ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Modélisation de la courbe des taux et valorisation des produits dérivés de taux

Préparé par : **Mlle. BOUYACOUB Jihane**

Sous la direction de : ***M.* EL QALLI Yassine (INSEA)**
M. BAKIR Khalid (Banque Centrale Populaire)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. BAKIR Khalid** (Banque Centrale Populaire)
- **M. EL QALLI Yassine** (INSEA)
- **M. DOGHMI Ahmed** (INSEA)

Juin 2016 / PFE N° 05

Résumé

Le risque, sous ses formes divers, est une bête noire des opérateurs de marchés. Dans le cadre de se prémunir contre toute éventuelle mauvaise évolution des cours des sous-jacents, un marché à terme aura naissance bientôt au Maroc. Ce marché est une étape importante pour parfaire l'ossature du marché financier. Il permettra aux opérateurs de négocier des produits dont le prix dépend d'autres actifs sous-jacents, à titre d'exemple le taux d'intérêt, actions, devises et marchandises, et qui permettent à leurs détenteurs de se couvrir contre les risques de variation des prix actifs. Parmi ces produits si prisés, nous citons, dans le cadre de ce travail, les produits concernant les évolutions des taux d'intérêt qui sont *Forward* de taux, Swaps de taux et Options sur taux.

En effet, cette étude se déroule en deux étapes. La première consiste à construire et modéliser la structure par terme, par conséquent de trouver le modèle qui prédit le mieux les prochaines courbes de taux. Dans la partie qui suit, nous élaborons des *pricers* pour évaluer chacun des produits dérivés dont le sous-jacent est le taux d'intérêt. Ce travail vient en réponse au besoin témoigné par l'organisme, traitant chacun des produits précédemment cités dans un contexte bien spécifique. Aussi ce rapport, apporte-il une vision plus ou moins générale du fonctionnement de chacun de ces produits et l'intérêt de chacun.

Mots clés

- Taux d'intérêt;
- taux zéro-coupon;
- structure par terme;
- modélisation;
- prévision;
- couverture risque de taux;
- produits dérivés;
- pricing;
- FRA;
- swap de taux;
- Cap.

Dédicace

A mes **chers parents**

Aucun mot, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, ma considération et l'amour éternel pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon instruction et mon bien être. Votre générosité et votre bonneté ont toujours été un exemple pour nous tous.

A ma **sœur,**

Tu m'as toujours été présente pour les bons conseils. Ton affection et ton soutien m'ont été d'un grand secours au long de ma vie professionnelle et personnelle.

A mon **frère Anouar,**

Mon confident, mon ange gardien et mon fidèle compagnon dans les moments les plus délicats de cette vie mystérieuse. Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour toi.

A mon **frère Yassine**,

Rien au monde ne pourra combler l'amour d'un grand frère.

A ma chère **nièce Sophia** et mon **neveu Rayan**,

Vous comblez ma vie de bonheur telle deux jolies roses ornant un jardin de fleurs. Je vous souhaite ainsi une vie pleine de bonheur.

A **mes amis,**

A tous mes amis d'enfance, mes compagnons de route, amis de l'INSEA ou d'ailleurs. Je vous remercie pour votre présence votre soutien et votre aide.

A **vous tous,**

Je dédie cet humble travail. Puissiez-vous y avoir le fruit de votre soutien et assistance, et un gage de gratitude et de reconnaissance.

Remerciements

Je saisis cette occasion pour adresser mes vifs remerciements à mon respectueux professeur, **Monsieur EL QALLI Yassine**, qui par sa formation et son encadrement, a su m'éclairer sur le chemin à suivre pour arriver au bout de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et reconnaissance à mon maitre de stage **Monsieur BAKIR Khalid,** trader au sein du Desk taux et dérivés de taux à la salle des marchés de la Banque Centrale Populaire, pour la qualité du savoir qu'il m'a transmis, et qui, malgré les occupations et les responsabilités qu'il assume, a toujours eu le temps pour m'écouter, me conseiller et m'orienter tout au long de mon stage.

Mes remerciements vont également vers **Monsieur TAJJEDINE Othmane**, Directeur de la banque des marchés Banque Centrale Populaire, de m'avoir accueilli au sein de sa direction. Mes sentiments de gratitude s'adressent également à **Madame BENNANI Kaoutar**, trader au sein du Desk taux et dérivés de taux, ainsi que l'ensemble du personnel travaillant au sein de la salle des marchés, pour leur aide, leur sympathie et leur accueil.

Je conserve un remerciement spécial à **Monsieur DOGHMI Ahmed** de m'avoir honorée avec grande sympathie de siéger parmi mon jury de soutenance. Veuillez trouver ici l'expression de mon grand respect et ma profonde gratitude.

Enfin, j'adresse mon chaleureux remerciement à tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Table de matière :

Tables de figures

Liste des tableaux

Liste des abréviations

- **AOA** : **A**bsence d'**O**pportunité d'**A**rbitrage
- **AR** : **A**uto **R**égressif
- **BAM** : **B**ank **A**l-**M**aghrib
- **CIR** : **C**ox-**I**ngersoll-**R**oss
- **EURIBOR** : **E**uro **I**nter-**b**ank **O**ffered **R**ate
- **FRA** : **F**orward **R**ate **A**greement
- **IBOR** : **I**nter-**b**ank **O**ffered **R**ate
- **IRS** : **Interst R**ate **S**wap
- **JJ** : **J**our le **J**our
- **LIBOR** : **L**ondon **I**nter-**b**ank **O**ffered **R**ate
- **PAC** : **P**artial **A**uto **C**orrelation
- **Pbs** : **P**oint de **B**ase
- **OTC** : **O**ver **T**he **C**ounter
- **TMP** : **T**aux **M**oyen **P**onderé
- **VBA** : **V**isual **B**asic For **A**pplication
- **ZC** : **Z**éro- **C**oupon

Introduction

Il est évident que le risque se trouve au cœur de toute stratégie d'investissement créée sur les marchés financiers, c'est pour cela, les analystes financiers sont toujours à la recherche de moyens permettant la mesure et la gestion du risque. Il s'agit, en fait, de trouver un certain équilibre entre les bénéfices et le risque.

Dans cette perspective, l'instauration du marché à terme a été validé récemment au Maroc. Or le marché à terme est un marché sur lequel se négocie des produits dérivés dont le prix dépend d'autres actifs sous-jacents et qui permettent à leurs détenteurs de se couvrir contre les risques de variation des prix de ces actifs. L'objectif de ces produits n'est plus limité à la couverture, il s'étendra aussi à la spéculation. Les opérateurs auront la possibilité de fixer aujourd'hui un prix pour une transaction qui parviendra dans quelques mois. Ceci apportera certainement de la liquidité essentielle au bon fonctionnement de tout marché organisé. Sauf que, il est primordial de la contenir. Pour ce faire, les autorités marocaines ont déjà édité les règles d'organisation, de fonctionnement et de contrôle de ce marché. Elles définissent également les instruments financiers qui peuvent y être négociés, tout comme les institutions habilitées à intervenir sur le marché. Eventuellement, parmi ces produits dérivés, il y a les dérives de taux qui feront l'objet de notre travail, et qui permettent de se couvrir contre une évolution défavorable des taux.

Dans ce contexte, l'objectif principal de notre projet d'études effectué au sein de la salle des marchés de la Banque Centrale Populaire, est d'élaborer des pricers pratiques permettant la valorisation des prix de certains produits dérivés, en l'occurrence Forward Rate Agreement (FRA), Swaps de taux, Caps et Floors.

Au travers de ce rapport, nous commencerons dans un premier temps par mettre en exergue les diverses notions nécessaires à la compréhension du sujet et constituant le jargon de celui-ci, en allant du taux d'intérêt au zéro-coupon, passant par le risque et la couverture. Nous nous attarderons ensuite dans le second chapitre sur la modélisation de la courbe des taux qui constitue le noyau du travail. Pour ce faire nous nous baserons sur plusieurs modèles de taux, afin d'en retenir vers la fin qu'un seul. Juste après, nous consacrerons trois chapitres successifs aux trois produits dérivés de taux sur lesquels porte le présent rapport. Chaque chapitre sera l'occasion de définir un produit à part, de comprendre son fonctionnement, d'établir une méthodologie stochastique et déterministe et finalement d'implémenter un programme pour son évaluation.

Chapitre I

Contexte du stage

1.1 Présentation Banque centrale populaire

Le Groupe Banque Centrale Populaire est un groupe bancaire marocain créé en 1965. Le groupe comprend un réseau de dix Banques Régionales (BPR) et une panoplie des filiales spécialisées, toutes dirigées par une Banque Centrale, appelée Banque Centrale Populaire. Les Banques Régionales sont des banques coopératives, dont le capital est détenu par des associés particuliers. Leurs réseaux couvrent la totalité du territoire Marocain. Alors que Leurs filiales sont spécialisées dans différents domaines : crédits à la consommation, micro-finances, bancassurance, offshoring, banques d'affaires, sociétés de financements et même des filiales bancaires réparties sur les trois continents (Afrique, Europe et Amérique).

1.1.2 Banque Centrale Populaire

La **Banque Centrale Populaire** est un établissement de crédit, sous forme de société anonyme à Conseil d'Administration. Elle est cotée en bourse depuis le 8 juillet 2004. La BCP assure un rôle central au sein du groupe des Banques Populaires. Elle a deux missions principales, la première, comme étant un établissement de crédit habilité à réaliser toutes les opérations bancaires, sans toutefois disposer d'un réseau propre. La deuxième fonction est comme organisme central bancaire des Banques Populaires Régionales.

La BCP coordonne la politique financière du Groupe, permet de refinancer les BPR et de gérer leurs excédents de trésorerie ainsi que les services d'intérêt commun pour le compte de ses organismes.

1.1.3 La salle des marchés

Le marché de capitaux est le lieu de rencontre entre agents économiques disposant d'un excédent de capitaux et d'autres témoignant d'un besoin de financement. Nous distinguons dans un marché de capitaux entre marché financier et marché monétaire. Le marché financier est un marché des capitaux à long terme où s'échangent des valeurs mobilières, telles des actions ou des obligations. Elles sont en premier lieu émises sur un marché dit primaire ensuite revendues sur le marché secondaire communément dit « Bourse ». Quant au marché monétaire est un marché des capitaux à court et moyen terme où s'échangent des titres monétaires, par exemple billets de trésorerie, bons du Trésor. Celui-ci est également divisé en deux marchés, à un "marché interbancaire" sur lequel les banques échangent des liquidités et la Banque Centrale exerce sa fonction de régulation monétaire, puis un deuxième marché incluant des transactions sur les TCN (Titres de Créances Négociables) avec les agents non financiers.

Le groupe Banques Populaires à travers sa salle des marchés met à la disposition de ses clients toute son expertise dans la couverture des risques liés aux marchés financiers et la préservation de la valeur des actifs et des marges, ainsi que la maîtrise des coûts dans un environnement économique en mouvement.

Une salle des marchés est en fait un lieu où se regroupent les opérateurs chargés de prendre des positions sur les marchés financiers, monétaires et des devises, nationaux et internationaux, pour le compte de l'établissement ou de la clientèle tout en assurant des seuils de rentabilité et de couverture de risque.

Une salle des marchés est communément organisée en trois pôles qui sont le Front Office, Middle Office et Back Office.

1.1.3.1 Le Front Office

Le Front Office constitue littéralement l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture, de financement, d'investissement, de gestion de position, de trading et d'arbitrage. Le Front Office qui regroupe les acteurs généralement des traders et des commerciaux, qui interviennent et négocient sur les marchés que ce soit pour le compte de la clientèle ou de la banque elle-même.

Le Front office de la Banque Centrale Populaire se compose de quatre desks qui peuvent être résumé par ce schéma :

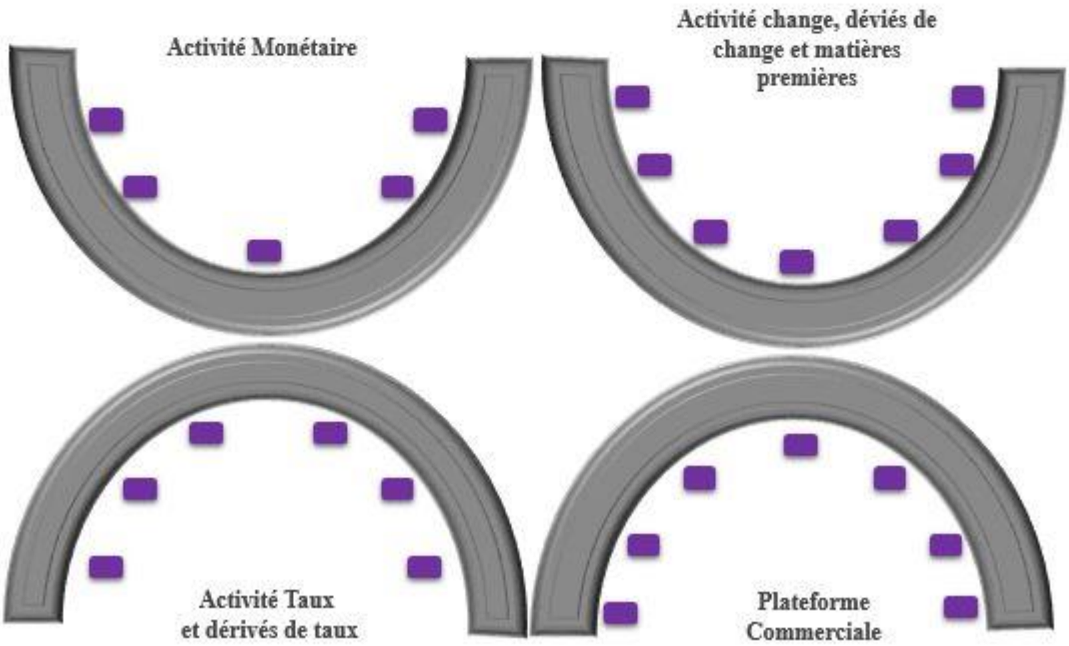


Figure 1: organisation du Front Office de la salle des marchés BCP

Cette illustration résume organisation du Front Office et sa composition. Afin de comprendre, son fonctionnement nous expliciterons le métier de chaque desk séparément :

- **Le marché de change:** Dans un marché rythmé par une grande volatilité, les traders assurent le suivi, le conseil et la compétitivité des cotations pour une meilleure optimisation d'exposition des clients aux risques de change.

- **Le marché des matières premières:** Face aux fluctuations des prix des produits de base précisément les produits agricoles, produits pétroliers, métaux...etc, la Banque des marchés grâce à son positionnement et aux partenariats noués avec les plus grandes institutions financières internationales (Banques, courtiers etc.) offre la possibilité de couvrir des opérations sur les différents marchés des commodities.
- **Le marché monétaire:** Dans un objectif d'amélioration et d'optimisation de la gestion des besoins et excédents de trésorerie des institutions financières en dirham et en devises, le desk trésorerie accompagne et conseille la clientèle sur les meilleurs choix à entreprendre.
- **Le marché obligataire:** En tant que Market Maker, intermédiaire très actif en valeur de trésor et ayant participé en tant que chef de fil et/ou membre du syndicat de placement aux principales émissions traitées sur le marché national, le desk obligataire met à la disposition de son expertise dans la couverture des risques de taux.
- **La plateforme commerciale** : composée des « sales » qui est souvent en relation directe avec les clients.

1.1.3.2 Le Middle Office

Ce service est chargé de suivre et de contrôler les opérations initiées par les traders de la salle des marchés, plus exactement du Front Office, après avoir vérifié leur conformité à la réglementation. Il est chargé de faire la jonction entre le Front et le Back office. Il saisit sur une base de données toutes les transactions effectuées par les traders et les sales. Enfin, il met en place avec le Front et le Back office des méthodes d'analyse des risques et définit les procédures homogènes par lignes de produits.

1.1.3.3 Le Back Office

Et enfin, le Back Office, qui a pour mission d'assurer le suivi administratif et comptable des opérations conclues au Front Office. Il enregistre les transactions, informe les clients (entreprises ou institutions), effectue le règlement et la livraison des titres, gère le versement des dividendes des actions et des intérêts des obligations. Il participe également à la mise en place et à l'évolution des procédures et des systèmes informatiques.

1.2 AUTOUR DE LA NOTION DE TAUX D'INTERET

Certes le taux d'intérêt, se définit comme étant la somme que doit verser, sous forme de revenus, un emprunteur à celui qui lui a prêté de l'argent pour pouvoir en faire usage. Mais, il existe une panoplie de taux d'intérêt et du coup de quel taux d'intérêt parle-t-on? Cette section sera consacrée donc, à la définition du taux en général et la présentation des différents types de taux existant sur les marchés financiers. Ces taux peuvent être classé selon la durée de l'emprunt, leurs modes de calcul, leurs fonctions et selon le fait qu'ils tiennent compte de l'inflation ou non.

1.2.1 Définition

Le taux d'intérêt est une notion qui a vu le jour il y'a belle lurette. Dans l'antiquité l'intérêt de capital avait un sens d'usure à connotation péjoratif. Cette condamnation s'est d'ailleurs prolongée dans le temps. L'église Catholique a interdit une telle activité aux Chrétiens. De même pour les pays islamique appliquant la Chariaa, ce qui obligeait les banques à se rémunérer par une sorte de participation forfaitisée aux bénéfices réalisés par l'emprunteur grâce à cet argent.

Depuis, l'intérêt ou le taux d'intérêt a été fortement attaché à la spéculation et les différents marchés commencent à se développer et l'activité économique s'étendre .De ce temps, l'intérêt n'est plus considéré comme pratique de spéculation ou de profit illicite mais plutôt comme la rémunération du capital prêté, versée par l'emprunteur au prêteur. En ce sens, l'intérêt constitue tout simplement le montant à verser au prêteur pour l'indemniser de la non-jouissance de son capital. L'intérêt est très associé à une prime d'inflation qui compense la perte de pouvoir d'achat pour le créancier due à la hausse des prix, ainsi dédommage l'épargnant de la non-disponibilité de son argent. L'intérêt est aussi lié à une prime de liquidité qui indemnise l'incidence de la durée de l'immobilisation du capital. En effet, le créancier risque de ne pas disposer de son argent au moment où il en aurait besoin, comme il peut subir une perte d'opportunité (ne pas pouvoir réaliser un achat ou un placement profitable faute de liquidités disponibles) ; cette désutilité est d'autant plus élevée que la durée du prêt est plus longue.

Le *taux* d'*intérêt* a maintenant une grande importance économique car il influe sur la rémunération de l'épargne et sur le coût du crédit pour les ménages, il joue sur l'investissement et les coûts financiers pour les entreprises et conditionne la charge de l'État. D'où l'existence de plusieurs taux d'intérêt qui diffèrent selon le lieu de la formation, durée, et l'utilisation.

1.2.2 Les différents types de taux d'intérêt :

- Taux simple et taux composé :

L'idée des taux simple est que les intérêts perçus chaque année ne donnent pas lieu à la perception d'intérêts sur les intérêts. Ceci expliquant la dénomination d'intérêts simples, on se contente de calculer les intérêts chaque année comme s'il s'agissait d'un nouveau projet d'investissement d'un horizon d'un an (absence de la notion de réinvestissement). Par opposition aux intérêts simples, les intérêts composés permettent de percevoir à la fois les intérêts et les intérêts des intérêts. Plus précisément, les taux d'intérêt sont dits composés lorsque, à la fin de chaque période de calcul, les intérêts sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts. Les intérêts sont alors dits « capitalisés ». Entre intérêts simples et intérêts composés, ce n'est pas le taux nominal qui change, c'est le capital emprunté ou placé qui augmente ou non durant la durée du placement.

- Taux nominal/taux réel :

Le taux d'intérêt nominal est un taux déterminé en intégrant la variable anticipation d'inflation. Il est à noter que l'inflation est l'indice de la hausse générale des prix. C'est le taux d'intérêt inscrit sur un contrat de prêt. Il représente ce que l'emprunteur paye au prêteur. En revanche, pour avoir une vision plus réaliste de ce que rapportera le placement du prêteur, ou bien de ce qu'il coutera à l'emprunteur, il est nécessaire de tenir compte de l'inflation et donc de raisonner en terme réel plutôt qu'en terme nominal.

Si nous considérons **R** comme le taux d'intérêt nominal et $\boldsymbol{\pi}$ le taux d'inflation, le taux d'intérêt réel **r** :

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{R}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\pi}} - \mathbf{1}$$

Comme les taux d'inflation sont très faibles, nous pouvons approximer le taux d'intérêt réel à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\pi}$$

- Taux court et taux long

Le taux d'intérêt varie en fonction du délai de remboursement consenti à l'emprunteur. En principe, il est d'autant plus élevé que la durée du prêt s'allonge. Il doit donc être plus coûteux d'emprunter à dix ans qu'à un an, car le risque pris par le créancier est plus important. Aujourd'hui, la distinction entre les taux longs et les taux courts a moins de sens qu'auparavant dans la mesure où l'offre et la demande des capitaux ont les principaux déterminants des taux d'intérêt en prenant en considération l'inflation.

Les taux à court terme- sont déterminés sur le marché monétaire et résultent essentiellement de la politique conduite par la Bank Al-Maghreb. Ces taux représentent le prix que les banques commerciales doivent payer pour se refinancer, c'est-à-dire obtenir la monnaie manuelle dont elles ont besoin.

C'est en vertu des considérations internes -crainte de l'inflation- et de plus en plus externes que la Banque centrale fixe le niveau de taux « directeurs » sur le marché interbancaire. Ainsi le désir d'attirer des capitaux étrangers pour favoriser une appréciation de la monnaie nationale sur le marché des changes ou l'obligation de suivre le niveau du taux d'intérêt fixé sur les autres marchés monétaires influencent largement le niveau de ces taux.

En revanche, les taux à long terme sont fonction du marché des capitaux, donc du rapport entre l'épargne et l'investissement. Si la demande de fonds prêtables excède l'offre, le taux d'intérêt à long terme va augmenter. Il en est de même lorsqu'un épargnant cherche à se prémunir de l'inflation; il exigera un prix plus élevé pour l'épargne qu'il consent à mettre à la disposition de l'emprunteur afin que le taux d'intérêt réel soit suffisamment élevé.

- Les taux sans risque ou d'Etat

Le taux sans risque consiste en la rémunération du sacrifice que fait l'agent économique suite à la décision de postposer la disposition de ses liquidités sans aucune prise de risque. L'appréhension du taux sans risque est à priori subjective puisque dépendant de la préférence de chaque individu. Nous disposons toutefois d'une référence économique puisqu'une telle rémunération peut être approchée sur le marché par le taux d'intérêt octroyé par l'émetteur dépourvu théoriquement de tout risque de solvabilité, savoir l'Etat.

- Taux de rendement actuariel :

Très utilisé dans le monde de la finance, le taux actuariel désigne le taux de rendement véritable d'un placement ou, formulé autrement, du taux d'intérêt réellement perçu par un investisseur. Le taux actuariel s'applique principalement aux rendements associés aux produits de placement, aux crédits ou bien encore aux émissions d'emprunt.

Or, il ne faut pas confondre le taux de rendement actuariel avec le taux d'intérêt nominal ou facial de l'obligation, ce dernier étant fixe, est déterminé à l'émission de l'obligation et sert au calcul des coupons alors que l'autre varie tout au long de la vie de l'obligation et sert à actualiser les coupons et le nominal pour déterminer le prix de l'obligation.

