}$ sont indépendants.

(H2) Il existe des paramètres $f_1, \dots, f_J > 1$ et $\sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2 > 0$ tels que :
 $\forall i \in \{0, \dots, I\}, k \in \{0, \dots, J\}$

$$\mathbb{E}(C_{i,k+1} | \mathcal{F}_{i,k}) = C_{i,k} f_k$$

$$\text{Var}(C_{i,k+1} | \mathcal{F}_{i,k}) = C_{i,k} \sigma_k^2$$

Précisons que l'hypothèse (H1) n'est plus vérifiée dès lors qu'intervient un changement de mode de gestion, ou dans les taux d'inflation de la branche considérée. Des mises en *as if* permettent cependant de limiter ce point. Sous ces deux hypothèses, Mack [1993] a montré que ce modèle stochastique permet d'obtenir exactement les mêmes montants de provision que la méthode standard de ChainLadder, qui est la référence en matière de provisionnement.

On introduit les termes $\gamma_0, \dots, \gamma_J$ qui vérifient : $\forall k \in \{1, \dots, J-1\}$

$$\begin{cases} \gamma_k = \frac{\gamma_{k+1}}{f_{k+1}} \\ \gamma_J = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\forall i \in \{0, \dots, I\}$ et $k \in \{0, \dots, J\}$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k}}{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{i,k-1}\right) = \frac{C_{i,k-1}}{\gamma_{k-1}}$$

Estimateurs du modèle

On remarque d'après la formule précédente que la famille $(\frac{C_{i,k}}{\gamma_k})_{k=1, \dots, J}$ forme une F-martingale. Nous pouvons donc en déduire l'expression suivante :

$$\mathbb{E}(C_{i,k} | \mathcal{F}_{i,I-i}) = C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^k f_l \quad (3.1)$$

Propriétés

1. Les estimateurs \hat{F}_k sont non biaisés : $\mathbb{E}[\hat{F}_k] = f_k$
2. Les estimateurs \hat{F}_k sont non corrélés : $\mathbb{E}[\hat{F}_0 \dots \hat{F}_k] = \mathbb{E}[\hat{F}_0] \dots \mathbb{E}[\hat{F}_k]$
3. L'estimateur $\hat{C}_{i,I}^M$, est non biaisé pour $\mathbb{E}[C_{i,I} | \mathcal{B}_I]$: $\mathbb{E}[\hat{C}_{i,I}^M] = \mathbb{E}[\hat{C}_{i,I} | \mathcal{B}_I]$

3.2.2 Modélisation GLM

Les modèles GLM ont été introduits par J. Nelder et R. Wedderburn en 1972. Il s'agit en fait d'extensions du modèle linéaire Normal. Ils ont commencé à être utilisés pour la détermination stochastique des provisions pour sinistres à partir des années 1990. Ces modèles sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien. Dans notre travail nous allons utiliser ce modèle pour les récupérations.

— La composante aléatoire

On cherche à expliquer les variables aléatoires réelles $(Z_{i,k})_{i \in \{0, \dots, I\}, k \in \{0, \dots, J\}}$ indépendantes et dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe donc dans le cadre suivant :

(H1) Les récupérations annuelles non cumulées $Z_{i,k}$ sont indépendantes.

(H2) Les récupérations annuelles non cumulées $Z_{i,k}$ appartiennent à la famille exponentielle, de densité :

$$f(\mathbf{z}_{i,k} \mid \boldsymbol{\theta}_{i,k}, \phi) = \exp \left(\frac{\mathbf{z}_{i,k} \boldsymbol{\theta}_{i,k} - b(\boldsymbol{\theta}_{i,k})}{\frac{\phi}{w_{i,k}}} + c(z_{i,k}; \phi) \right).$$

Où $\boldsymbol{\theta}_{i,k}$ est un paramètre réel, appelé paramètre naturel,

ϕ est un paramètre de dispersion strictement positif,

$w_{i,k}$ est une pondération (=1 par la suite),

b et c sont des fonctions spécifiques de la distribution,

b étant deux fois dérivable à valeurs dans \mathbb{R} et c à valeurs dans \mathbb{R}^{\neq} .

Family	$a(\phi)$	$b(\theta)$	$c(y, \phi)$
Gaussian	ϕ	$\theta^2/2$	$-\frac{1}{2} \left[y^2/\phi + \log_e(2\pi\phi) \right]$
Binomial	$1/n$	$\log_e(1+e^\theta)$	$\log_e\binom{n}{ny}$
Poisson	1	e^θ	$-\log_e y!$
Gamma	ϕ	$-\log_e(-\theta)$	$\phi^{-2} \log_e(y/\phi) - \log_e y - \log_e \Gamma(\phi^{-1})$
Inverse-Gaussian	ϕ	$-\sqrt{-2\theta}$	$-\frac{1}{2} \left[\log_e(\pi\phi y^3) + 1/(\phi y) \right]$

NOTE: In this table, n is the number of binomial observations, and $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function.

Source: Medium Corp

FIGURE 5 – Exemples des fonctions de la famille exponentielle

On peut alors montrer que :

$$\begin{cases} \mu_{i,k} = [Z_{i,k}] = b'(\theta_{i,k}), \text{ si } b' \text{ est inversible} \\ \text{Var}[Z_{i,k}] = b''[b'^{-1}(\mu_{i,k})]\phi = V(\mu_{i,k})\phi \end{cases}$$

La fonction $V(\cdot) = b''[b'^{-1}(\cdot)]$ est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans la modélisation GLM.

— **La composante systématique :**

Soit M la matrice de régression et ξ le vecteur des paramètres. La composante systématique est notée η et est définie par $\eta = M\xi$. Dans le cas du provisionnement à deux variables exogènes qualitatives par exemple, la composante systématique s'écrit :

$$\eta_{i,k} = \mu + \alpha_i + \beta_k, 0 \leq i \leq I, 0 \leq k \leq J$$

avec, pour raison d'identifiabilité du modèle, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

— **La fonction lien :**

C'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Il s'agit d'une fonction réelle g , strictement monotone et dérivable telle que :

$$\eta_{i,k} = g(\mu_{i,k}) \text{ ou } \mu_{i,k} = g^{-1}(\eta_{i,k})$$

Common distributions with typical uses and canonical link functions

Distribution	Support of distribution	Typical uses	Link name	Link function, $\mathbf{X}\beta = g(\mu)$	Mean function
Normal	real: $(-\infty, +\infty)$	Linear-response data	Identity	$\mathbf{X}\beta = \mu$	$\mu = \mathbf{X}\beta$
Exponential	real: $(0, +\infty)$	Exponential-response data, scale parameters	Negative inverse	$\mathbf{X}\beta = -\mu^{-1}$	$\mu = -(\mathbf{X}\beta)^{-1}$
Gamma					
Inverse Gaussian	real: $(0, +\infty)$		Inverse squared	$\mathbf{X}\beta = \mu^{-2}$	$\mu = (\mathbf{X}\beta)^{-1/2}$
Poisson	integer: $0, 1, 2, \dots$	count of occurrences in fixed amount of time/space	Log	$\mathbf{X}\beta = \ln(\mu)$	$\mu = \exp(\mathbf{X}\beta)$
Bernoulli	integer: $\{0, 1\}$	outcome of single yes/no occurrence	Logit	$\mathbf{X}\beta = \ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$	$\mu = \frac{\exp(\mathbf{X}\beta)}{1 + \exp(\mathbf{X}\beta)} = \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{X}\beta)}$
Binomial	integer: $0, 1, \dots, N$	count of # of "yes" occurrences out of N yes/no occurrences			
Categorical	integer: $[0, K]$	outcome of single K -way occurrence			
	K -vector of integer: $[0, 1]$, where exactly one element in the vector has the value 1				
Multinomial	K -vector of integer: $[0, N]$	count of occurrences of different types ($1 \dots K$) out of N total K -way occurrences			

Source: Wikipedia

FIGURE 6 – Exemples de fonctions de lien et leur utilisation

Pour terminer cette section de présentation des différentes méthodes de provisionnement, voici un tableau récapitulatif des avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

Méthode	Avantages	Inconvénients
ChainLadder	<ul style="list-style-type: none"> • Application simple • Méthode de référence 	<ul style="list-style-type: none"> • Moins de précision • Sensibilités fortes des estimations des provisions
De Vylder	<ul style="list-style-type: none"> • Prise en compte des effets calendaires 	<ul style="list-style-type: none"> • Estimation des paramètres très lourde
Mack	<ul style="list-style-type: none"> • Mêmes résultats que Chain-Ladder • Mesures de l'aléa associé • Modèle utilisé pour le calcul de l'incertitude à 1 an 	<ul style="list-style-type: none"> • Hypothèses fortes • Sensibilités fortes des estimations des provisions
GLM	<ul style="list-style-type: none"> • Choix de la distribution des incréments • Hypothèses paramétriques • Mesures de l'aléa associé • Utilisé lors des procédures bootstrap 	<ul style="list-style-type: none"> • Estimation des paramètres lourde • Sensibilités fortes des estimations des provisions

Source: Auteurs.

TABLE 2 – Tableau récapitulatif des différentes méthodes énumérées dans ce chapitre

Troisième partie

Application et résultats

Il vaut mieux avoir à peu près raison que complètement tort.
(John Maynard Keynes)

Chapitre 1

Présentation des données

	Page
1.1 Données sur la Probabilité de Défaut	49
1.1.1 Description des classes de risque	49
1.1.2 Quelques statistiques	49
1.1.3 Mouvement de la population	50
1.2 Données sur le taux de perte en cas de défaut (LGD)	51

Dans ce chapitre, nous présentons le portefeuille sur lequel nous avons appliqué les méthodologies décrites ci-dessus.

Il s'agit de plusieurs bases de données que nous allons présenter en deux sections principales à savoir :

1. Bases destinées à modéliser la probabilité de défaut.
2. Bases destinées à modéliser le taux de perte en cas de défaut.

1.1 Données sur la Probabilité de Défaut

Nous disposons de 37 bases de données internes mensuelles, allant de Décembre 2014 à Décembre 2017, contenant chacune uniquement l'identifiant et la classe de risque attribuée au client.

Pour répondre aux contraintes de modélisation, nous avons fait plusieurs jointures sur SAS avec la commande **merge**, nous permettant de constituer une seule base données comprenant l'identifiant de chaque client et sa classe de risque pour chaque mois.

Dans cette base de données, chaque ligne correspond à un client distinct, soit un total de 25 612 contreparties.

1.1.1 Description des classes de risque

L'organisme regroupe les contreparties selon des classes i telles que $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

La classe du client reflète le risque de défaut de la contrepartie. Cette classe de risque est fondée principalement sur l'appréciation de l'employeur du particulier et sur le patrimoine financier connu du client ainsi que sur l'historique de fonctionnement du compte (incident de paiement). Ainsi, la politique de gestion de risque du client fixe le cadre permettant de mesurer, hiérarchiser et de suivre l'évolution de ses risques de crédit.

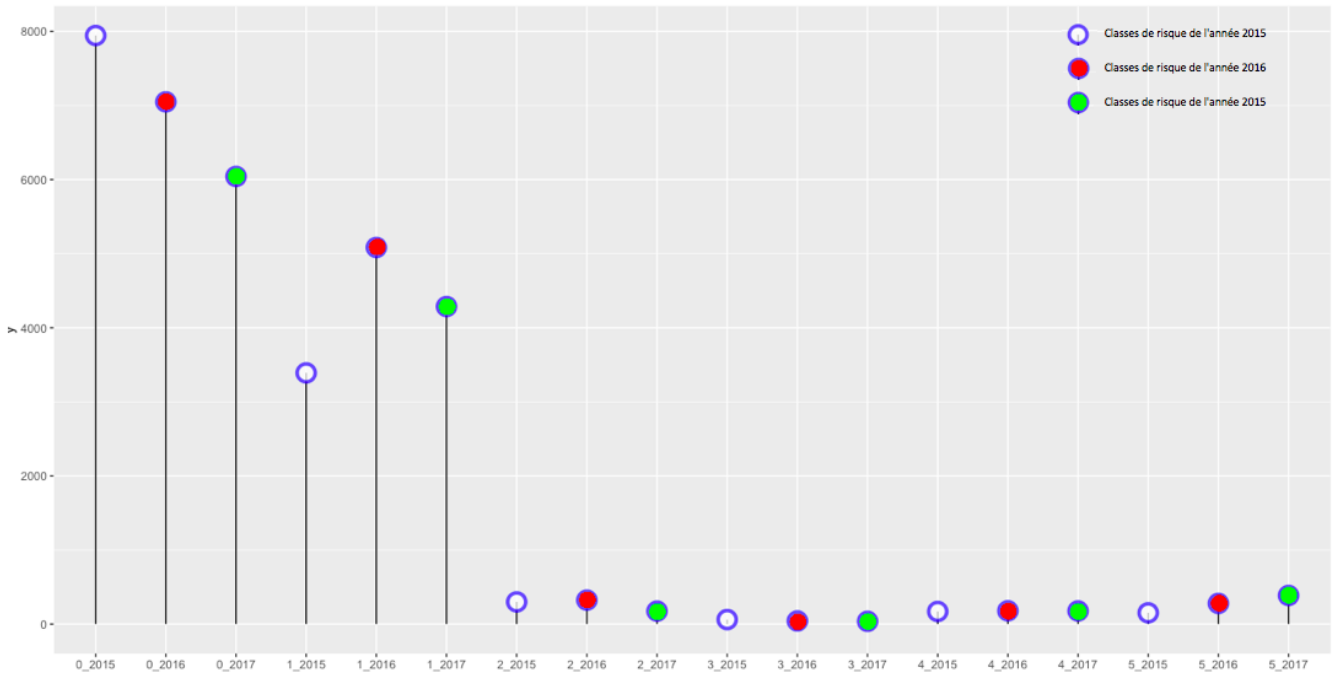
Classification	classe de risque	Appréciation du risque
Sain	0	Risque très faible
A surveiller	1	Préoccupant
Pré-douteux	2	Très préoccupant
Douteux	3	Extrêmement préoccupant
Contentieux	4	Recouvrement amiable
Compromis	5	Recouvrement judiciaire

TABLE 3 – Classes de risque

Dans notre cas, les classes 4 et 5 représentent le défaut. En particulier, la classe 5 est dite absorbante. Cela veut dire que si un client appartient à cette dernière, il y restera jusqu'à échéance.

1.1.2 Quelques statistiques

Pour comprendre la structure de risque de notre portefeuille ainsi que le comportement des contreparties, nous allons présenter quelques statistiques annuelles.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 7 – Proportion des classes de risques à la fin de chaque année (2015,2016 et 2017)

La proportion des contreparties qualifiées de *saines* est passée de 61.53% en 2015 à 54.84% en 2016 et à 54.41% en fin 2017. Nous pouvons donc dire que nous disposons à priori d'un portefeuille relativement sain et nous nous attendons ainsi à des taux de défaut modérés. Nous avons cependant une chute de la proportion de la population saine du portefeuille. Ceci est dû non seulement aux sorties remarquées (par échéance du crédit) mais aussi aux migrations des clients de la classe 0 vers des classes plus risquées. Ces transitions vont être détaillées dans la 2.1.

Le tableau 4 ci-dessous montre que le taux de défaut a significativement augmenté durant ces trois années. Ces évolutions seront analysées davantage dans les parties qui suivent.

Date	Taux de défaut
Décembre 2015	01,719%
Décembre 2016	02,680%
Décembre 2017	05,071%

Source: Auteurs.

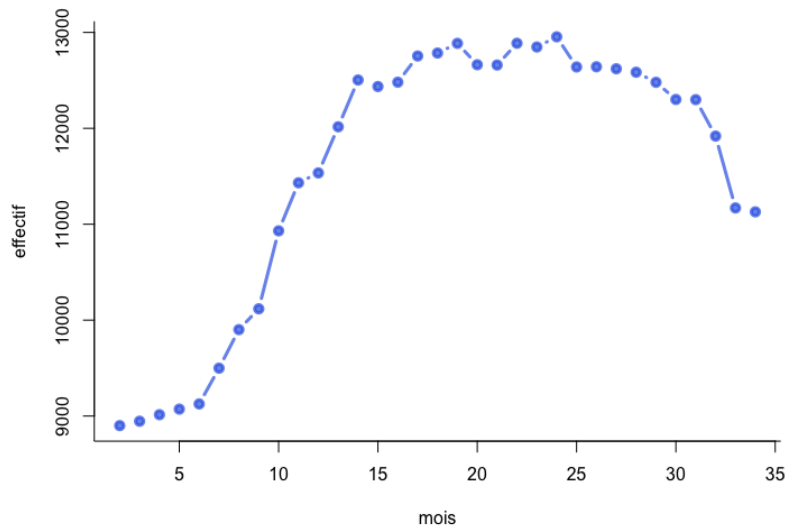
TABLE 4 – Taux de défaut observé à la fin de chaque année (2015,2016 et 2017)

1.1.3 Mouvement de la population

Compte tenu des résultats de la partie précédente, il semble nécessaire d'effectuer une analyse mensuellement du mouvement de la population au cours de ces trois années. Cette étude s'avère primordiale pour le choix du pas de la modélisation. Les évènements principaux considérés sont les entrées (nouveaux clients) et les sorties (échéance du contrat).

Dans cette étude descriptive, nous rappelons que le défaut ne compte pas comme une sortie. La seule raison de la sortie est l'échéance du contrat.

Le tableau 18 dans l'annexe présente les sorties et les entrées mensuelles ainsi que les effectifs au début et à la fin de chaque mois.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 8 – Mouvement mensuel de la population

La figure 8 ci-dessus représente les effectifs mensuels observés. Nous remarquons l'existence d'un mouvement important dans la population cible. Cette remarque va nous servir dans les parties qui suivent.

1.2 Données sur le taux de perte en cas de défaut (LGD)

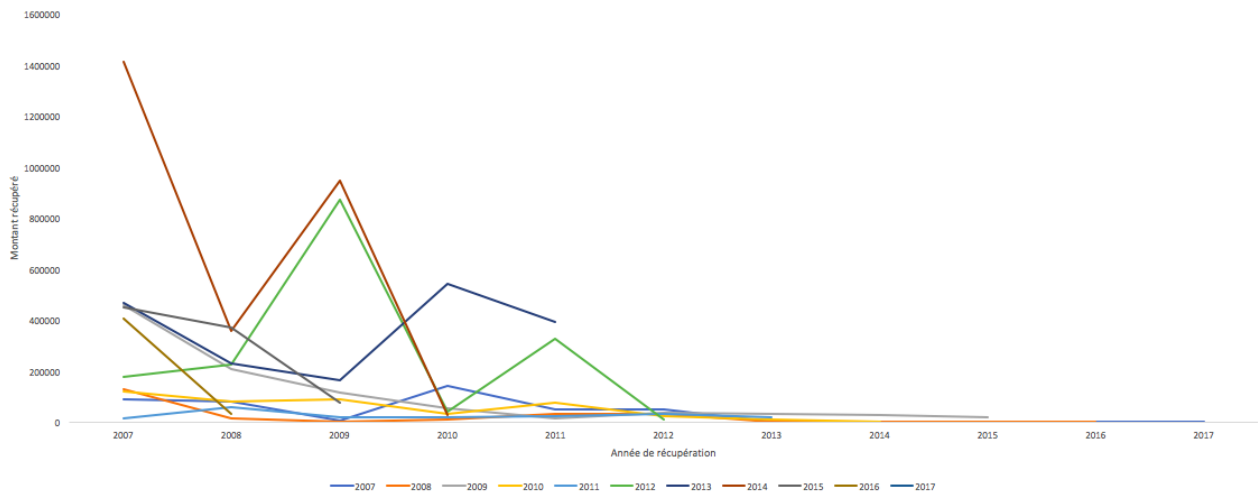
La base de données, dont nous disposons, est constituée de dossiers des clients passés en défaut depuis 2007.

La base contient plus de 250 000 observations correspondantes chacune à une récupération. Nos variables d'intérêt sont la date de déclassement (passage en défaut), l'exposition à la date de défaut (montant restant dû), le montant récupéré et la date de l'opération (date de récupération).

Nous y trouvons aussi quelques informations sur l'identité du client ainsi que son type de crédit, le montant initial de son prêt et son amortissement.

Afin de constituer les triangles de récupération, nous avons effectué un suivi des montants récupérés par cohortes annuelles d'entrée en défaut et par année de récupération.

La figure 9 ci-dessous montre l'allure du triangle des montants récupérés.

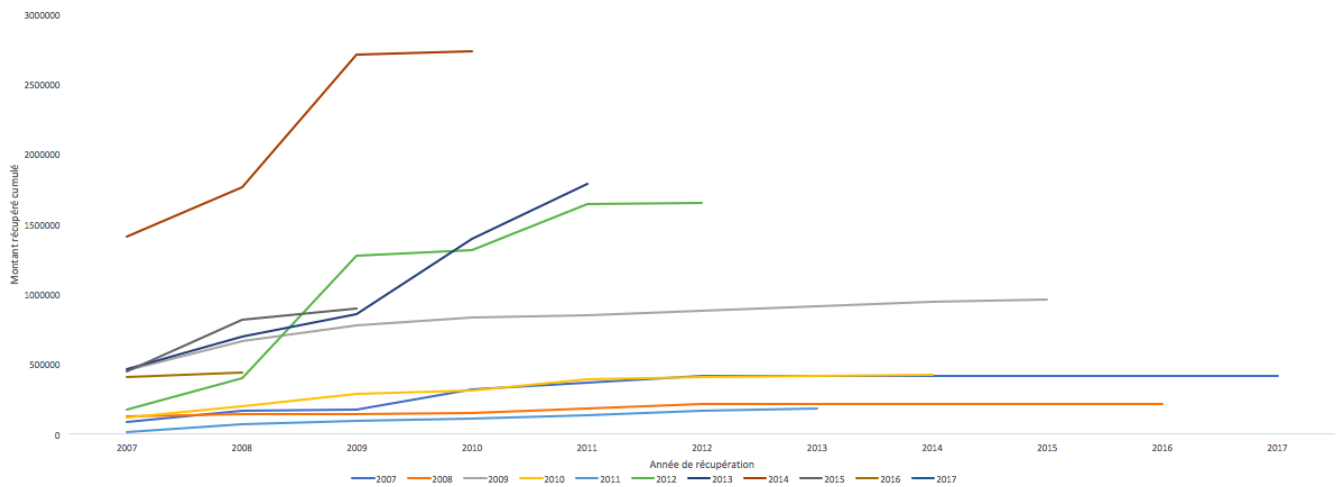


Source: Auteurs

FIGURE 9 – Montants récupérés simples

Nous remarquons que nous ne disposons plus d'informations sur les montants récupérés à partir de 2017. Ainsi les courbes de récupération s'arrêtent-elles en vision historique à 10 années pour la cohorte la plus ancienne (2007 dans notre cas).

Pour inclure l'information future, les récupérations doivent être prolongées jusqu'à stabilisation de leur montant cumulé. La figure ?? des montants récupérés cumulés.



Source: Auteurs

FIGURE 10 – Montants récupérés cumulés

Chapitre 2

Probabilités Through The Cycle (TTC)

	Page
2.1 Conception des matrices par la méthode des cohortes	54
2.1.1 Méthodologie	54
2.1.2 Critères de validité	54
2.1.3 Résultats	54
2.2 Conception des matrices par la méthode de générateurs	58
2.2.1 Méthodologie	58
2.2.2 Hypothèse principale	59
2.2.3 Résultats	59
2.3 Importance d'une approche Point In Time	60

2.1 Conception des matrices par la méthode des cohortes

L'objectif principal de ce chapitre est le calcul des probabilités de défaut Through The Cycle (PD TTC). Nous avons fait cela en construisant les matrices de transitions annuelles et en extrayant les probabilités de défaut de chaque classes à partir de ces matrices.

Pour assurer plus de précision dans nos calculs, nous avons appliqué chaque méthode de la partie 2.1 dans la page 25 pour des pas différents : mensuel, trimestriel, semestriel et annuel.

2.1.1 Méthodologie

Les résultats se présentent sous forme de matrices donnant les fréquences de transition entre deux classe de risques. Pour extraire les probabilités de défaut de chaque classe, il suffit de faire la somme des deux dernières cellules de chaque ligne. Pour des raisons de confidentialité, nous n'allons expliciter que quelques matrices pour justifier notre choix du pas temporel.

Si nous prenons deux matrices successives en terme de périodes, nous trouvons que le produit matricielle donne toutes les possibilités de transition d'un état de nature à un autre.

Prenons, à titre d'exemple, deux matrices de transitions A et B. Le produit de $A=(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 6}$ par $B=(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 6}$ nous donne une matrice $C=(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 6}$ dont le premier élément se décrit comme suit :

$$c_{1,1} = a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1} + a_{1,3} * b_{3,1} + a_{1,4} * b_{4,1} + a_{1,5} * b_{5,1} + a_{1,6} * b_{6,1}$$

Nous rappelons que $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état i vers l'état j donc $a_{i,j} * b_{j,k}$ est la probabilité de passer de l'état i vers l'état k en passant par l'état j.

Ainsi, $c_{1,1}$ se défini comme la probabilité de quitter l'état 1 (à partir de A) et y revenir (par le biais de B) en passant éventuellement vers tous les autres états entre ces deux matrices.

Ce résultat nous permet donc d'obtenir des matrices de transitions annuelles à partir d'autres pas de temps (mensualités, trimestrialités et semestrialités) par produitss matriciel.

$$\begin{aligned} \text{À partir des matrices mensuelles : } & A_{n \rightarrow n+1}^m = \prod_{i=1}^{11} M_{i \rightarrow i+1} \\ \text{À partir des matrices trimestrielles : } & A_{n \rightarrow n+1}^t = \prod_{i=1}^3 T_{i \rightarrow i+1} \\ \text{À partir des matrices semestrielles : } & A_{n \rightarrow n+1}^s = S_1 \times S_2 \end{aligned}$$

2.1.2 Critères de validité

Les matrices de transitions doivent vérifier quelques hypothèses simples mais fondamentales. Il s'agit de :

- Le défaut absorbant $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} P(X_t = i | X_{t-1} = 5) = 0$ et $P(X_t = 5 | X_{t-1} = 5) = 1$
- Le défaut est plus probable dans les classes risquées $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ si $i < j$ alors $P(X_t = 5 | X_{t-1} = i) < P(X_t = 5 | X_{t-1} = j)$
- La plus grande partie de la population doit garder la même classe de risques ou bien migrer vers une classe de risques proches.

2.1.3 Résultats

Nous présentons ,dans cette section, quelques matrices estimées à partir des méthodes décrites ci-dessus sur des les données présentées auparavant. Pour ne pas encombrer ni divulguer des infor-

mations confidentielles, nous allons nous contenter de n'afficher que quelques matrices parmi les 63 matrices Retail construites lors de notre projet.

Pas mensuel

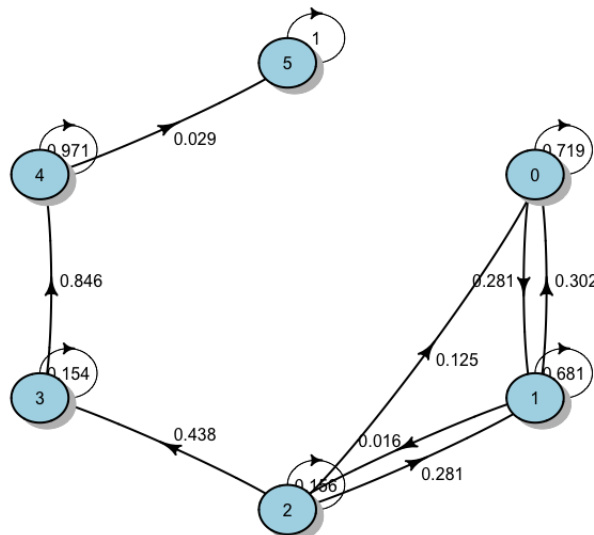
À titre d'exemple, ci-dessus la matrice 5 de transition mensuelle entre Décembre 2014 et Janvier 2015. Les classe de risques initiales sont données en lignes et celles d'arrivées en colonnes. Les diagonales reflètent la grande part d'entités dont le comportement est resté le même entre deux mois.

classe de risque	0	1	2	3	4	5
0	71,919%	28,080%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
1	30,183%	68,142%	1,643%	0,032%	0,000%	0,000%
2	12,500%	28,125%	15,625%	43,750%	0,000%	0,000%
3	0,000%	0,000%	0,000%	15,385%	84,615%	0,000%
4	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	97,143%	2,857%
5	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	100%

Source: Auteurs.

TABLE 5 – Matrice de transition mensuelle entre Décembre 2014 et Janvier 2015

Nous remarquons que les hypothèses 2.1.2 sont bien vérifiées. Nous pouvons visualiser clairement les transitions dans la figure 11 ci-après. Le tableaux 5 et la figure 11 fournissent la matrice de transition ainsi que l'allure de ces probabilités pour faciliter la lecture.



Source: Auteurs, fait sur R

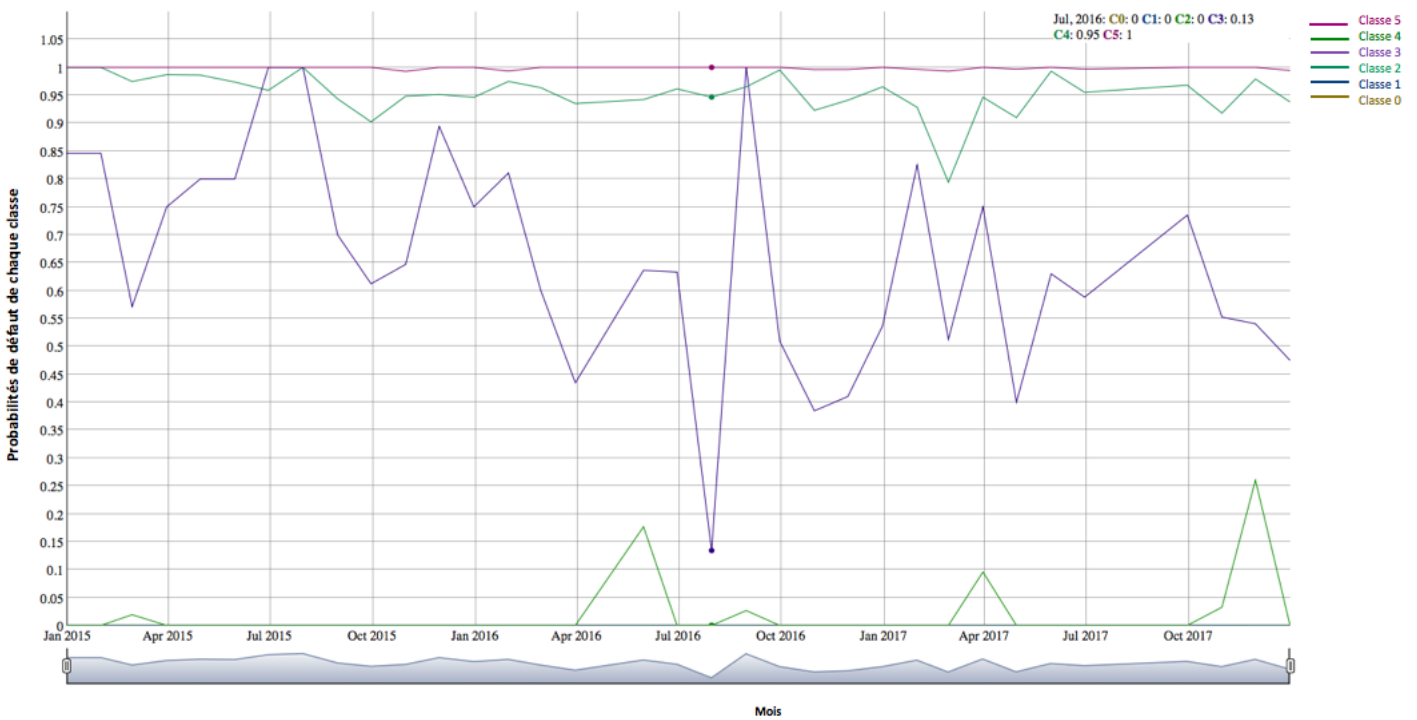
FIGURE 11 – Graphe de transitions mensuelles du la matrice 5

En utilisant le produit matriciel expliqué dans le paragraphe 2.1.1, nous avons calculé les matrices de transitions annuelles ainsi que les probabilités de défaut mensuelles de chaque classe tel que :

$$\forall i \in J_t, \mathbb{P}(i \text{ fait défaut}) = \mathbb{P}(J_{t+1} \in \{4, 5\})$$

J_t étant la classe de risque que nous pouvons aussi voir comme une cohorte homogène d'individus en t .

Malgré la qualité des premiers résultats, la construction des probabilités de défaut ainsi que les matrices de transitions annuelles montrent que le pas mensuel apporte beaucoup de bruit dans les valeurs observées. Effectivement, la figure 12 nous montre que la distribution des probabilités de défaut mensuelles de certaines classes, en particulier la classe de risque 3, est beaucoup plus volatile que les autres. Ce comportement anormal ne peut pas être expliqué.



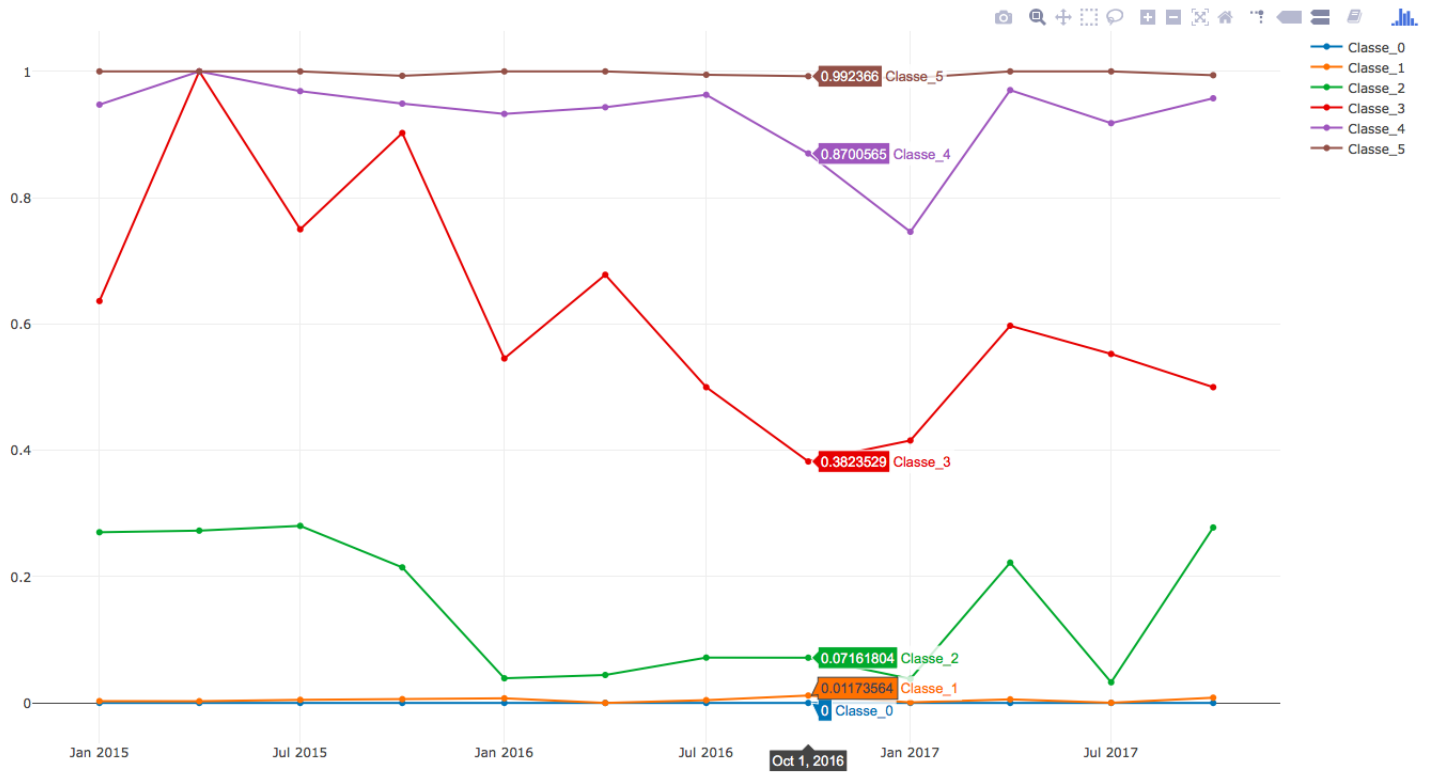
Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 12 – Graphe dynamique des probabilités de défaut mensuelles entre Décembre 2014 et Décembre 2017 par classe

Pas trimestriel

La construction des matrices de transitions repose sur le même principe développé dans la partie 2.1, le seul pas de transition devient celui trimestriel.

Le calcul des probabilités de défaut montre que le choix de ce dernier assure une stabilité dans les valeurs calculées. Nous pouvons voir cela dans la figure 13 ci-après. De plus, le choix d'un tel pas nous a permis de construire des matrices annuelles stables et semblables entre-elles. Ce qui est normal sur du court terme.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 13 – Graphe dynamique des probabilités de défaut trimestrielles entre Décembre 2014 et Décembre 2017 par classe

Pas semestriel annuel

L'information qu'englobent les matrices annuelles et semestrielles construites n'est pas exhaustive. En effet, le principe de construction de ces deux matrices fait que les probabilités calculées ne captent pas les mouvements au sein de l'année et des semestres respectivement. Ce qui fait que les probabilités de défaut ne sont pas précises.

Le tableau 6 montre les différences entre les probabilités de défaut annuelles selon qu'elles soient déterminées par des produits matriciels de probabilités périodiques (mensuelles, trimestrielles et semestrielles) ou directement.

Approche Classe	P.mat mensuel	P.mat trimestriel	P.mat semestriel	Annuel direct
Classe 0	2,0154%	1,6226%	1,1736%	1,3132%
Classe 1	2,8719%	3,2936%	5,9763%	2,7580%
Classe 2	5,3361%	7,3196%	42,7855%	42,5000%
Classe 3	51,6693%	54,4015%	69,8236%	85,7143%
Classe 4	66,2808%	82,2568%	91,7576%	96,1539%
Classe 5	100,0000%	100,0000%	100,0000%	100,0000%

Source: Auteurs.

TABLE 6 – Probabilités de défaut annuelles entre Décembre 2015 et Décembre 2016 selon les approches de calcul choisies et les classes

Notons que sur le tableau précédent, P.mat est une abréviation pour produit matriciel.

Force est de constater que probabilités calculées directement ou par produit de deux matrices semestrielles surestiment le défaut et ce surtout pour les classes 2 et 3.

En effet, pour qu'un individu soit considéré par une matrice de transition, il faudrait que ce dernier soit présent du début à la fin de la période considérée.

Et comme beaucoup de sorties sont observées au cours de l'année, alors les matrices annuelles directes ratent ces observations et calculent le défaut à partir de ceux qui sont restés toute l'année.

2.2 Conception des matrices par la méthode de générateurs

2.2.1 Méthodologie

Nous avons utilisé ,dans cette partie, l'estimateur du maximum de vraisemblance expliqué en détail dans la partie 2.1.2. Nous avons appliqué la méthode de générateur directement sur R en utilisant le package **ctmcd**. Les résultats pour les différents pas seront explicités dans la partie suivante.

Ainsi, pour estimer les matrices de transitions annuelles par les différentes approches, suffit-il de calculer le générateur pour chaque pas et d'appliquer la formule :

$$\hat{P}_t = \exp(\hat{\Lambda}t) \quad (*)$$

tel que

$$\hat{\lambda}_{i,j} = \frac{N_{i,j}(T)}{\int_0^T Y_i(s)ds}, \quad \forall j \neq i \quad (**)$$

$$\hat{\lambda}_{i,i} = - \sum_{j \neq i} \hat{\lambda}_{i,j}$$

afin de trouver les probabilités de transition annuelles. La démarche est la suivante :

À partir d'une matrice mensuelle : Estimer λ par maximum de vraisemblance en utilisant l'équation **, Puis appliquer l'équation * pour $t = 12$.

À partir d'une matrice trimestrielle : Estimer λ par maximum de vraisemblance en utilisant l'équation **, Puis appliquer l'équation * pour $t = 4$.

À partir d'une matrice mensuelle : Estimer λ par maximum de vraisemblance en utilisant l'équation **, Puis appliquer l'équation * pour $t = 2$.

À partir d'une matrice mensuelle : Estimer λ par maximum de vraisemblance en utilisant l'équation **, Puis appliquer l'équation * pour $t = 1$.

2.2.2 Hypothèse principale

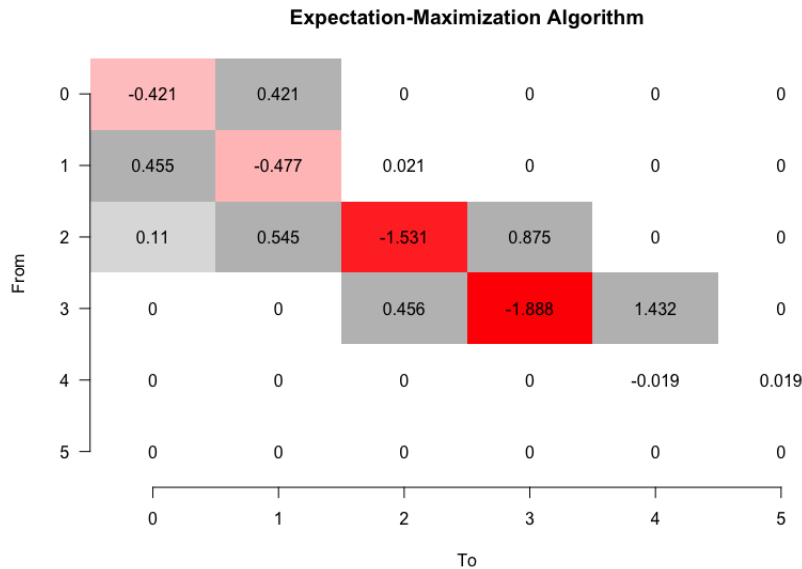
L'hypothèse principale de cette méthode est l'homogénéité temporelle. Cette propriété stipule que la probabilité d'aller de l'état i vers l'état j ne dépend pas du temps. Elle permet de regrouper à partir d'une seule matrice toutes les probabilités de transition entre les différents états. Mathématiquement, pour tout horizon de temps $t \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, i_1, \dots, i_{t-1}, i$ Nous avons :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

2.2.3 Résultats

Exemple : Générateur mensuel

Pour ne pas encombrer, nous allons illustrer les résultats de la méthode des générateurs pour le pas mensuel seulement. Le générateur d'une matrice mensuelle choisie au hasard estimé par Maximum de vraisemblance est le suivant :



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 14 – Estimation des éléments $\lambda_{i,j}$ du générateur avec un pas mensuel

Ce générateur nous a permis de construire la matrice de transition annuelle suivante :

classe de risque	0	1	2	3	4	5
0	49,35%	44,85%	0,73%	0,34%	4,32%	0,41%
1	48,75%	44,31%	0,72%	0,34%	5,28%	0,60%
2	24,37%	22,16%	0,36%	0,17%	43,61%	9,34%
3	5,90%	5,36%	0,09%	0,04%	71,77%	16,84%
4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	79,83%	20,17%
5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

Source: Auteurs.