- Le taux monétaire et taux actuariel:

Le taux monétaire diffère du taux de rendement actuariel en termes de durée. Le taux monétaire étant le taux d'intérêt du marché monétaire où s'échangent des produits financiers d'une durée de vie inférieure à un an. Ce type de taux est calculé sur la base d'une année commerciale qui est équivalent à 360 jours. Par contre, les taux actuariels correspondent à une durée supérieure à un an. Ils sont calculés en base nombre de jours exacts. Ainsi, afin de comparer entre taux de court terme et taux de long terme, il faut transformer le taux en base actuarielle afin de tenir compte des intérêts qui ne seront pas versés en fin de période annuelle mais à l'échéance de l'opération. Le passage du taux monétaire au taux actuariel se fait suivant la relation suivante, étant la durée en jours :

$$\boldsymbol{(1 + Ta)^{j/exact} = 1 + Tm * \frac{j}{exact}} \qquad \textbf{(1)}$$

Avec **J** : le nombre de jours (maturité correspondant au taux que l'on veut convertir)

Exact : nombre de jour exact de l'année, il faut distinguer entre l'année bissextile ou non

Tm : le taux monétaire

Ta : le taux actuariel.

- Taux zéro-coupon :

Le taux zéro coupon est le taux actuariel d'un instrument financier « zéro-coupon » .Ce taux ne donne lieu à aucun paiement intermédiaire d'intérêts. On dit aussi qu'il n'y a pas de détachement de coupon intermédiaire. Lors du remboursement du taux zéro coupon, nous ne disposons que de deux flux, un flux initial et un flux final de remboursement.

- Taux *forward* :

Les taux *forward* sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. A titre d'exemple, le taux *forward* pour la seconde année, vu à l'instant, est le taux à un an qui devrait être observé au début de la deuxième année pour qu'un placement à deux années soit équivalent à la succession de deux placements.

1.2.3 Conventions de décompte des jours et cotations

Les conventions en matière de décompte des jours donnent une idée sur la manière dont les intérêts sont capitalisés au cours du temps. Généralement, nous connaissons l'intérêt sur des périodes de références, notamment l'intérêt perçu entre de deux dates de paiement de coupons des obligations, mais il est nécessaire de pouvoir le calculer sur n'importe quelle période de temps.

Les conventions de décompte des jours sont exprimées par un rapport de la forme de A/B. Le A définit le nombre de jour entre les deux dates ou l'intérêt est calculé. Par contre, le B stipule la mesure du nombre total de jours dans la période de référence. L'intérêt est alors calculé de la manière suivante :

$$\frac{\textit{nombre de jours entre les deux dates}}{\textit{nombre de jours de la période de référence}} * \textit{intérêts sur une période de référence}$$

D'ailleurs les conventions les plus courantes sont :

- ✓ Exact/Exact
- ✓ Exact/360
- ✓ 30/360

La première convention est souvent utilisée sur le marché obligataire. Elle indique que les intérêts entre deux dates est fondé sur le rapport du nombre de jours exacts entre ces deux derniers et du nombre exact de nombre de jours de la période de référence. Si jamais la période de référence est une année, il faut prendre en considération si l'année est bissextile ou non, et si jamais la période est un semestre le nombre de jour variera selon que le mois de février est inclus ou non et selon le nombre de mois de 31 jours.

La deuxième convention de calcul est très utilisée pour les taux proportionnels sur les instruments monétaires, le numérateur représente le nombre de jours calendaires exact du placement. Par contre, le dénominateur considère que l'année ne comporte que des mois de trente jours.

La dernière convention de calcul est très fréquente dans le marché des swaps. Elle est calculée sous l'hypothèse que tous les mois de l'année comportent trente jours.

1.3 Le marché des taux

Les marchés de taux d'intérêt sont les marchés de capitaux les plus importants du monde, loin devant le marché des changes et très loin devant le marché d'actions, non seulement par les volumes traités mais aussi par leur importance économique.

Nous séparons les marchés de taux d'intérêt en marché monétaire pour le court terme et marché obligataire pour le moyen et long terme.

1.3.1 Le marché monétaire

Le marché monétaire est un marché financier où s'échangent des titres de courte durée contre des liquidités. Il est réservé aux institutions financières et entreprises qui peuvent prêter ou emprunter des liquidités sur des durées très courtes.

Le marché monétaire est principalement organisé en un marché interbancaire réservé aux banques et un marché de titres de créances réservé aux investisseurs :

- **Le marché interbancaire** est le marché où les banques prêtent et empruntent des liquidités à très court terme sans création de titres en contrepartie (emprunt à blanc). La durée la plus fréquente est le jour le jour. Les prêts et emprunts garantis par des titres sont connus sous le terme pension. La pension consiste en un transfert simultané, entre deux parties, de titres contre une certaine somme d'argent, avec l'engagement des deux parties de procéder au transfert inverse à une date ultérieure.
- **Le marché des titres de créances** négociables TCN est un marché où les établissements de crédit empruntent par la création de Certificats de Dépôt CD ou Bons des Sociétés de Financement BSF, et les entreprises par la création de Billet de Trésorerie. Ce sont des titres de durées courtes ou moyennes.

1.3.2 Le marché obligataire

Le marché Obligataire est un marché financier où les entreprises peuvent emprunter des liquidités par création de titres de dette connu sous le terme obligations. C'est le marché où sont émises, vendues et achetées les obligations. Une obligation est une part d'un emprunt donnant droit à la perception d'un intérêt. Le prêteur récupère son capital lorsque l'obligation arrive à son échéance.

En tant qu'un instrument de placement, l'achat des obligations permet aux investisseurs particuliers de devenir créanciers de grandes entreprises nationales ou de l'Etat.

Les obligations cotées sont échangées au niveau de la Bourse. Les obligations non cotées sont échangées de gré à gré à travers les intermédiaires financiers.

Les obligations d'Etat ou Bons du Trésor ne sont pas cotées en Bourse. Leur placement se fait à travers des intermédiaires financiers appelés intermédiaires en valeurs du Trésor IVT.

1.4 La notion du risque:

Selon JP Morgan[1], le risque est considéré comme une exposition à l'incertain. Généralement, le risque désigne un danger bien identifié, associé à l'occurrence d'un événement ou d'une série d'événements, parfaitement descriptibles, dont on ignore s'ils se produiront mais dont on sait qu'ils sont susceptibles de se produire dans une situation exposante.

Les risques financiers correspondent aux différents risques inhérents aux activités bancaires et financières, au sens large, et peuvent potentiellement concernés l'ensemble des agents économiques. Les risques financiers comprennent une panoplie très large des risques

[1] Ancienne banque d'investissement aux Etats-Unis crée en 1871

tels que le risque de change, de taux ou de liquidité. D'autre part, les banques et les institutions financières sont au premier rang des acteurs concernés par ces risques financiers.

Les risques peuvent être classé en diffèrent catégorie de risque, qui sont principalement au nombre de trois :

-Le **risque crédit** ou risque de contrepartie s'agit du risque de non remboursement d'une dette par un emprunteur (cela vaut aussi pour les titres de dettes telles que les obligations souveraines Grecques).

-Le **risque opérationnel** résultent des erreurs qui peuvent être faites en instruisant des paiements ou en réglant des transactions mais également suite à ce que l'on n'aurait pu prévoir comme les fraudes, les catastrophes naturelles, les bugs informatiques…;

-le **risque de marché** est le risque de perte qui peut résulter des fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille d'actifs ou éventuellement un passif. Les différents facteurs de risques liés au marché sont les taux d'intérêt, les cours de change, les cours des actions et les prix des matières premières. Les variations de ces différents éléments donnent naissance au risque de marché. Ce dernier englobe :

- **Le risque du taux d'intérêt :** Il représente le risque inhérent à la détention, dans le portefeuille de négociation, de titres de créance et d'autres instruments liés aux taux d'intérêt ou à la prise de position sur de tels titres ou instruments. Le taux d'intérêt est le facteur majeur de risque considéré en l'occurrence dans ce travail.
- **Le risque de position sur titre de propriété** : C'est le risque lié à la détention de titres de propriété, ou à la prise de position sur de tels titres et instruments.
- **Le risque de change :** Le risque lié aux positions concernant la détention de devise.
- **Le risque sur les produits de base :** C'est le risque inhérent à la détention ou à la prise de position sur les produits de base et les métaux précieux à l'exception de l'Or.
- **Le risque sur options :** Ce risque est lié à la détention des options associées à chacune des catégories de risques précédents.

1.4.1 Le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt peut être défini comme le risque de perte ou de manque à gagner, d'une dévalorisation du patrimoine ou d'une diminution des revenus d'un agent économique du fait des fluctuations des taux d'intérêt.

Dans la mesure où les banques sont endettées, les fluctuations des taux d'intérêt induisent un risque contre lequel elles doivent se prémunir. n cas de figure des plus récents: **la crise des Subprimes** (2008) aux États-Unis dont le taux d'intérêt est l'une des raisons principales. En effet, quelques années avant l'occurrence de la crise, des ménages « pauvres » ont eu recours à des emprunts avec des taux bas, mais variables pour l'achat de leur maison. On s'endette de façon massive, on voulait profiter de ces taux d'intérêt pour devenir propriétaire de son logement. De plus, les banques ne s'étaient pas non plus gênées pour proposer à leurs emprunteurs des modalités de financement très attractives même pour des clients potentiellement risqués. Or, les taux ont par la suite augmenté. Ainsi, ces ménages en question se sont retrouvés surendettés et n'ont pu rembourser l'argent dû. Les organismes prêteurs se retournent alors contre ces ménages qui se voient dès lors obligés de revendre leurs logements. De ce fait, il y a abondance de maisons en vente, les prix de l'immobilier baissent et les sommes récupérées ne suffisent pas pour rembourser les emprunts. D'énormes pertes sont enregistrées et les cours des actions chutent conduisant à un krach boursier. Ainsi, et en vue de couvrir ce type de risque, les institutions financières ont imaginé des instruments et des produits qui leur permettent de gérer le risque auquel elles sont exposées. On parlera de produits dérivés de taux. Les plus connus de ces produits sont les Forwards, les futures, les options et les swaps. Notons que ces produits permettent en outre aux établissements financiers de faire des profits.

1.5 Produits de couverture contre le risque de taux

1.5.1 Les origines

Les produits financiers de couverture contre le risque, précisément celui lié aux variations de taux, connaissent un essor considérable depuis les années 1970, spécialement les options et les contrats à terme.

Les agriculteurs concluaient auparavant des contrats financiers afin de vendre à terme leur production tout en se protégeant contre les éventuels aléas climatiques pouvant impacter les récoltes. Au XIXème siècle, précisément aux Etats Unis les contrats à terme apparaissent sous leur forme actuelle sur les marchés de céréales. Ils concernaient plus particulièrement le maïs, le blé, l'avoine. Puis ces derniers s'étendirent plus tard pour englober également certains produits de première nécessité et les matières premières. Les années soixante-dix ont connu l'apparition de nombreuses incertitudes économique et financière. A commencer par le flottement généralisé de la monnaie suite à l'abolition du système de Bretton Woods[2], une volatilité accrue des taux d'intérêt et des prix des matières premières notamment avec le premier choc pétrolier en 1973.La volatilité des taux de change a explosé. Sur les marchés obligataires et de marchandises un même scenario s'est produit: les taux d'intérêt ont commencé à enregistrer des fluctuations significatives et les cours de matières premières de leur part à flamber après le premier choc. Ce nouvel environnement économique a dressé le tapis devant une prise en conscience des risques financiers de la part des différents acteurs économiques et le développement de produits financiers dits produits dérivés.

1.5.2 Produits dérivés de taux :

Le présent travail porte essentiellement sur les produits dérivés de taux suivants : Les Forward Rate Agreement (FRA), les Swaps de taux et enfin les Caps et les Floors.

- **Forward Rate Agreement (F.R.A)** est un contrat de gré à gré par lequel deux contreparties fixent entre elles à l'avance le taux de prêt ou d'emprunt futur pour un montant, une durée et une date bien précis.

[2] En espérant mettre en place un système monétaire international capable de promouvoir le plein emploi et la stabilité des prix sans restreindre le commerce international, les représentants de 44 pays se regroupèrent à Breton Woods aux Etats-Unis et signent des accords qui portèrent le nom de ce lieu. Ces accords eurent pour résultats la naissance du Fond monétaire International et l'établissement d'un régime de changes fixes ayant pour référence le dollar.

- **Swap de taux** est un contrat de gré à gré permettant d'échanger, sur la base d'un montant nominal, les flux d'intérêts calculés sur un taux fixe contre les flux d'intérêts calculés sur un taux variable à des moments bien déterminés.
- **Options de taux :** Une option sur taux donne à l'acheteur le droit et non l'obligation d'emprunter ou de prêter un montant à un taux d'intérêt fixé (dit taux d'intérêt d'exercice) pour une durée spécifique.

Nous parlons de **Cap** lorsqu'il s'agit d'option d'achat. L'acheteur d'un Cap détermine au préalable le taux qu'il souhaite payer au maximum pour son emprunt; le vendeur s'engage à payer à l'acheteur du Cap la différence de taux s'il dépasse le niveau convenu. Dans le cas contraire, lorsqu'il est question d'option de vente, on parle de **Floor**. L'acheteur de Floor détermine préalablement le taux qu'il souhaite recevoir au minimum pour son placement en échange d'une prime. Il reçoit ainsi la différence de taux du vendeur si le taux baisse par rapport au niveau convenu.

Conclusion

Au travers ce chapitre, nous estimons avoir présenté l'ensemble des attraits de notre stage de fin d'études. A commencer par l'organisme et l'entité où celui-ci a pris place, en passant par quelques-unes des notions constituant l'ossature du sujet sur lequel porte le travail et terminant par une introduction au cœur du sujet. Rappelons-nous donc, qu'il s'agit essentiellement de définir et de cerner les concepts de FRA, Swaps de taux, Caps et Floors, outils de couverture contre le risque de taux, d'en permettre l'évaluation à tout instant et de mettre en exergue leur intérêt pour la banque. Nous consacrerons par la suite un chapitre à chacun de ces produits. Sauf qu'avant de faire ceci, une modélisation de la courbe des taux et des prévisions des taux futurs s'avère nécessaire.

Chapitre II

Modélisation et prévision de la courbe de taux

Le taux d'intérêt est un élément fondamental pour l'évaluation de pratiquement tous les actifs financiers, ainsi pour l'évaluation des actifs dérivés qui occupe une grande partie de ce travail. Dans le présent chapitre, nous aborderons tout d'abord les éléments essentiels concernant la notion du taux, particulièrement le taux zéro coupon. Nous focaliserons ensuite sur la construction de la courbe des taux. Nous présenterons ensuite des processus stochastiques qui modélise et qui prédit la structure par terme.

2.1 Autour de la notion du zéro coupon

2.1.1 L'obligation

Une *obligation* est un titre financier représentatif d'un prêt octroyé à un tiers et donnant droit à la réception de différents flux financiers fixes à des dates d'échéances futures fixées. Ces flux sont de deux natures, soit d'une part des versements d'intérêt appelés généralement *coupons,* versés à intervalles réguliers; soit d'autre part, le remboursement du prêt effectué le plus souvent en une fois au terme de la durée de vie de l'obligation. À l'émission du titre, les flux d'obligation sont schématisés de la manière suivante:

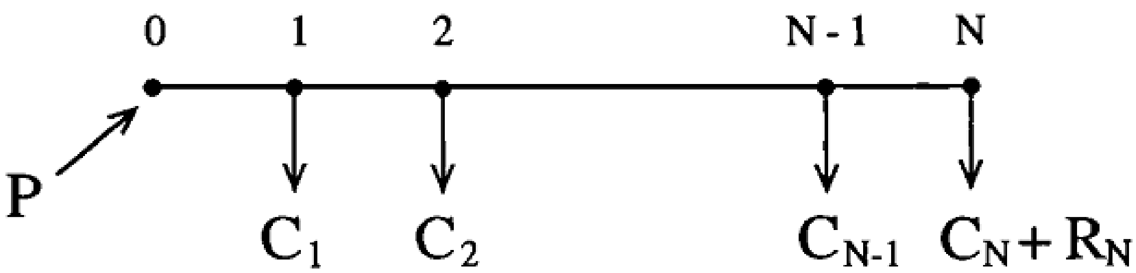


Figure 2 les flux d'une obligation à coupon

Où P = prix initial de l'obligation (prix d'émission),

N = durée de vie (ou maturité),

C_i = coupon au temps i,

R_N = valeur de remboursement au temps N.

Une obligation, à son émission, est donc caractérisée par son prix d'émission, sa durée, ses coupons et sa valeur de remboursement.

2.1.2 L'obligation zéro-coupon :

Une *obligation à coupons* est une obligation dont au moins un des coupons strictement antérieur au terme est non nul. Alors qu'une *obligation zéro-coupon* est une obligation dont tous les coupons sont nuls; un tel titre ne génère donc qu'un seul flux financier: la valeur de remboursement. Or toute obligation à coupons peut être décomposée en un ensemble d'obligations zéro-coupon.

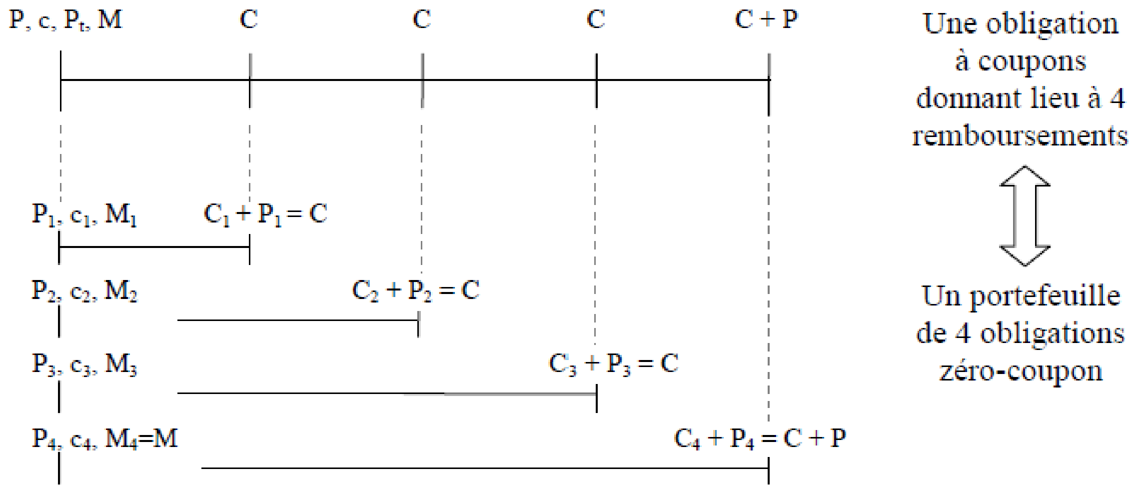


Figure 3 décompositions d'une obligation à coupons en obligation à zéro coupon

Avec

P = prix initial de l'obligation (prix d'émission);

c = Taux facial de l'obligation à coupons ;

M= Maturité ;

C = c*P, coupon ;

P_i =Principal de l'obligation i ;

M_i= Maturité de l'obligation i.

2.1.3 Le prix zéro coupon

Le Prix zéro-coupon est le prix d'un bon zéro-coupon de maturité T, noté P(t, T), appelé également fonction d'actualisation (lorsque celui-ci effectue cette fonction-ci), correspond à la valeur aujourd'hui (en t) d'**une unité monétaire** payée à T, sans paiements intermédiaires entre ces deux dates. Ainsi :

$$\mathbf{P(t, T)} = \frac{1}{1+\pi(T-t)*L(t,T)} \qquad \mathbf{(2)}$$

$\boldsymbol{\pi(T-t)}$: Différence entre les dates t et T selon la convention de décompte de jours retenue ;

$\boldsymbol{L(t,T)}$: Taux de marché à la date t.

2.1.4 Le taux zéro coupon

Le taux zéro-coupon est le taux le plus évoqué de par son utilité, il s'agit d'un taux d'intérêt obtenu sur un investissement à n années. En même temps, le taux zéro-coupon n'engendre qu'un seul flux au terme de ces années sans aucun flux intermédiaire. A l'encontre du taux zéro-coupon vient le **taux in fine** qui correspond au taux actuariel d'une obligation à coupons. Le taux zéro-coupon est préférable au taux in fine dans le sens ou le premier est unique en fonction de la maturité contrairement au taux in fine qui suppose en plus que les coupons sont réinvestis au même taux pour donner le rendement exact du placement. D'autant plus que l'actualisation à un taux unique et fixe, quel que soit la maturité, implique une courbe de taux horizontale chose qui n'a jamais lieu en réalité.

2.1.5 Le zéro coupon et l'évaluation des actifs financiers

A chaque fois que nous parlons d'évaluation de produits financiers, qu'ils s'agissent d'obligations, d'options ou autres, le taux zéro-coupon est forcément évoqué. Dans ce contexte, le taux zéro-coupon permet l'actualisation des flux à une date donnée ce qui constitue en fait le principe de l'évaluation d'un actif. L'intérêt du taux zéro-coupon dans ce sens, apparait principalement à travers son unicité. En effet, pour une maturité donnée, il n'existe qu'un seul taux zéro-coupon permettant l'actualisation à une date préalable t. Il est à noter que l'évaluation des dérives de taux dépend deux fois de cette courbe de taux plus que les dérivés sur actions ou sur devises, plus particulièrement en raison du fait que le taux d'intérêt, étant le sous-jacent, intervient à 1a fois dans la définition des Pay-offs[3] de ces actifs et dans leur actualisation.

Le présent travail présente dans son ensemble de façon succincte l'intérêt du taux zéro-coupon pour l'évaluation des actifs à travers notamment l'évaluation de certains produits dérivés. En outre, le point suivant de ce chapitre présentera deux méthodes de calcul du taux zéro-coupon (implicitement le prix zéro-coupon) auxquelles nous avons eu recours dans le cadre de l'évaluation des produits sur lesquels a porté notre travail.

2.2 La construction de la courbe des taux

2.2.1 Définition

La structure par terme des taux d'intérêt ou la courbe des taux ou encore la gamme des taux est une représentation graphique des valeurs des taux d'intérêt (en ordonnée) en fonction de leurs maturités (en abscisse).

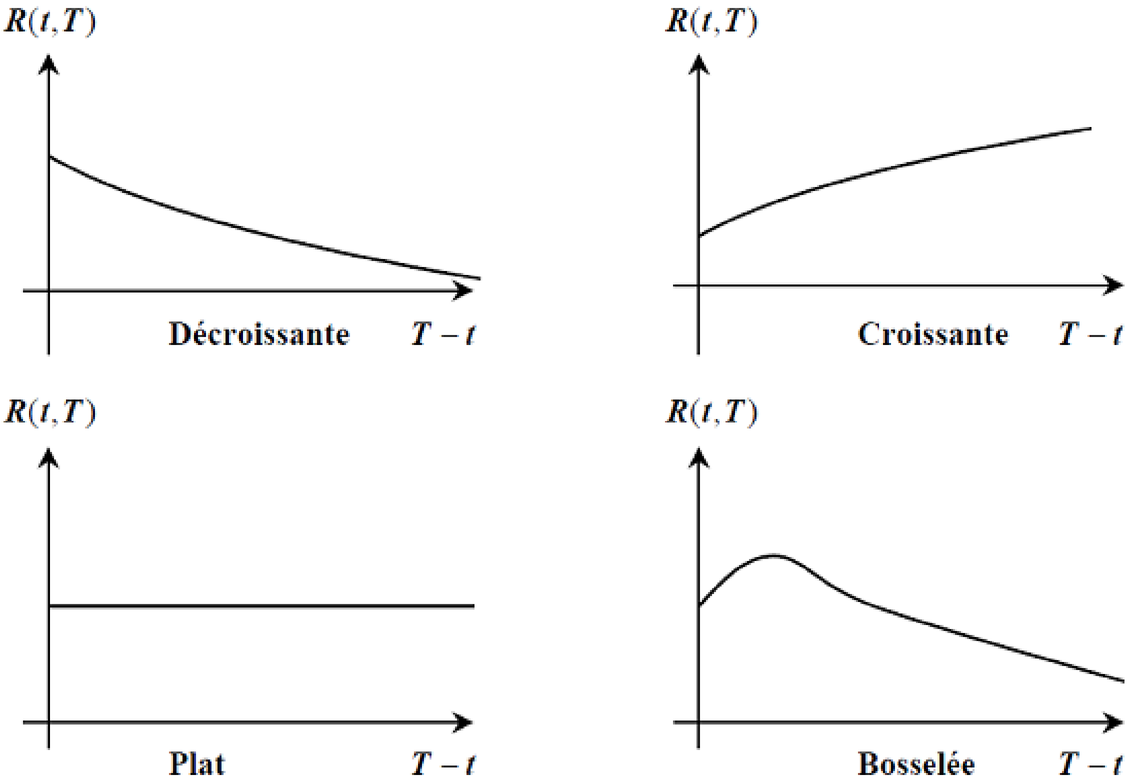
[3] Les pertes ou les gains réalisés

Quand nous parlons de la courbe des taux plusieurs types de courbes font surface. Du coup, il est nécessaire de distinguer entre les courbes de marché et les courbes implicites. Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché (courbe swap, courbe de rendement des obligations d'Etat), alors que les courbes implicites sont déduites indirectement de ces cotations suite à une transformation (courbe des taux zéro-coupon, courbe des taux forward). Ce travail s'intéresse particulièrement à la courbe des taux zéro-coupon, qui indique le taux zéro-coupon correspondant à chaque maturité.