TABLE 7 – Matrice de transition annuelle entre Décembre 2014 et Décembre 2015

De même, nous avons construit les matrices de transition annuelles en utilisant le générateur adéquat. Les probabilités de défaut obtenues sont affichées dans le tableau suivant :

Approche Classe	G. mensuel	G. trimestriel	G. semestriel	G. Annuel
Classe 0	4,73%	1,01%	0,87%	2,17%
Classe 1	5,88%	1,96%	2,30%	5,61%
Classe 2	52,94%	45,00%	58,53%	48,87%
Classe 3	88,61%	77,43%	68,34%	50,01%
Classe 4	99,84%	96,14%	98,41%	69,65%
Classe 5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Source: Auteurs.

TABLE 8 – Probabilités de défaut annuelles de chaque classe entre Décembre 2015 et Décembre 2016

2.3 Importance d'une approche Point In Time

Nous remarquons qu'il s'agit d'une différence considérable entre les probabilités de défaut calculées empiriquement par la méthode des cohortes et celles calculées sous l'hypothèse de l'homogénéité temporelle par méthode des générateurs. En effet, ceci nous incite à remettre en question cette hypothèse et à faire une analyse plus profonde qui prend en considération le facteur temporel et son impact. Cette hétérogénéité temporelle peut s'expliquer en analysant la conjoncture économique actuelle du pays où notre client exerce principalement ces activités. En effet, les conditions macroéconomiques de ce pays africain poussent les banques à accorder des crédits à courts et à moyens termes.

L'approche par les PD PIT permet de décrire plus précisément la situation des contreparties sur une courte période de temps (typiquement 1 an) et permet de prendre en considération les variations du cycle économique.

Chapitre 3

Probabilités Point In Time (PIT)

	Page
3.1 Introduction	62
3.2 Calibration du modèle	62
3.2.1 Adaptation des données	62
3.2.2 Calcul des paramètres : Seuils de défaut	63
3.2.3 Calcul des paramètres : Sensibilité aux chocs économiques	64
3.2.4 Calcul des paramètres : Cycles économiques	67
3.2.5 Étude de la qualité d'estimations faites	70
3.2.6 Préparation du modèle économique	73
3.2.7 Construction de modèle	77
3.3 Scénarios, Projections et Résultats	80
3.3.1 Scénarios macro-économiques	80
3.3.2 Résultats	81
3.4 Probabilités cumulées et extrapolation	82
3.4.1 Probabilités cumulées	82
3.4.2 Extrapolation	84
3.5 Approche basée sur les copules	85
3.5.1 Formule générale	85
3.5.2 Estimation du paramètre	86
3.5.3 Résultats	86

3.1 Introduction

Les probabilités TTC sont un premier indicateur des probabilités de défaut. Mais cet indicateur est imparfait car nous remarquons qu'historiquement, le taux de défaut varie en fonction des conditions économiques : plus elles sont bonnes et plus le taux de défaut est faible.

Ainsi, nous allons plutôt calculer des probabilités de défaut Point-In-Time (PD PIT), probabilités conditionnelles à un facteur (qui représente l'état de l'économie à un instant donné).

Dans ce chapitre, nous présentons de manière précise les hypothèses de modélisation. Nous rappelons que ces hypothèses doivent permettre de modéliser les probabilités de défaut et inclure la composante « Forward Looking » dans leur conception.

Nous avons fait le travail pour toutes les classes de risque. Pour des raisons d'esthétique, nous nous sommes contentés d'afficher nos exemples pour des classes spécifiques. Par la suite, nous aurons à afficher des résultats concernant toutes les classes à la fois.

3.2 Calibration du modèle

3.2.1 Adaptation des données

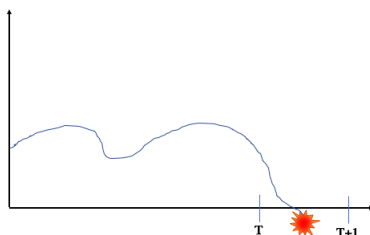
Afin de répondre aux contraintes de modélisation des probabilités de défaut sous IFRS 9, nous avons choisi de modéliser les probabilités de défauts conditionnelles. En effet, cette probabilité reflète la possibilité qu'un individu fasse défaut sur un intervalle de temps sachant qu'il était en état sain à l'initiation de cet intervalle, Cette notion est définie mathématiquement dans l'équation (*) ci-dessous.

Nous considérons cette modélisation semi-indépendante dans la mesure où les probabilités de défaut seront impactés par des paramètres calibrés de manière indépendante selon la maturité et la classe de risque. Ce choix est motivé par le fait que les probabilités de défaut marginales évoluent de manière non-homogène en termes de niveaux et d'amplitudes de variations selon la maturité. Il s'avérerait donc inopportun de les modéliser de manière homogène.

Mathématiquement, en introduisant le temps d'arrêt τ du défaut de l'individu, la probabilité de défaut conditionnelle $P_i^t(T)$ correspond à :

$$p_i^t(T) = \mathbb{P}(\tau \in]t + T - 1; t + T] | \tau > t + T - 1) \quad (*)$$

La figure 15 ci-dessous permet de bien comprendre ce concept



Source: Auteurs

FIGURE 15 – Allure explicative des probabilités de défaut conditionnelles

Nous notons que dans l'équation (*), nous ne différencions pas les comportements des individus de même classe de risque. Nous avons fait le calcul nécessaire sur R pour sortir quatre triangles (un triangle pour chaque classe 0, 1, 2 et 3) des probabilités de défauts conditionnelles.

Le tableau suivant illustre un exemple de ces triangles. Ceux-ci sont représentés selon la cohorte et selon la maturité de l'intervalle d'observation.

		Classe 1											
		Probabilités conditionnelles											
Cohorte	Maturité	31/12/2014	31/03/2015	30/06/2015	30/09/2015	31/12/2015	31/03/2016	30/06/2016	30/09/2016	31/12/2016	31/03/2017	30/06/2017	30/09/2017
		Coh_1	Coh_2	Coh_3	Coh_4	Coh_5	Coh_6	Coh_7	Coh_8	Coh_9	Coh_10	Coh_11	Coh_12
1	1	0,298%	0,456%	0,761%	1,077%	0,370%	0,545%	0,587%	0,405%	0,563%	0,348%	0,635%	0,829%
2	2	0,576%	1,075%	2,580%	0,787%	1,027%	0,677%	0,589%	0,946%	0,327%	0,713%	0,717%	
3	3	0,985%	2,748%	0,880%	0,755%	0,859%	0,825%	1,137%	0,569%	0,737%	0,515%		
4	4	2,918%	1,063%	1,548%	1,293%	0,585%	0,998%	0,659%	0,994%	0,514%			
5	5	0,965%	1,643%	1,261%	0,916%	0,586%	0,436%	1,046%	0,641%				
6	6	1,763%	1,167%	0,595%	0,719%	0,295%	0,593%	0,810%					
7	7	1,282%	0,632%	1,097%	0,459%	1,126%	0,319%						
8	8	0,982%	1,157%	1,323%	1,346%	0,188%							
9	9	1,504%	1,365%	1,158%	0,431%								
10	10	1,519%	0,843%	0,415%									
11	11	1,826%	1,254%										
12	12	1,587%											

Source: Auteurs

FIGURE 16 – probabilités conditionnelles par cohorte et par maturité

Exemple de lecture de la case entourée en noir : Le taux 0.880% signifie que parmi les individus de la cohorte-3 correspondant au 31/06/2015 (colonne) noté 1 à cette date et encore présent (sains) après deux trimestres plus tard (i.e 31/12/2015), 0.880% d'entre eux ont fait défaut sur le trimestre suivant (c'est-à-dire sur la durée allant de 31/12/2015 à 31/03/2016).

Notons que nous avons aussi calculé le nombre de défauts ainsi que la fréquence de défaut de chaque classe pour tous les trimestres. Cela va nous permettre de faire plusieurs calculs dans les parties qui suivent.

3.2.2 Calcul des paramètres : Seuils de défaut

Formules générales

Les premiers paramètres à devoir être estimés sont les seuils de défauts $b_{i,T}$. De manière conditionnelle et TTC, nous avons :

$$PD_{TTC,i}(T) = \mathbb{P}(x_{k,i} < b_{i,T}) = \Phi(b_{i,T}) \Rightarrow b_{i,T} = \Phi^{-1}(PD_{TTC,i}(T))$$

Nous choisissons d'approximer la probabilité de défaut $PD_{TTC,i}(T)$ par la moyenne temporelle empiriques des probabilités de défaut pour une même maturité (Moyenne sur chaque ligne dans le tableau 17). Alors :

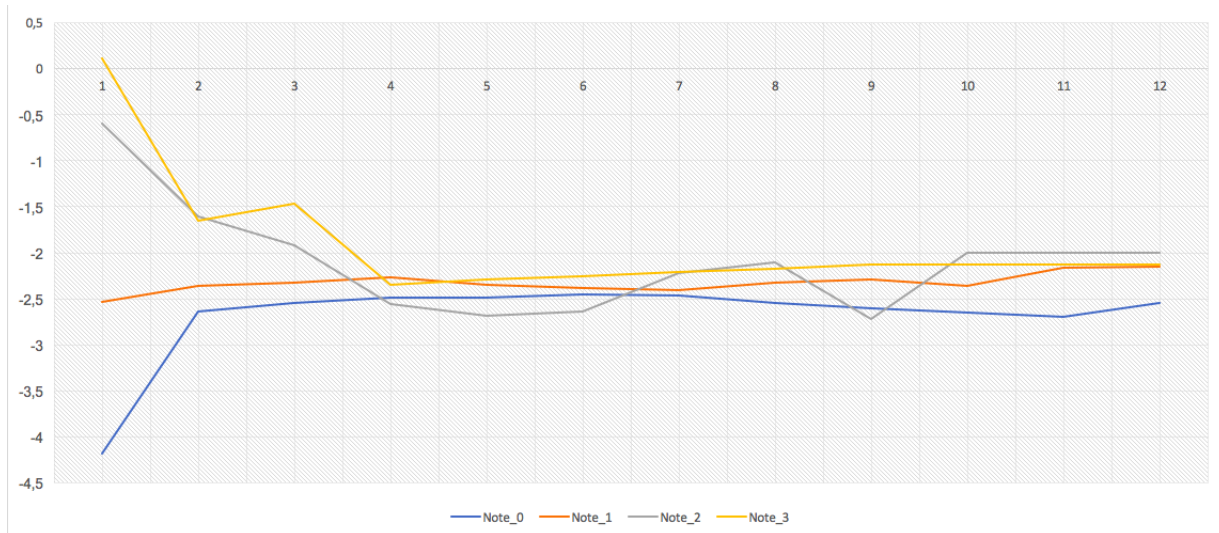
$$b_{i,T} = \Phi^{-1}(\widehat{\mathbb{E}}(f_{t,T}^i))$$

Ainsi, chaque seuil représente-il le quantile de la loi normale standard lié à la probabilité de défaut conditionnelle TTC correspondante (dépend de la maturité et de la classe de risque).

Résultats

Nous avons réalisé la calibration de ces seuils en fonction des classes de risque et des maturités. L'estimation de ces paramètres est d'autant plus précise que la marginalité est faible car le nombre d'observations y est plus important. La précision de ces estimations est discutée dans la partie 3.2.5.

Nous observons des évolutions assez stables dans le temps. Pour interprétation, plus les seuils de défaut sont élevés, plus ils correspondent à des probabilités de défaut élevées.



Source: Auteurs, fait sur Excel

FIGURE 17 – Seuils de défaut en fonction de la classe et de la marginalité

Nous remarquons que le seuil diminue avec la marginalité pour les classes risquées et augmente pour les classes les plus saines. Cela veut dire que les individus étant initialement dans les classes risquées ont tendance à faire défaut les premiers mois et inversement pour ceux sains initialement.

3.2.3 Calcul des paramètres : Sensibilité aux chocs économiques

Formules générales

La formule de probabilité de défaut du modèle de Vasiček permet également le calcul des sensibilités aux cycles économiques $\rho_{i,T}$. Nous rappelons d'après le paragraphe 2.2.3 que :

$$p_t^i(T) = \mathbb{P}(x_{k,i,T+t} < b_{i,T}) = \mathbb{P}(\sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{i,t+T} + \sqrt{1 - \rho_{i,T}} \cdot \xi_{k,t+T} < b_{i,T})$$

La quantité $p_t^i(T|z_{i,t+T})$ représente la probabilité de défaut Point In Time pour chaque maturité T conditionnellement au cycle économique. $T+t$ est la date d'observation du défaut.

$$p_t^i(T|z_{i,t+T}) = \mathbb{P}\left(\xi_{k,t+T} < \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{i,t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) = \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{i,t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) \quad (**)$$

Dans la suite de ce rapport, l'équation ** sera constamment reprise car elle représente le fondement théorique du modèle. Les étapes qui vont suivre détailleront le calcul des paramètres qui interviennent dans cette formule.

Pour estimer ces paramètres, nous allons maximiser la fonction de vraisemblance des probabilités de défaut selon la variable corrélation $\rho_{i,T}$. Le Log-vraisemblance s'écrivant :

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=0}^3 \sum_{T=1}^{12} \sum_{t=1}^{T_{max}-T} \mathcal{L}_t(\rho_{i,T}) \quad (3.1)$$

Dans le cas où le nombre d'observation est suffisamment important et que le taux de défaut peut s'apparenter à une estimation légitime de la probabilité de défaut, cela revient à maximiser la quantité (Voir Annexe C.3) :

$$\mathcal{L}_t(\rho_{i,T}) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{i,T}}{1-\rho_{i,T}}\right) - \frac{1-\rho_{i,T}}{2 \cdot \rho_{i,T}} \cdot \left(\Phi^{-1}(f_{t,T}^i) - \frac{b_{i,T}}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}} \right)^2 \quad (3.2)$$

Dans le cas où le nombre d'observation est moins important, la vraisemblance d'observation s'écrit (Voir Annexe C.3) :

$$\mathcal{L}_t(\rho_{i,T}) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n_{i,t}^T}{k_{i,t}^T} \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T} \varphi(s) ds \quad (3.3)$$

Résultats

Pour maximiser la fonction de vraisemblance de l'équation, nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson sur la dérivée de cette dernière. L'intégrale contenue dans la fonction de vraisemblance C.3 est calculée numériquement car on ne dispose pas de formule fermée. Pour cela, on utilise la fonction **integrate** du logiciel R. L'algorithme que nous avons utilisé est le suivant :

Data: Suivi de la fréquence $n_{i,t}$ et le nombre de défaut $d_{i,t}$ de chaque cohorte

Result: $\rho_{i,T}$

```

for classe=0 à 3 do
  for marginalite=1 à 12 do
    Data= Données de la cohortei,T et l=dimension( cohortei,T) ;
    initialization i=1;
    while i < l do
      if di,t > 15 then
        Utiliser la formule asymptotique ;
        Chercher les  $\rho_{i,T}$  qui maximisent 3.2;
      else
        Utiliser la fonction Integrate ;
        Chercher les  $\rho_{i,T}$  qui maximisent C.3;
      end
      i=i+1
    end
  end
end
    
```

Algorithm 1: Algorithme de maximisation de la vraisemblance

Les résultats sont affichés dans le tableau 9 suivant. Nous remarquons que la sensibilité aux chocs économiques (c'est-à-dire l'amplitude des variations historiques) augmente avec la classe de risque.

les individus les plus risqués sont plus sensibles aux chocs économiques que les plus sains ce qui est tout à fait logique.

Maturité	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
1	0,035%	8,690%	38,139%	47,092%
2	0,084%	4,954%	12,199%	14,920%
3	1,171%	1,339%	9,957%	22,958%
4	0,329%	2,320%	6,926%	21,247%
5	1,816%	3,113%	10,573%	25,415%
6	2,608%	5,556%	7,330%	20,412%
7	1,567%	6,550%	16,105%	17,652%
8	2,877%	9,391%	13,081%	12,822%
9	6,324%	5,914%	15,724%	12,694%
10	1,023%	1,080%	13,452%	12,536%
11	3,207%	3,721%	10,234%	10,954%
12	2,128%	2,190%	9,862%	10,591%

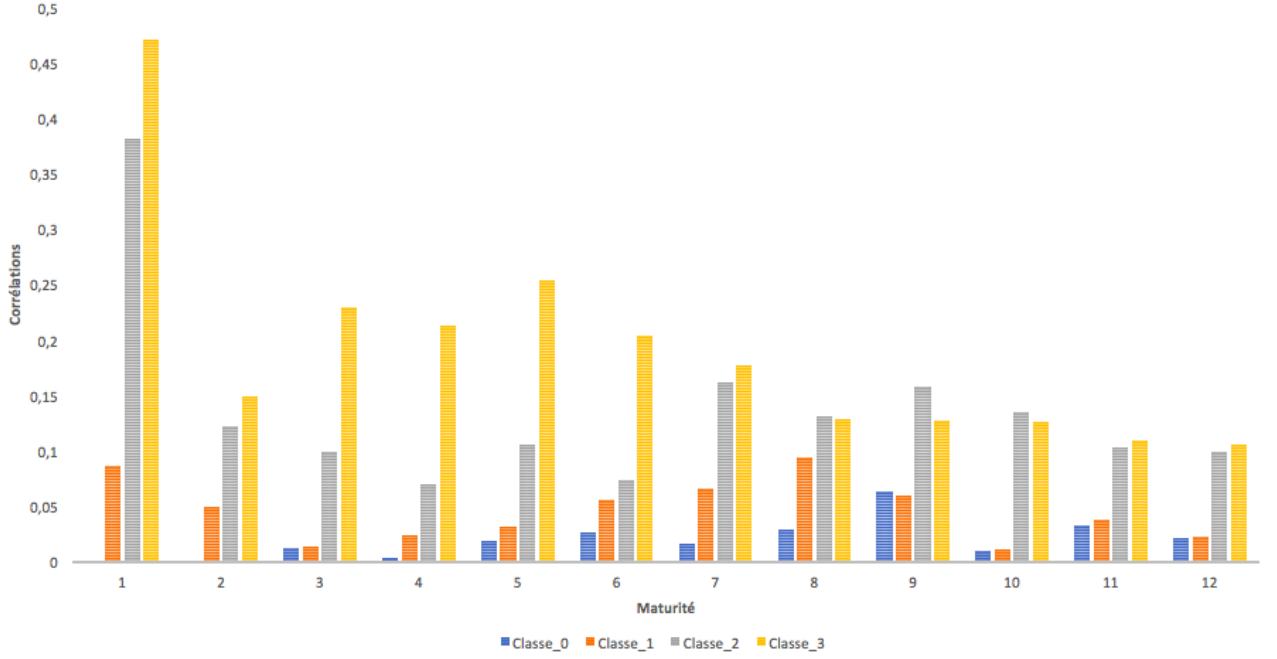
Source: Auteurs, fait sur R

TABLE 9 – Calibration des sensibilités par maximum de vraisemblance

Nous pouvons aussi remarquer dans la figure 18, que globalement, la sensibilité aux chocs économiques (c'est-à-dire l'amplitude des variations historiques) diminue avec la marginalité, cela peut s'expliquer par le fait que les sensibilités d'un individu à son environnement et à son risque sont plus importantes en début de remboursement de contrat qu'à maturité.

Le processus de calcul numérique implique des calculs par optimisation qui peuvent dans certains cas d'exécution donner des résultats différents. Afin de s'assurer de la cohérence des résultats obtenus, nous avons implémenté la méthode de calcul sous R selon le principe de Monte Carlo afin de calculer d'une manière robuste les paramètres de sensibilités.

Les résultats montrent effectivement que les calculs sont robustes.



Source: Auteurs, fait sur Excel

FIGURE 18 – Calibration des sensibilités

3.2.4 Calcul des paramètres : Cycles économiques

Comme précédemment explicité, le principe du modèle de Vasiček repose sur l'existence d'une variable systémique normale centrée et réduite nommée z représentative de l'environnement macro-économique.

De manière générale, nous souhaitons reconstruire l'historique de cette variable z_t et en faire une extrapolation pour les projections futures des PD.

Le principe retenu consiste à supposer que la variable systémique, à un instant donné T , affecte toutes les probabilités de défaut mesurées à ce même moment quelles que soient les maturités et les classes, c'est-à-dire les probabilités $p_t^i(T - t)$.

Les paramètres de sensibilité étant calibrés indépendamment des cycles économiques, nous pouvons déduire à partir des probabilités de défaut les cycles économiques également par maximum de vraisemblance.

Comme avec les sensibilités, nous cherchons la série chronologique z_t qui maximise la vraisemblance des probabilités de défauts observés.