2.2.2 Les formes de la courbe des taux

La courbe des taux peut prendre une des quatre formes différentes en fonction des évènements de marché:

- Quasi-plate
- Croissante c'est en même temps la forme la plus courante
- Décroissante
- Bosselée



II est assez naturel de se demander ce qui détermine la forme de la courbe des taux zéro-coupon. Pourquoi est-elle parfois croissante, parfois décroissante, et parfois croissante pour certaines maturités et décroissantes pour d'autres ?

Tout d'abord, il convient de préciser qu'un univers peuplé d'agents est qualifié « d'univers certain » lorsque ceux-ci ont une parfaite connaissance du futur. Dans le cadre d'un modèle formalisé, cette hypothèse signifie que les agents connaissent exactement les valeurs futures de toutes les variables prises en compte. Par conséquent, nous allons travailler dans un univers incertain où les investisseurs ne connaissent pas l'évolution future des taux d'intérêt. Plusieurs théories ont été proposées, dont la plus simple est **la théorie des anticipations**.

Selon cette approche, les taux longs reflètent les anticipations des opérateurs concernant les taux courts qui prévaudront dans le futur. Plus précisément, selon cette théorie, le taux forward pour une période future donnée est l'espérance du taux spot qui prévaudra à cette période. Une autre justification repose sur **l'hypothèse de segmentation** qui stipule qu'il n'y a pas forcément de relation mécanique entre les taux longs et les taux courts. En effet, les opérateurs sont différents sur ces deux parties de la courbe. Par exemple, un fonds de pension détiendra des obligations de maturité longue et n'aura aucun intérêt à se déplacer sur des maturités plus courtes. À l'inverse, les taux courts sont déterminés par le jeu de l'offre et de la demande sur le marché des capitaux à court terme.

La troisième théorie est celle de **la préférence pour la liquidité**. Dans cette approche, les taux forward sont supérieurs aux taux courts futurs espérés pour les périodes correspondantes. Ce résultat vient de l'hypothèse selon laquelle les investisseurs préfèrent un horizon de placement court pour préserver la liquidité de leurs portefeuilles. Symétriquement, les emprunteurs préfèrent emprunter à long terme à taux fixe. Dans ces conditions, si aucune incitation ne contrebalançait ces tendances, les banques feraient des prêts à long terme, financés par des dépôts à court terme. Cette situation engendrerait un risque de taux important. Par conséquent, pour éviter ce risque de taux et apparier toute demande et offre de capitaux, les intermédiaires augmentent les taux longs par rapport aux taux courts futurs espérés, ce qui décourage les emprunteurs et incite les prêteurs à prêter à long terme.

La théorie de la préférence pour la liquidité induit une structure par termes des taux dans laquelle les taux forward sont plus élevés que les taux zéro-coupon futurs espérés. De même, elle conduit à une courbe des taux croissante, ce qui constitue la forme la plus couramment observée sur les marchés. Finalement, dans **la théorie de l'habitat préféré**, les agents ont des préférences pour plusieurs maturités et peuvent être influencés par la présence de primes de terme. Cette dernière théorie essaie d'unifier les précédentes. Cependant, essentiellement en raison de problèmes de tests, nous éprouvons beaucoup de difficultés à faire un choix parmi toutes ces théories.

Selon la théorie des anticipations, développée par Friedrich A. Lutz, les taux longs ne seraient que la moyenne géométrique des taux courts anticipés. Cette théorie affirme que la structure des taux d'intérêt est déterminée par les anticipations des investisseurs sur l'évolution des taux futurs. En effet, l'évaluation des prix d'actifs repose toujours sur le principe de l'arbitrage. L'arbitrage est une opération qui vise à réaliser un profit en tirant parti de la différence entre les rendements attendus sur les différents placements. En l'absence d'aversion pour le risque, ces opérations pratiquées par un grand ensemble d'agents conduisent à égaliser les rendements attendus entre les différents actifs. Si un placement était considéré plus rentable qu'un autre, tous les agents se le procureraient, ce qui ferait monter son prix et baisser son rendement, jusqu'à rétablir la parité. Il en est de même entre le taux des obligations et les taux courts. Considérons le rendement d'une obligation d'Etat, dont le risque de non-remboursement est négligeable, et des agents neutres vis-à-vis du risque ; Dans ce cas, le rendement annuel d'une obligation de maturité n années doit être égal au rendement moyen anticipé obtenu en plaçant la même somme à court terme pendant n années consécutives. Dans cet arbitrage, un terme est connu aujourd'hui – le taux de rendement de l'obligation sur n années, mais l'autre reste inconnu : personne ne sait en effet ce que sera le taux à court terme dans les prochaines années. Ce terme doit donc être anticipé. Ainsi, le taux d'intérêt d'une obligation à n années est égal à la moyenne des taux à 1 an anticipés pour les n années suivantes.

Ce raisonnement est valable à toutes les maturités et toutes les périodes : un placement à un an doit aussi rapporter le même rendement anticipé qu'un placement renouvelé sur le marché monétaire chaque mois pendant un an. Comme les taux d'intérêt à court terme sont déterminés par la politique monétaire, les anticipations des taux à court terme reviennent à prévoir ce que sera la politique monétaire dans les périodes futures. Les intervenants de marchés suivent donc assidûment les déclarations des banques centrales, pour décrypter leur stratégie future. Finalement, en se basant sur cette théorie, nous pouvons expliquer de la façon suivante les différents profils de structure des taux : Si la structure des taux est plate, la stabilité des taux est anticipée. · Si la structure des taux est normale, c'est-à-dire avec une pente ascendante, une hausse des taux est anticipée. A l'inverse, si la structure des taux d'intérêt est inversée, les marchés financiers anticipent une baisse des taux.

2.2.3 Calcul des taux/prix zéro-coupon : Courbe des taux zéro-coupon

Avant de passer à la modélisation de la courbe des taux, il faut construire cette courbe. Or les obligations à zéro-coupon sont moins liquides sur le marché que les obligations à coupons. Du coup, nous faisons appel à plusieurs méthodes de reconstitution de la structure par terme ou la courbe zéro-coupon.

Il existe plusieurs méthodes de reconstitution qui s'utilise dans du Bootstraping. Cette dernière est une procédure qui permet de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, i.e. segment de maturité par segment de maturité. En pratique cela revient à calculer le taux équivalent aux maturités pleines et non pas aux maturités correspondantes aux dates de tombées de flux, car généralement les obligations émises et disponibles sur le marché n'ont pas de maturités exactement égales à 1an ou 2 ans (maturités pleines).

Afin d'obtenir une courbe de taux continue, nous nous traiterons deux parmi plusieurs méthode d'interpolation. Ces méthodes s'appliqueront sur des courbes de références quotidiennement publiées par Bank Al-Maghreb. Or il est à noter que la structure par terme au Maroc est supposée horizontale en deçà de la première date de tombée de flux (le premier point) et au-delà de la dernière. Il faut aussi prendre en considération, que la courbe des taux du royaume est une courbe de transactions. Elle est constituée par des taux moyens pondérés et des montants des transactions sur les bons du Trésor du marché secondaire pour des maturités entre un an et 30 ans. Certes, le Taux Moyen Pondéré (TMP) est le taux de référence journalier pour le marché monétaire marocain qui est calculé et publié par la banque centrale. Il s'agit d'un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

2.2.4 La méthode de Bootstrap :

Avant de passer aux techniques d'interpolation, il faut faire une opération dite de Bootstrapping. Cette dernière est une méthode basée sur l'hypothèse selon laquelle le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux. Elle consiste à calculer les taux à maturité proche à l'aide des titres d'horizon court et à en déduire, de proche en proche, les taux ZC correspondants aux maturités plus éloignées.

Afin d'illustrer le concept, prenons l'exemple suivants. Pour simplifier, nous raisonnerons sur un principal de 100. Considérons que les taux ci-dessous :

Maturité	Taux
3 mois	2,18%
6 mois	1,82%
1 an	1,91%
2 ans	2%
5 ans	2,32%

Tableau 1: taux en fonction de la maturité (illustration du bootstrap)

Pour les maturités inférieures ou égales à 1 an, il n'y a pas de flux intermédiaire, les taux sont des zéro-coupon à la base. Au-delà d'un 1 an, il existe un flux intermédiaire, pour lequel le flux devra être actualisé à partir du taux zéro-coupon du 1 an (1.91%).

L'équation qui égalise les flux est écrite sous la forme suivante (supposant le rendement de l'obligation est de 5%) :

$$\mathbf{100}=\frac{\mathbf{5}}{(\mathbf{1+1.91\%})^{\mathbf{1}}}+\frac{\mathbf{105}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{t_{ZC}})^{\mathbf{2}}}$$

Du coup le taux ZC equivalent pour 2ans est :

$$\boldsymbol{t_{ZC}}=[\frac{\mathbf{105}}{\mathbf{100-5*(1+1.91\%)^{-1}}}]-\mathbf{1}$$

Du coup, $\boldsymbol{t_{ZC}}=\mathbf{10.42\%}$

De même, pour une maturité 3 ans ; les calculs se font de la même façon tout en faisant face à deux flux intermédiaires, le premier devrait être actualisé au taux ZC d'un 1 an, le second au taux ZC de 2 ans calculé. En général, la formule calculant le taux zéro-coupon pour toute maturité n > 1an et pour un nominal N, s'écrit comme suit, $\boldsymbol{C_n}$étant le flux à verser :

$$\boldsymbol{t_{ZC_n}}=[\frac{\boldsymbol{N}+\boldsymbol{C_n}}{\boldsymbol{N}-\boldsymbol{C_n}\sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{1}+\boldsymbol{t_{Z_i}})^{-i}}]^{\frac{1}{n}}-\mathbf{1} \qquad \textbf{(3)}$$

Cette procédure nous permet d'obtenir des taux correspondant à des maturités bien précises et finies: (1an, 2ans, 3ans, ans…etc.).

2.2.4.1 Interpolation linéaire

Ainsi, il est nécessaire de recourir à des méthodes d'interpolation afin de compléter la construction de la courbe en calculant les taux pour toute sorte de maturités. Il existe en fait plusieurs types d'interpolations. Cependant nous contenterons, pour la simplicité qu'elle présente, à présenter dans ce qui suit une interpolation linéaire. Cette méthode suppose que la fonction entre deux points est affine. Le taux à calculer est ainsi obtenue selon la formule :

$$\mathbf{R(0,\,t)}=\frac{(t2-t)R(0,t1)+(t-t1)R(0,t2)}{t2-t1} \qquad \mathbf{(4)}$$

R (0, t1) : taux zéro-coupon à la maturité t1 ;

R (0, t2) : taux zéro-coupon à la maturité t2 ;

R (0, t) : taux zéro-coupon calculé à la maturité t avec t1 < t < t2.

2.2.5 Application pratique sur VBA-Excel

Afin d'illustrer cette méthode, nous nous basons sur une courbe de référence des taux publiée par Bank Al-Maghrib quotidiennement. Cette courbe est déterminée à partir des taux de rendement des dernières transactions effectuées sur les bons du Trésor en précisant le montant de ces transactions ainsi que les taux auxquels elles ont été effectuées. Cette figure représente la courbe des taux du marché secondaire pour différentes échéances.

Avant d'appliquer la méthode du Bootstrap, nous devons commencer par homogénéiser les taux courbe de BAM. Ce qui revient à dire, il faut avoir la même base de calcul pour toutes les maturités. En effet, les taux monétaires récupérés sur le court terme sont en base Exact/360 alors que les taux des bons de trésor sur le long terme sont en base Exact/Exact. Du coup, il est souhaitable de convertir tous les taux en base Exact/Exact. Les placements à long terme donnent des coupons annuels tandis que ceux à court terme sont in fine. Certes, le calcul du taux zéro-coupon nécessite une simple conversion des taux monétaires en base actuarielle à des fins d'homogénéisation, car un prêt monétaire est remboursé à l'échéance en même temps que les intérêts et s'apparente donc déjà à un zéro-coupon. Si l'on note TM le taux de dépôt monétaire et TA le taux transformé en base actuarielle (taux zéro-coupon actuariel), alors la valeur du taux zéro-coupon est :

$$TA=\left(1+TM*\frac{MR}{365}\right)^{\frac{365}{MR}}-1 \qquad \mathbf{(5)}$$

Avec MR la maturité résiduelle, c'est la différence entre la date d'échéance et la date de valeur.

Afin de calculer les taux zéro-coupon sur le long terme pour toutes les maturités, une application sur Vba-Excel du bootstrap est mise en place. Mais avant, d'y procéder, nous téléchargeons la courbe de référence des taux ci-dessous à partir du site du Bank Al-Maghreb. Ceci a été automatisé, grâce à un classeur VBA afin de faciliter la tâche. Cet outil prend comme entrée la date de la courbe et le chemin ou le fichier téléchargé sera enregistré. Elle retourne un message d'exécution de la commande du téléchargement de la courbe sous le format d'un fichier Excel portant comme nom « tauxZC » suivi par la date de la courbe.

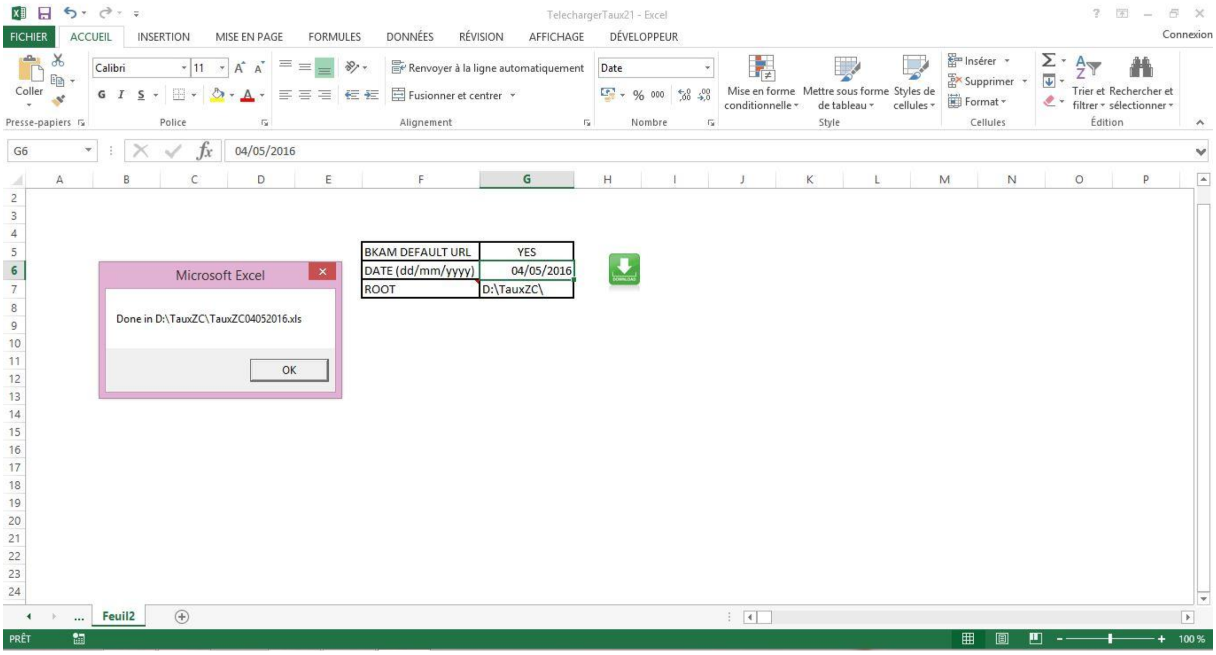


Figure 4: aperçu sur le fichier du téléchargement de la courbe du taux à partir du BAM

Après avoir téléchargé la courbe des taux, nous récupérons le tableau ci-dessous, qui correspond au tableau des taux de référence du marché secondaire des bons du trésor pour la date 04/05/2016.

TAUX DE REFERENCE DU MARCHE SECONDAIRE DES BONS DU TRESOR (Courbe des taux)
Date :04/05/2016
En millions de dirhams

Echéance	Transactions	Taux moyen pondéré	Date de valeur
16/05/2016	20.35	1,800%	02/05/2016
04/07/2016	494.27	2,252%	19/04/2016
18/07/2016	303.86	2,183%	19/04/2016
17/10/2016	175.07	1,935%	04/05/2016
20/02/2017	74.29	1,938%	04/05/2016
19/02/2018	20.46	1,999%	04/05/2016
20/04/2020	121.61	2,165%	04/05/2016
18/10/2021	125.02	2,290%	04/05/2016
02/06/2025	235.23	2,638%	29/04/2016
05/06/2026	74.65	2,742%	04/05/2016
15/06/2026	30.49	2,740%	04/05/2016
05/08/2030	79.34	3,156%	29/04/2016
04/02/2036	29.07	3,495%	29/04/2016
19/02/2046	392.49	4,289%	04/05/2016
Total	2176.2		

Figure 5: courbe des taux publié par BAM le 04/05/2016

Cette table nous servira de base de calcul afin de faire une interpolation linéaire de calculer des taux de référence pour les maturités pleines : 13 semaines, 26 semaines, 52 semaines, 2 ans, 5ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans et 30 ans. Un programme VBA a été mise en place, un simple clic sur le bouton «**interpolation linéaire** », lance la macro pour calculer les taux et générer ainsi un graphique représentant la courbe. Il est à noter que lors du calcul du taux des 52 semaines, il faut distinguer entre le taux actuariel et le taux monétaire. L'exécution de ce code permet d'obtenir le résultat suivant sous Excel :

	échéance résiduelle	Echéance	volume de transaction	Taux moyen pondéré	Date de valeur
2	14	16/05/2016	20.35	1,800%	02/05/2016
3	76	04/07/2016	494.27	2,252%	19/04/2016
4	90	18/07/2016	303.86	2,183%	19/04/2016
5	166	17/10/2016	175.07	1,935%	04/05/2016
6	292	20/02/2017	74.29	1,938%	04/05/2016
7	656	19/02/2018	20.46	1,999%	04/05/2016
8	1447	20/04/2020	121.61	2,165%	04/05/2016
9	1993	18/10/2021	125.02	2,290%	04/05/2016
10	3321	02/06/2025	235.23	2,638%	29/04/2016
11	3684	05/06/2026	74.65	2,742%	04/05/2016
12	3694	15/06/2026	30.49	2,740%	04/05/2016
13	5211	05/08/2030	79.34	3,156%	29/04/2016
14	7220	04/02/2036	29.07	3,495%	29/04/2016
15	10883	19/02/2046	392.49	4,289%	04/05/2016

interpolation lineaire

maturité pleine	échéance résiduelle	taux interpolés
1erpoint	76	2,252%
13 S	91	2,180%
26 S	182	1,935%
52 S	364	1,950%
52 S Actuariel	364	1,953%
2A	730	2,015%
5A	1826	2,252%
10A	3653	2,733%
15A	5479	3,201%
20A	7305	3,513%
30A	10957	4,289%

Figure 6: résultats du programme d'interpolation linéaire sur VBA-Excel

L'estimation de chaque taux équivalent par une maturité pleine est déterminée par une méthode d'interpolation linéaire entre les deux maturités les plus proches pour lesquelles la courbe des taux de référence mentionne un taux. Dans l'intervalle [8 – 13 semaines], l'observation provenant de la courbe des taux publiée et correspondant à la maturité résiduelle la plus courte sert de référence à toutes les maturités inférieures. Cela revient à considérer que la courbe des taux d'actualisation est plate entre la maturité 0 et le premier point observé dans l'intervalle [8 – 13 semaines]. Il est à noter que 91 jours revient à 13 semaines multiplié par le nombre de jours dans la semaine 7, de même 181 jours revient à 26 semaines chacune composé de 7 jours, et ainsi de suite. Quant aux maturités supérieures à cinq ans, il faut prendre en considération l'existence d'une année bissextile chaque quatre ans. A titre d'exemple: pour la maturité 5 ans, (5*365) + 1= 1826.

En tout cas ceci, nous permettra d'avoir une base de données des taux interpolés passées. Cet historique nous permettra d'avoir une idée sur les fluctuations des taux à chaque point. Ainsi, il nous servira à la modélisation de la courbe par des modèles stochastiques. Ceci nous servira aussi à avoir une idée sur les taux futurs. La base de données construite regroupe des données de taux du 01/01/2007 au 04/05/2016. Elle est de la forme suivante :

1		1erpoint	13 S	26 S	52 S	52 S Actuariel	2A	5A	10A	15A	20A	30A
2401	13/04/16	2,231%	2,242%	2,259%	2,255%	2,257%	2,185%	2,288%	2,987%	3,250%	3,612%	4,315%
2402	14/04/16	2,252%	2,249%	2,202%	2,176%	2,182%	2,180%	2,300%	2,987%	3,242%	3,550%	4,220%
2403	15/04/16	2,252%	2,249%	2,202%	2,176%	2,182%	2,180%	2,300%	2,982%	3,243%	3,610%	4,220%
2404	16/04/16	2,252%	2,249%	2,202%	2,176%	2,182%	2,180%	2,300%	2,982%	3,243%	3,610%	4,220%
2405	17/04/16	2,252%	2,249%	2,202%	2,176%	2,182%	2,180%	2,300%	2,982%	3,243%	3,610%	4,220%
2406	18/04/16	2,252%	2,250%	2,230%	2,069%	2,071%	2,184%	2,225%	2,982%	3,247%	3,515%	4,220%
2407	19/04/16	2,252%	2,184%	2,230%	2,069%	2,071%	2,184%	2,291%	2,977%	3,234%	3,525%	4,220%
2408	20/04/16	2,252%	1,900%	2,230%	1,996%	1,997%	2,055%	2,250%	2,977%	3,216%	3,517%	4,220%
2409	21/04/16	2,252%	1,900%	2,230%	2,004%	2,007%	2,050%	2,184%	2,907%	3,208%	3,517%	4,220%
2410	22/04/16	2,252%	2,175%	1,991%	2,004%	2,005%	2,049%	2,212%	2,966%	3,258%	3,566%	4,217%
2411	23/04/16	2,252%	2,175%	1,991%	2,004%	2,005%	2,049%	2,212%	2,966%	3,258%	3,566%	4,217%
2412	24/04/16	2,252%	2,175%	1,991%	2,004%	2,005%	2,049%	2,212%	2,966%	3,258%	3,566%	4,217%
2413	25/04/16	2,252%	2,175%	2,009%	2,001%	2,001%	2,057%	2,212%	2,849%	3,212%	3,513%	4,218%
2414	26/04/16	2,252%	2,175%	1,900%	1,961%	1,966%	2,057%	2,166%	2,753%	3,212%	3,497%	4,218%
2415	27/04/16	2,252%	2,175%	1,900%	1,961%	1,966%	2,057%	2,175%	2,754%	3,203%	3,489%	4,218%
2416	28/04/16	2,252%	2,175%	1,900%	1,939%	1,943%	2,031%	2,175%	2,754%	3,203%	3,495%	4,124%
2417	29/04/16	2,252%	2,180%	1,936%	1,949%	1,951%	2,013%	2,207%	2,724%	3,201%	3,514%	4,294%
2418	30/04/16	2,252%	2,180%	1,936%	1,949%	1,951%	2,013%	2,207%	2,724%	3,201%	3,514%	4,294%
2419	01/05/16	2,252%	2,180%	1,936%	1,949%	1,951%	2,013%	2,207%	2,724%	3,201%	3,514%	4,294%
2420	02/05/16	2,252%	2,180%	1,900%	1,953%	1,956%	2,013%	2,185%	2,727%	3,201%	3,496%	4,294%
2421	03/05/16	2,252%	1,840%	1,853%	1,898%	1,900%	2,013%	2,185%	2,727%	3,201%	3,496%	4,294%
2422	04/05/16	2,252%	2,180%	1,935%	1,950%	1,953%	2,015%	2,252%	2,733%	3,201%	3,513%	4,289%

interpolation | historique courbe des taux | cubique | N,Siegel

Figure 7: aperçu sur l'historique de la courbe des taux

2.3 Modélisation de la courbe de taux

Apres avoir construit la structure par terme, il faut retrouver le modèle des taux le plus adaptées au marché marocain qui nous donnera une idée très claire sur l'évolution des taux prochainement. Ces derniers nous permettront aussi d'avoir d'évaluer les prix de nos produits dérivés que nous traiterons après.