Dans le cas où le nombre d'observation est suffisamment important et que le taux de défaut peut s'apparenter à une estimation légitime de la probabilité de défaut, cela revient à maximiser la quantité (Voire Annexe C.4) :

$$\mathcal{L}_t(\hat{z}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{T=1}^{12} \sum_{t=1}^{T_{max}-T} \mathcal{L}_t(\hat{z}_{t+T}) \quad (3.4)$$

Avec :

$$\mathcal{L}_t(\widehat{z}_{t+T}) = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(2\pi \cdot \frac{\sigma^2 \cdot \rho_{i,t}}{1 - \rho_{i,t}}\right) - \frac{1 - \rho_{i,t}}{2\sigma^2 \cdot \rho_{i,t}} \cdot \left(\Phi^{-1}(f_{t,T}^i) - \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot \widehat{z}_{t+T}}{1 - \sqrt{\rho_{i,T}}}\right)^2 \quad (3.5)$$

Dans le cas où le nombre d'observation est moins important cette vraisemblance s'écrit (Voir annexe C.4) :

$$L_t(\widehat{z}_{t+T}) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n_{i,t}^T}{k_{i,t}^T} \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \widehat{\sigma} \cdot \epsilon_{i,t}^i)}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \widehat{\sigma} \cdot \epsilon_{i,t}^i)}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T} \varphi(\epsilon) d\epsilon \quad (3.6)$$

Nous avons tenu à calibrer une variable qui soit commune à toutes les classes et à toutes les marginalités. Cela afin d'assurer la cohérence globale de nos modèles et des futures projections.

Nous pouvons aussi calculer des variables macroéconomiques qui varient pour chaque classe.

Nous listons dans le tableau 10 les avantages et les inconvénients cette décision.

	Avantages	Inconvénients
Z_t	Cohérence globale des résultats Une seule régression	Moins de précision
$Z_{i,t}$	Plus de précision impliquant des régressions plus fines	Incohérence entre chocs macroéconomiques Multiplicité des régressions à calibrer

Source: Auteurs.

TABLE 10 – Comparaison

Néanmoins, nous rappelons que le modèle ici présenté est destiné à calculer les provisions sur l'intégralité du portefeuille (toutes les classes de risque). Expliquer un comportement moyen n'augmente pas nécessairement l'erreur de manière globale à l'échelle du portefeuille lors du calcul de la provision.

Résultats

Nous avons choisi d'étudier une variable Z globale sur l'ensemble des classes de risque. Ce choix a les avantages exposés ci-avant dans le tableau 10.

Pour trouver les $Z_{i,t}$, nous avons implémenté l'algorithme suivant :

Data: Suivi de la fréquence $n_{i,t}$, le nombre de défaut $d_{i,t}$, le seuil de défaut $b_{i,T}$ et la sensibilité $\rho_{i,T}$ de chaque cohorte

Result: $Z_{i,t}$

```

for marginalite=1 à 12 do
  Data= Données de la cohorte $_{i,T}$  et  $l$ =dimension( cohorte $_{i,T}$ ) ;
  initialization  $i=1$ ;
  while  $i < l$  do
    if  $d_{i,t} > 15$  then
      Utiliser la formule asymptotique ;
      Chercher les  $Z_{i,t}$  qui maximisent 3.4;
    else
      Utiliser la fonction Integrate ;
      Chercher les  $Z_{i,t}$  qui maximisent 3.6;
    end
     $i=i+1$ 
  end
end

```

Algorithm 2: Algorithme de maximisation de la vraisemblance

Pour trouver les Z_t , nous avons fait la conception de l'algorithme suivant :

Data: Suivi de la fréquence $n_{i,t}$, le nombre de défaut $d_{i,t}$, le seuil de défaut $b_{i,T}$ et la sensibilité $\rho_{i,T}$ de chaque cohorte

Result: Z_t

```

for classe=0 à 3 do
  for marginalite=1 à 12 do
    Data= Données de la cohorte $_{i,T}$  et  $l$ =dimension( cohorte $_{i,T}$ ) ;
    initialization  $i=1$ ;
    while  $i < l$  do
      if  $d_{i,t} > 15$  then
        Utiliser la formule asymptotique ;
        Chercher les  $Z_t$  qui maximise la somme 3.4 par l'équation 3.5 ;
      else
        Utiliser la fonction Integrate ;
        Chercher les  $Z_t$  qui maximise la somme 3.4 par l'équation 3.6;
      end
       $i=i+1$ 
    end
  end
end

```

Algorithm 3: Algorithme de maximisation de la vraisemblance

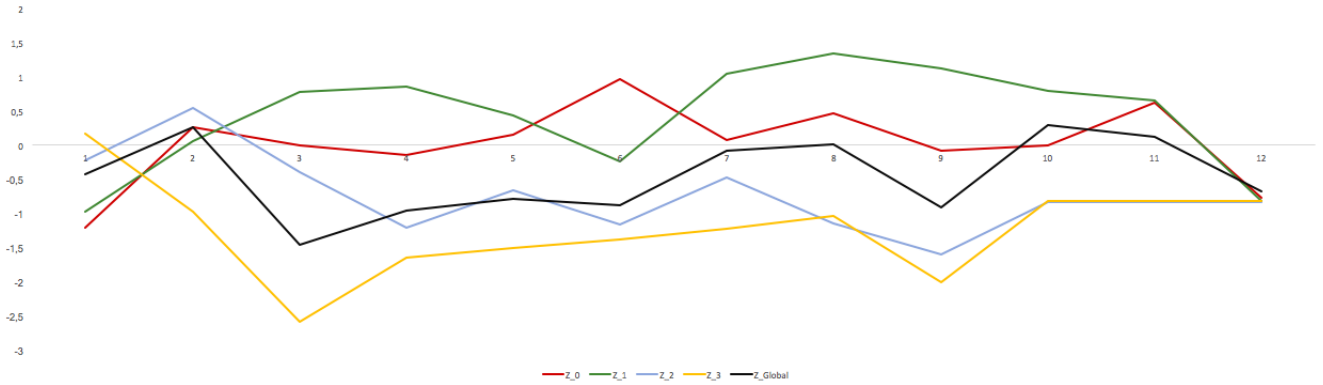
Nous allons analyser, dans un premier temps, la corrélation entre les z de chaque score et le z global pour justifier l'utilisation d'un seul z global. Le tableau suivant explicite les résultats :

	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_{global}
Z_0	100%	50.336%	-19.566%	-37.928%	15.705%
Z_1	50.336%	100%	-37.393%	-56.496%	8.750%
Z_2	-19.566%	-37.393%	100%	30.183%	33.582%
Z_3	-37.928%	-56.496%	30.183%	100%	65.614%
Z_{global}	15.705%	8.750%	33.582%	65.614%	100%

Source: Auteurs, Calculé sur R

TABLE 11 – Corrélations entre Z global et Z classes de risque

D'après le tableau 11 ci-dessus, nous remarquons des niveaux de corrélation relativement important, excepté pour les classes saines. Afin de ne pas définir un Z seulement pour chaque classe de risque et donc des régressions spécifiques, nous choisissons de ne travailler qu'avec un seul Z . La figure ci-dessous montre les grandes différences entre les $Z_{i,t}$ et on voit que le Z_{global} est comme un effet moyen.



Source: Auteurs

FIGURE 19 – Évolution historique des Z_{global} et $Z_{classes\ de\ risque}$

3.2.5 Étude de la qualité d'estimations faites

L'objet de cette partie est de déterminer la qualité des estimations de tous les paramètres que nous avons statistiquement déterminés à savoir les seuils $b_{i,T}$ et les sensibilités $\rho_{i,T}$. Pour cela, de manière générale, nous cherchons à estimer la part d'incertitude que nous avons dans l'estimation de ces paramètres.

Étude de la qualité d'estimation de $b_{i,T}$

Nous rappelons que les seuils sont obtenues de la manière suivante : $b_{i,T} = \Phi^{-1}(PD_{TTC,i}(T))$, avec : $PD_{TTC,i}(T) = \frac{1}{T_{max}-T} \cdot \sum_{t=1}^{T_{max}-T} f_{t,T}^i$

Or, nous avons supposé que les taux de défaut sont régis par des lois de probabilité et vérifient l'équation suivante :

$$p_t^i(T) = \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) \quad (*)$$

Avec : $z_{t+T} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Nous pouvons donc estimer la variance de cette probabilité en effectuant un nombre conséquent de simulations. Nous avons effectué 20 000 simulations, puis nous avons estimé la variance (et donc l'écart type) de cet estimateur.

Notons σ_T^i l'écart type de $p_t^i(T)$. Le tableau 12 ci-dessous affiche les résultats que nous avons eu.

Classe \ Maturité	0	1	2	3
1	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
2	0.00215	0.00635	0.02746	0.04371
3	0.00341	0.00639	0.00734	0.01881
4	0.00374	0.00843	0.0044	0.02404
5	0.00282	0.00529	0.00703	0.02193
6	0.00347	0.00617	0.01336	0.02015
7	0.00272	0.00579	0.02341	0.01841
8	0.00208	0.00956	0.00607	0.01747
9	0.00476	0.00744	0.03163	0.01744
10	0.00206	0.00679	0.05961	0.04316
11	0.00203	0.00408	0.05961	0.04316
12	0.01368	0.04104	0.29117	0.27184

Source: Auteurs.

TABLE 12 – Écart-type des estimateurs de seuils de défaut simulés

Or, Nous avons :

$$PD_{TTC,i}(T) = \frac{1}{T_{max} - T} \cdot \sum_{t=1}^{T_{max}-T} f_{t,T}^i \Rightarrow PD_{TTC,i}(T) = \frac{1}{T_{max} - T} \cdot \sum_{t=1}^{T_{max}-T} p_t^i(T)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(PD_{TTC,i}(T)) = \frac{1}{T_{max} - T} \cdot \sum_{t=1}^{T_{max}-T} p_t^i(T) \Rightarrow \text{Var}(PD_{TTC,i}(T)) = \frac{\sigma_T^i{}^2}{T_{max} - T}$$

Pour estimer $\text{Var}(\widehat{b_{i,T}})$, nous utilisons une approximation premier ordre :

$$\text{Var}(\widehat{b_{i,T}}) = \text{Var}(\Phi^{-1}((PD_{TTC,i}(T)))$$

$$\approx \text{Var} \left((\Phi^{-1}(PD_{TTC,i}(T)) + (PD_{TTC,i}(T) - PD_{TTC,i}(T)) \cdot \frac{d\Phi^{-1}(X)}{dX}(PD_{TTC,i}(T))) \right)$$

$$\text{Or : } \frac{d\Phi^{-1}(X)}{dX} = \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(X))}$$

Finalement :

$$\text{Var}(\widehat{b_{i,T}}) \approx \left[\frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(PD_{TTC,i}(T)))} \right]^2 \cdot \text{Var}(PD_{TTC,i}(T))$$

Pour représenter les résultats, nous avons décidé de calculer les coefficients de variation des paramètres $b_{i,t}$ tel que : $c(b_{i,t}) = \left| \frac{\sigma(b_{i,t})}{b_{i,t}} \right|$. Nous avons :

		Classe de risque			
		1	2	3	4
Maturité	1	0,25582%	0,00001%	0,00000%	0,00000%
	2	0,10709%	0,25739%	0,35095%	1,02274%
	3	0,18581%	0,24650%	0,07115%	0,13133%
	4	0,18947%	0,37072%	0,35514%	4,24400%
	5	0,12074%	0,23453%	1,95823%	3,15565%
	6	0,18399%	0,42680%	0,64640%	2,57307%
	7	0,13397%	0,46481%	3,52165%	2,12503%
	8	0,14154%	1,10686%	0,18456%	1,95400%
	9	1,18958%	0,70600%	0,93156%	2,07846%
	10	0,37717%	1,05008%	0,20314%	1,69813%
	11	0,66643%	0,25724%	0,30472%	0,25472%
	12	0,30576%	0,49627%	1,45420%	2,02092%

Source: Auteurs

TABLE 13 – Coefficient de variation des estimateurs de seuil de défaut

Le tableau 13 précédent montre que les coefficients de variations sont relativement faibles ($\sim 1\%$). Bien que le nombre d'observations ne soit pas conséquent, la faible variance des probabilités et donc des estimateurs permet d'avoir une certaine confiance concernant les paramètres estimés.

Incertitude sur l'estimation de $b_{i,T}$

Nous quantifions ici l'incertitude sur le paramètre $b_{i,T}$ en incertitude sur la probabilité de défaut issue du modèle. Pour cela, nous cherchons à calculer :

$$\text{Var}(\widehat{p}_i^i(T)|z_{t+T}, \rho_{i,T}) = \text{Var}\left(\phi\left(\frac{\widehat{b}_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) \middle| z_{t+T}, \rho_{i,T}\right)$$

En utilisant la même approximation qu'avant, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{p}_i^i(T)|z_{t+T}, \rho_{i,T}) &\approx \text{Var} \left[\left(\widehat{b}_{i,T} - b_{i,T} \right) \cdot \varphi \left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}} \middle| z_{t+T}, \rho_{i,T} \right] \\ &\approx \text{Var}_{\widehat{b}_{i,T}}(\widehat{b}_{i,T}|z_{t+T}, \rho_{i,T}) \cdot \varphi \left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}} \right)^2 \frac{1}{1 - \rho_{i,T}} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc avoir une approximation de l'incertitude du calcul des probabilités de défaut liée à l'incertitude de l'estimation des paramètres $b_{i,T}$. Notons que ce choix n'a pas d'impact significatif au vu de la prépondérance du terme $b_{i,T}$ sur le terme $\sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}$.

En évaluant ce terme sur toutes les maturités et toutes les classes de risques, nous avons trouvé un impact acceptable (une moyenne de 0,00257%). Le tableau 14 ci dessous explicite ces quantités.

Classe \ Maturité	0	1	2	3
1	0.00000000001	0.00000000004	0.00000000006	0.00000000008
2	0.00000035355	0.00000276905	0.00005146051	0.00014403663
3	0.00000091384	0.00000322653	0.00000336584	0.00002154902
4	0.00000126396	0.00000592576	0.00000106557	0.00000690066
5	0.00000087984	0.00000289458	0.00000152330	0.00001268142
6	0.00000147708	0.00000400789	0.00000115208	0.00001911185
7	0.00000111726	0.00000418035	0.00003475652	0.00002591681
8	0.00000078473	0.00001114767	0.00000320084	0.00003410343
9	0.00000315235	0.00001075646	0.00000037241	0.00004371910
10	0.00000118876	0.00001129286	0.00003012760	0.00017341823
11	0.00000162409	0.00000801013	0.00004519140	0.00002601273
12	0.00000663253	0.00004767335	0.00021566700	0.00020638285

Source: Auteurs.

TABLE 14 – Impact de l’incertitude liée à l’estimateur statistique des seuils en terme de PD

Étude de la qualité d’estimation de $\rho_{i,T}$

Nous souhaitons à présent quantifier la précision de l’estimation des sensibilités aux chocs économiques $\rho_{i,T}$. Pour ce faire, nous devons estimer la variance de l’estimateur du maximum de vraisemblance.

Nous rappelons l’écriture de la vraisemblance à partir de laquelle sont estimés les paramètres ρ :

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=0}^3 \sum_{T=1}^{12} \sum_{t=1}^{T_{max}-T} -\frac{1}{2} \cdot \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{i,T}}{1-\rho_{i,T}}\right) - \frac{1-\rho_{i,T}}{2 \cdot \rho_{i,T}} \cdot \left(\left(\Phi^{-1}(f_{t,T}^i) - \frac{b_{i,T}}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)\right)^2$$

L’estimateur obtenu par maximum de vraisemblance atteint asymptotiquement la borne de Cramer-Rao et est asymptotiquement distribué selon une loi normale. La borne de Cramer-Rao est l’inverse de la matrice d’information de Fisher liée au problème de maximum de vraisemblance.

Mais pour des contraintes de temps nous n’avons pas pu estimer cette mesure car lourde à calculer.

3.2.6 Préparation du modèle économique

Jusqu’à ce niveau, nous avons défini un cadre statistique qui nous permet de modéliser des probabilités "Point-In-Time". C’est à dire des probabilités qui soient instantanément en lien avec l’état de l’économie (par l’intermédiaire de la variable Z_t). Il ne reste qu’à définir un cadre qui nous permette de calculer, à partir de ce modèle, des probabilités dites Forward-Looking.

Pour cela, nous devons être en mesure de projeter, sous certaines hypothèses économiques, les valeurs futures de la variable Z qui représente la santé macroéconomique. Dans cette optique, nous avons opté pour un modèle de régression linéaire avec différentes variables économiques choisies au préalable.

Variables exogènes

Nous présentons ci-après la liste des variables exogènes que nous avons considérées pour notre étude économétrique. Nous indiquons également le sens de la corrélation attendue en regard des considérations économiques.

Une corrélation positive signifie qu'une augmentation de la variable exogène, toute chose égale par ailleurs, implique une hausse de la variable Z et donc une amélioration de la santé du portefeuille (baisse de la probabilité de défaut) et vice-versa.

Nous avons aussi effectuée des tests de stationnarité pour chaque variable avant de la garder dans le modèle.

Les séries présentées nous ont été données par notre organisme d'accueil et elles ne sont pas disponibles pour le public.

Nous rappelons que nous sommes dans une conjoncture africaine, et que nous avons choisi les variables après une étude de la région de notre client et notre choix a été approuvé par des experts et aussi par nos résultats.

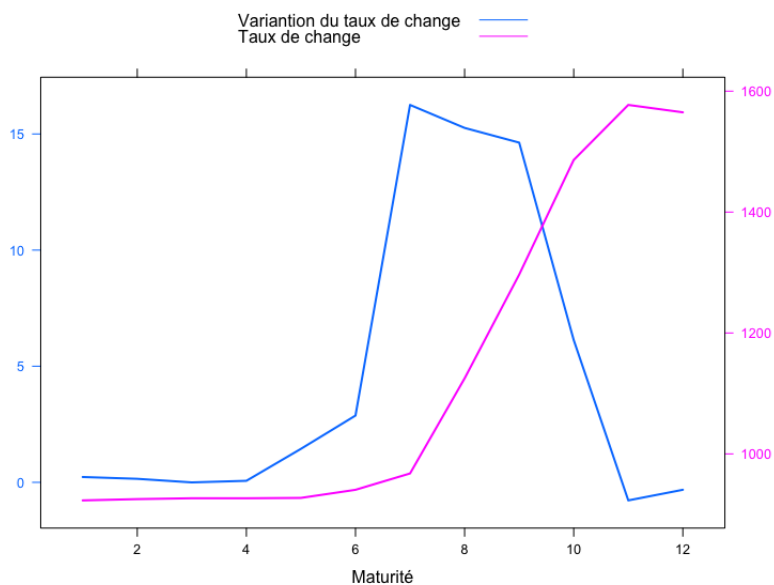
Taux de change : Notre client exerce ses activités dans une économie très largement « dollarisée ».

Depuis quelques années, cette économie carbure au dollar. Dans les hypermarchés modernes comme dans les petites boutiques des quartiers périphériques des grandes villes, on peut tout payer en billets verts. L'adoption d'un taux de change flottant a aggravé la situation. Le bilan est, en majorité, exprimé en dollars américains.

Par ailleurs, les dépôts, tout comme les crédits, sont exclusivement constitués dans cette devise. Une tendance qui s'est confirmée en 2017 (environ 85 % en 2016 contre 83 % en 2015).

Face à cette prédominance du dollar américain, il serait primordiale d'inclure cette variable dans nos projections.

Nous introduisons la variable taux de change à la fois en niveau et en croissance pour des raisons de stationnarité qui seront évoquées dans la suite du rapport.

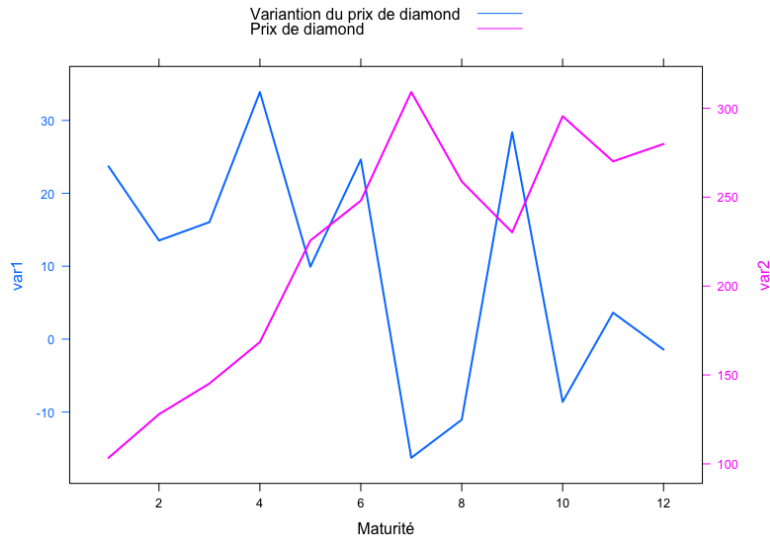


Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 20 – Evolution historique du taux de change

Prix du diamant, du cuivre et de l'or : Le diamant est la plus grande richesse du continent en matière de pierres précieuses. Notre client exerce son activité dans un pays africain connu dans le marché diamantaire par la grande quantité de diamants qu'il produit. Selon les données statistiques officielles, ce pays dispose des plus grandes réserves continentale de diamant en 2016 (150 millions de carats).

Dans la figure 22, nous pouvons voir la volatilité de ce prix et sa variation dans le temps.

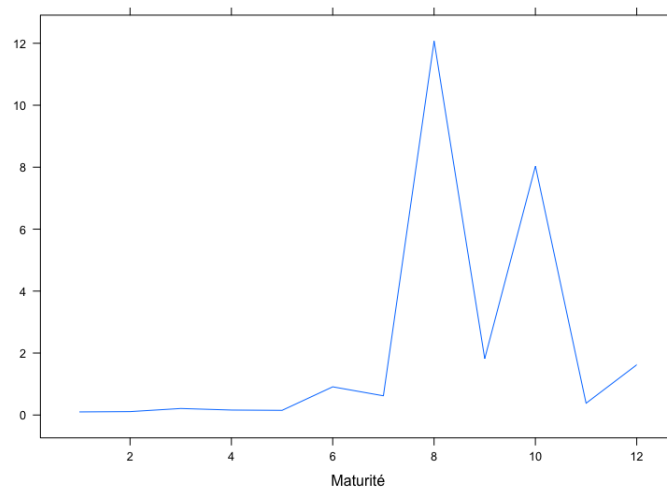


Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 21 – Evolution historique du prix du diamant

Le secteur minier du pays exploite beaucoup les ressources en cuivre et en or. En effet, il s'agit du premier producteur de cuivre en Afrique.