Dans cette partie nous étudierons les approches alternatives pour la modélisation de la structure par termes des taux zéro-coupons. Ceci se fera par le biais de plusieurs modèles, soit des modèles à un facteur, soit des modèles à deux facteurs.

2.3.1 Modèles de taux d'intérêt à un facteur

Les modèles à une variable d'état sont nombreux ils sont tous basés sur le fait que la variable qui détermine la structure de taux est le taux court, supposé sans risque. Le fait de choisir une unique variable est dû aux théories économiques. En effet, celles-ci mettent en évidence l'importance de déterminer la dynamique du taux court pour ensuite estimer le taux long.

L'unicité de la variable d'état suppose donc que les taux de rendement ayant des maturités différentes sont corrélés, et que les seules variations de la courbe des taux seraient des translations. Deux types de modèles à un facteur existent. Les premiers sont des modèles d'équilibre dans lesquels le drift et l'écart-type instantané des équations différentielles stochastiques dépendent du taux. Les deuxièmes sont des modèles fondés sur absence d'opportunité d'arbitrage[4], qui seront expliqués en bas.

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court, noté r. cette démarche permet ensuite de tirer des conclusions sur le comportement des prix d'obligations et d'options.

Dans un modèle à un facteur, le taux court dépend d'une seule source d'incertitude. Le processus risque-neutre du taux court est alors décrit par un processus d'Itô de la forme :

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

Le drift du processus, noté m, et l'écart-type instantané, noté s, sont des fonctions de r mais ne dépendent pas du temps. L'hypothèse d'une unique source d'incertitude est moins contraignante qu'il n'y parait. Elle impose que tous les taux évoluent de la même direction, mais les variations peuvent être d'amplitudes différentes. La forme de la courbe des taux ZC peut donc changer au cours du temps. Les prochaines sections traiteront deux modèles d'équilibre, qui le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Or l'inconvénient des modèles d'équilibre qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement à la structure par termes observée sur le marché aujourd'hui. Par un calibrage judicieux, ils permettent de retrouver la plupart des structures observées en pratique. Cependant, l'ajustement aux observations n'est pas exact et, dans certains cas, des erreurs significatives apparaissent. La plupart des traders ne sont donc pas satisfaits par ces modèles. Car ces derniers n'arrivent même à évaluer

[4] Il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future

correctement les obligations. Or une erreur de 1% sur le prix du sous-jacent peut entrainer une erreur de 25% sur le prix de l'option.

Un modèle fondé sur l'absence d'opportunités d'arbitrage (appelé « modèle dans arbitrage ») est construit de façon à être cohérent avec la structure par termes observée aujourd'hui. En quelque sorte, la différence essentielle entre les deux approches est qu'un modèle d'équilibre donne la structure initiale comme un out put, alors qu'un modèle sans arbitrage prend la structure initiale comme input

Dans un modèle d'équilibre, le drift du taux court n'est pas, en général, une fonction du temps, alors qu'il l'est le plus souvent dans un modèle sans arbitrage. Cela s'explique par le fait que la structure des taux initiale détermine la trajectoire moyenne qui sera prise par le taux court dans le futur. Si la courbe des taux est fortement croissante entre deux maturités T1 et T2, r aura un drift positif entre ces deux dates. A l'inverse, si la courbe est fortement décroissante entre ces deux maturités, le drift de r sera négatif entre ces deux dates.

Les prochaines sections traiteront deux modèles d'équilibre à un seul facteur, qui le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Ainsi, nous retiendrons le meilleur modèle en termes de calibration et de prévision de la structure par termes.

2.3.1.1 Modèle de Vasicek

C'est l'un des premiers modèles de la structure par terme des taux d'intérêts. Dans ce modèle, le taux court suit un processus d'**Ornstein-Uhlenbeck** avec des coefficients constants. Sa dynamique est représentée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\boldsymbol{dr(t) = a\big(b - r(t)\big) + \sigma dW(t)}$$

Ou

- **r(t)**: taux court en t (assimilable au taux JJ).
- **b**: moyenne sur long terme du taux court.
- **a**: la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme b.
- $\boldsymbol{\sigma}$: écart-type du changement instantané de r(t).
- **W(t)**: mouvement brownien standard, il suit un processus de Wienner.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt. En effet les valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses, l'effet inverse est également constaté pour les niveaux de taux bas. Lorsque r(t) est éloigné de b, l'espérance de variation instantanée de r(t), égale à a(b-r(t)) est positive si r(t) < b. Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur le long terme d'autant plus intensément qu'il s'en est écarté et que le paramètre a est grand. A l'inverse, si r(t) > b, l'espérance de variation instantanée de r(t) est négative et r(t) diminue dans le temps pour se rapprocher de b.

Ce phénomène de retour à la moyenne, que Vasicek met en évidence, peut être justifié. En effet, lorsque les taux sont élevés, les emprunts sont moins nombreux et l'économie a tendance à ralentir, faisant ainsi baisser les taux. Au contraire, lorsque les taux sont élevés, les emprunts sont moins nombreux et l'économie a tendance à augmenter, faisant ainsi monter les taux.

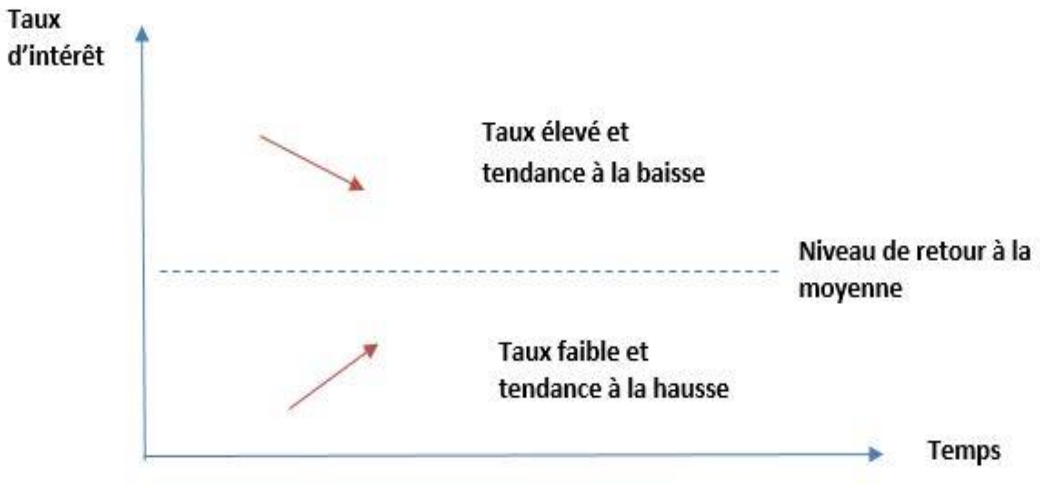


Figure 8: le phénomène de retour à la moyenne

Il y a des arguments macroéconomiques en faveur de ce comportement. Quand les taux sont élevés, l'économie tend à ralentir et la demande de fonds de la part des emprunteurs est faible. Par conséquent, les taux diminuent. Quand les taux sont peu élevés, les emprunteurs seront plus nombreux, ce qui aura tendance à faire remonter les taux.

Or le modèle du Vasicek dispose d'un énorme avantage, il possède une solution explicite. En revanche, son inconvénient majeur est qu'il est théoriquement possible que le taux d'intérêt devienne négatif.

La solution analytique du processus d'**Ornstein-Ulhenbeck** (démontrée en annexe) est donnée par :

$$\boldsymbol{r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dW_s} \qquad \textbf{(6)}$$

Nous pouvons également déterminer (cf. annexe) l'espérance et la variance conditionnelle (avec t>s)

$$\mathbf{E}\ [\boldsymbol{r_t/r_s}] = \boldsymbol{e^{-b(t-s)} r_s} + \mathbf{a}\ (1\text{-}\boldsymbol{e^{-b(t-s)}}) \qquad \textbf{(7)}$$

$$\mathbf{V}\ [\boldsymbol{r_t/r_s}] = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{2b}}\ (1\text{-}\boldsymbol{e^{-2b(t-s)}}) \qquad \textbf{(8)}$$

Ainsi, nous voyons que l'espérance conditionnelle tend bien vers la valeur moyenne a, alors que la variance tend vers une constante égale à $\boldsymbol{\frac{\sigma^2}{2b}}$. Nous observons donc l'existence d'une « force de rappel ».

Lorsque b tend vers l'infini, synonyme d'une force de rappel très importante, l'espérance conditionnelle tend également vers la valeur moyenne a alors que la variance conditionnelle tend vers la valeur nulle. Au contraire, si b tend vers 0, l'espérance conditionnelle tend vers la valeur actuelle du taux, ce qui s'explique puisque la force de rappel est nulle, alors que sa variance tend vers **(t-s)** $\boldsymbol{\sigma^2}$**.**

L'expression finale du prix zéro-coupon qui nous intéresse le plus à ce niveau-ci, issue de celle du taux court à laquelle il aboutit et, est en revanche la suivante :

$$\mathbf{P(t,T)= A(t,T)}\ e^{-B(t,T)r(t)} \qquad \mathbf{(9)}$$

Avec

$$\mathbf{B(t,T)}=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \qquad \mathbf{(10)}$$

Et

$$\mathbf{A(t,T)=exp=[B(t,T)-(T-t)}\ R(\infty)-\frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a}\ \mathbf{]} \qquad \mathbf{(11)}$$

Où $\mathbf{R(\infty)= b} - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2}(\frac{\sigma}{a})^2$, $\boldsymbol{\pi}$ représente la prime du risque[5].

2.3.1.1.1 Estimation des paramètres

Afin d'obtenir l'expression exacte du prix zéro-coupon, il est question avant toute chose d'estimer chacun des paramètres **a**, b, σ ainsi que la prime de risque. En premier temps, nous commencerons par déterminer les trois premiers paramètres, puis nous consacrerons ensuite une partie pour la prime de risque, sa définition et la démarche pour la préciser. Pour ce faire, une simple régression linéaire s'impose sur une série des taux très courts terme choisie. Ladite série est celle du taux moyen pondéré (TMP), taux au jour le jour du marché monétaire marocain. Nous nous basons alors sur des données d'une période allant du 01/01/2014 au 31/12/2015, soit une période 2 ans. Ces données se résument au graphe suivant :

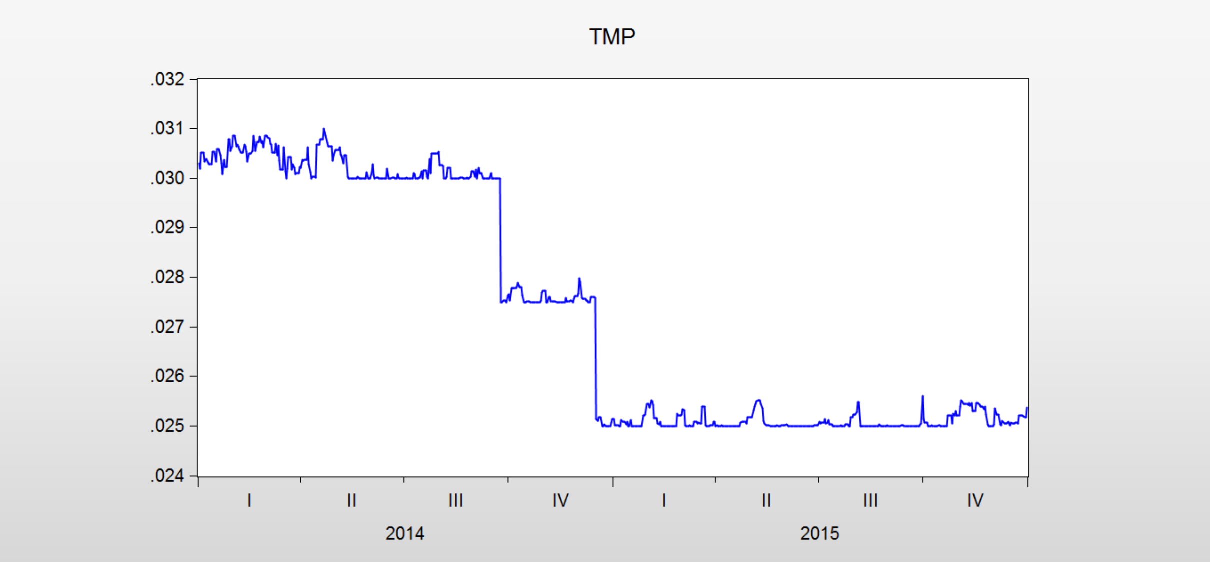


Figure 9: les données des taux courts utilisées

[5] La **prime de risque** ici traduit l'écart entre le rendement d'une obligation de long terme et une autre de court terme.

Le graphe suivant illustre les variations des TMP qui seront utilisés par la suite dans notre modélisation. Or ces taux sont très proches des taux directeurs tout au long de cette période. Le 23 septembre 2014, le taux directeur a été abaissé de 3% à 2,75% par Bank Al-Maghrib pour pousser les opérateurs économiques à augmenter leurs investissements et soutenir la croissance nationale, et puis le même taux a subi une baisse de 25 points allant de 2,75% à 2,5% le 16 décembre de la même année. Ces chiffres nous donnent une idée sur les TMP.

Revenons à notre problématique centrale de la partie à savoir la modélisation de la courbe des taux, l'expression établie par le modèle de Vasiček toute en utilisant les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation suivante :

$$\boldsymbol{r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a})}{2a}}\ \varepsilon_t} \qquad \textbf{(12)}$$

Où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est une variable aléatoire **de loi normale centrée réduite**.

$$\boldsymbol{r_t - r_{t+1} = b(1 - e^{-a}) + (1 - e^{-a})r_{t-1} + \varepsilon_t}$$

$$\boldsymbol{r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \varepsilon_t}$$

Avec $\boldsymbol{\varepsilon_t \backsim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a}}))$

L'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Ulhenbeck peut s'effectuer en recourant soit à la méthode des moindres carrées ordinaires, soit à celle du maximum de vraisemblance, soit de prouver que c'est une série chronologique stationnaire et d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif. Dans ce travail, nous baserons sur le fait que le modèle de Vasicek est un modèle autorégressif du premier degré 1 à l'aide de la dernière formule.

Afin de tester la stationnarité des données, nous faisons recours au test du Dickey-Fuller ce dernier sont des tests qui permettent de détecter l'éventuelle existence d'une tendance de la série chronologique, ils permettent par ailleurs de déterminer la meilleure façon de stationnairiser les données. A la base de ces tests se tiennent trois modèles. Le principe étant de vérifier si pour le modèle général : = C+ bt + a l'hypothèse est vraie pour l'un des modèles suivants (Test de présence d'une racine unitaire, d'où d'ailleurs l'appellation (*Unit Root Test)*.

Si tel est le cas, le processus est alors non-stationnaire :

[1] $\boldsymbol{X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t}$: (Modèle autorégressif d'ordre 1)

[2] $\boldsymbol{X_t = \phi_1 X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t}$: (Modèle autorégressif avec constante)

[3] $\boldsymbol{X_t = \phi_1 X_{t-1} + \beta + bt + \varepsilon_t}$: *b* (Modèle autorégressif avec tendance)

Le déroulement de ces tests peut être résumé dans le schéma suivant :

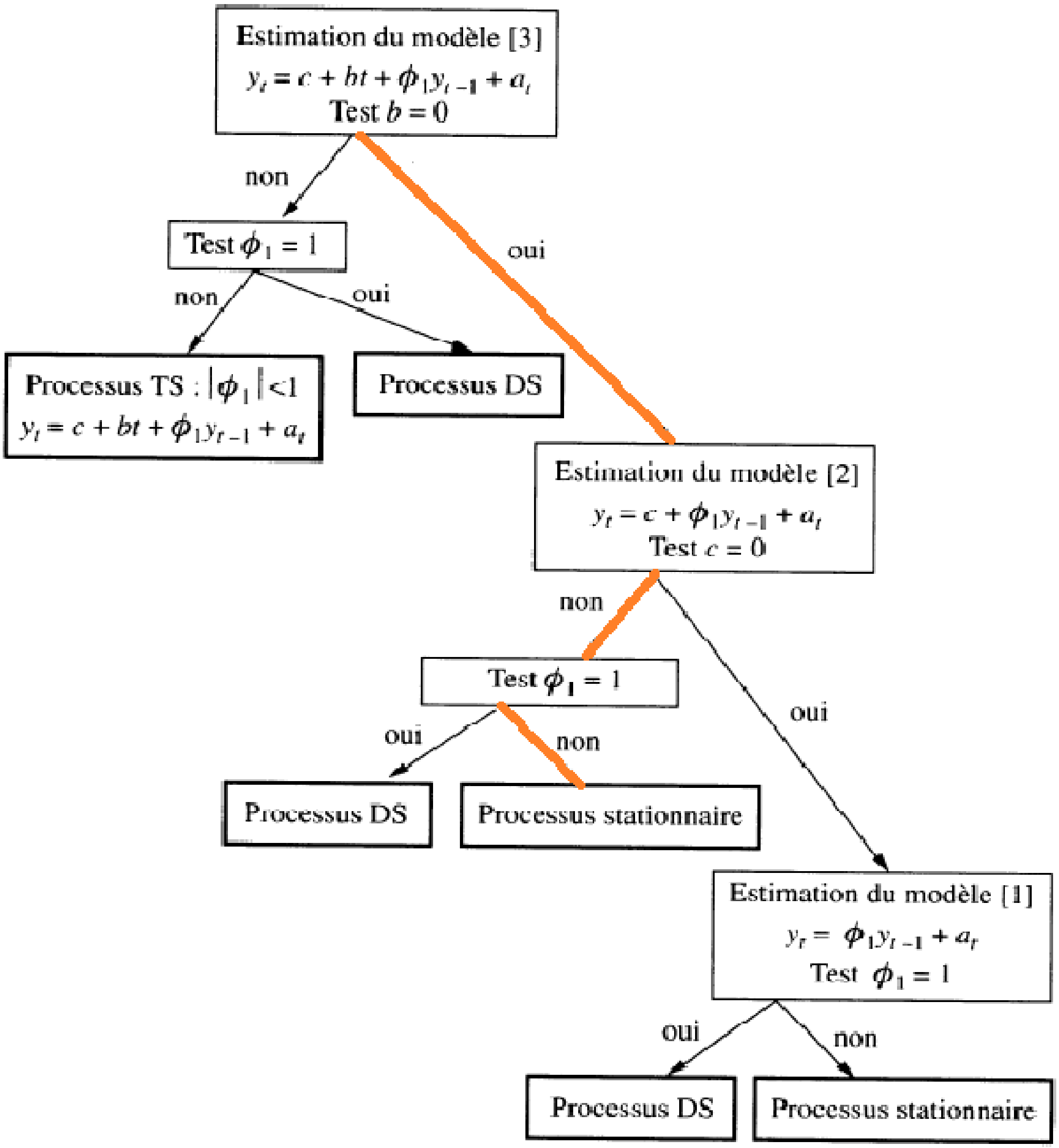


Figure 10:Tests de racine unitaire pour la stationnarité d'une série temporelle

Afin de montrer que le modèle de Vasicek est un modèle autorégressif d'ordre 1, chose qu'il va falloir vérifier pour les données empiriques du taux courts dont nous disposons. Avant d'effectuer une régression quelconque, nous devons passer par un test de stationnarité de la série en question tout en faisant appel aux tests de Dickey-Fuller augmentés sur R. Apres application du test de la stationnarité sur R, nous retrouvons une p-value de **0.09137** pour le test du Dickey-Fuller. Cette plus-value montre que l'hypothèse de base est rejetée ce qui fait que la série n'est pas stationnaire. Ce résultat a été prévisible, vue que les taux sont très corrélés à la politique monétaire adoptée, ils fluctuent généralement aux alentours du taux directeurs. Or le taux directeur a connu deux baisses successives dans la période choisi.

```
> adf.test(jihane$TMP)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  jihane$TMP
Dickey-Fuller = -3.18, Lag order = 8, p-value = 0.09137
alternative hypothesis: stationary
```

Figure 11: résultat du test du Dickey-Fuller sur R

Le modèle de Vasiček précédemment défini est celui d'un processus autorégressif d'ordre 1 AR(1). Vérifions donc que cela est bien le cas pour notre série de taux choisie, pour ce faire, on étudie le corrélogramme de la série sur R

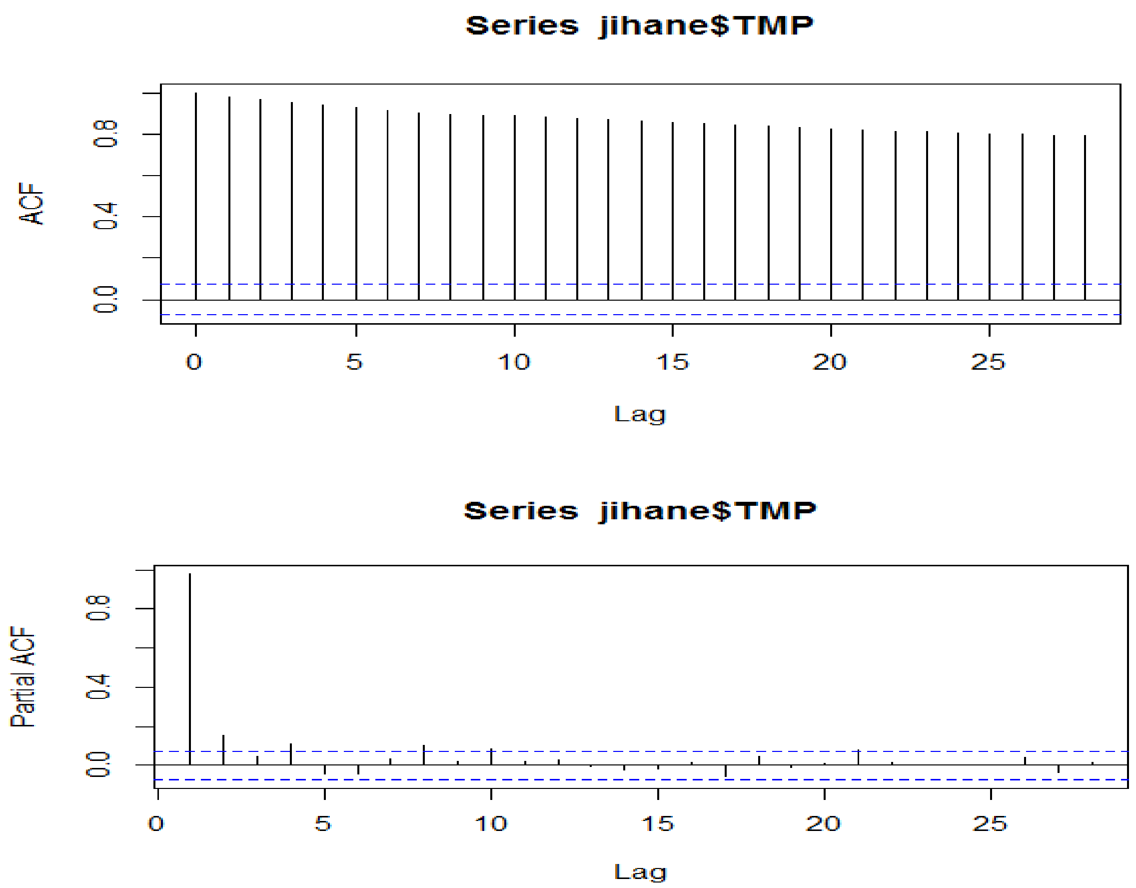


Figure 12: corrélogramme de la série temporelle sur R

Grace au corrèlogramme ci-dessus, nous ne rejetons pas l'hypothèse de la nullité des PAC (les autocorrélations partielles), étant donné que celles-ci commencent à être très peu significatives à partir du second ordre, et par conséquent, notre processus se rapproche d'un processus auto régressif d'ordre 1. Nous retenons alors le modèle suivant :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \varepsilon_t$$

Après avoir vérifié la correspondance du modèle de Vasicek à un processus autorégressif d'ordre 1, nous passons à la régression du taux d'intérêt court suivant le modèle présenté par Vasicek afin de trouver une valeur aux paramètres du modèle.