Inflation : L'impact de l'inflation doit être pris en compte. En effet, il s'agit d'un indicateur qui reflète la dépréciation monétaire et donc le pouvoir d'achat et aussi l'aptitude de remboursement des crédits.



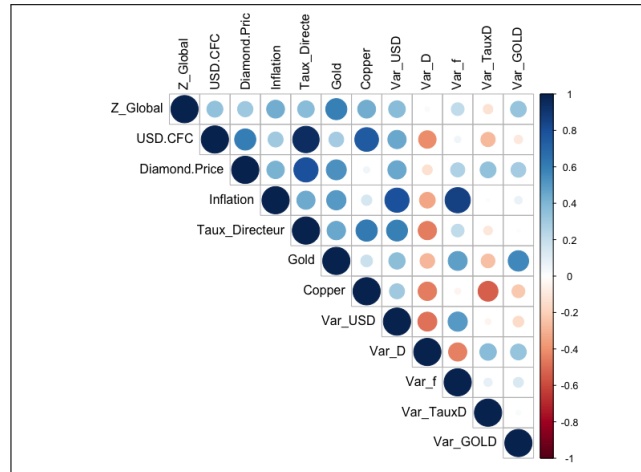
Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 22 – Evolution historique de l'inflation

Taux directeur : Il s'agit d'un taux d'intérêt fixé journalièrement par la banque centrale d'un pays ou d'une union monétaire, et qui permet à celle-ci de réguler l'activité économique. Cet indicateur s'avère plus important pour les crédits 'Corporate' que ceux 'Retail', nous allons néanmoins le garder ici.

Étude de corrélation

Nous allons maintenant calculer la matrice de corrélation entre les différentes variables du modèle. Nous présentons les résultats dans la figure 23 ci-après



Source: Auteurs, fait sur R
FIGURE 23 – Heatmap des corrélations

Nous remarquons que notre variable cible est bien corrélée avec toutes les variables mais pas nécessairement avec leur croissance. En effet, nous pouvons constater sur la première ligne de la figure 23 des corrélations élevées qui justifient nos choix.

Nous avons effectué le test de significativité des coefficients de corrélation. le paragraphe 3.2.6 ci-dessous en explicite les résultats.

Test de significativité des coefficients de corrélations entre les variables exogène

Le premier test qui vient à l'esprit est la significativité de la corrélation. On veut tester si le coefficient de corrélation est significativement différent de 0? Le test s'écrit :

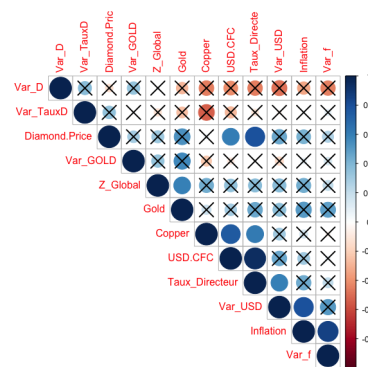
$$H_0 : r = 0 \text{ vs } H_1 : r \neq 0$$

Sous H_0 , la statistique

$$\frac{\hat{r}}{\sqrt{\frac{1-\hat{r}^2}{n-2}}}$$

suit une loi de Student à $n - 2$ degré de liberté.

En effectuant le test sous R, la figure ci contre



monte qu'à un seuil de 5%, la variable **Taux directeur** par exemple est significativement corrélée avec plusieurs variables du modèle. Nous allons alors supprimer cette variable.

3.2.7 Construction de modèle

Rappel théorique

Afin de modéliser la variable systémique Z_t pour expliquer les variations passées et prédire les futures, nous avons choisi le cadre de la modélisation linéaire classique. Celui-ci consiste à utiliser des variables macroéconomiques et capter les influences linéaires qu'elles ont sur la variable « cible » Z_t .

Mathématiquement, nous modélisons Z_t de la manière suivante :

$$Z_t = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot X_{t-l_k}^k + \sigma \cdot \epsilon_t$$

Avec n le nombre de variables exogènes, l_k le retard de la variable exogène k , β_k le coefficient de régression lié à la variable k , $X_{t-l_k}^k$ la valeur de la variable k à l'instant t retardé de l_k trimestres. σ est l'écart-type des erreurs, ϵ_t la partie de Z_t inexpliquée par les variables exogènes. Cette variable suit une loi normale centrée réduite.

Pour la suite, on note :

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_t \\ \dots \\ z_{t_{max}} \end{pmatrix}$$

De même, on note X la matrice des variables exogènes de dimensions $t_{max} \times n$.

Dans le cadre de la régression linéaire, nous cherchons à minimiser la somme des carrés des erreurs. Ce qui nous permet de déterminer l'estimateur du moindre carré ordinaire *MCO* du modèle linéaire :

$$\hat{\beta} = ((X^T X)^{-1} X^T Z)$$

Critère d'évaluations des modèles

Nous avons choisi quelques métriques que voici pour évaluer la pertinence du modèle :

R^2 : qualité d'ajustement ;

R_{adj}^2 : R^2 ajusté au nombre de degrés de liberté ;

p_{values} : test de significativité des coefficients de chaque variable ;

Implémentation du modèle

Étape préliminaire : Stationnarité des variables Malgré la qualité du modèle, la stationnarité des variables est l'une des conditions principales qu'il faut vérifier pour éviter de tomber dans le piège de la régression dite *fallacieuse*. Il s'agit d'une situation dans laquelle l'utilisation de séries temporelles non stationnaires dans une régression linéaire fait apparaître des résultats erronés, trop optimistes, qui font croire à une relation entre les variables alors que ce n'est pas nécessairement le cas.

Le test de **Dickey-Fuller** ou test de racine unitaire de **Dickey-Fuller** est un test statistique qui vise à savoir si une série temporelle est stationnaire c'est-à-dire si ses propriétés statistiques (espérance, variance, auto-corrélation) varient ou pas dans le temps.

Il s'agit de tester :

$$H_0 : \text{Non stationnarité} \quad (3.7)$$

Le tableau 15 suivant présente les résultats du test 3.2.7 effectué sous R.

Variable	ADF	P.value
x1	-0.935	33.55%
x2	-3.63	04.80%
x3	-2497	01.59%
x4	-3.23	03.22%
x5	3.209	99.00%
x6	-3.72	04.11%
x7	-1.67	08.99%
x8	-3.267	01.00%
x9	-7.85	01.00%
x10	-1.67	08.99%
x11	-3.44	01.00%

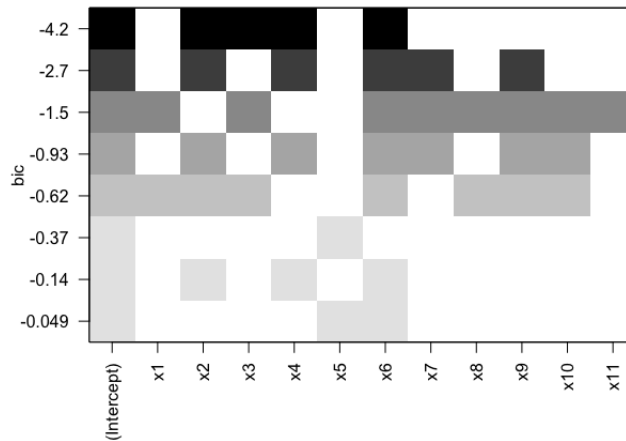
Source: Auteurs, fait sur R.

TABLE 15 – Résultats du test de racine unitaire de Dickey-Fuller

Nous allons supprimer les variables non stationnaires pour assurer une certaine crédibilité du modèle retenu.

Sélection des variables : Nous avons utilisé la fonction *regsubsets* sur R pour faire de la sélection de variables pour le meilleur modèle selon un critère à définir. Nous avons utilisé le Bayesian Information Criterion (BIC) qui coïncide dans notre cas avec le critère du R_{ajust}^2 .

La figure 25 montre en premier la combinaison des variables les plus susceptibles d'expliquer le modèle.



Source: Auteurs

FIGURE 25 – Résultats de Regsubsets sur R

Le modèle ainsi construit est composé de la constante et de quatre variables à savoir :

- x_2 : Le prix du diamant, que nous notons dorénavant Dp .
- x_3 : L'indice d'inflation que nous allons noter f .
- x_4 : Le taux de change r .
- x_6 : Le prix du cuivre Cp .

Qualité de la modélisation

Afin de s'assurer que le modèle soit cohérent statistiquement et économiquement, nous allons examiner plusieurs conditions. La vérification a été faite à l'aide des critères suivants :

Cohérence économique Pour assurer une cohérence économique, il faut que les signes des coefficients aient un sens macroéconomique logique. Nous rappelons que Z_t est une variable qui reflète la santé macroéconomique du pays. Donc nous nous attendons à ce que :

- : $\beta_{Dp} > 0$: Une augmentation du prix du diamant enrichit l'industrie et améliore la situation macroéconomique global de ce pays.
- : $\beta_f < 0$: Une évolution de l'inflation cause une dépréciation monétaire qui affecte négativement l'économie et le pouvoir de consommation.
- : $\beta_r < 0$: Le taux de change est un élément important dans cette économie. Une augmentation de ce taux cause des déséquilibres importants dans cette économie largement dollarisée.
- : $\beta_{Cp} > 0$: Une hausse du prix du cuivre pourrait enrichir le pays.

La figure 26 ci-dessous explicite les coefficients que nous avons estimés et on a bien la cohérence macroéconomique comme précédemment définie.

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.362e+01  3.390e+00  -4.018  0.00507 **
x2           2.009e-02  5.824e-03   3.449  0.01071 *
x3          -7.291e-02  3.233e-02  -2.255  0.05873 .
x4          -2.185e-01  6.515e-02  -3.354  0.01218 *
x6           1.956e-03  5.105e-04   3.831  0.00645 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
    
```

Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 26 – Coefficients de la régression du facteur macro-économique sur R

Les p-values du test de significativité : Nous allons vérifier si les variables sélectionnées une par une puis toutes simultanément sont significatives. En effet il s’agit de tester pour chaque variable i :

$$H_0 : \beta_i = 0$$

Où β_i est le paramètre associé à la variable i . L’hypothèse H_0 de nullité d’un paramètre du modèle peut être testée avec la statistique de Student suivante :

$$T_i = \frac{\widehat{\beta}_i}{\sigma_{\widehat{\beta}_i}} \sim Student(n - p - 1)$$

La figure 26 montre qu’au seuil de 10%, toutes les variables sont significativement non nulles.

Indicateurs de la qualité du modèle La figure 27 ci-dessous montre que le coefficient de détermination de cette régression est de 74.99%, et que le coefficient de détermination ajusté est de 60.69%. La régression est significative à un seuil de 5%, nous retenons alors ce modèle.

```

Multiple R-squared:  0.7499,    Adjusted R-squared:  0.6069
F-statistic: 5.246 on 4 and 7 DF,  p-value: 0.02837
    