2.3.1.1.2 Régression linéaire

Pour calibrer le modèle de Vasicek, nous avons besoin de la solution de son équation différentielle stochastique, nous prendrons la formule discrétisée élaborée ci-dessus :

$$\boldsymbol{r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a})}{2a}}\ \varepsilon_t}$$

A l'aide de cette formule, le calibrage du modèle est assez simple puisqu'il suffit d'appliquer une régression linéaire entre deux jeux de données historiques. Cette régression appliquée au taux de l'inflation donne un modèle de la forme :

$$\boldsymbol{r_t = \beta + \alpha\, r_{t-1} + \varepsilon_t}$$

A l'aide des données de la régression, nous pouvons déterminer les paramètres manquants du modèle :

- $\boldsymbol{a = -ln(\alpha)}$
- $\boldsymbol{b = \frac{\beta}{1-\alpha}}$
- $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{var(\varepsilon)}{\frac{1-e^{-2a}}{2a}}}}$

Les résultats de la régression linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaire, faites sur R grâce à la fonction prédéfinie de la régression linéaire sur R « **lm( )** ». Les résultats sont résumés au tableau suivant :

Modele de Vasicek

Estimation des parametres de Vasicek

increment du tempent le delta t	0,002739726
nombre d'observations N	730
le premier increment r0	0,03030

moyenne	2,727%
volatilité	0,002411155
somme des erreurs	0,000019607

les parametres à estimer

la vitesse de retour à la moyenne **(a)**	0,0022447110
la valeur moyenne a long terme **(b)**	0,0276644500
volatilité sigma	0,0001642008

Figure 13: les paramètres de Vasicek estimés

Nous obtenons ainsi une valeur de 0.0022 pour la vitesse de retour à la moyenne. Le taux à long terme résultant est 0.0276, quant à la volatilité, elle est de l'ordre de 0.00016. Ces résultats sont confirmés par la moyenne des observations est 2.727 % et un écart-type de 0.0002.

Pour juger de la pertinence des résultats obtenus ainsi que pour mesurer la performance du modèle. Nous avons procédé à un backtesting en s'appuyant sur des données historiques. Pour ceci, nous avons utilisé la méthode déterministe donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{E}\ [\boldsymbol{r_t / r_s}] = \boldsymbol{e^{-b(t-s)} r_s} + \mathbf{a}\ (1\text{-}\boldsymbol{e^{-b(t-s)}})$$

	A	G	H	I	J	K
20						
21		backtesting				
22						
23	Date	delta t	TMP	distrubution loi normale	TMP estimé	erreur au carrée
24	01/01/2014	0	3,030%	-	3,030%	-
25	02/01/2014	0,002739726	3,019%	0,92041024	3,029%	0,00000001
26	03/01/2014	0,005479452	3,052%	0,61722322	3,018%	0,00000011
27	04/01/2014	0,008219178	3,052%	0,36539529	3,051%	0,00000000
28	05/01/2014	0,010958904	3,052%	0,60775884	3,051%	0,00000000
29	06/01/2014	0,01369863	3,033%	0,93451621	3,051%	0,00000003
30	07/01/2014	0,016438356	3,038%	-0,51839749	3,032%	0,00000000
31	08/01/2014	0,019178082	3,039%	-1,55458558	3,037%	0,00000000
32	09/01/2014	0,021917808	3,032%	0,31502505	3,038%	0,00000000
33	10/01/2014	0,024657534	3,029%	-0,02769095	3,031%	0,00000000
34	11/01/2014	0,02739726	3,029%	1,55887620	3,028%	0,00000000
35	12/01/2014	0,030136986	3,029%	0,60850123	3,028%	0,00000000
36	13/01/2014	0,032876712	3,053%	-0,69061964	3,028%	0,00000006
37	14/01/2014	0,035616438	3,053%	0,10656779	3,052%	0,00000000
38	15/01/2014	0,038356164	3,053%	-0,36623328	3,052%	0,00000000
39	16/01/2014	0,04109589	3,034%	-1,34239357	3,052%	0,00000003
40	17/01/2014	0,043835616	3,059%	0,60259625	3,033%	0,00000007
41	18/01/2014	0,046575342	3,059%	0,27266836	3,058%	0,00000000
42	19/01/2014	0,049315068	3,059%	0,46248256	3,058%	0,00000000
43	20/01/2014	0,052054795	3,047%	-1,73765155	3,058%	0,00000001
44	21/01/2014	0,054794521	3,031%	-2,02194511	3,046%	0,00000002
45	22/01/2014	0,057534247	3,009%	1,02076277	3,030%	0,00000005
46	23/01/2014	0,060273973	3,038%	-2,56593722	3,008%	0,00000009
47	24/01/2014	0,063013699	3,023%	-0,24156509	3,037%	0,00000002
48	25/01/2014	0,065753425	3,023%	0,41850350	3,022%	0,00000000
49	26/01/2014	0,068493151	3,023%	0,09672171	3,022%	0,00000000
50	27/01/2014	0,071232877	3,079%	-1,19454740	3,022%	0,00000032
51	28/01/2014	0,073972603	3,078%	-1,59320272	3,078%	0,00000000
52	29/01/2014	0,076712329	3,055%	-0,40723047	3,077%	0,00000005
53	30/01/2014	0,079452055	3,064%	1,26523622	3,054%	0,00000001

Figure 14: backtesting du modèle du Vasicek

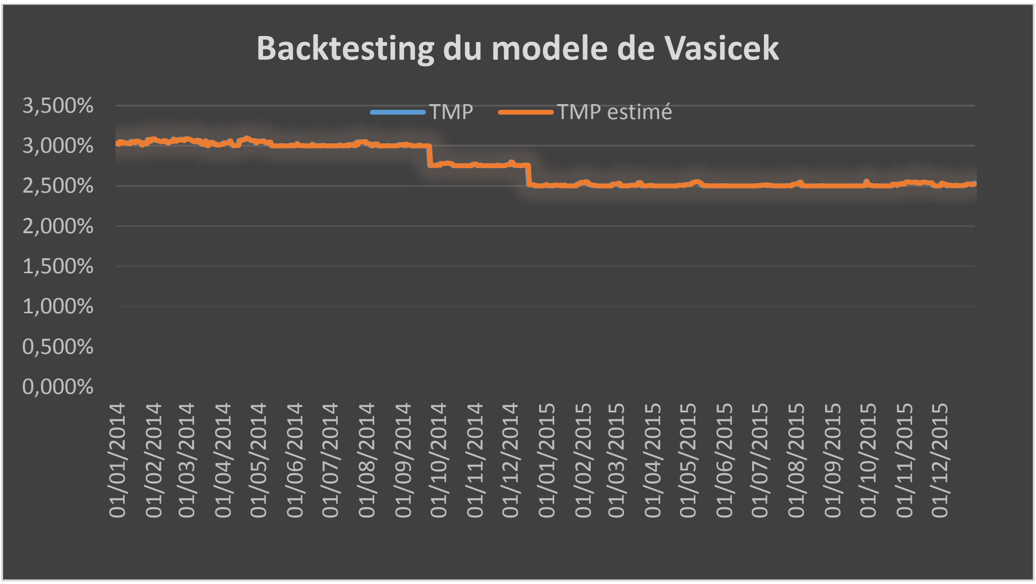


Figure 15 : graphe pour confirmer les résultats du backtesting

Les deux courbes coïncident ce qui prouve que le modèle de Vasicek est un bon modèle de calibration. Il permet d'avoir de très bonnes estimations des taux. Afin de valider le modèle, il faut voir si Vasicek permet de donner de bons résultats de prévisions des courbes futures.

2.3.1.1.3 Prévision par Vasicek

Afin de valider le modèle, des prévisions ont été menée sur un horizon d'un mois à partir du 02/01/2016. Pour ce faire, nous allons utiliser les résultats obtenus précédemment pour le modèle de Vasicek tout en utilisant les valeurs des paramètres estimés pour calculer le prix Zéro-coupon. Le prix ainsi obtenu à l'instant t d'une obligation zéro-coupon payant un flux à l'échéance T en supposant que la prime de risque de marché sera prise en considération, la formule est la suivante :

$$\mathbf{P(t,T)= A(t,T)}\ e^{-B(t,T)r(t)}$$

Avec

$$\mathbf{B(t,T)=}\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

Et

$$\mathbf{A(t,T)=exp=[B(t,T)\text{-}(T\text{-}t)}\ R(\infty)\text{-}\ \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}\ ]$$

Où $\mathbf{R(\infty)= b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2}(\frac{\sigma}{a})^2}$, $\boldsymbol{\pi}$ représente la prime du risque.

Les taux peuvent être calculés facilement pour toutes les maturités en utilisant le prix des obligations zéro-coupon correspondantes. Le prix de marché s'écrit comme suit :

$$\mathbf{P_p(t)=}e^{-r(T)T}$$

D'où

$$\mathbf{r(T) = ln\ (P(t))/T}$$

L'égalité entre le prix théorique et le prix réel du marché donne une expression du taux ZC définit de la manière suivante :

$$\mathbf{R_{ZC}(t)=}\ \frac{\ln(A(t,T))+r(T)T}{B(t,T)}$$

Un code sous Excel VBA va nous permettre d'implémenter les nombres des jours pour lesquels les prévisions seront faites. Pour ce faire, il faut intégrer la notion de la prime du risque. Cette dernière est calculée par le biais du solveur en minimisant la somme des écarts entre le prix zéro-coupon réel et théorique.

TMP

2,538%

prime du risque

0,172840

la courbe pour quelle jour

1

calibration du modele

t	r(t)	B(t,T)	A(t,T)	prix marché	prix theoriqu	(prix th-prix marché)^2	rZc estimé	r marché	ecart entre taux
0,25	0,0248	0,247192	0,999997	0,993896538	0,99389548	1,12377E-12	0,0245	0,0249	0,000
0,5	0,0251	0,496983	0,999989	0,987605710	0,98760154	1,73997E-11	0,0250	0,0249	0,000
1	0,0262	0,996145	0,999955	0,974195088	0,97417978	2,34337E-10	0,0262	0,0257	0,000
2	0,0279	1,99279	0,99982	0,945818285	0,94576582	2,75279E-09	0,0279	0,0264	0,000
3	0,0289	2,9872	0,999595	0,917007836	0,91690277	1,10388E-08	0,0289	0,0274	0,000
4	0,0299	3,979381	0,99928	0,887261164	0,88709671	2,70437E-08	0,0300	0,0283	0,000
5	0,0309	4,969337	0,998876	0,856744717	0,85652112	4,99976E-08	0,0310	0,0293	0,000
6	0,0318	5,957073	0,998382	0,826282029	0,82600095	7,9005E-08	0,0319	0,0302	0,000
7	0,0327	6,942594	0,9978	0,795491395	0,79516175	1,08666E-07	0,0327	0,0312	0,000
8	0,0336	7,925906	0,99713	0,764471776	0,76410677	1,33233E-07	0,0336	0,0322	0,000
9	0,0345	8,907013	0,996372	0,733394453	0,73301007	1,4775E-07	0,0345	0,0331	0,000
10	0,0353	9,885921	0,995527	0,702343109	0,70195808	1,48244E-07	0,0354	0,0341	0,000
11	0,0361	10,86263	0,994594	0,672206273	0,67183109	1,40761E-07	0,0362	0,0351	0,000
12	0,0369	11,83716	0,993575	0,642353103	0,64200692	1,19843E-07	0,0369	0,0361	0,000
13	0,0377	12,80949	0,99247	0,612890701	0,6125928	8,87425E-08	0,0377	0,0372	0,000
14	0,0384	13,77965	0,991279	0,583875230	0,58364512	5,29505E-08	0,0385	0,0382	0,000
15	0,0392	14,74763	0,990003	0,555373157	0,55522987	2,05301E-08	0,0392	0,0392	0,000
16	0,0401	15,71344	0,988643	0,526441855	0,52642141	4,17893E-10	0,0401	0,0398	0,000
17	0,0410	16,67709	0,987199	0,498145249	0,49826614	1,46144E-08	0,0410	0,0404	0,000
18	0,0419	17,63857	0,985671	0,470530547	0,47080954	7,7836E-08	0,0419	0,0409	0,000
19	0,0428	18,5979	0,984061	0,443655531	0,44410707	2,03891E-07	0,0427	0,0415	0,000
20	0,0437	19,55508	0,982369	0,417550521	0,41818694	4,05036E-07	0,0436	0,0421	0,000

Figure 16: prévision de la courbe des taux par modèle de Vasicek

En se basant sur les résultats de l'estimation des paramètres a, b et σ (découlant de la section précédente), nous avons développé une feuille Excel qui permet de calculer les valeurs de A (t, T) et B (t, T) (définis au début de la partie) indispensables pour le calcul des prix $P_{th}(t,T)$ et $P_p(T)$ selon les formules ci-dessus. Nous obtenons ainsi les taux zéro-coupon estimés pour différentes maturités correspondant à la date souhaitée. Il est à noter que l'estimation du taux ZC à cette date nécessite l'ajout de la valeur prédite du TMP Interbancaire correspondant. Or, dans notre calcul, la prime de risque a été intégrée, elle a été calculée grâce à une minimisation faite grâce au solveur Excel entre le prix théorique et le prix du marché. La prime du risque dans ce modèle à une valeur de 0.17.

Afin de valider ces prévisions, un backetesting a été élaboré. Une comparaison entre les courbes des taux publiée réellement sur Bank-Almaghrib interpolée et les courbes prédites grâce au modèle, s'avère nécessaire. Ceci nous permettra de confirmer si le modèle est le bon ou il faut avoir recours à d'autres modèles. Le backtesting a été illustré sur une période de 1jours, une semaine puis un mois par les graphes suivants :

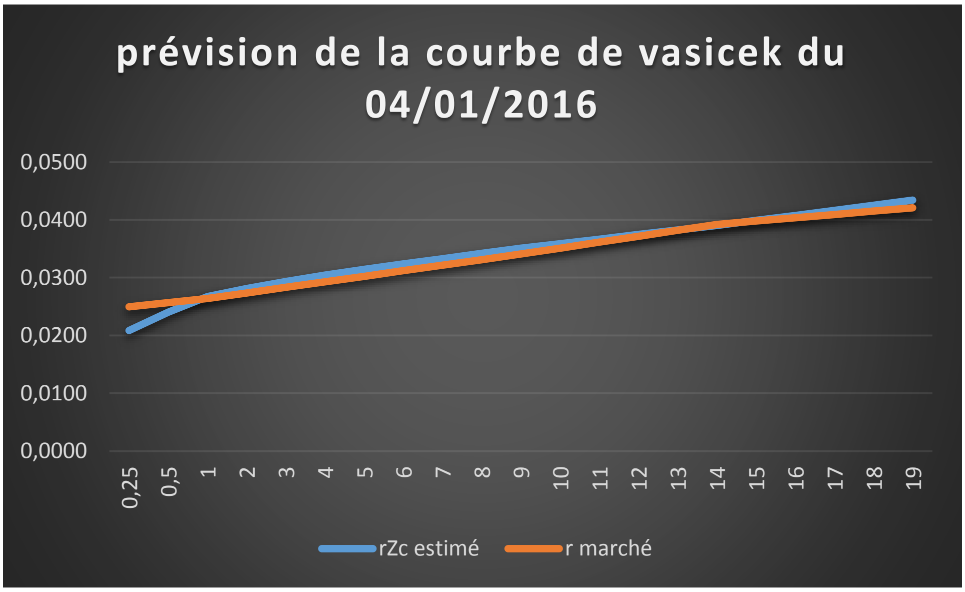


Figure 17: backtesting de la prévision de la courbe des taux du 02/01/2016 par Vasicek

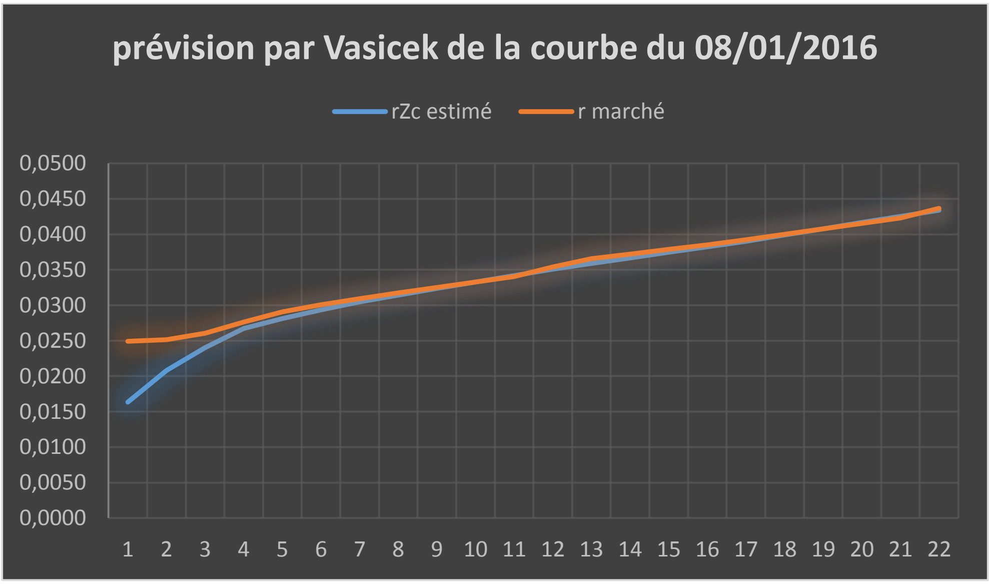


Figure 18: backtesting de la prévision de la courbe des taux du 08/01/2016 par Vasicek

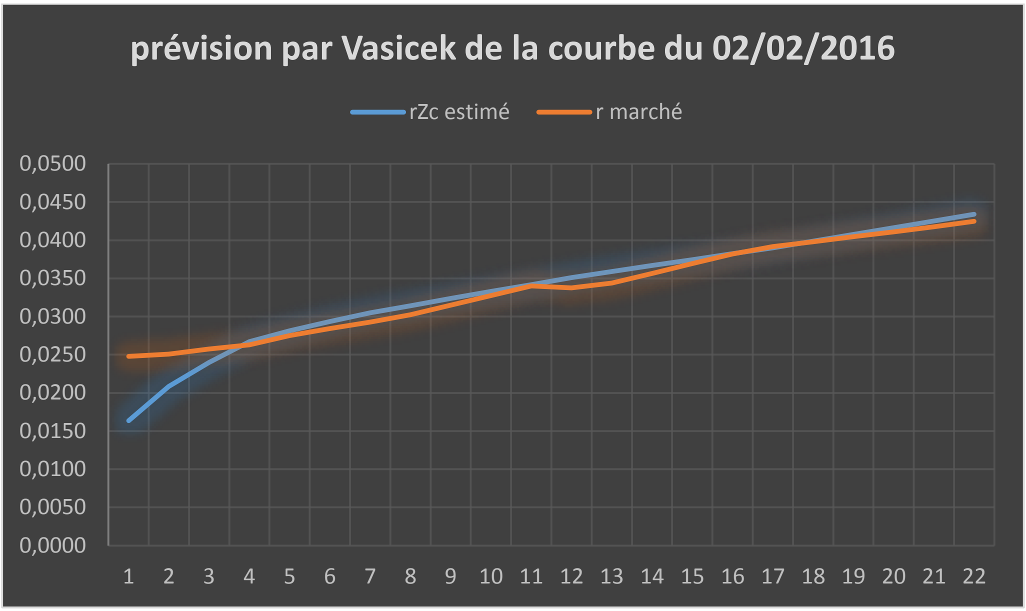


Figure 19:backtesting de la prévision de la courbe des taux du 02/02/2016 par Vasicek

Ces figures donnent des prévisions cohérentes pour la courbe des taux. Vasicek estime bien les courbes dans une courte durée. Sauf qu'une fois cette période devient importante, cas d'un mois dans le backtesting, nous remarquons que le modèle n'estime plus de la même façon les taux. D'ailleurs pour les maturités très courtes, il donne des très bas avec un écart flagrant par rapport aux taux qui figurent dans le marché. Ce point est l'inconvénient principal du modèle de Vasicek, car si nous continuons nos prévisions à très longs termes, nous aurions certainement des taux négatifs, chose qui est absurde. Le modèle de Vasiček comporte un défaut majeur. Le taux court suit un processus gaussien, donc il peut être négatif avec une probabilité non nulle.

Pour conclure, Vasicek a mis en place un modèle simple à estimer et qui illustre très biens notre courbe. Sauf, en termes de prévision à long terme, le modèle est incapable de les faire. Ils nous donnent même des taux négatifs, chose qui n'est pas du tout prévisible sur le marché marocain actuellement. Ce défaut peut être corrigé en utilisant le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, modèle qu'on va aborder tout de suite. Certes il ajoute et impose des nouvelles contraintes sur la dynamique des taux courts, il va donc nous dégager des taux écartant la probabilité non nulle, de tomber sur des taux négatifs. Dans la suite de cette section, nous allons continuer notre modélisation et prévision de la courbe des taux par d'autres modèles différents de Vasicek, que nous espérions qu'ils donnent des résultats bien meilleurs et plus cohérents.

2.3.1.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Afin de corriger les taux d'intérêts négatifs, Cox, Ingersoll et Ross (CIR) ont eu recours à un processus de «racine carrée » dont la dynamique des taux est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$dr_t = -kr_t dt + \sigma\sqrt{r_t + \gamma}\, dW_t \qquad \textbf{(13)}$$

Où - W_t est un mouvement brownien, **k** représente un drift continu et σ est la volatilité continue du modèle.