```

Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 27 – Indicateurs de la qualité de la modélisation

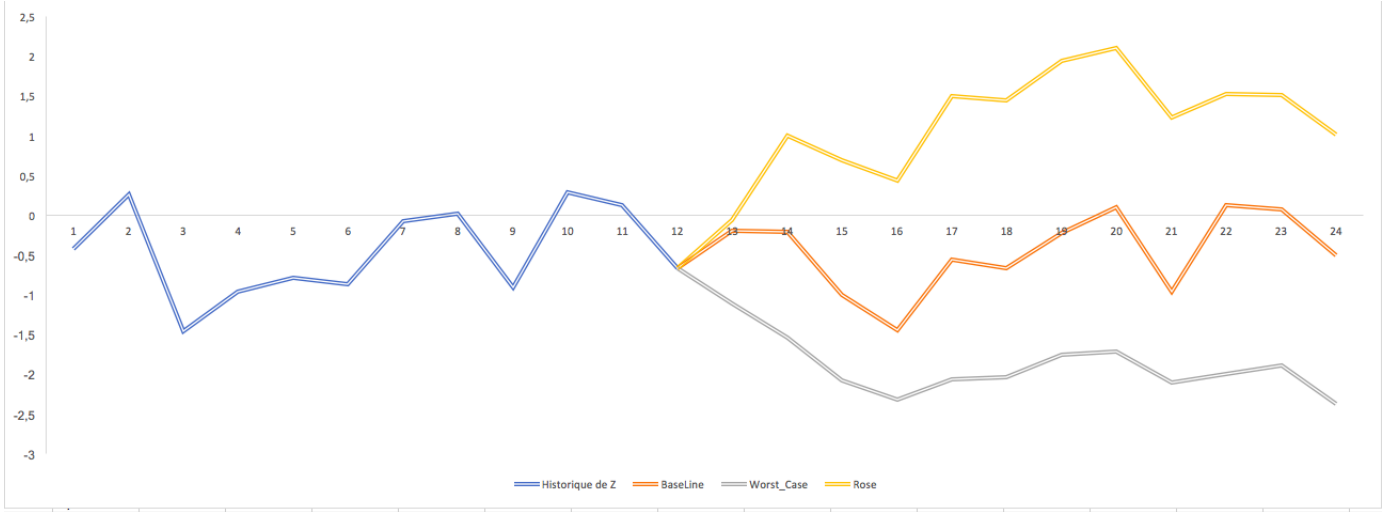
3.3 Scénarios, Projections et Résultats

Dans cette section, nous présentons les hypothèses économiques qui ont été fournies par notre organisme d’accueil pour la projection des variables macroéconomiques. À l’aide de ces projections, nous calculons des scénarios de PD Forward Looking via le modèle de Vasiček.

3.3.1 Scénarios macro-économiques

Nous utilisons les projections des variables macroéconomiques du modèle construit selon qu’elles soient "Baseline", "Adverse" ("Worst Case") et "Rose" (ou "Best Case").

Pour des raisons de confidentialité, nous ne présentons que les résultats de ces projections sur la variable macroéconomique Z . Pour ce faire, nous avons utilisé la fonction *predict* sur R. Les résultats de ces projections sont explicités dans la figure 28 ci-dessous.



Source: Auteurs

FIGURE 28 – Résultats de la projection du facteur macroéconomique

3.3.2 Résultats

Nous rappelons la formule principale du modèle de Vasicek :

$$p_t^i(T|z_{i,t+T}) = \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) \quad (**)$$

Pour appliquer la composante "Forward Looking", nous avons appliqué la formule de probabilité totale pour inclure les trois scénarios : Baseline, Worst Case et Rose.

Formule des probabilités totales :

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un évènement A . Si $(B_i)_{i \in I}$ est une partition (finie ou dénombrable) de l'évènement B , alors nous avons :

$$\mathbb{P}(A|B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i|B)$$

Le poids $\alpha_{\{s=(b,w,r)\}}^s = \mathbb{P}(z_{i,t}^{\text{sénario}})$ est la probabilité donnée à chaque scénario de survenir. Nous avons choisi les pondérations suivantes :

- Baseline : $\alpha^b = 70\%$ de chance de survenance. Il s'agit du scénario le plus réaliste.
- Adverse : $\alpha^w = 20\%$ de chance de survenance du pire scénario. Pour être le plus prudent possible.
- Rose : $\alpha^r = 10\%$ de chance de survenance. Pour ne pas sous-estimer la probabilité de défaut.

D'où :

$$p_t^i = \sum_{i \in (b,w,r)} \alpha^i \cdot \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}^i}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right) \quad (*)$$

Nous nous intéressons maintenant à appliquer le modèle, calibré sur l'historique, sur les cohortes dont les observations sont incomplètes afin de prédire les probabilités de défaut.

Exemple : Pour la cohorte du 31/12/2015 (Coh_4) pour la classe 0, nous observons le comportement que pendant 9 trimestres (jusqu'à 31/12/2017 : L'historique disponible). Pour prédire la

probabilité conditionnelle après 10 trimestres pour cette cohorte, il suffit maintenant d'appliquer * avec : $i = 0$ (classe de risque), $T = 10$ (maturité) et $t + T = 13$. On aura donc à utiliser $b_{0,10}$, $\rho_{0,10}$ et z_{13} qui est projeté.

Le modèle nous permet de calculer les probabilités présentées en rouge dans le tableau suivant : (cas de la classe 0)

		Classe 0											
		Probabilités conditionnelles											
Cohorte		31/12/2014	31/03/2015	30/06/2015	30/09/2015	31/12/2015	31/03/2016	30/06/2016	30/09/2016	31/12/2016	31/03/2017	30/06/2017	30/09/2017
Maturité		Coh_1	Coh_2	Coh_3	Coh_4	Coh_5	Coh_6	Coh_7	Coh_8	Coh_9	Coh_10	Coh_11	Coh_12
1		0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,018%	0,000%
2		0,203%	0,297%	0,869%	0,344%	0,446%	0,443%	0,262%	0,435%	0,514%	0,410%	0,323%	0,425%
3		0,398%	1,312%	0,412%	0,534%	0,540%	0,197%	0,575%	0,568%	0,467%	0,466%	0,591%	0,597%
4		1,541%	0,436%	0,643%	0,449%	0,413%	0,687%	0,647%	0,386%	0,609%	0,678%	0,680%	0,759%
5		0,581%	0,785%	0,755%	0,297%	0,690%	0,902%	0,606%	0,560%	0,704%	0,716%	0,926%	1,061%
6		0,904%	0,844%	0,375%	0,658%	0,878%	0,853%	0,390%	0,765%	0,785%	1,063%	1,248%	0,921%
7		0,956%	0,408%	0,893%	0,599%	0,673%	0,630%	0,752%	0,763%	0,967%	1,097%	0,861%	0,879%
8		0,393%	0,791%	0,444%	0,645%	0,424%	0,589%	0,608%	0,844%	1,003%	0,724%	0,744%	0,619%
9		0,507%	0,115%	0,895%	0,342%	0,495%	0,535%	0,871%	1,121%	0,710%	0,735%	0,563%	0,489%
10		0,245%	0,596%	0,361%	0,432%	0,437%	0,535%	0,597%	0,483%	0,492%	0,438%	0,409%	0,527%
11		0,487%	0,216%	0,383%	0,399%	0,572%	0,692%	0,485%	0,500%	0,408%	0,365%	0,561%	0,388%
12		0,541%	0,590%	0,603%	0,800%	0,929%	0,699%	0,716%	0,610%	0,556%	0,786%	0,581%	0,581%

Source: Auteurs

FIGURE 29 – les probabilités de défaut calibrées par le modèle de Vasiček

3.4 Probabilités cumulées et extrapolation

3.4.1 Probabilités cumulées

Dans les sections précédentes, seul le cas de la probabilité de défaut conditionnelle a été abordé. Cette mesure constitue une bonne mesure du risque intrinsèque de défaut d'une contrepartie à un instant donné. Cette valeur n'est pas supposée dépendre du comportement antérieur de la cohorte observée. Dans le cadre du calcul des provisions et dans le cadre de la vision à long terme « lifetime », il est nécessaire d'introduire la notion de probabilité de défaut cumulée. La définition de cette quantité est relativement simple puisqu'il s'agit de la probabilité de faire défaut à un instant t .

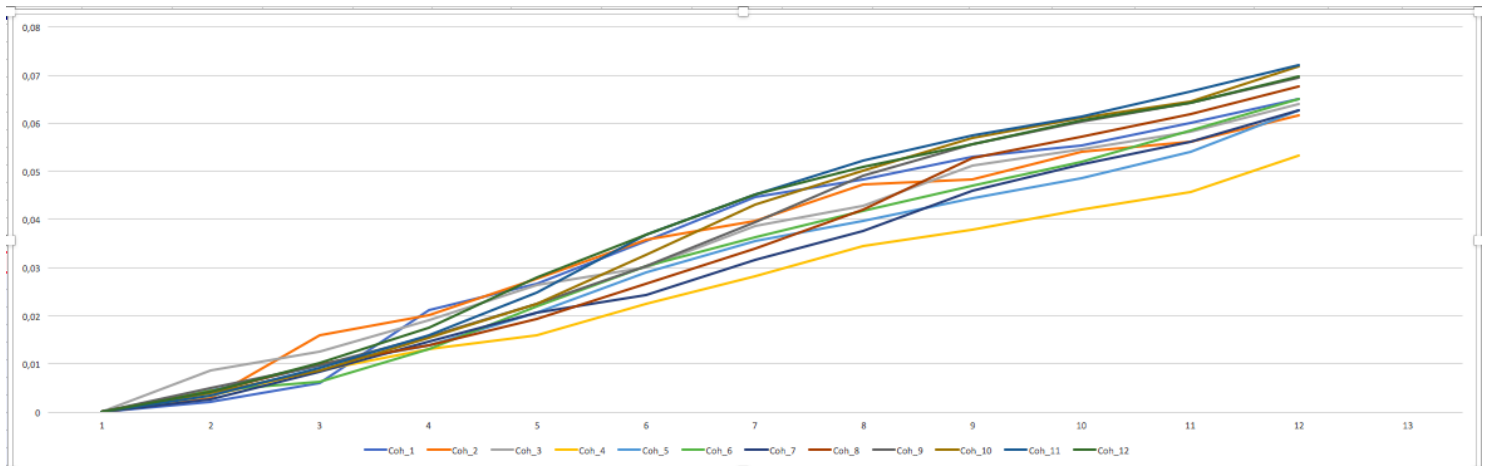
L'utilisation des différentes formes de probabilités et les ajustements qui peuvent être apportés sont largement discutés dans les documents abordant la norme IFRS-9.

Nous rappelons la définition de la probabilité de défaut cumulée qui est obtenue à partir des probabilités de défaut conditionnelles.

$$PDC_{t+1} = PDC_t + (1 - PDC_t) \times PD_{cond}(t, t + 1)$$

$$PDC_0 = 0$$

Nous avons fait le calcul nécessaire pour chaque classe de risque. À titre d'exemple, la figure 30 suivante affiche les probabilités de défaut de chaque cohorte de la classe 0.



Source: Auteurs

FIGURE 30 – Probabilités de défaut cumulées par cohorte pour la classe 0

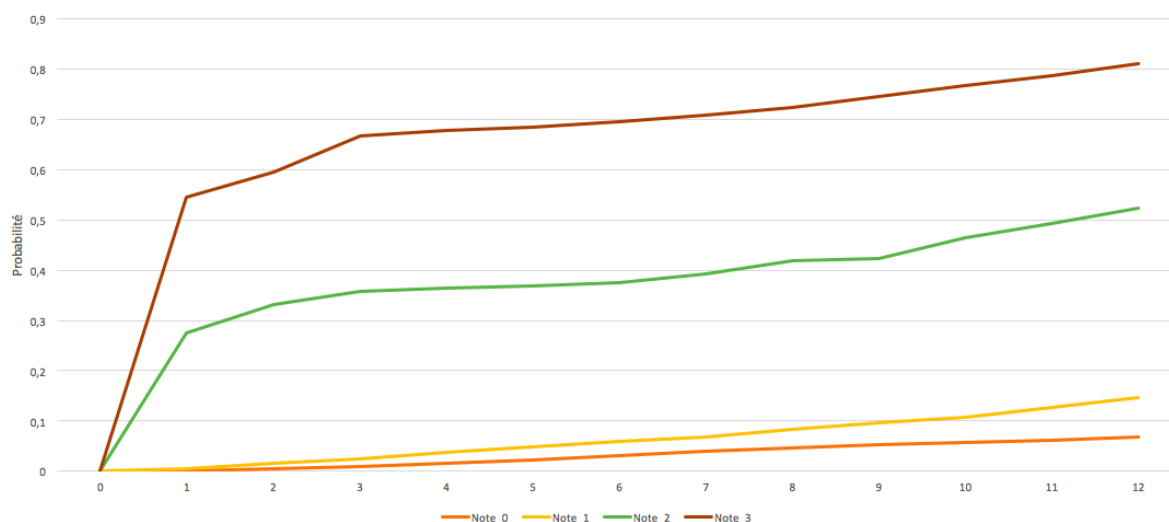
Le tableau suivant nous donne les probabilités de défaut cumulées Forward Looking de chaque classe en faisant la moyenne sur les cohortes de chaque classe.

Maturité \ Classe	Classe			
	0	1	2	3
0	00,00%	00,00%	00,00%	00,00%
1	00,00%	00,57%	27,61%	54,57%
2	00,42%	01,49%	33,10%	59,48%
3	00,97%	02,51%	35,88%	66,69%
4	01,63%	03,75%	36,47%	67,76%
5	02,35%	04,81%	36,93%	68,53%
6	03,15%	05,84%	37,46%	69,54%
7	03,94%	06,90%	39,36%	70,82%
8	04,60%	08,25%	41,82%	72,30%
9	05,21%	09,68%	42,32%	74,62%
10	05,67%	10,74%	46,38%	76,67%
11	06,13%	12,69%	49,24%	78,82%
12	06,79%	14,60%	52,30%	81,13%

Source: Auteurs.

TABLE 16 – Probabilités de défaut cumulées par classe

Finalement, l'allure des probabilités de défaut cumulée est présentée dans la figure suivante :



Source: Auteurs

FIGURE 31 – Allures des probabilités de défaut cumulées calibrées par le modèle de Vasicek

Si on revient à la figure 2 qui se trouve dans la partie sur les normes IFRS, on trouve que les classes 0 et 1 telles que estimées appartiennent au Niveau 1. Ceci implique que le calcul de l'ECL se fait sur un an. Ce qui nécessite une probabilité calculée sur un 1 an. Nous avons déjà calculé ceci dans le tableau 16 dans la page précédente. Quant aux classes 2 et 3, elles appartiennent au Niveau 2. Nous devons donc calculer un Life Time Credit Loss (ECL à maturité). Pour ce faire, nous allons effectuer une extrapolation Life Time des probabilités de défaut cumulées de ces classes.

3.4.2 Extrapolation

Pour extrapoler les probabilités de défaut cumulées pour le niveau 2, nous cherchons à les approcher par une loi de probabilité de type log-normale.

Nous cherchons les paramètres de la loi log-normale de façon à ce que :

$$PDC_i(T) = \Phi\left(\frac{\ln(T) - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

Les paramètres sont calibrés sur l'ensemble des points disponibles. Une fois les paramètres μ_i et σ_i estimés, nous utilisons la formule ci-dessus pour projeter les probabilités de défaut cumulées.

Après une transformation, la formule ci-dessus peut s'écrire de la manière suivante :

$$\ln(T) = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(PDC_i(T))$$

En conséquence, nous pouvons estimer les paramètres μ_i et σ_i comme des coefficients de régression linéaire.

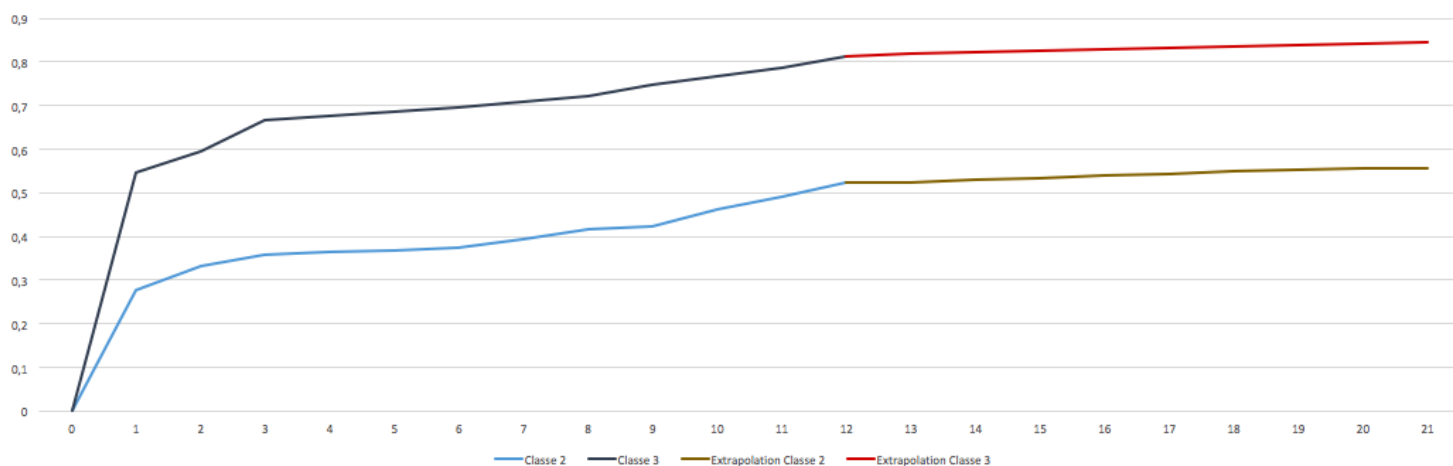
La régression linéaire a été implémentée sous R. Les résultats sont affichés dans le tableau suivant :

Classes	μ	Significatif	σ	Significatif	R^2
Classe 2	2.6664	à 5%	3.8548	à 5%	86,28%
Classe 3	-0.1197	à 5%	3.3195	à 5%	93,14%

Source: Auteurs.

TABLE 17 – Résultats des calibrations des fonctions d'extrapolation des PD cumulées

Finalement, la figure suivante présente l'allure de ces probabilités extrapolées.



Source: Auteurs

FIGURE 32 – Allures des probabilités de défaut cumulées et extrapolées

3.5 Approche basée sur les copules

3.5.1 Formule générale

On considère un modèle basé sur la copule de Clayton. Cette copule est choisie parce que c'est une copule archimédienne classique et parce qu'elle possède une dépendance dans le bas de la queue de distribution, propriété souhaitable dans notre modélisation car un défaut est déclenché par le passage des actifs sous un seuil.

Le générateur de la copule de Clayton est :

$$\phi(t) = t^{-\theta} - 1$$

Ce générateur correspond à une variable aléatoire sous-jacent ψ distribuée selon une $\Gamma(\frac{1}{\theta}, 1)$. Le coefficient de dépendance de queue inférieure pour la copule de Clayton en dimension 2 vaut :

$$\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta}} > 0$$

D'autres copules sont envisageables mais les lois associées à la variable ψ sont alors plus difficiles à simuler.

3.5.2 Estimation du paramètre

Il y a un seul paramètre à estimer : θ . L'approche classique d'estimation du paramètre d'une copule, la maximisation de la vraisemblance des observations du processus, ne peut être mise en œuvre car on observe seulement le nombre de défauts. On estime ainsi le paramètre par maximum de vraisemblance sur le nombre de défauts observés. D'après le théorème 2, les défauts conditionnellement à ψ sont indépendants. Ainsi, le nombre de défauts sachant ψ suit une loi binomiale $(n, p(\psi))$:

$$P(D_{1,t} = d_{1,t}, \dots, D_{K-1,t} = d_{K-1,t} | \psi_t = y_t) = \prod_{r=1}^{K-1} \binom{n_{r,t}}{d_{r,t}} p_r(y_t)^{d_{r,t}} (1 - p_r(y_t))^{n_{r,t}}$$

La vraisemblance s'écrit comme dans le modèle de Vasiček :

$$\begin{aligned} L(d_{1,t}, \dots, d_{K-1,t}; \theta) &= P(D_{1,t} = d_{1,t}, \dots, D_{K-1,t} = d_{K-1,t}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(D_{1,t} = d_{1,t}, \dots, D_{K-1,t} = d_{K-1,t} | \psi_t = y_t) f_{\psi}(y_t) dy_t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^{K-1} \binom{n_{r,t}}{d_{r,t}} e^{-d_{r,t} \times \psi \phi(P_r)} \times (1 - e^{-\psi \phi(P_r)})^{n_{r,t} - d_{r,t}} f_{\psi}(y_t) dy_t \end{aligned}$$

Enfin, si on observe ces structures de défauts pour une série temporelle dont les intervalles du temps sont indépendantes, la log-vraisemblance est :

$$\log L(d_1, \dots, d_{K-1}; \theta) = \sum_{i=1}^T \log L(d_{1,t}, \dots, d_{K-1,t}; \theta)$$

On estime le paramètre θ en minimisant l'opposée de la log-vraisemblance :

$$\tilde{\theta} = \arg \min_{\theta} (-\log L(d_1, \dots, d_{K-1}; \theta))$$

La faiblesse de ce modèle est de n'avoir qu'un seul paramètre pour décrire les différentes classes. Néanmoins, pour construire les variables suivant la loi caractérisée par une copule, on impose entièrement la fonctionnelle pour la variable d'intérêt $p_1(\psi)$. Par ailleurs, considérer une variable ψ par classe permet de disposer de $K - 1$ paramètres (un θ pour chaque classe) mais nécessite de spécifier une structure de dépendance entre les ψ_i , ce qui complique énormément le modèle (sauf dans le cas de ψ_i indépendants entre les classes, ce qui est peu réaliste car aucun facteur n'influence simultanément toutes les classes).

3.5.3 Résultats

Comme nous ne disposons pas de formule fermée pour le calcul de l'intégrale, nous avons implémenté un algorithme dans R qui permet de faire le calcul nécessaire. Nous avons trouvé que :

$$\theta = 0.087$$

Le paramètre du modèle avec copule est faible dans le sens où la dépendance de queue inférieure associée au paramètre est proche de zéro (elle vaut : $\lambda_L := 2^{-\frac{1}{\theta}} = 3.467 \times 10^{-4}$)

Chapitre 4

Taux de perte en cas de défaut (LGD)

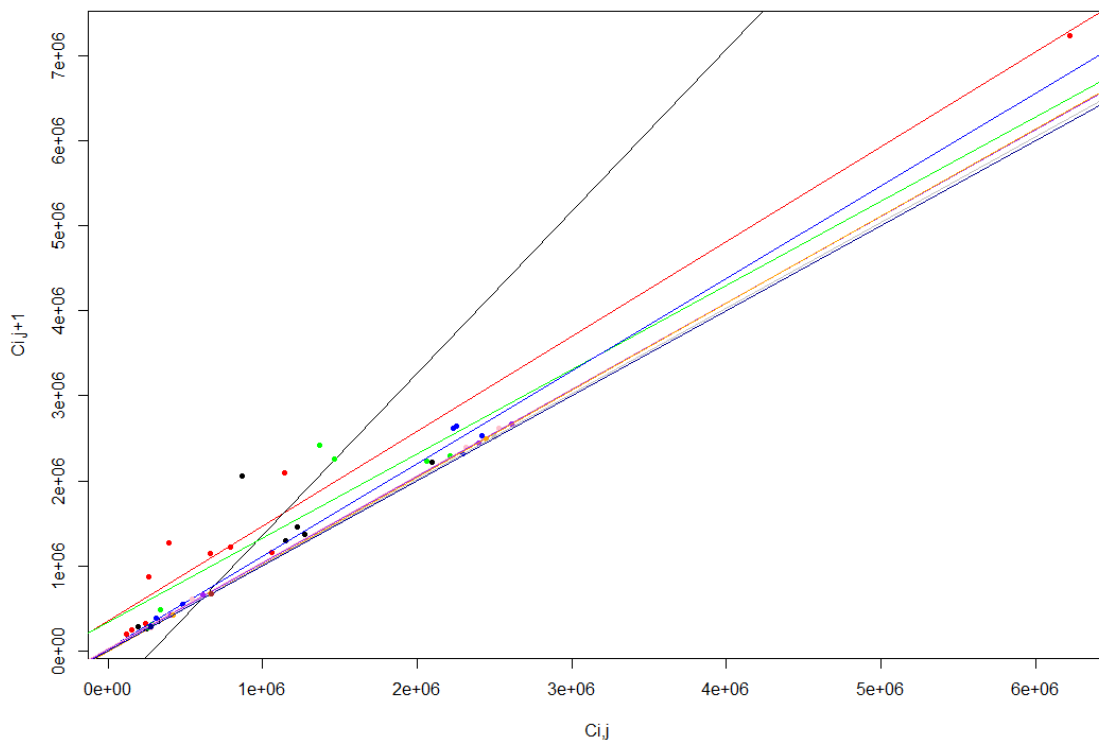
	Page
4.1 Vérification des hypothèses de la méthode ChainLadder	88
4.2 Vérification des hypothèses pour les autres méthodes	90
4.2.1 De Vylder	90
4.2.2 Mack ChainLadder	90
4.2.3 Modèles linéaires généralisés (GLM)	91
4.3 Estimation de la LGD	91
4.3.1 Remplissage des triangles par les différentes méthodes	91

4.1 Vérification des hypothèses de la méthode ChainLadder

Afin de vérifier les hypothèses des méthodes énoncées dans la partie théorique, nous effectuons des régressions entre les montants récupérés de deux années de développement successives.

Si les points semblent alignés sur la droite de régression et si cette dernière passe par l'origine dans tous les graphes alors la méthode **ChainLadder** est applicable.

En effet, cette dernière se base sur un modèle qui stipule que le développement sur les années précédentes va se reproduire dans les mêmes proportions chaque année.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 33 – Graphe des régressions entre les récupérations d'années de développement successives

Nous avons regroupé sur un même graphique les différentes régressions et on peut en conclure que **ChainLadder** est applicable à quelques observations près.

La méthode de **London-Chain** est plus élaborée et souple que la méthode de **ChainLadder** dans la mesure où elle tient compte d'une tendance multiplicative, mais aussi d'une tendance additive (ou incrémentale). En posant cette dernière à zéro, on retrouve le modèle de **Chain-Ladder**.

Ainsi, contrairement à la méthode de Chain-Ladder qui ne pouvait être appliquée que lorsque les points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ étaient sensiblement alignés (à k fixé) sur une droite passant par l'origine, la méthode de **London-Chain** suppose elle aussi un alignement des points sur une même droite, mais relâche l'hypothèse d'alignement avec l'origine.

Dans notre travail, étant donné que nous avons une significativité pour la quasi-totalité de nos régression, nous n'avons pas appliqué la méthode **London-Chain**.

Une seconde hypothèse que nous devons vérifier pour la méthode ChainLadder est que ce coefficient de linéarité est identique sur les années de survénance : $f_{i,k} = f_k, \forall i = 0, \dots, I - k - 1, \forall k = 0, \dots, J - 1$. Pour chaque année de développement k , il s'agit de calculer les $(f_{i,k})_{i=0, \dots, I-k-1}$ et les comparer à leur moyenne f_k (s'ils sont identiques, alors ils valent la moyenne).

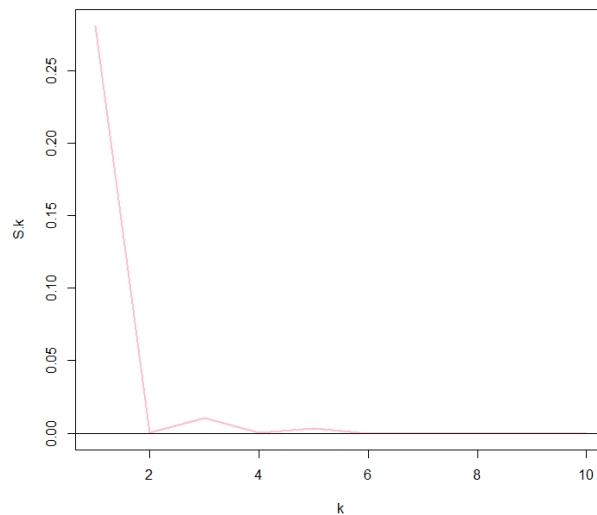
Nous allons donc calculer successivement $\hat{F}_{i,k}, \hat{F}_{.,k}, S_{.,k}$ avec :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i,k} &= \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \\ \hat{F}_{.,k} &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^I \hat{F}_{i,k} \\ S_{.,k}^2 &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^I \left(\hat{F}_{i,k} - \hat{F}_{.,k} \right)^2 \end{aligned}$$

Le calcul préalable des coefficients nous donne, dans notre exemple, les résultats suivants (utilisation de la librairie *ChainLadder* du logiciel R) :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1.44	1.46	1.14	1.21	1.05	1.03	1.02	1.01	1.000203	1.000005
F	1.97	1.44	1.24	1.20	1.11	1.04	1.01	1.01	1.000290	1.000005
S	0.28	4.65e-4	1.05e-2	1.09e-4	3.17e-3	5.97e-5	4.39e-5	2.95e-5	7.62e-9	0.00

On remarque que les coefficients de **Chain-Ladder** sont proches des moyennes des ratios évalués ligne par ligne sauf dans le premier cas. Le premier facteur de **ChainLadder**, par exemple, s'interprète comme ceci : le passage d'un encours cumulé de l'année de développement 0, à celui de l'année de développement 1, se fait par un facteur de 1.445.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 34 – Variance entre les moyennes des coefficients par années et les facteurs estimés par ChainLadder

Pour la première année de développement (voir figure 34), l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survénance ne semble pas réaliste. D'ailleurs, la variance $S_{\bullet 0}^2$ est relativement élevée

et signifie que les coefficients par année sont plutôt volatiles autour de la moyenne. En revanche, elle paraît plus vraisemblable pour les années de développement suivantes.

Nous considérons donc que les hypothèses du modèle de ChainLadder sont ici vérifiées, et nous pouvons plus tard appliquer le modèle.

4.2 Vérification des hypothèses pour les autres méthodes

4.2.1 De Vylder

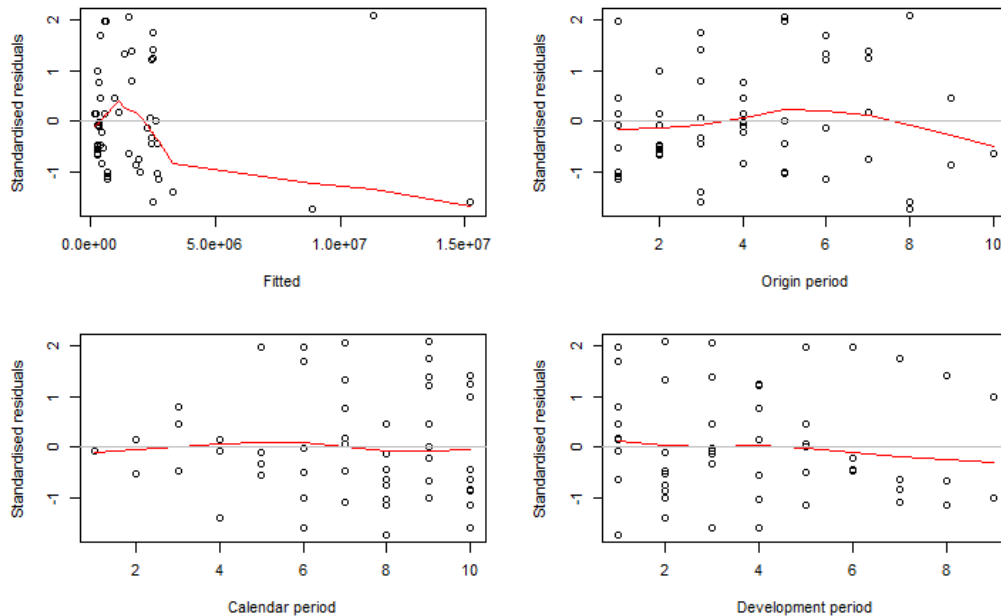
Ayant vérifié les hypothèses pour la méthode **ChainLadder**, nous n'avons presque plus de contraintes à vérifier.