Ce processus peut être écrit d'une autre façon :

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t \qquad \textbf{(14)}$$

Avec θ modélise l'effet du retour à la moyenne.

Ce processus est identique au précédent à la seule différence que le poids accordé à la relation de proportionnalité est ici égal à **1/2** alors qu'il était nul dans le modèle de Vasicek. La solution de ce processus est donnée par :

$$r_t = r_0 + \int_0^t k\,(\theta - r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\, dW_s$$

2.3.1.2.1 Estimation des paramètres

Pour le modèle de CIR centré, nous devons centrer les taux ceci par le biais d'une soustraction. Ce processus nous permettra de modéliser la différence entre les taux courts et la moyenne à long terme des mêmes taux (γ = moyenne des taux).

SOMME | =C16-$D$6

	A	B	C	D	E	F
1	modele de Cox Ingersoll Ross					
2						
3	estimation des parametres					
4						
5	drift discret PHI			0,9969755		
6	moyenne a long terme gamma			0,0272702		
7	volatilité dicrete sigmaa			0,0009975		
8	RSS(a minimiser)			0,0007243		
9	drift continue k			0,0030291		
10	volatilité continue sigma			0,0009990		
11						
12						
13	estimation des parametres					
14						
15	**Date**	**TMP**	**rt***	**rt**	**(rt-Phi*rt-1)^2/(rt+gamma)**	
16	01/01/2014	3,030%	0,03030	=C16-$D$6	-	
17	02/01/2014	3,019%	0,03019	0,00292	0,000000336798	
18	03/01/2014	3,052%	0,03052	0,00325	0,000003761681	

Figure 20: calcul des taux centrés pour le modèle du CIR

Cette illustration montre la méthode de calcul des taux court terme centrés par rapport à la moyenne. Ces derniers seront nous aiderons à calibrer le modèle du CIR centré et nous permettra de calibrer le modèle. Dans notre cas, nous utilisons une discrétisation du processus afin de déterminer les paramètres du modèle. Les résidus sont calculés pour chaque point de la base de données de la manière suivante :

$$\frac{(\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{\phi r_{t-1}})^2}{\boldsymbol{r_t} + \boldsymbol{\gamma}}$$

SOMME | =((D17-$D$5*D16)^2)/(D17+$D$6)

	A	B	C	D	E
1	modele de Cox Ingersoll Ross				
2					
3	estimation des parametres				
4					
5	drift discret PHI			0,9969755	
6	moyenne a long terme gamma			0,0272702	
7	volatilité dicrete sigmaa			0,0009975	
8	RSS(a minimiser)			0,0007243	
9	drift continue k			0,0030291	
10	volatilité continue sigma			0,0009990	
11					
12					
13	estimation des parametres				
14					
15	Date	TMP	rt*	rt	(rt-Phi*rt-1)^2/(rt+gamma)
16	01/01/2014	3,030%	0,03030	0,00303	-
17	02/01/2014	3,019%	0,03019		=((D17-$D$5*D16)^2)/(D17+$D$6)
18	03/01/2014	3,052%	0,03052	0,00325	0,000003761681

Figure 21: Calcul des résidus pour chaque taux dans le cadre du processus de CIR

Notons d'abord que le r_t^* représente les taux à court termes, qui sont les TMP journaliers dans notre cas. Alors que ler_t, représente le spread entre les taux JJ et la moyenne de ces taux pour la période considérée dans notre étude.

Le ϕ est un terme du drift discret, au début il est pris arbitrairement. La valeur calibrée, ou la différence minimale estimée nous permettra de déterminer la somme des carrées des résidus RSS. Cette dernière nous a donné une valeur de 0.0007243 après une minimisation faite par solveur. La seule contrainte prise en considération dans cette minimisation est la valeur du ϕ.

Par contre, la valeur de la volatilité discrète est calculé par la racine de la moyenne des carrées des résidus rapportée au nombre de résidu moins un. Ce calcul donne une volatilité de 0.0009975. Alors que le drift continu, il est calculé par la formule suivante :

$$\boldsymbol{k = -\ln(\phi)} \tag{15}$$

Apres calcul, une valeur de 0.003 a été affichée. Or, la volatilité continue a été aussi calculée, donnons un résultat de 0.00099, la formule utilisée est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{2k\sigma_a}{(1 - e^{-2k})}}} \tag{16}$$

Apres avoir trouvé une valeur de tous les paramètres du modèle, une simulation a été élaboré sur Excel afin d'estimer les taux, nous faisons à la formule de CIR centré qui est sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{dr_t = -kr_t dt + \sigma\sqrt{r_t + \gamma}\, dW_t} \tag{17}$$

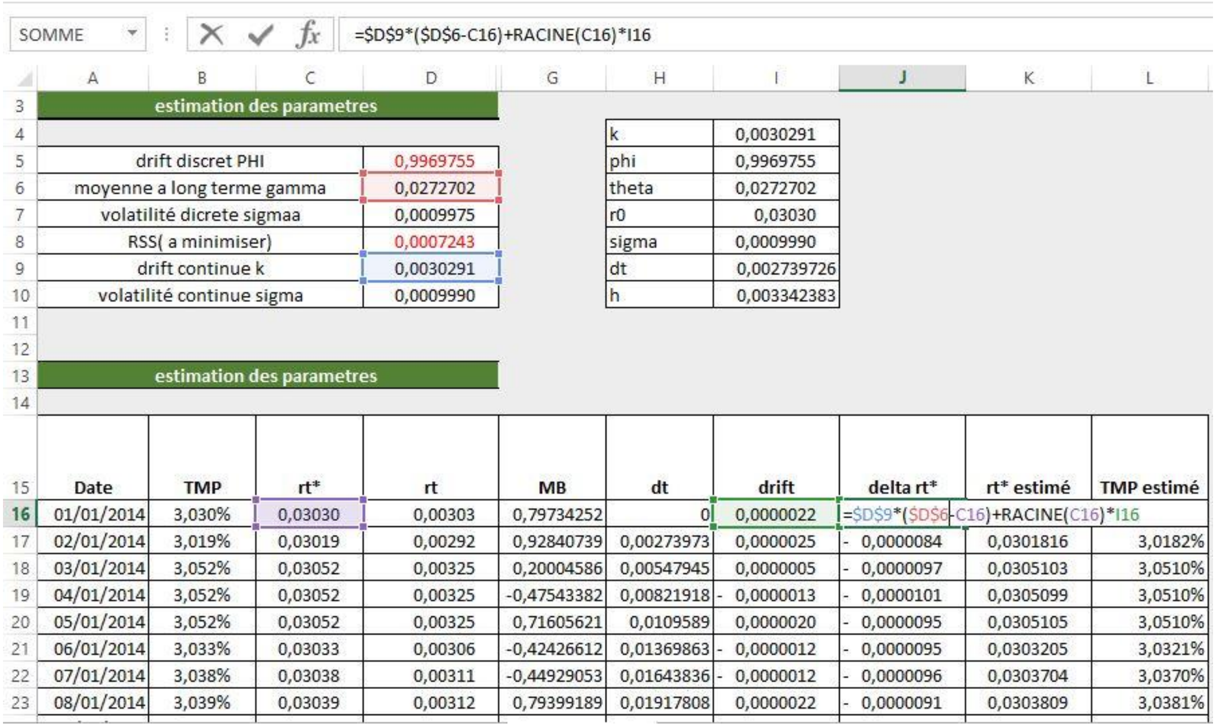
Cette expression a été reformulée pour les taux court terme comme :

$$\Delta \boldsymbol{r_t^* = k(\gamma - r_{t-1}^*)dt + \sigma\sqrt{r_{t-1}^*}\mathrm{d}W_t} \tag{18}$$

Le temps est incrément dans notre cas par les jours. Cela revient de dire, **dt** est équivalente un jour par rapport aux jours de l'année, 1/365=0.027. afin de calculer le drift des mouvements browniens ont été générés grâce à ces deux fonctions Excel : « **LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA()) ».** Apres avoir calculé chaque variation de taux par l'expression du modèle, les taux pourront être estimés alors par le rajout de ce spread aux taux qui précèdent de la manière suivante :

$$\boldsymbol{r_t^* = r_{t-1}^*} + \Delta \boldsymbol{r_t^*}$$

La feuille Excel ci-dessous résume ce calcul, est permet de calibrer et de donner de très bonne estimation des taux.


SOMME | =$D$9*($D$6-C16)+RACINE(C16)*I16

estimation des parametres

drift discret PHI	0,9969755
moyenne a long terme gamma	0,0272702
volatilité dicrete sigmaa	0,0009975
RSS(a minimiser)	0,0007243
drift continue k	0,0030291
volatilité continue sigma	0,0009990

k	0,0030291
phi	0,9969755
theta	0,0272702
r0	0,03030
sigma	0,0009990
dt	0,002739726
h	0,003342383

estimation des parametres

Date	TMP	rt*	rt	MB	dt	drift	delta rt*	rt* estimé	TMP estimé
01/01/2014	3,030%	0,03030	0,00303	0,79734252	0	0,0000022	=$D$9*($D$6-C16)+RACINE(C16)*I16		
02/01/2014	3,019%	0,03019	0,00292	0,92840739	0,00273973	0,0000025	- 0,0000084	0,0301816	3,0182%
03/01/2014	3,052%	0,03052	0,00325	0,20004586	0,00547945	0,0000005	- 0,0000097	0,0305103	3,0510%
04/01/2014	3,052%	0,03052	0,00325	-0,47543382	0,00821918	- 0,0000013	- 0,0000101	0,0305099	3,0510%
05/01/2014	3,052%	0,03052	0,00325	0,71605621	0,0109589	0,0000020	- 0,0000095	0,0305105	3,0510%
06/01/2014	3,033%	0,03033	0,00306	-0,42426612	0,01369863	- 0,0000012	- 0,0000095	0,0303205	3,0321%
07/01/2014	3,038%	0,03038	0,00311	-0,44929053	0,01643836	- 0,0000012	- 0,0000096	0,0303704	3,0370%
08/01/2014	3,039%	0,03039	0,00312	0,79399189	0,01917808	0,0000022	- 0,0000091	0,0303809	3,0381%

Figure 22: estimation des paramètres par le modèle de CIR

Ces résultats ont été confirmés par le graphe ci-dessous. Ceci nous donne une vision plus ample à la calibration du modèle par le processus de Cox-Ingersoll-Ross.

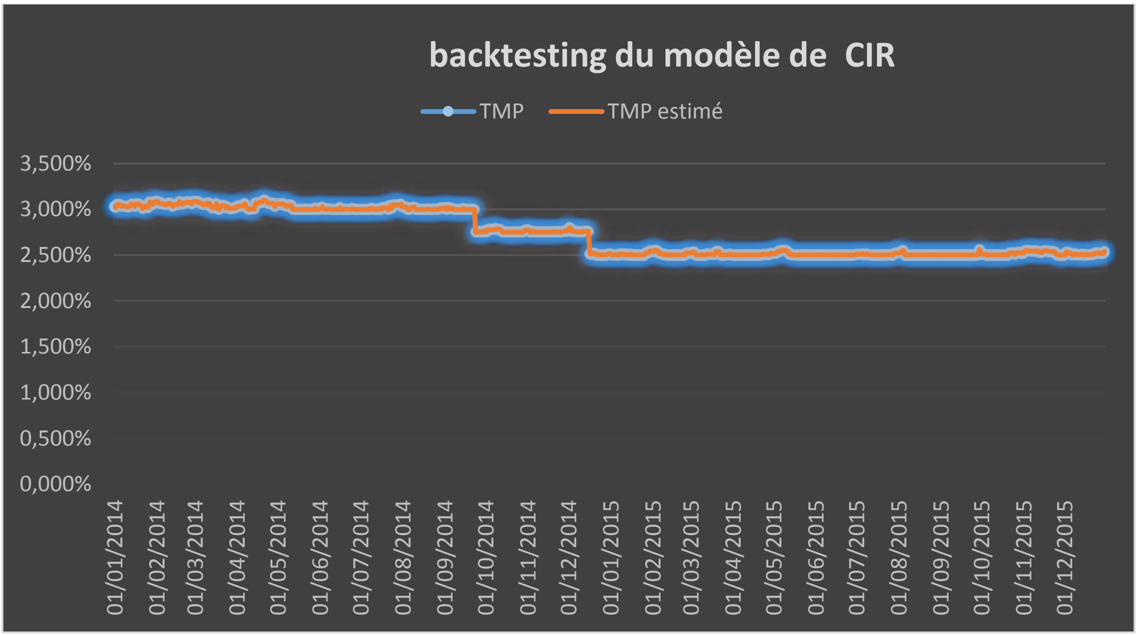


Figure 23: backetesting des taux estimés par le modèle de CIR

Le modèle de CIR calibre d'une façon presque parfaite les taux. Afin de confirmer ce modèle, nous serons amenés à faire des prévisions par le biais de ce processus.

2.3.1.2.2 Prévision par le modèle de CIR

Sachant que la valeur d'une obligation ne dépend que d'une seule variable d'état, la solution à l'équation différentielle régissant le prix d'une obligation zéro-coupon est la suivante:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)*r(t)} \tag{19}$$

Avec

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma\exp(\frac{1}{2}(k+\gamma)(T-t))}{(\gamma+k)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma}\right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \tag{20}$$

Et

$$B(t,T) = \frac{2\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)}{(\gamma+k)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma} \tag{21}$$

$$\gamma = \sqrt{k^2+2\sigma^2}$$

A l'instar de la modélisation de Vasiček après avoir estimé les paramètres du modèle, nous avons établi une prévision des structures par termes prochaine afin de valider le modèle. Ces prévisions sont faites grâce aux formules définies ci-dessus. Ainsi un backtesting à partir des résultats de modèle sera nécessaire afin trancher entre les deux modèles d'équilibre. La feuille Excel suivante résume la démarche suivante :

calibration du modele

t	courbe des taux 31/12/2015	B(t,T)	A(t,T)	prix reel	taux estimé pour le 02/01/2016	BACKTESTING	erreur
0,25	0,0248	0,27572652	0,99999998	0,99319625	0,0273	0,0248	6,09675E-06
0,5	0,0251	0,55119895	0,99999994	0,98627049	0,0276	0,0251	6,34409E-06
1	0,0262	1,10138259	0,99999975	0,97153929	0,0289	0,0264	6,10638E-06
2	0,0279	2,19871205	0,999999	0,94051806	0,0307	0,0277	8,60546E-06
3	0,0289	3,29200463	0,99999776	0,90922615	0,0317	0,0288	8,50149E-06
4	0,0299	4,38127648	0,99999602	0,87712009	0,0328	0,0299	8,37589E-06
5	0,0309	5,46654369	0,99999379	0,84438973	0,0338	0,0310	8,22806E-06
6	0,0318	6,54782228	0,99999107	0,81192632	0,0347	0,0318	8,28868E-06
7	0,0327	7,62512818	0,99998786	0,77931706	0,0356	0,0327	8,33132E-06
8	0,0336	8,69847728	0,99998416	0,74666786	0,0365	0,0336	8,35692E-06
9	0,0345	9,76788536	0,99997997	0,71415905	0,0374	0,0345	8,36106E-06
10	0,0353	10,8333682	0,9999753	0,68187529	0,0383	0,0354	8,34604E-06
11	0,0361	11,8949413	0,99997015	0,65074228	0,0391	0,0362	8,3751E-06
12	0,0369	12,9526204	0,99996451	0,62008489	0,0398	0,0369	8,38892E-06
13	0,0377	14,006421	0,99995839	0,5900061	0,0406	0,0377	8,38501E-06
14	0,0384	15,0563584	0,99995179	0,56055444	0,0413	0,0385	8,36462E-06
15	0,0392	16,1024481	0,99994471	0,53178815	0,0421	0,0392	8,32789E-06

Figure 24: prévision de la courbe de taux par le modèle de CIR

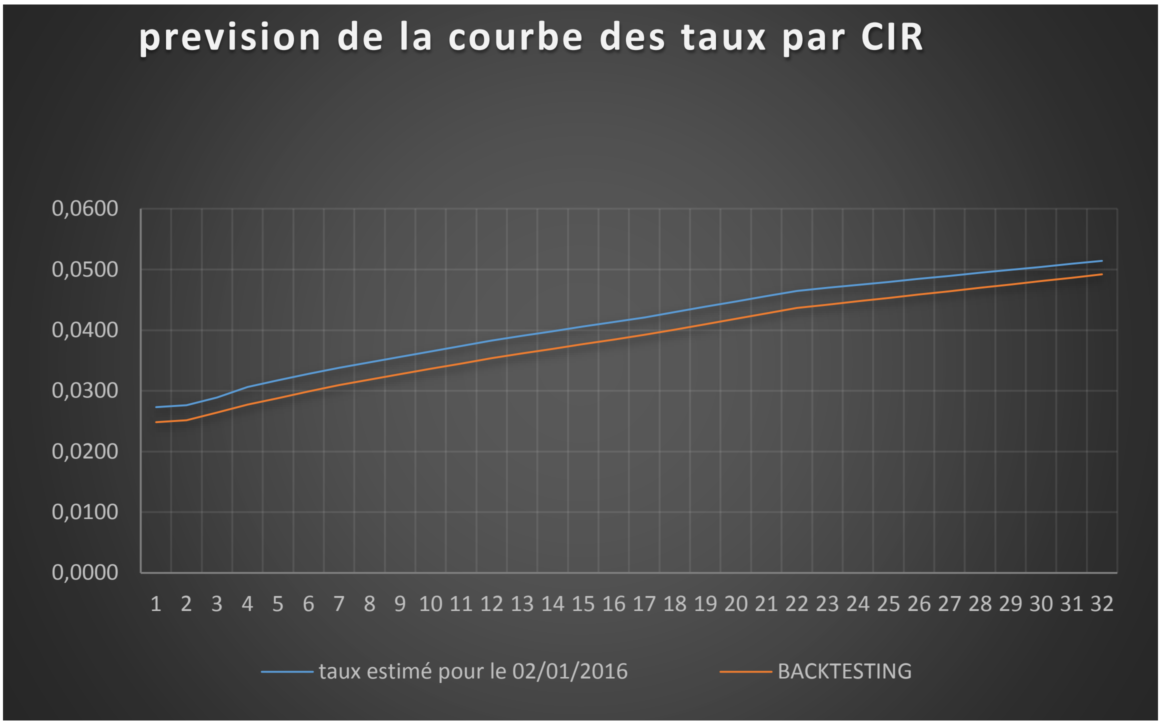


Figure 25: backtesting de la prévision de la courbe des taux du 02/01/2016 par CIR

Cette figure donne une prévision de la courbe des taux moins précise. Le processus de CIR reprend la forme de la courbe, sauf avec quelque point de base de différence avec la réalité. Ce gap mènera à des résultats très erronés lors de l'évaluation des produits dérivés de taux.

Normalement le processus de CIR corrige la modélisation faite par Vasiček. Il écarte la probabilité non nulle d'obtenir des taux négatifs. Or ce dernier, il ne délivre pas un meilleur résultat. Ces résultats nous mène à garder dans les modèles à un seul facteur le modèle de Vasicek en se basant sur la qualité des courbes prédites par ce modèle. Par la suite, nous présentons un modèle de deux facteurs et nous le comparerons avec la pertinence des résultats de Vasicek.

2.3.2 Modèle à deux facteurs

Les modèles rentrant dans cette catégorie sont nombreux, mais ils diffèrent de la part les variables d'états qu'ils considèrent.

Dans ces modèles, quatre variables ont principalement été retenues comme deuxième variable d'état pour les modèles de taux. Ces variables sont :

- Le taux long,
- Le taux d'inflation,
- Le spread (différence entre le taux long et le taux court),
- La volatilité des taux courts.

Parmi ces modèles, le modèle de Hull et White à deux facteurs est surement l'un des plus connu parmi ceux sans opportunité d'arbitrage.

2.3.2.1 Modèle Hull et White à deux facteurs

Ce modèle, défini sous la probabilité « risque neutre », consiste en une dynamique du taux court et une dynamique du taux long, reprenant l'approche de retour à la moyenne du modèle de Vasicek, d'où vient l'appellation du processus de **« Vasicek étendu »**. Les équations différentielles stochastiques que ces deux variables d'états vérifient sont :

$$dl_t = k_l(u_l - l_t)dt + \sigma_l dB_{l,t} \quad \textbf{(22)}$$

$$dr_t = k_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t} \quad \textbf{(23)}$$

Avec

- r_t le taux court,
- l_t le taux long,
- k_l la vitesse de retour à la moyenne des taux longs,
- k_r la vitesse de retour à la moyenne des taux courts,
- u_l le taux moyen long terme,
- σ_l la volatilité des taux longs,
- σ_r la volatilité des taux courts,
- $B_{l,t}$ et $B_{r,t}$ des mouvements browniens.

Ces deux modèles suivent des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Par conséquent, tout comme pour le modèle de Vasicek, il est possible de donner une expression du taux court et du taux long, mais cette fois-ci, de manière discrétisée. Nous obtenons alors (démontrée en annexe) :

$$l_{t+1} = l_t e^{-k_l} + u_l\left(1 - e^{-k_l}\right) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_l}}{2k_l}}\varepsilon_{l,t} \quad \textbf{(24))}$$

Avec $\varepsilon_{l,t}$ suit N(0,1), et :

$$r_{t+1} = r_t e^{-k_r} + l_t\left(1 - e^{-k_r}\right) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_r}}{2k_r}}\varepsilon_{r,t} \quad \textbf{(25)}$$

$\varepsilon_{r,t}$ suit N(0,1).

Un tel modèle est plus riche qu'un modèle de taux à un facteur, comme celui de Vasicek, car la modélisation du taux court dépend directement de celle du taux long. Il autorise une gamme de structures de volatilités plus large que celle des modèles de la section précédente, et permet également des mouvements de la courbe des taux plus variés.

2.3.2.1.1 Calibrage du modèle de Hull et White deux facteurs

Pour calibrer ce modèle, nous avons besoin de la résolution des équations différentielles stochastiques données ci-dessus

Ce calibrage se fait en deux étapes. La première concerne le calibrage des taux long. Ce calibrage est identique à celui précédemment pour le modèle de Vasicek. Une simple régression linéaire appliquée au taux long est donc suffisante. Ca calcul a été fait sur R et copier sur une feuille Excel afin de garder les valeurs des paramètres pour la partie précédente.

la constante	0,0002905
parametre	0,9922268
ecart type des résidus	0,0008823
la vitesse de retour à la moyenne des taux long Kl	0,007803569
la valeur moyenne a long terme (mul)	0,037371996
volatilité des taux long	0,000885745

Figure 26; première étape du calibrage du modèle Hull et White

Une fois cette étape terminé, il est nécessaire de passer au calibrage concernant le taux court. Pour cela, il suffit de partir de la forme de son expression :

$$\boldsymbol{r_{t+1} = \gamma_1 r_t + \gamma_2 l_t^* + \varepsilon'} \quad \textbf{(25)}$$

Avec :

- $\boldsymbol{\gamma_1 = e^{-k_r}}$
- $\boldsymbol{\gamma_2 = 1\text{-}e^{-k_r} = 1\text{-}e^{-k_r}}$
- $\boldsymbol{l_t^* = \beta_0 + \beta_1 l_{t-1}}$ avec $\boldsymbol{\beta_0}\ et\ \boldsymbol{\beta_1}$ les paramètres trouvés lors dde la première régression

La relation de récurrence peut se simplifier :

$$\boldsymbol{r_{t+1} - r_t = \gamma_2 (l_t^* - r_t) + \varepsilon'} \quad \textbf{(26)}$$

Ainsi, estimer les paramètres revient à faire une régression linéaire sans constante entre deux jeux de données historiques qu'il faut créer à partir des données historiques du taux court et taux long, dans notre étude nous prendrons les taux dont la maturité 5 ans car c'est le plus liquide. A l'aide des données de la régression, il est possible de trouver les paramètres manquants du modèle :

- $\boldsymbol{k_r = -ln(1 - \gamma_2)}$
- $\boldsymbol{\sigma_r = \sqrt{\dfrac{var(\varepsilon')}{\frac{1-e^{-2k_r}}{2k_r}}}}$

Le tableau suivant liste les résultats de ces différents paramètres :

parametre des taux court	0,9995271
parametre des taux long	0,0004729
ecart type des résidus	0,0001642
la vitesse de retour à la moyenne des taux court	0,000473012
volatilité des taux court	0,000164239

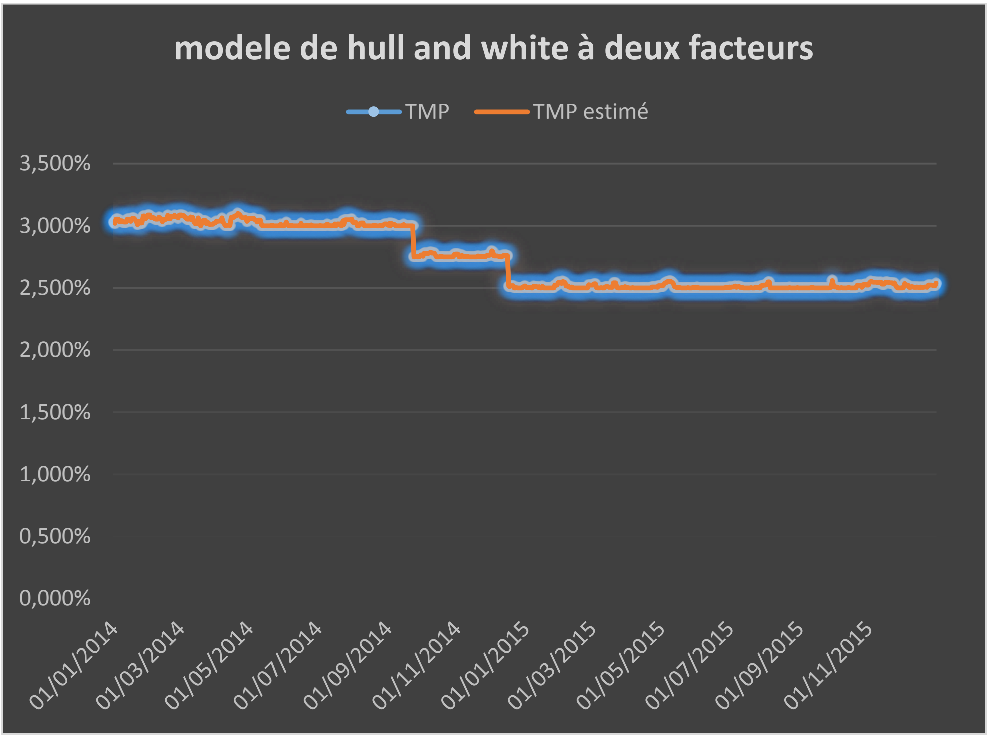
Figure 27: Estimation des paramètres des taux courts de Hull et White

Ces paramètres nous permettent d'estimer les taux longs (taux-5ans) puis les taux courts par le processus de Hull et White. Ainsi les taux estimés des TMP se résument à la prise d'écran des taux suivante et la figure ci-dessous :

calibration du modele

date	TMP	taux long estimé	TMP estimé	résidu
01/01/2014	3,030%	4,900%	3,030000%	4,3025E-05
02/01/2014	3,019%	4,900%	3,019889%	0,000123095
03/01/2014	3,052%	4,900%	3,052874%	0,000365828
04/01/2014	3,052%	4,900%	3,052874%	-5,8784E-05
05/01/2014	3,052%	4,900%	3,052874%	4,29505E-05
06/01/2014	3,033%	4,900%	3,033883%	0,00022036
07/01/2014	3,038%	4,900%	3,038880%	-0,00020262
08/01/2014	3,039%	4,900%	3,039880%	-3,4858E-05
09/01/2014	3,032%	4,863%	3,032866%	-0,00019172
10/01/2014	3,029%	4,853%	3,029863%	-9,0045E-05
11/01/2014	3,029%	4,853%	3,029863%	-5,0193E-06
12/01/2014	3,029%	4,853%	3,029863%	8,06759E-05
13/01/2014	3,053%	4,848%	3,053849%	0,000122474
14/01/2014	3,053%	4,848%	3,053849%	1,86305E-05
15/01/2014	3,053%	4,848%	3,053849%	-0,00025853
16/01/2014	3,034%	4,916%	3,034890%	0,000161496
17/01/2014	3,059%	4,916%	3,059878%	-0,00017619
18/01/2014	3,059%	4,916%	3,059878%	-0,00020713

Figure 28: calibrage du modèle Hull et White



1

Figure 29: backtesting des TMP estimé par Hull et white

Les résultats du Backtesting confirment la calibration faite par le modèle Hull et White. Ce processus nous donne une vision très précise sur l'évolution des taux courts. Afin d'affirmer ce résultats, nous ferons par la suite des prévisions sur les structures par termes prochaines.

2.3.2.1.2 Prévision de la courbe des taux par Hull et White

Pour ce modèle, il existe une formule analytique qui permet de retrouver le prix du zéro-coupon à la date t de maturité T :

$$P_{réel}(t,T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t)r_t - B_2(T-t)l_t] \qquad (25)$$

Avec

$$B_1(s) = \frac{1-e^{-k_r s}}{k_r} \qquad (26)$$

$$B_2(s) = \frac{k_r}{k_r - k_l}\left[\frac{1-e^{-k_l s}}{k_l} - \frac{1-e^{-k_r s}}{k_r}\right] \qquad (27)$$

Et

$$A(s) = (B_1(s) - s)\left(u_l - \frac{\sigma_r^2}{2k_r^2}\right) + B_2(s)u_l + \frac{\sigma_r^2}{4}\frac{B_1(s)^2}{k_r} + \frac{\sigma_l^2}{2}\left[\frac{s}{k_l^2} - 2\frac{B_1(s)+B_2(s)}{k_l^2} + \frac{1-e^{-2k_r s}}{2k_r(k_r-k_l)^2} - \frac{2k_r\left(1-e^{-(k_r+k_l)s}\right)}{k_l(k_r-k_l)^2(k_r+k_l)} + \frac{k_r^2\left(1-e^{-2k_l s}\right)}{2{k_l}^3(k_r-k_l)^2}\right] \qquad (28)$$

Puis, pour retrouver la courbe des taux de chaque trajectoire, nous effectuons :

$$R(t,T) = -\frac{\ln(P_{réel}(t,T))}{T-t} \qquad (29)$$

Ces formules ont été développées sur une feuille Excel, avec un code VBA-Excel qui permet d'implémenter les formules afin de prédire la courbe pour la date espérée.

AA28

prévision de la courbe de taux

Tmp: 2,5%

la courbe pour quelle jour: 1 (en jour)

t	taux interpolé	B1(s)	B2(s)	A(s)	Prix reel	Taux estimés	BACKTESTING	-
0,25	0,02476000	0,24724582	1,44496E-05	-2,79423E-10	0,99389654	0,0245	0,0249	1,61076E-07
0,5	0,02508091	0,4972018	5,84001E-05	-2,27132E-09	0,98760571	0,0249	0,0249	3,95562E-11
1	0,02621552	0,9970251	0,000234566	-1,82984E-08	0,97419509	0,0261	0,0257	2,34003E-07
2	0,02789061	1,99631714	0,000938255	-1,46627E-07	0,94581828	0,0279	0,0264	2,08711E-06
3	0,02890615	2,99513661	0,002107201	-4,94315E-07	0,91700782	0,0289	0,0274	2,31335E-06
4	0,02992447	3,99348374	0,003737564	-1,16961E-06	0,88726116	0,0299	0,0283	2,54325E-06
5	0,03094001	4,99135875	0,005825534	-2,27967E-06	0,85674478	0,0309	0,0293	2,76688E-06
6	0,03181772	5,98876187	0,008367332	-3,9306E-06	0,82628223	0,0318	0,0302	2,52958E-06
7	0,03269783	6,98569332	0,011359209	-6,22742E-06	0,79549184	0,0327	0,0312	2,2344E-06
8	0,03358277	7,98215332	0,014797444	-9,27412E-06	0,76447263	0,0336	0,0322	2,00798E-06
9	0,03446289	8,97814209	0,018678344	-1,31736E-05	0,73339591	0,0345	0,0331	1,77994E-06
10	0,03534301	9,97365985	0,022998247	-1,80278E-05	0,7023454	0,0353	0,0341	1,55847E-06
11	0,03611718	10,9687068	0,027753519	-2,39376E-05	0,6722096	0,0361	0,0351	9,94277E-07
12	0,03689318	11,9632833	0,032940554	-3,10028E-05	0,64235775	0,0369	0,0361	5,58859E-07

Figure 30: prévision de la courbe par le modèle de Hull et White

Cette table de données va nous servir pour calculer l'écart au carré entre les taux Zéro-coupon observés et ceux estimés. À l'aide d'une liste déroulante qui permet de défiler les dates, nous pouvons choisir ainsi la date pour laquelle un graphique comparatif sera généré. Les graphes ci-dessous nous permettent de d'avoir un backtesting sur les courbe réelles et les courbes prédites par le modèle.

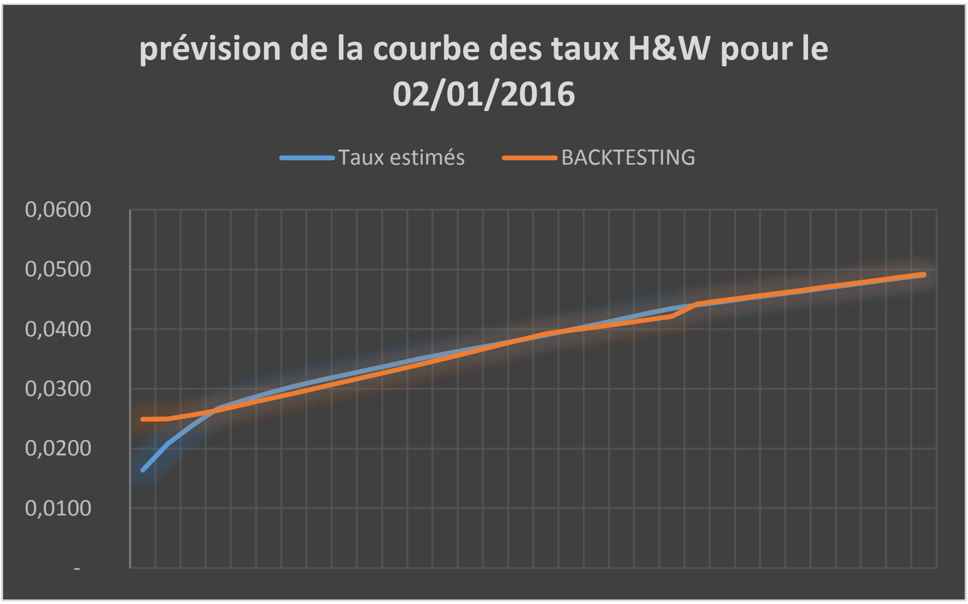


Figure 31: backtesting de la courbe des taux du 02/01/2016

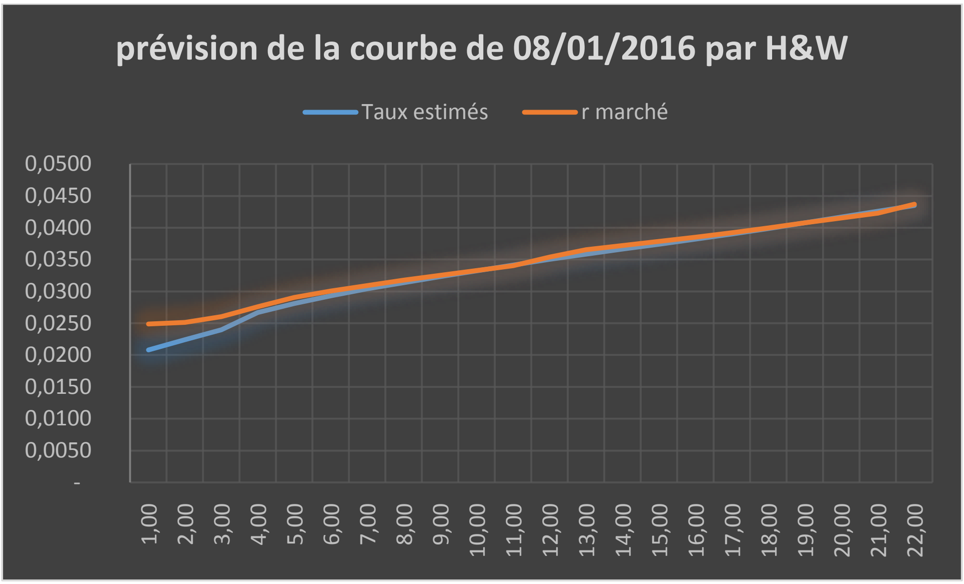


Figure 32: backtesting de la courbe de taux du 08/01/2016 par H&W

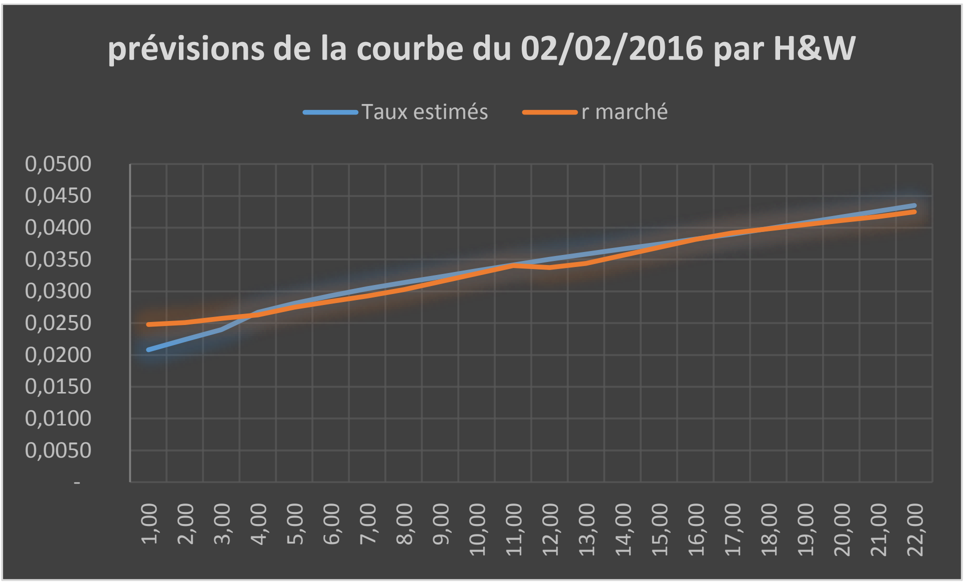


Figure 33: backtesting de la courbe du 02/02/2016 par le modèle de Hull et white

Suite aux bons résultats qui découlent du backtesting, nous avons établi des prévisions de la courbe sur un mois à venir, à partir de 01/01/2016. Ceci dit, l'application va nous permettre de générer toutes les courbes correspondantes à chacune des dates choisies. La figure ci-dessous représente les courbes des taux zéro-coupon prévues pour des dates différentes.

Nous constatons que les deux courbes, réelles et prédites par modèles, sont à quelques détails près pareils. Nous pourrons confirmer à travers ces processus stochastique définis dessus que le modèle de Hull et White est le meilleur. Il nous a permis d'obtenir une courbe de taux très proche de celle de marché et de corriger les défauts de Vasicek, car c'est celui le plus utilisé la négativité des taux. Nous retiendrons donc ce modèle dans ce qui suit. Ainsi, pour l'évaluation des FRA, des Swaps de taux, des Caps et des Floors.

Conclusion

Ce chapitre a été dédié intégralement à la courbe des taux sa construction et sa modélisation. Dans ce cadre, nous avons optons à des modèles d'équilibre et d'arbitrage, pour en retenir vers la fin qu'un seul celui qui donne les meilleures prévisions sur un horizon d'un mois, c'est celui de Hull et White. Ces prévisions nous serons utiles pour la valorisation des dérivés de taux à savoir les FRAs, les Swaps de taux, et les options de taux Caps et floor.

Enfin, connaître l'évolution des taux d'intérêts à court terme est toujours très utile. En effet, les taux court-terme influent non seulement sur la partie courte de la courbe mais aussi sur les taux à long terme. L'une des motivations à modéliser la déformation de la structure par terme des taux est la prévision de la structure par terme. Il revient précisément à faire de la prévision des facteurs qui expliquent les mouvements dans la courbe des taux.

Malgré les innovations dans la modélisation de la courbe des taux, il existe encore des problèmes pratiques dans sa prévision. Ces processus ne prédisent pas la politique monétaire et les sauts que connaissent les taux directeurs. Pour y remédier à ces sauts des taux, il est primordial d'utiliser des modèles « **à sauts** », faute de temps nous n'avons pas pu travailler dessus.

Chapitre III

Valorisation de *Forward Rate Agreement*

Ce chapitre sera entièrement dédié au premier produit dérivé de taux vers lequel notre intérêt sera rivé, qui est le contrat à terme sur taux d'intérêt, communément dit FRA pour *Forward Rate Agreement.* Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur le côté théorique de cette notion, ses origines, son fonctionnement d'une manière déterministe et stochastique, puis nous finirons par présenter l'application établie sur VBA-Excel pour l'évaluation des FRA.

3.1 Les forward :

3.1.1 Les contrats forward

Un contrat forward est un actif dérivé très simple. C'est un engagement ferme à acheter ou à vendre un actif sous-jacent à une date future donnée pour un prix convenu. Ce contrat se distingue d'un contrat Futures, au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement. Un contrat Forward est échangé sur un marché OTC de gré à gré, le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite longue, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position dite courte.

Afin d'illustrer la notion du contrat forward prenons l'exemple suivant :

A, un agriculteur, sait que dans six mois il disposera d'une récolte des fraises qui sera prête à être vendue sur le marché. B, lui, est gérant d'une grande chaîne de confiture. Dans six mois, son activité l'amènera à acheter une quantité X des fraises. B craint que le prix de la fraise d'ici six mois augmente, tandis que A appréhende une baisse de ce prix (ou de perdre son produit car la fraise ne supporterait pas d'être stockée pour une longue période.)

A et B se mettent ainsi d'accord pour qu'à l'instant T (dans six mois), B achète à A la quantité X dont il a besoin à un prix qu'ils fixent à l'instant 0 et qui leur convient à tous les deux. Le contrat que A et B ont établi est ainsi dit **contrat Forward**.

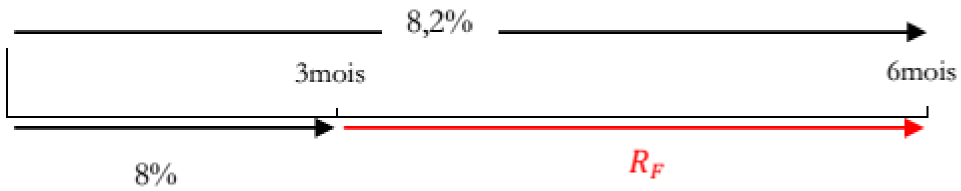
3.1.2 Les taux Forward

Les taux *Forward* sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. A titre d'exemple, le taux *forward* pour la seconde année, vu à l'instant, est le taux à un an qui devrait être observé au début de la deuxième année pour qu'un placement à deux années soit équivalent à la succession de deux placements.

Prenons la courbe des taux suivante pour illustrer cet exemple :

Maturité (en mois)	Taux
3	8%
6	8.2%
9	8.4%
12	8.5%
15	8.6%

Tableau 2:tableau des taux zéro-coupon équivalent à chaque maturité

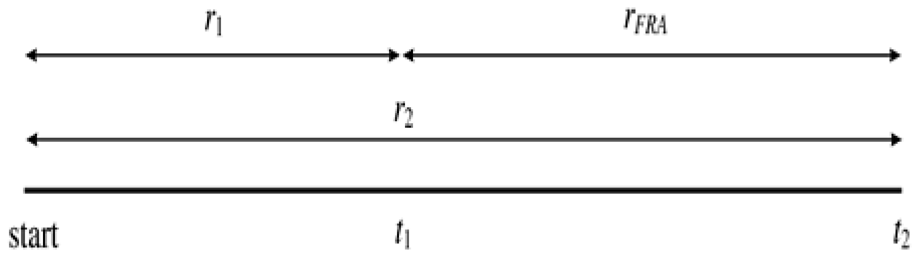


Le taux Forward R_F 6 mois est tel que :

$$0.25^*R_F + 8 * 0.25=0.5^*8.2$$

Donc $\boldsymbol{R_F = 8.4}\%$

Ce taux obtenu, est donc le taux à appliquer à l'instant t_1= 3 mois, qui, combiné au taux ZC de l'instant t_1, donnera le taux zéro-coupon sur 6mois. De façon générale, le taux Forward (R_{FRA}) pour la durée t_1-t_2, vu de t_0, est le taux qui devrait en principe être observé à l'instant t_1 pour qu'un placement sur la période t_0-t_2 ait un même rendement que deux placements successifs, le premier sur la période t_0-t_1, le second sur t_1-t_2.



Avec:

r_i : Le taux de prêt/emprunt correspondant la durée t_i –t_0;

r_{FRA} : Le taux de prêt/emprunt correspondant la durée t_2.-t_1.

3.2 LE FORWARD RATE AGREEMENT (FRA)

Un FRA (*Forward Rate Agreement*) est un contrat ayant comme objectif de fixer un taux d'intérêt à une date bien déterminée dans le future, pour un montant d'emprunt ou de prêt défini et pour une durée précise.

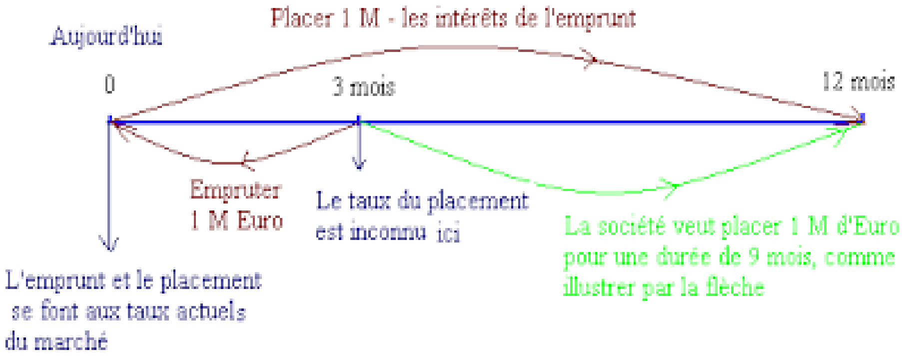
Le taux d'intérêt varie avec le temps selon plusieurs facteurs dont l'offre et la demande d'argent. Si par exemple, sur le marché il y a plus d'emprunteurs que de prêteurs, le taux d'emprunt qui représente le prix de l'emprunt va augmenter. Un FRA est donc utilisé pour se couvrir contre une évolution défavorable du taux d'intérêt sur les marchés financiers à une date dans le futur.