En effet, les hypothèses de la méthode **DeVylder** se traduisent comme celles de la méthode de **ChainLadder** car à la fin il faut trouver une régression entre deux incréments successifs qui justifie l'aspect multiplicatif (passage par l'origine de la droite de régression).

Donc tout comme la méthode de **ChainLadder**, la méthode **DeVylder** est prête à être appliquée d'après nos calculs précédents.

4.2.2 Mack ChainLadder

La méthode **Mack** vient compléter la méthode ChainLadder car elle vient y rajouter la notion de résidus et d'intervalles de confiance. Ainsi l'hypothèse que l'on devrait vérifier c'est une potentielle homoscedasticité des erreurs.



Source: Auteurs, fait sur R

FIGURE 35 – Hypothèses pour la méthode de Mack

La figure ci-dessus nous montre que nous avons hétéroscedasticité des résidus et cela est visible graphiquement car nous n'avons pas de forme linéaire quelques soient les abscisses considérées.

4.2.3 Modèles linéaires généralisés (GLM)

On utilise cette méthode lorsqu'on n'a pas une hypothèse de normalité des erreurs. Cela est logique car autrement notre variable à expliquer pourrait prendre des valeurs négatives sachant qu'il s'agit d'un taux compris entre 0 et 1.

Ainsi on utilise la méthode **GLM** en supposant une loi log normale ou une loi gamma pour nos récupérations et on fait la régression. On pourrait utiliser d'autres loi telles la loi Weibull, Exponentielle ou autre et ensuite choisir la meilleure des estimations par le critère d'Akaike (AIC).

Le critère d'information d'Akaike, (en anglais Akaike information criterion ou AIC) est une mesure de la qualité d'un modèle statistique proposée par Hirotugu Akaike en 1973.

Lorsque l'on estime un modèle statistique, il est possible d'augmenter la vraisemblance du modèle en ajoutant un paramètre. Le critère d'information d'Akaike, tout comme le critère d'information bayésien, permet de pénaliser les modèles en fonction du nombre de paramètres afin de satisfaire le critère de parcimonie. On choisit alors le modèle avec le critère d'information d'Akaike le plus faible.

Le critère d'information d'Akaike s'écrit comme suit :

$$\text{AIC} = 2k - 2\ln(L)$$

où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et L est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.

Le choix de la loi est une sorte d'hypothèse car cette dernière nous permet de savoir laquelle considérer pour les calculs.

Dans notre cas nous avons les AIC suivants :

$$AIC(\text{Gamma}) = 585$$

$$AIC(\text{Lnorm}) = 258$$

Nous allons donc tout au long de la prochaine partie présenter la méthode **GLM** en choisissant une distribution lognormal pour la modélisation.

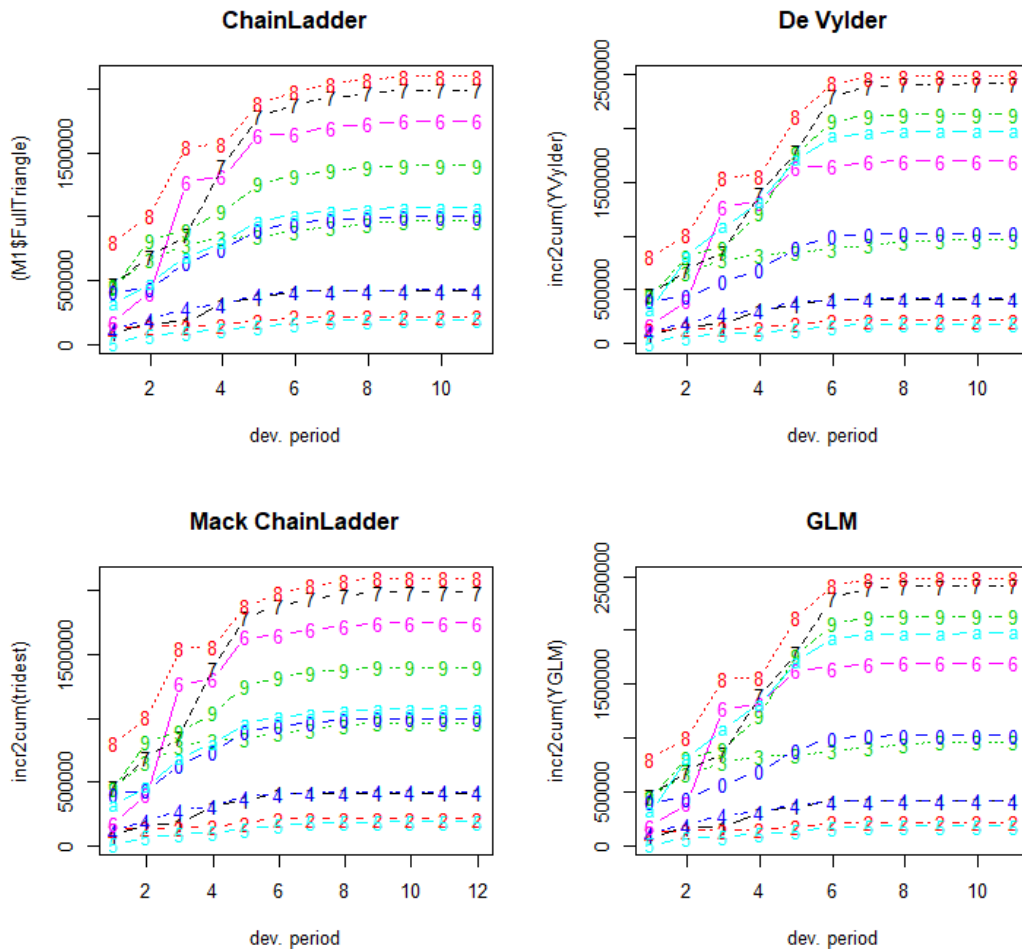
4.3 Estimation de la LGD

4.3.1 Remplissage des triangles par les différentes méthodes

Nous allons remplir les triangles des montants qu'on espère recouvrir par les quatre méthodes précédemment citées.

Nous voyons dans la figure 36 que les remplissages n'ont pas tous la même tendance selon la méthode choisie. La question venant à se poser serait : quelle est, parmi celles-ci, la meilleure des méthodes ?

Pour y répondre, il nous faudrait avoir un critère de sélection et pourtant on n'a pas un seul critère que vérifient toutes ces méthodes énumérées. En effet, le choix d'une méthode de provisionnement représente en soi même un projet de fin d'étude si on veut se baser sur des raisons qui sont vraiment solides et qui défendent ce dernier.



Source: Auteurs, fait sur R
 FIGURE 36 – Récupérations selon les 4 méthodes

Les méthodes de **ChainLadder** et **De Vylder** sont des méthodes déterministes et comme on a vu dans le tableau 2 de la partie théorique, elles ont autant d’avantages que d’inconvénients. Cela fait qu’on ne peut pas tout à fait compter sur elles pour nos estimations dans le cas du risque de crédit (car moins précises) même si elles sont plus simples à appliquer que celles stochastiques.

Quant à ces dernières, nous commençons par rejeter la méthode de **Mack** car celle-ci inclus un tail Factor qui permet d’estimer les récupérations futures après les années 11 de développement que nous avons.

En réalité s’il s’agissait de sinistres alors oui la méthode **Mack** permet de prendre en compte des sinistres survenus non déclarés pendant ces 11 années. C’est une méthode efficace pour les branches à développement long.

Notre cas est un calcul de l’éventuelle récupération sur les crédits en défaut. Nous jugeons donc préférable de ne pas espérer de récupération après les 10 années.

Ainsi parmi les méthodes stochastiques nous retenons la méthode **GLM**. C’est cette dernière que nous allons présenter.

La figure 37 contient alors les montants récupérés en fonction des années de survenance du défaut (en ligne) et des années de récupération (en colonne).

GLM (Lognormal)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	Somme
1	87613.6	81911.6	7513.3	140050.3	49268.3	50029.0	152.8	125.7	3.1	5.0	2.1	416674.9
2	128433.6	12248.8	670.1	9704.9	32459.4	32960.5	1000.0	112.8	76.6	123.8	6.9	217797.2
3	457927.1	206130.3	115149.5	51723.0	15650.4	37024.9	32293.3	28904.3	19623.1	1041.3	91.7	965559.0
4	117483.7	78564.9	87278.4	30228.6	74021.3	22540.4	8198.6	979.1	848.7	303.9	26.8	420474.5
5	12639.0	58884.0	20641.6	18446.8	23526.7	29903.2	20705.2	1943.1	465.2	166.6	14.7	187336.0
6	175354.9	226462.8	872262.9	39683.5	325013.0	11332.8	38957.3	7734.6	1851.8	663.2	58.4	1699375.3
7	464607.7	228355.5	162966.3	541353.2	391266.9	514757.9	86925.1	17258.1	4132.0	1479.8	130.3	2413232.7
8	1409288.1	356319.0	944348.6	27492.2	969544.2	528788.6	89294.4	17728.5	4244.6	1520.1	133.8	4348702.2
9	449136.7	368769.3	77729.4	320666.1	551842.1	300974.3	50824.3	10090.7	2415.9	865.2	76.2	2133390.2
10	407049.5	33025.6	136892.9	116030.5	199679.7	108905.2	18390.4	3651.2	874.2	313.1	27.6	1024839.9
11	319094.0	496742.2	270617.1	229375.2	394737.4	215289.5	36355.1	7217.9	1728.1	618.9	54.5	1971830.0

Source: Auteurs, fait sur Excel

FIGURE 37 – Récupérations selon la méthode GLM

A partir de la figure 37 nous tirons les taux de récupération de chaque année en divisant les montants récupérés par le montant total donné en crédit au cours de l'année.

Ce qui nous donne le tableau suivant :

Taux de recuperation selon GLM (Lognormal)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Moyenne par année de survenance
2007	19.25%	18.00%	1.65%	30.78%	10.83%	10.99%	0.03%	0.03%	0.00%	0.00%	0.00%	91.56%
2008	51.67%	4.93%	0.27%	3.90%	13.06%	13.26%	0.40%	0.05%	0.03%	0.05%	0.00%	87.62%
2009	38.98%	17.55%	9.80%	4.40%	1.33%	3.15%	2.75%	2.46%	1.67%	0.09%	0.01%	82.19%
2010	21.53%	14.40%	16.00%	5.54%	13.57%	4.13%	1.50%	0.18%	0.16%	0.06%	0.00%	77.07%
2011	4.85%	22.60%	7.92%	7.08%	9.03%	11.48%	7.95%	0.75%	0.18%	0.06%	0.01%	71.92%
2012	9.76%	12.61%	48.57%	2.21%	18.10%	0.63%	2.17%	0.43%	0.10%	0.04%	0.00%	94.62%
2013	18.04%	8.86%	6.33%	21.02%	15.19%	19.98%	3.37%	0.67%	0.16%	0.06%	0.01%	93.68%
2014	28.97%	7.33%	19.41%	0.57%	19.93%	10.87%	1.84%	0.36%	0.09%	0.03%	0.00%	89.40%
2015	17.67%	14.51%	3.06%	12.61%	21.71%	11.84%	2.00%	0.40%	0.10%	0.03%	0.00%	83.92%
2016	37.43%	3.04%	12.59%	10.67%	18.36%	10.01%	1.69%	0.34%	0.08%	0.03%	0.00%	94.23%
2017	2.21%	3.43%	1.87%	1.59%	2.73%	1.49%	0.25%	0.05%	0.01%	0.00%	0.00%	13.63%
Moyenne par année de développement	22.76%	11.57%	11.59%	9.12%	13.08%	8.89%	2.18%	0.52%	0.23%	0.04%	0.00%	79.99%

Source: Auteurs, fait sur Excel

FIGURE 38 – Taux de récupérations selon la méthode GLM

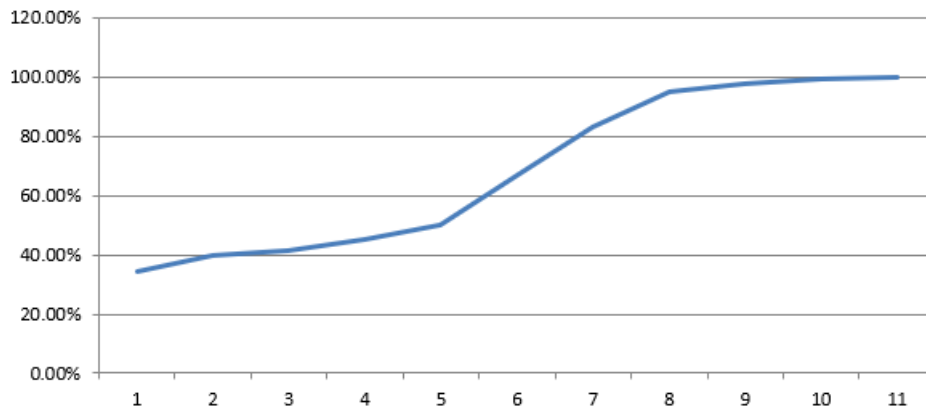
A partir de ces taux de récupération moyens nous utilisons la complémentarité pour déduire le taux de perte moyen par année de développement.

Etant donné que pour chaque année de développement nous avons des taux de récupération, nous pouvons donc déduire pour chacune de celles-ci un taux de perte à provisionner.

$$LGD_t = 1 - \sum_{k=t+1}^T \frac{TauxRecup_t}{(1+i)^k}$$

Où : t représente l'année de développement et i le taux moyen des emprunts octroyés par la banque.

D'où le graphique 39 qui représente le taux LGD selon chaque année de survenance.



Source: Auteurs, fait sur Excel

FIGURE 39 – Courbe du taux LGD selon la méthode GLM

Le taux nous intéressant dans le calcul de la provision est celui de la première année et il vaut 34.38%.

Cela est une bonne estimation et on le comprend car le taux prudentiel est de 45% afin d'éviter les surprises selon les agences de notation. Certaines réglementations imposent un taux de 60% pour éviter tout risque lorsque l'entreprise ne sait pas calculer son taux de perte en cas de défaut.

Conclusion

Ce projet s'est attaché à présenter plusieurs méthodes de calcul de la probabilité de défaut et du taux de perte en cas de défaut pour une banque africaine avec des contraintes spécifiques.

Nous avons commencé par décrire différentes méthodes pour calibrer les probabilités de défaut à long terme et indépendantes du cycle économique. Nous avons rejeté l'hypothèse de l'homogénéité temporelle qui apparaissait peu adaptée.

Afin de tenir compte de cette hétérogénéité, nous nous sommes placés dans le cadre du modèle de Merton en utilisant deux de ses fameuses adaptations : celle de Vasiček et celle des copules. Ainsi, nous avons présenté ces modèles, qui à partir des probabilités conditionnelles, calculent les probabilités de défaut sachant les conditions économiques à un instant donné (prises en compte à travers les facteurs).

Ces modèles diffèrent dans la structure de dépendance entre les classes :

- Corrélation linéaire pour le modèle de Vasiček ;
- Dépendance à travers les copules archimédiennes.

La calibration a été effectuée sur un portefeuille interne par maximum de vraisemblance sur le nombre de défauts observés sur la période 2015-2017.

Pour le calcul du taux de perte en cas de défaut, nous l'avons estimé par complémentarité avec le taux de récupération.

Pour ce faire, nous avons commencé par décrire le cadre théorique des méthodes déterministes et stochastiques que nous avons utilisées pour estimer les récupérations.

Nous avons ensuite appliqué plusieurs méthodes pour estimer le taux de récupération et choisi l'une d'entre elles selon certains critères qui la favorisaient par rapport aux autres méthodes.

Nous sommes donc revenus à la relation de complémentarité qui nous a permis d'estimer le taux de perte en cas de défaut.

Conclusion générale

L'ambition de la norme IFRS 9 est claire, cependant, les contours de son impact et de son coût restent encore peu définis. Les impacts de cette réforme seront sans doute connus après deux ou trois exercices, lorsqu'à l'épreuve des réalités, auront affleuré quelques difficultés pratiques. Pour l'instant, l'heure est à la préparation en vue du respect des délais.

Les enjeux dépassent ceux d'un simple ajustement de la méthode de calcul des montants de provisions. En effet, cette norme va impacter les institutions financières, en termes d'organisation de processus et modèles, puisqu'une coordination complète entre les équipes comptables et risques est nécessaire afin de déterminer les nouvelles modalités de provisionnement et ainsi garder une cohérence avec l'ensemble de la chaîne de valeur de l'information financière. Dans le cadre de notre projet de fin d'étude, nous nous sommes intéressés à la problématique de l'estimation de deux des paramètres qui permettent le calcul de l'ECL.

On comprend d'après la littérature que la norme IFRS 9 n'aurait – en aucun cas – pu éviter la crise des subprimes. Mais l'ampleur de cette crise aurait pu, d'une manière non négligeable, être amoindrie grâce à la méthode des pertes attendues et grâce à la nouvelle classification des instruments financiers qu'a apportée la norme.

Pistes de recherche

Nous avons considéré un unique facteur de risque dans notre étude : la classe de risque. On pourrait également ajouter d'autres facteurs de risques comme la zone géographique d'un client.

Le modèle avec copule pourrait également être amélioré en envisageant d'autres copules, comme par exemple les copules archimédiennes hiérarchiques : le portefeuille serait vu comme l'agrégation, par une copule, de sous portefeuilles de même classe, chaque sous portefeuille étant lui-même modélisé par une copule.

Un moyen de calcul du LGD est de le modéliser à partir d'une loi *Bêta* notamment. Cette loi est bien adaptée car elle est à support dans $[0, 1]$, qui est l'intervalle dans lequel le LGD est contenu, et est caractérisée par sa moyenne et son écart type.

Pour inclure la composante macroéconomique dans le calcul du LGD, il est possible d'utiliser le même modèle appliqué à la probabilité de défaut Point In Time (PIT) mais on ne l'a pas fait pour ne pas répéter les procédures.

Il est aussi possible d'utiliser le filtre de Kalman mais il va falloir avoir une donnée sur l'intensité du défaut. La variable non observable serait la composante macroéconomique.

Bibliographie

Textes réglementaire

- [1] Basel Committee on Banking Supervision *An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions*. BCBS. (2004)
- [2] The IFRS Foundation *IFRS 9 Financial Instruments*. the International Accounting Standards Board (IASB) (2014)

Livres et articles de recherche

- [3] Paul Demey, Jean-Frédéric Jouanin, Céline Roget and Thierry Roncalli. *Maximum likelihood estimate of default correlations*. RISK magazine, 2004.
- [4] Merton, R. C. *On the Pricing of Corporate Debt : the Risk Structure of Interest Rates* The Journal of Finance Vol.29 N.02, 1974.
- [5] Vasiček, O. A. *Limiting Loan Loss Probability Distribution* Risk, 1991.
- [6] Altman, E. I. *Default Recovery Rates and LGD in Credit Risk Modeling and Practice* 2006.
- [7] CONZE , A. Probabilities of default for impairment under ifrs 9.(2018)
<https://www.hiram-finance.com/wp-content/uploads/2018/03/Probabilities-of-default-for-impairment-under-ifrs-9.pdf>
- [8] Somnath Chatterjee *Modelling credit risk* Centre for Central Banking Studies, Bank of England (2015).
- [9] Puzanova *A Hierarchical Archimedean Copula for Portfolio Credit Risk Modelling*, Deutsche Bundesbank Discussion Paper Series 2 : Banking and Financial Studies no 14/2011
- [10] Arnaud de Servigny, Benoît Métayer et Ivan Zelenko *Le risque de crédit 3^o édition* 2006. Centre d'information et de documentation INSEA.
- [11] Puzanova *A Hierarchical Archimedean Copula for Portfolio Credit Risk Modelling*, Deutsche Bundesbank Discussion Paper Series 2 : Banking and Financial Studies no 14/2011

Supports de cours

- [12] El Qalli Y. *Théorie des Options* INSEA 2018-2019
- [13] Chater M. *Economie bancaire et monétaire* INSEA 2018-2019

Annexe A

Présentation de l'organisme

A.1 Présentation

Mazars est une organisation internationale d'origine française spécialisée dans l'audit, l'expertise comptable, la fiscalité et le conseil aux entreprises. Mazars a considérablement accéléré son développement dans le monde au cours des dernières années, et conforté son positionnement d'acteur international indépendant de premier plan.

La présence mondiale de Mazars aujourd'hui est structurée autour de plates-formes géographiques : l'Europe, l'Asie Pacifique, l'Afrique, le Moyen-Orient, l'Amérique Latine, les Caraïbes et l'Amérique du nord. Au 1er janvier 2018, Mazars et ses correspondants sont présents dans 102 pays et territoires, dont 86 font partie du partnership international intégré de Mazars, et 16 sont des correspondants et des bureaux de représentation. Le Groupe dispose d'une couverture supplémentaire dans 21 autres pays, par le biais de l'alliance internationale Praxity.

Mazars fédère aujourd'hui les expertises de 20 000 femmes et hommes, basés dans 300 bureaux à travers le monde. Menés par 980 associés, ils servent leurs clients de toutes tailles, des PME aux grands groupes internationaux, et des start-ups aux ETI et aux organismes publics, à toutes les étapes de leur développement.

Une particularité saillante de ce groupe tient à son origine française dans un marché de l'audit largement dominé par les cabinets anglo-saxon tel que Deloitte, Ernest young, KPMG et PricewaterhouseCoopers. Mazars occupe en Europe la cinquième place derrière ces derniers, communément appelés les Big Four.



* Partenaires de Mazars (dont membres de l'Alliance Praxity et de l'Alliance CFx.B)

Source: Mazars

FIGURE 40 – Présence du groupe à l'international

Fort de sa dimension internationale, Mazars s'affirme comme une alternative crédible capable de proposer des solutions fluides et sur mesure aux grandes sociétés, quelle que soit leur origine.

De plus, tous les collaborateurs de Mazars sont unis par une exigence identiques de qualité et une détermination commune à aller au-delà des normes techniques et éthiques en vigueur.

Il est à noter que Mazars a une forte présence au niveau des instances européennes et internationales relatives à ses métiers notamment l'IAS (International Accounting Standards Board), l'IFRC (International Financial Reporting Committee), etc.

A.2 Les instances de gouvernance

La direction de Mazars est assurée par son conseil de gérance sous la supervision du conseil de surveillance, les présidents et membres de ses deux instances sont élus par les associés lors des assemblées générales.

Ces instances de gouvernance aux rôles et aux missions clairement définis leurs permettent d'anticiper et de répondre aux défis majeurs, qu'il s'agisse des perspectives de développement et de l'organisation opérationnelle ou de l'émergence de futurs leaders et de l'accroissement de la confiance de leurs parties prenantes.

A.2.1 Les règles du partnership intégré

Le principal objectif du partnership international intégré de Mazars est de garantir un service de qualité constante à nos clients, tout particulièrement à nos clients internationaux qui souhaitent

des services parfaitement coordonnés, reflétant leur propre structure de groupe.

Ce partnership est fondé sur un modèle démocratique qui permet à chaque associé de prendre part dans la décision des principales stratégies de développement du groupe. Les associés membres partagent, au-delà de leurs différences culturelles, les mêmes valeurs et la même conception du métier et de ses standards d'excellence. Mazars publie annuellement ses comptes consolidés, audités et en normes IFRS dans son rapport annuel.

A.2.2 10 années de croissance continue et robuste

Mazars a connu une forte croissance durant ces dix dernières années tant au niveau du chiffre d'affaires, que de l'étendue de ses bureaux de part le monde et par conséquent le nombre de ses professionnels. Les chiffres suivants sont relatifs au partnership international de Mazars.

Annee	Evènement
1940	Robert Mazars crée son cabinet d'expertise comptable, près de Rouen
1965	Création, le 1er janvier, de la SARL Cabinet Robert Mazars
1973	Les équipes d'audit du cabinet s'installent à Paris
1975	Mazars ouvre ses premiers bureaux hors de France, en Allemagne et en Espagne.
1983	Robert Mazars décide de se retirer. Patrick de Cambourg devient Président de Mazars
1995	Mazars fusionne avec Guérard Viala. La fusion marque la création du partnership international CARL, dans lequel tous les associés, qu'ils viennent de l'une ou l'autre des deux entités, sont associés à parts égales dans le développement de l'organisation.
1998	Mazars intègre Neville Russell, l'un des principaux cabinets indépendants du Royaume-Uni
1999	Mazars & Guérard choisit d'opérer sous le nom de marque "Mazars"
2000	Mazars fusionne avec Paardekooper Hoffman aux Pays-Bas. Avec des bureaux dans la plupart des pays européens, Mazars devient une organisation véritablement internationale. Hors d'Europe, Mazars est déjà présent en Amérique Latine - au Brésil-, en Chine et dans plusieurs pays d'Afrique. L'organisation peut également servir ses clients dans de nombreux autres pays et territoires, via des accords de correspondance.
2003-2007	Mazars accélère son développement international, avec de nouveaux bureaux en Europe de l'Est - Russie incluse -, en Chine, en Inde et dans la zone Asie-Pacifique, ainsi qu'Amérique latine - au Mexique, au Brésil, en Argentine, au Venezuela, au Chili,...-, en Afrique australe et au Moyen-Orient.
2007	Mazars est membre fondateur de l'Alliance Praxity qui regroupe plus de 100 firmes indépendantes dans 75 pays et territoires
2011	Philippe Castagnac devient CEO du Groupe.
2015	Mazars fusionne avec Roever Broenner Susat (RBS) et célèbre le 20ème anniversaire de son Partnership international intégré
2016	Le cabinet chinois ZhongShen ZhongHuan rejoint le partnership intégré de Mazars. Hervé Hélias devient CEO du Groupe.
2018	Mazars et ses correspondants opèrent dans 102 pays. 86 de ces pays sont membres du partnership intégré de Mazars et 16 sont des correspondants.

Source: Mazars
FIGURE 41 – Dates clés

A.3 Mazars au Maroc

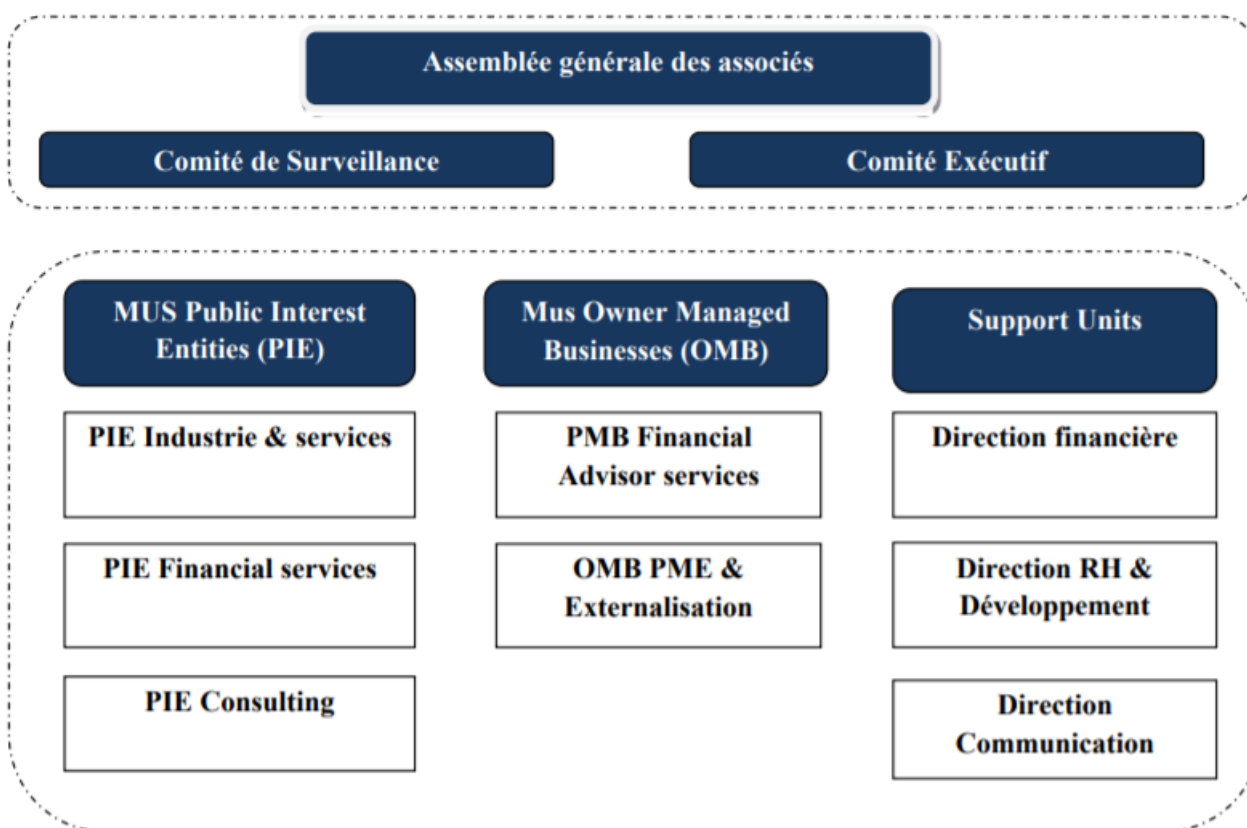
A.3.1 Présentation

Le cabinet « Mazars Audit et Conseil », membre intégré du partnership Mazars, fait partie des cinq plus importants cabinets d'audit et de conseil du Royaume. Fort d'une expérience de plus de trente-cinq ans, et porté par une équipe de plus d'une centaine de professionnels, le cabinet poursuit son ambition de rester l'un des acteurs les plus en vue pour accompagner le secteur public dans ses stratégies de modernisation et le secteur privé dans ses projets de développement au Maroc et dans la région de l'Afrique du nord et de l'Afrique subsaharienne. Le cabinet compte actuellement :

- 7 associés ;
- Plus de 140 auditeurs et consultants ;
- Une plateforme informatique centralisée et plus de 150 ordinateurs nomades et en réseau.

A.3.2 Organisation

Le cabinet est géré par un comité exécutif sous la supervision d'un comité de surveillance, il est composé de Management Units métiers et de trois directions de support :



Source: Mazars

FIGURE 42 – Organigramme

A.3.3 Domaines d'expertise

Le cabinet MAZARS intervient dans les métiers de l'audit financier, l'expertise comptable, l'actuariat, la fiscalité et le conseil aux entreprises, et ce, dans tous les secteurs d'activités, notamment

en immobilier et BTP, services financiers et industrie et services.

Focus sur l'offre actuariat de **MAZARS** : Les équipes "**Actuariat**" de Mazars regroupent quatre natures de compétences :

- Ingénierie financière,
- Actuariat d'assurance,
- Engagements sociaux,
- Statistiques et modélisation.

Ces équipes collaborent étroitement avec les autres équipes de l'organisation Mazars disposant de compétences "métier" connexes (audit financier, doctrine, contrôle interne, audit informatique...) ou d'une expertise sectorielle spécifique (banque, assurance...), pour constituer des équipes pluridisciplinaires traitant les besoins des clients portant notamment sur :

Actuariat Finance / Assurance :

- Elaboration des démarches de gestion actif/passif et d'allocation stratégique d'actifs,
- Pilotage et mise en œuvre des évolutions comptables (normes IFRS) et réglementaires (Solvency2, Bâle 2, Bâle 3) : diagnostic, études quantitatives d'impacts, modèles internes, reportings, déploiement,
- Fonction financière : revue critique de méthodologies et modèles appliqués,
- Formation sur les problématiques financières (Solvabilité 2, Quantitative Impact Study – QIS, ORSA, Bâle 3, modélisation, évaluation des produits financiers complexes, stress tests et back tests...),
- Valorisation de sociétés, due diligence, accompagnement post-fusion,
- Pricing d'instruments financiers complexes.

Actuariat / Pensions et avantages au personnel

- Assistance à la mise en place des Normes IAS 19 (passifs sociaux), IFRS 2 (rémunération en instruments de capitaux propres),
- Réalisation de bilans actuariels,
- Accompagnement pour l'externalisation des caisses internes de retraite.

Annexe B

Tableau des effectifs détaillés

Mois	Effectif au début du mois	Entrées	Sorties	Effectif à la fin du mois
1	8900	293	247	8946
2	8946	322	254	9014
3	9014	271	213	9072
4	9072	395	341	9126
5	9126	657	284	9499
6	9499	793	391	9901
7	9901	490	273	10118
8	10118	1041	228	10931
9	10931	841	340	11432
10	11432	452	349	11535
11	11535	670	189	12016
12	12016	883	395	12504
13	12504	309	377	12436
14	12436	498	453	12481
15	12481	736	463	12754
16	12754	843	812	12785
17	12785	535	434	12886
18	12886	331	554	12663
19	12663	605	608	12660
20	12660	940	713	12887
21	12887	580	619	12848
22	12848	414	308	12954
23	12954	228	542	12640
24	12640	98	96	12642
25	12642	251	272	12621

Source: Auteurs.

TABLE 18 – Mouvements mensuels de la population

Annexe C

Démonstrations

C.1 Démonstration de l'estimateur du maximum de vraisemblance du générateur

La probabilité d'une migration de i vers j à une date t_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 P(\{\text{Migration de } i \text{ vers } j \text{ en } t_1\}) &= P(\{\text{Migration de } i \text{ vers } j \text{ en } t_1\} | \{\text{Saut en } t_1\}) \times P(\{\text{Saut en } t_1\}) \\
 &= \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_i} f_{T_i}(t_1) \\
 &= \lambda_{i,j} \exp(-\lambda_i t_1)
 \end{aligned}$$

Avec $f_{T_i}(x) = \lambda_i \exp(-\lambda_i x)$, la densité du temps passé dans l'état i .

Chaque contrepartie part d'un état i , migre vers un état j à une date t_1 , puis vers un état k à une date $t_2 \dots$. La vraisemblance associée au comportement de migration s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
 L(\lambda) &= \lambda_{i,j} \exp(-\lambda_i t_1) \lambda_{j,k} \exp(-\lambda_j (t_2 - t_1)) \dots \\
 &= \prod_{i=1}^K \prod_{j \neq i} \lambda_{i,j}^{N_{i,j}(T)} \exp(-\lambda_i R_i(T))
 \end{aligned}$$

Où $R_i(t) = \int_0^t Y_i(s) ds$ Le log-vraisemblance est :

$$\log(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i} N_{i,j}(T) \log(\lambda_{i,j}) - \lambda_i R_i(T)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance pour les $(\lambda_{i,j})_{i \neq j}$, obtenu en maximisant le log-vraisemblance, est donc :

$$\hat{\lambda}_{i,j} = \frac{N_{i,j}(T)}{\int_0^T Y_i(s) ds} \quad \forall j \neq i$$

C.2 Démonstration de la loi de la variable aléatoire associée à une copule de Clayton

Soit $X \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$. La transformée de Laplace de X est :

$$\begin{aligned} L_X(t) &= \mathbb{E}(\exp(-tX)) = \int_0^\infty \exp(-tx) \frac{x^{\frac{1}{\theta}-1} e^{-x}}{\Gamma\left(\frac{1}{\theta}\right)} dx \\ &= (y = (1+t)x) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\theta}\right)} \int_0^\infty \exp(-y) \left(\frac{y}{1+t}\right)^{\frac{1}{\theta}} dy \\ &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\theta}\right)} \int_0^\infty \exp(-y) y^{\frac{1}{\theta}} dy \\ &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

On en déduit le générateur :

$$\phi(t) = L_X^{-1}(t) = t^{-\theta} - 1$$

C.3 Démonstration du calcul des sensibilités

Dans cet annexe, nous allons exposer les démonstrations de la formule de la vraisemblance des taux observés.

Cas Avec beaucoup d'observation

Si l'échantillon est suffisamment important, nous pouvons assimiler le taux de défaut observé à la probabilité de défaut observée. Ainsi, l'estimateur de $\widehat{f_{l,t}^T}$ est :

$$\Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)$$

Avec z_{t+T} qui suit une loi normale centrée réduite

Par conséquent, nous avons :

$$\Phi^{-1}\left(\widehat{f_{l,t}^T}\right) = \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}$$

Donc $\Phi^{-1}\left(\widehat{f_{l,t}^T}\right)$ suit une loi normale de moyenne $\frac{b_{i,T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}$ et d'écart-type $\frac{\sqrt{\rho_{i,T}}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}$

Donc la vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}_{i,t}^T(\rho_{i,T}) = \frac{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}{\sqrt{2\pi\rho_{i,T}}} \cdot e^{-\frac{1 - \rho_{i,T}}{2\rho_{i,T}} \left(\Phi^{-1}(f_{i,t}^T) - \frac{b_{i,T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^2}$$

et son log est :

$$\ln(\mathcal{L}_{i,t}^T(\rho_{i,T})) = -\frac{1}{2} \ln\left(2\pi \cdot \frac{\rho_{i,T}}{1 - \rho_{i,T}}\right) - \frac{1 - \rho_{i,T}}{2\rho_{i,T}} \left(\Phi^{-1}(f_{i,t}^T) - \frac{b_{i,T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^2$$

Cas Avec peu d'observation

Dans le cas inverse, nous considérons que la probabilité d'observer de $k_{i,t}^T$ défauts parmi $n_{i,t}^T$ individus (c'est-à-dire $f_{i,t}^T = \frac{k_{i,t}^T}{n_{i,t}^T}$) suit une loi binomial.

La vraisemblance d'observation de $k_{i,t}^T$ défauts parmi $n_{i,t}^T$ individus conditionnellement au cycle économique s'écrit :

$$\mathcal{L}_{i,t}^T(\rho_{i,T}|z_{t+T}) = \frac{n_{i,t}^T!}{k_{i,t}^T!(n_{i,t}^T - k_{i,t}^T)!} \cdot \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T}$$

La vraisemblance inconditionnelle s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,t}^T(\rho_{i,T}) &= E\left[\mathcal{L}_{i,t}^T(\rho_{i,T}|z_{t+T})\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_{i,t}^T!}{k_{i,t}^T!(n_{i,t}^T - k_{i,t}^T)!} \cdot \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T} \cdot \varphi(s) \cdot ds \end{aligned}$$

Son log est :

$$L_t(\rho_{i,T}) = \ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n_{i,t}^T}{k_{i,t}^T} \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot s}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T} \varphi(s) ds\right)$$

C.4 Démonstration Calcul du facteur macroéconomique

Afin de calculer l'historique de la variable z_t , nous procédons de façon similaire à l'obtention des sensibilités $\rho_{i,T}$. En d'autres termes, nous cherchons à approximer la série z idéale par une série \hat{z} de manière à minimiser les écarts entre les probabilités modélisées et les taux de défauts observés au sens de la vraisemblance. Pour estimer la formule de la vraisemblance, nous distinguons deux cas selon le nombre d'observations.

Dans les deux cas, nous définissons mathématiquement \hat{z}_t l'estimateur de z_t et nommons $\sigma \cdot \epsilon$ l'erreur d'estimation. Cette dernière variable aléatoire suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

Cas Avec beaucoup d'observation

Si le nombre d'observation sur lequel est estimé le taux de défaut est suffisamment important alors l'estimateur du taux de défaut s'écrit :

$$\hat{f}_{i,t}^T = \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma \cdot \epsilon)}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}\right)$$

est donc :

$$\Phi^{-1}\left(\hat{f}_{i,t}^T\right) = \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma \cdot \epsilon)}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}$$

Nous avons alors :

$$\Phi^{-1}\left(\hat{f}_{i,t}^T\right) \sim \mathcal{N}\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot \widehat{z}_{t+T}}{\sqrt{1 - \rho_{i,T}}}; \sqrt{\frac{\rho_{i,T}}{1 - \rho_{i,T}}} \cdot \sigma\right)$$

Donc la vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}_{i,t}^T(\widehat{z}_{t+T}, \sigma) = \frac{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}{\sqrt{2\pi\rho_{i,T}\sigma}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}{2\sigma\sqrt{\rho_{i,T}}} \left(\Phi^{-1}\left(\widehat{f}_{i,t}^T\right) - \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}} \right)^2}$$

Son log est :

$$\ln(\mathcal{L}_{i,t}^T(\widehat{z}_{t+T}, \sigma)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\rho_{i,T}}{2\pi\rho_{i,T}\sigma}\right) - \frac{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}{2\sigma\sqrt{\rho_{i,T}}} \cdot \left(\Phi^{-1}\left(\widehat{f}_{i,t}^T\right) - \frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot z_{t+T}}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}} \right)^2$$

Cas Avec peu d'observation

Dans le cas inverse, nous considérons que la probabilité d'observer de $k_{i,t}^T$ défauts parmi $n_{i,t}^T$ individus (c'est-à-dire $f_{i,t}^T = \frac{k_{i,t}^T}{n_{i,t}^T}$) suit une loi binomial.

La vraisemblance d'observation de $k_{i,t}^T$ défauts parmi $n_{i,t}^T$ individus conditionnellement au cycle économique s'écrit :

$$\frac{n_{i,t}^T!}{k_{i,t}^T! (n_{i,t}^T - k_{i,t}^T)!} \cdot \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma\epsilon)}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma\epsilon)}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T}$$

Le log de la vraisemblance inconditionnelle est :

$$\ln(\mathcal{L}_{i,t}^T(\widehat{z}_{t+T}, \sigma)) = \ln\left(\frac{n_{i,t}^T}{k_{i,t}^T! (n_{i,t}^T - k_{i,t}^T)!}\right) + \ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_{i,t}^T!}{k_{i,t}^T! (n_{i,t}^T - k_{i,t}^T)!} \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma\epsilon)}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)^{k_{i,t}^T} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{b_{i,T} - \sqrt{\rho_{i,T}} \cdot (\widehat{z}_{t+T} + \sigma\epsilon)}{\sqrt{1-\rho_{i,T}}}\right)\right)^{n_{i,t}^T - k_{i,t}^T} \cdot \varphi(\epsilon) d\epsilon\right)$$

Annexe D

Bibliothèques utilisées sur R

Comme nous avons utilisé le logiciel R dans la majorité des calibrations faites. Nous présentons ci-dessous une liste non exhaustive des bibliothèques que nous avons utilisée.

foreign : importer et exporter les données en toute forme possible.

Hmisc : contient de nombreuses fonctions utiles pour l'analyse des données et pour la conception des graphiques de haut niveau.

markovchain : permet de créer et de gérer des chaînes de markov.

expm : calcul des matrices exponentielles, logarithmes et quantités associées.

ctmcd : permet d'estimer les matrices des générateurs de Markov.

leaps : sélection des sous-ensembles de régression, y compris la recherche exhaustive.

Rfast : contient un ensemble de fonctions rapides (utilitaires) pour l'analyse des données.

ChainLadder : contient diverses méthodes et modèles statistiques qui sont généralement utilisés pour l'estimation des montants à perdre ou à récupérer.

MASS : contient les fonctions de statistique de base.

ggplot2 et **dplyr** : utilisées pour les graphiques et les tableaux sous R.

numDeriv : contient les méthodes de calcul des dérivés numériques du premier et du deuxième ordre.