Le FRA est un outil de couverture contre le risque de taux, permettant de se garantir dès sa conclusion un taux d'intérêt sur un emprunt ou un placement futur sur le marché monétaire (moins d'un an**).** Le FRA est en fait un accord de prêt ou d'emprunt d'un montant donné pour une période pouvant aller jusqu'à douze mois et commençant à n'importe quel instant les douze mois suivants. L'emprunteur (respectivement le prêteur) fige ainsi son coût d'endettement (le rendement de son prêt) futur en achetant le FRA et se protège de ce fait contre une hausse (une baisse) des taux. Le FRA est, contrairement au Forward classique, dissocié de l'opération de prêt ou d'emprunt du sous-jacent ; c'est-à-dire que les deux signataires ne sont pas obligés d'honorer l'accord en exécutant le prêt ou l'emprunt le moment convenu, mais uniquement de verser le différentiel de taux convenu. Ceci étant dit, vu qu'à l'instant de l'élaboration du FRA, il n'est pas fait référence au fait que l'acheteur va réellement emprunter ou que le vendeur va réellement prêter. Les opérations peuvent donc être faites pour des fins pures de spéculation. S'agissant des FRA, l'acheteur est celui qui emprunte, le vendeur celui qui prête et non le contraire comme c'est le cas pour certains instruments financiers, une obligation par exemple.

Pour bien comprendre de quoi il s'agit exactement, prenons l'exemple d'une société qui va avoir un excédent d'un million d'Euro de trésorerie dans trois mois et dont elle n'aura pas besoin qu'après douze mois. Dans ces conditions, la société consulte sa banque pour lui garantir un taux de placement dans trois mois afin qu'elle puisse placer cet excès de fonds et savoir combien exactement elle va encaisser à l'échéance sans se soucier d'une éventuelle baisse du taux de placement dans trois mois.

Ce qui nous intéresse ici, c'est d'expliquer les démarches utilisées par la banque pour fixer et garantir un taux d'intérêt à une date dans le futur. Bien sûr, la banque ne peut pas connaître le vrai taux qui sera d'application dans le futur puisque ce dernier se détermine sur base de l'offre et de la demande qui sont des facteurs extérieurs à la banque.

Pour déterminer le taux du placement dans trois mois pour une durée de neuf mois (selon la demande de la société), la banque se sert des taux d'intérêt d'aujourd'hui. En effet, elle emprunt pour trois mois au taux actuel du marché le montant d'un million d'Euro puis elle les place, après déduction des intérêts de l'emprunt, au taux du placement d'aujourd'hui pour une durée de douze mois.



A l'échéance, c'est à dire dans douze mois, la banque connaît avec certitude combien cette opération lui rapporte d'intérêt. Du coup, elle peut bien définir un taux d'intérêt à terme (dans trois mois) de sorte à ce qu'il rapporte un même montant d'intérêt. Passons donc aux chiffres pour expliquer davantage cette technique utilisée par la banque en suivant les opérations suivantes :

- Elle emprunt 1 000000 Euro aujourd'hui pour une durée de trois mois au taux de 2% par exemple. Or, les taux sont annuels donc il faut déterminer le taux proportionnel correspondant à trois mois : $\mathbf{2\%*\frac{3}{12} = 0,5\%}$
- Elle actualise les 1000000 Euro pour connaître sa juste valeur d'aujourd'hui. En d'autre terme, elle déduit les intérêts d'emprunt $\mathbf{\frac{1000000}{1+0.5\%}}$**=995024,88** Euro.
- Elle place ce montant aujourd'hui pour douze mois au taux de 1,8%, à titre d'exemple. Il faut savoir que le taux du placement et celui de l'emprunt sont différents. Donc à l'échéance, la banque encaisse : **995024,88*(1+1,8%)=1012935,33** ce qui lui rapporte **12935,33** Euro d'intérêt.
- Elle cherche le taux correspondant à ce montant d'intérêt en plaçant 1000000 Euro pour neuf mois : **1000000*i=12935,33** donc **i=12935,33/1000000=1,29%**.
- Le taux trouvé correspond au taux des neufs mois. Du coup, il faut chercher le taux annuel correspondant : $\mathbf{1,29*\frac{12}{9}=1,72\%}$

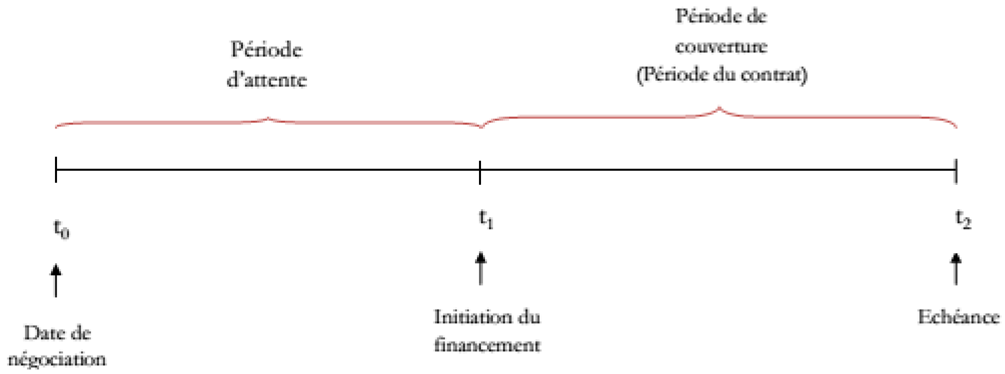
Finalement, la banque va proposer à la société, sous son contrat du FRA_{3x9} (FRA commence dans trois mois pour une durée de neuf mois), un taux annuel de **1,72%**. Ce taux ne reflète pas le vrai taux du placement dans trois mois qui pourrait être inférieur ou supérieur à 1,72%. Cependant, quel que soit le taux du placement dans trois mois, le contrat du FRA garantit à la société un taux de 1,72% qui est déterminé, comme vous l'avez vu, sur base des taux actuels du marché. Notons également que pour entrer dans un FRA, aucune marge initiale n'est payée.

3.2.1 Caractéristiques d'un FRA :

Lors de la conclusion du FRA, le contrat mentionne :

- Les noms de l'acheteur et du vendeur du FRA ;
- Le montant du FRA (le nominal) ;
- Le taux garanti ;
- La date de négociation : t0 ;

- La date de valeur (initiation du financement) : t1 ;
- La date d'échéance : t2.



Notation

A travers l'exemple précèdent, nous comprenons rapidement l'intérêt que peuvent avoir les FRAs pour des investisseurs devant faire face à une exposition à des taux d'intérêts futurs. Un acheteur de FRA se prémunit contre une hausse des taux d'intérêts, tandis qu'un vendeur de FRA se prémunit contre une baisse des taux d'intérêts. Quant à la notation, celle-ci s'avère plutôt simple, une fois démystifiée : « **date de valeur** x **date d'échéance »**

Un FRA 3x6 est un FRA dont la période d'attente est égale à 3 mois et la période totale, c'est-à-dire la période d'attente plus celle de couverture, est égale à 6 mois. De même, un FRA 3x15 est un FRA dont la période d'attente est égale à 3 mois et dont la période de couverture est de 12 mois. Cette notation correspond toutefois à une mesure de standardisation introduite dans le cas de marchés de FRA.

3.2.2 Fonctionnement des FRAs et détermination du taux FRA

3.2.2.1 Fonctionnement au moment du financement des FRAs

Considérons une fois encore un exemple : Soit A une entreprise. A sait qu'à l'instant t_1, elle aura besoin d'un emprunt qu'elle remboursera en t_2. Dans une perspective de couverture contre une éventuelle hausse des taux, elle décide de s'adresser à la banque Centrale Populaire pour l'achat d'un FRA. BCP garantit ainsi à A, en t_0, de lui prêter en t_1 le montant convenu à un taux fixé en t_0 (noté $\mathbf{R_k}$). En t_0, BCP se met d'accord avec A sur les conditions du FRA, le taux garanti est déterminé, il n'y a aucun paiement.

A la date t_1, le taux pour la période de t_1 à t_2 est constaté sur le marché. Nous le noterons par $\mathbf{R_M}$. Si les taux ont évolué, A n'est pas obligé d'emprunter à un taux plus élevé, encore moins auprès de BCP, mais elle reçoit un montant de la banque, qui compense la différence d'intérêt. Par contre, si les taux ont baissé, A peut emprunter à un taux plus faible, mais elle doit payer à BCP la différence d'intérêt.

Le versement du montant du FRA devra se faire normalement en t_2, mais puisqu'il est connu en t_1, il est versé en cette date après actualisation qui se fait au taux constaté du marché $\mathbf{R_M}$.

3.2.2.2 Fonctionnement concret des FRAs

Restons toujours dans le cadre de ce même exemple et le cas d'un FRA emprunteur. Soient :

- **C :** le montant que A désire contracter à l'instant t_1 auprès de BCP;
- $\mathbf{n_i}$ **:** le nombre de jours entre t_0 et t_i ;
- $\mathbf{R_1}$: le taux annuel correspondant à la période t_1- t_0 ;
- $\mathbf{R_2}$: le taux annuel correspondant à la période t_1- t_2.

Quel taux devrait proposer BCP à l'entreprise A ?

Nous savons qu'à t_1 A empruntera C à t_0 cette somme vaut :

$$C*(1+\frac{n_1}{360}R_1)^{-1} = K$$

La banque va donc emprunter cette dernière somme à la date t_0 sur une période $\mathbf{n_2}$ au taux $\mathbf{R_2}$ et la placera pour une période de $\mathbf{n_1}$ au taux $\mathbf{R_1}$. Arrivée à l'instant t_2, la banque se doit de rembourser son prêt sur la période entre t_0 et t_2. Le montant à rembourser étant égal à :

$$C*(1+\frac{n_2}{360}R_2\ )/\ (1+\frac{n_1}{360}R_1)$$

C'est donc sur la base de ce dernier montant que la banque déterminera le taux $\mathbf{R_{FRA}}$ au moins égale au **R** proposer ci-dessous :

$$(1+\frac{n_2}{360}R_2\ )/\ (1+\frac{n_1}{360}R_1)= 1+ \frac{n_2-n_1}{360}* R$$

$$R = [+\frac{1+\frac{n_2}{360}R_2}{\left(1+\frac{n_1}{360}R_1\right)} -1]* \frac{360}{n_2-n_1}$$

Dans le cas d'un FRA prêteur l'entreprise A s'adresse à la banque pour placer un montant C le taux FRA se détermine suivant la même logique et nous nous obtenons finalement la même expression du taux. Nous distinguons entre taux d'emprunt et de prêt propres à la banque. En effet, dans la réalité chaque banque dispose pour chaque maturité d'un **Bid**, le prix pour lequel elle est prête à emprunter, et d'un **Ask,** le prix pour lequel elle est prête à placer.

A la base de ces deux prix, la banque détermine ces deux taux FRA selon qu'elle soit en position d'emprunteur, taux FRA Bid, ou de prêteur, taux FRA Ask, auquel elle rajoute un spread pour des fins de profit. Le calcul des taux FRA Bid et Ask se font suivant la relation suivante vue précédemment :

$$R = [+\frac{1+\frac{n_2}{360}R_2}{\left(1+\frac{n_1}{360}R_1\right)} -1]* \frac{360}{n_2-n_1} \qquad \textbf{(30)}$$

Le FRA s'adresse à des contreparties qui souhaitent emprunter ou placer de l'argent pour une période située dans le futur, et obtenir sans coût une garantie de taux à terme. L'achat d'un

FRA permet de se prémunir contre une hausse des taux si nous sommes emprunteurs, et la vente d'un FRA contre une baisse des taux si nous souhaitons placer de l'argent.

Afin d'illustrer cette notion du taux *Forward* à l'emprunt et au prêt, nous prenons l'exemple suivant. La BCP cherche à contracter un FRA dans les deux sens, les taux proposés sont établi dans le tableau ci-dessous :

maturité	*Bid*	*Ask*
3 mois	2,50%	2,60%
6 mois	2,80%	2,90%

Tableau 3: illustration des taux pour un FRA 3x6

Le taux **FRA$_{3x6}$ Bid** est :

$$R_{3x6}(Bid)= [(1+\frac{180}{360}*0.028)/ (1+\frac{90}{360}*0.026)-1]*\frac{360}{180-90}$$

Le taux **FRA$_{3x6}$ Ask** est :

$$R_{3x6}(Ask)= [(1+\frac{180}{360}*0.029)/ (1+\frac{90}{360}*0.025)-1]*\frac{360}{180-90}$$

Une autre façon de déterminer le taux FRA consiste à considérer la propriété selon laquelle la valeur du contrat est nulle à la date de négociation. Le taux FRA correspond ainsi au taux vérifiant cette propriété. Nous reprendrons cela dans une partie ultérieure traitant de l'évaluation des FRA.

3.2.2.3 Le paiement lors de l'exécution du FRA :

Considérons donc un FRA dans lequel une institution financière X s'engage à prêter à une autre institution Y à une date future t_1 jusqu'à une autre date t_2. Notons R_k le taux d'intérêt convenu, R_F le taux Forward pour la période t_2-t_1, R_M le taux effectivement observé t_1 en pour l'horizon t_2 et X le principal. Le schéma suivant illustre ceci:

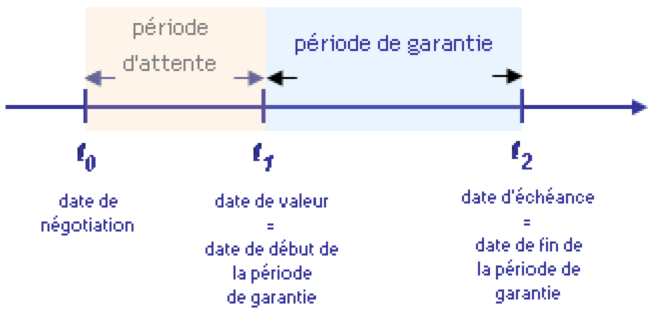


Figure 34: illustration du FRA

Supposons que R_k est strictement inférieur au R_F; dans ce cas, c'est la banque qui versera le différentiel à A, un montant d'une valeur de :

$$X(R_M - R_k)\frac{n_{FRA}}{360}$$

Avec n_{FRA} est le nombre de jours de prêt ou d'emprunt.

Cependant, puisque ce montant est connu à l'instant t_1, il est versé à cet instant même après actualisation qui se fait au taux constaté du marché. Donc, le montant versé en t_1 est égal à :

$$\frac{X(R_M - R_k)\frac{n_{FRA}}{360}}{1 + \frac{n_{FRA}}{360} R_M}$$

En général, l'acheteur du FRA fait face à une différence de flux actualisés égale à :

$$\frac{X(R_M - R_k)\frac{n_{FRA}}{360}}{1 + \frac{n_{FRA}}{360} R_M} \quad \textbf{(31)}$$

Perte ou gain selon le signe de ; tandis que le vendeur, lui, a droit à une différence de flux égale à :

$$\frac{X(R_k - R_M)\frac{n_{FRA}}{360}}{1 + \frac{n_{FRA}}{360} R_M} \quad \textbf{(31)}$$

3.2.3 Calcul du taux FRA : Implémentation sur VBA

Un programme dur VBA-Excel a été mis en place pour calculer le taux du FRA. Ceci a été fait en reprenant tous les calculs décrits ci-dessus. Ce programme permet dans un premier temps de calculer le taux FRA auquel la banque devrait conclure son opération de prêt ou d'emprunt à la date d'initiation du FRA. Pour ce faire, le programme reçoit comme entrées : le nominal de l'opération, la date de négociation, la durée du prêt/emprunt en utilisant les notations du marchés, le type du contrat FRA (Prêteur ou Emprunteur) ainsi que le *spread* que la banque désire percevoir.

La date début de couverture et la date de fin du contrat sont calculées à travers des fonctions définies qui prennent comme entrée le type de FRA selon la notation du marché. Ces fonctions rajoutent la période d'attente et la période de garantie respectivement, à la date de négociation.

Les types de FRA qui sont pris en considération de notre programme. Ce sont des FRA dont la notation du marché est très commune et qui sont généralement les plus utilisés. Cette prise d'écran résume tous les FRAs dont nous avons fait référence dont notre programme :

Figure 35: notation du marché des FRAs

Ce programme ce base aussi sur la courbe des taux selon la date de valorisation pour définir les taux du FRA. Ainsi, il donne même le spread pour que la banque définisse le taux qu'il lui convient pour contracter un FRA, soit comme étant préteur ou emprunteur. Ce calcul sera utilisé par la suite dans l'évaluation du Forward Rate Agreement.

Figure 36: interface du programme pour calcul du taux FRA

Ces taux nous serons utile par la suite pour l'évaluation du produits à terme FRA.

3.3 EVALUATION D'UN FRA

Evaluer un FRA revient à estimer sa valeur à un instant t qui est inférieur à, sachant que T c'est la date d'initiation de financement. Dans ce qui suit, nous nous baserons sur deux approches pour l'évaluation des FRA : une approche déterministe et une approche stochastique. Nous expliciterons les fondements de chacune aux moments appropriés. Notons par ailleurs, que le modèle retenue dans la partie de la modélisation et prévision de la courbe des taux et le modèle de Hull et White à deux facteurs. Du coup, le calcul de taux variable et des prix d'obligations à zéro-coupon seront en se basant sur les formules définies ci-dessus du même processus.

Soit un FRA négocié à l'instant t, dont T la date d'initiation et S l'échéance.

De ceci, la valeur de ce FRA à la date **S** est donnée par ma formule suivant :

$$V_{FRA} = N\pi(S - T)[R_k - L(T,S)] \qquad \textbf{(32)}$$

Avec :

$\pi(T - S)$ **:** Différence entre la date d'initiation T et la maturité S selon la convention de décompte de jours retenue;

N **:** Nominal;

$\mathbf{R_k}$ **:** Le taux convenu ;

L(T, S) **:** Taux de marché à la date T.

Ce taux de marché, il est calculé à partir des prix Zéro-coupon définis par Hull et White dans le chapitre qui précède.

$$\mathbf{L(T, S)}=\frac{1-P(T,S)}{\pi(S-T).P(T,S)}=\frac{1}{\pi(S-T).P(T,S)}-\frac{1}{\pi(S-T)} \qquad \mathbf{(33)}$$

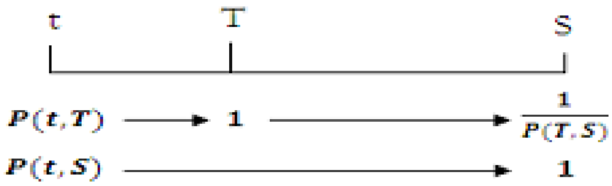
P(T, S) : prix Zéro-coupon entre les dates T et S.

En remplaçant l'expression de L(T, S) dans la formule de valorisations décrites ci-dessus.

$$V_{FRA}=N[\pi(S-T)R_k+1-\frac{1}{P(T,S)}] \qquad \mathbf{(34)}$$

Posons, **A=** $\frac{1}{P(T,S)}$ un montant détenu à la date S. Sa valeur à T est égale à un. De même, une unité détenue à la date T vaut exactement le prix Zéro-Coupon **P(t, T)** à t.

Pour simplifier la compréhension de ce raisonnement. Nous nous schématisons alors le fonctionnement des prix zéro-coupon de la manière suivante :



De ceci, nous déduisons que à l'instant t l'inverse du prix zéro-coupon au moment T dan l'horizon de S $\frac{1}{P(T,S)}$ vaut P(t, T) le prix Zéro-coupon observée à la date t pour une échéance à la date T. Revenons à la formule de valorisation du FRA, à l'instant t l'expression $N[\pi(S-T)R_k+1]$ vaut $N[\pi(S-T)R_k+1]P(t,S)$.

A partir de cette simplification, nous reprenons l'expression de la valorisation du FRA à la date t est égale à :

$$V_{FRA}(t)=FRA(t, T, S, N, R_k)$$
$$=N[\pi(S-T)R_kP(t,S)+P(t,S)-P(t,T)] \qquad \mathbf{(35)}$$

Or nous savons qu'au moment t de négociation du contrat la valeur du FRA est nulle : **V_{FRA}(t)=0.**

Du coup, $N[\pi(S-T)R_kP(t,S)+P(t,S)-P(t,T)]=0$

La formule ci-dessus, nous donne une idée sur le taux FRA, $R_k(t=0)$, qui sera noté par la suite **F(t, T, S)** , et qui sera défini ainsi :

$$\mathbf{F(t, T, S)}=\frac{1}{\pi(S-T)}[\frac{P(t,\ T)}{P(t,\ S)}-1] \qquad \mathbf{(36)}$$

Nous pouvons réécrire la formule de valorisation du FRA de la manière suivante :

$$V_{FRA}(t) = FRA(t, T, S, N, R_k) = N\pi(S-T)P(t,S)[R_k - F(t,T,S)] \qquad \textbf{(37)}$$

Pour évaluer les FRAs, nous retiendrons donc cette dernière expression. Cette dernière sera traitée par la suite suivant deux approches: une première approche déterministe et une seconde stochastique. Or, La différence entre les deux approches interviendra en fait au niveau du taux d'intérêt dont dépendent la formule d'actualisation **P(t, S)** et le taux *Forward* **F(t, T, S).**

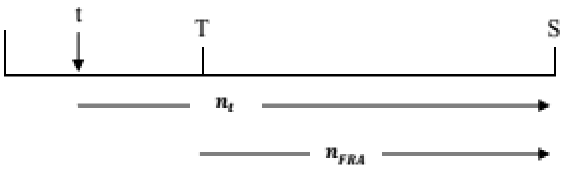
3.3.1 Méthode déterministe

Dans toutes applications du pricing, nous raisonnons par une approche déterministe et stochastique. Notamment, pour l'évaluation des dérives de taux, le taux d'intérêt est supposé être fonction déterministe du temps afin que les formules en résultant le soient aussi. Ceci se justifie par le fait que ce taux ne contribue au prix des sous-jacents que par un petit ordre de grandeur par rapport aux mouvements du sous-jacent.

Nous commençons d'abord par une approche déterministe, reprenons la formule définie au dernier paragraphe, pour l'évaluation du FRA :

$$V_{FRA}(t) = FRA(t, T, S, N, R_k) = N\pi(S-T)P(t,S)[R_k - F(t,T,S)]$$

Si nous raisonnons de la même manière que dans la section du paiement lors d'exécution d'un FRA, tout en considérant la base de calcul est une base monétaire, ce qui revient de dire « Exact/360 ». La formule serait à la date t ainsi :



$$V_{FRA}(t) = N\frac{n_{FRA}}{360}[R_k - R_F]e^{-\frac{n_t}{360}R_t} \qquad \textbf{(37)}$$

Notons que :

- R_k:le taux d'intérêt convenu,
- R_F:le taux forward entre les dates T et S,
- R_t **:** le taux Zéro-Coupon pour la période de t à S.
- N: le principal,
- n_{FRA} **:** le nombre de jours de prêt ou d'emprunt,
- n_t **:** le nombre de jours entre le moment de valorisation t et l'échéance S.

Dans cette formule, les variables inconnues sont le taux zéro-coupon pour l'actualisation R_t et le taux *Forward* R_F**.** Le premier taux se calcule par une simple interpolation linéaire en se référant à la courbe des taux Zéro-coupon. Alors que le taux Forward, est déterminé grâce à la formule donnée dans la section précédente. Ce dernier, est calculé en se basant sur la formule prédéfinie du prix zéro-coupon et les taux donnés par Hull et White. Il est à noter, lorsque le taux convenu coïncide avec le taux Forward calculé, la valeur du FRA est nulle.

3.3.2 Méthode stochastique

La nature probabiliste du taux d'intérêt est très importante dans la mesure où celle-ci affecte la nature des bons zéro-coupon. Comme nous avons précisé auparavant, le taux d'intérêt est souvent supposé fonction déterministe du temps afin d'obtenir des formules de même nature déterministe. Néanmoins, dans le cas échéant, vu qu'il est question de produits typiquement de taux d'intérêt, la variabilité qui importe le plus est celle du taux d'intérêt lui-même. Il est alors nécessaire de laisser tomber la démarche déterministe pour un modèle d'évolution dans le temps du taux d'intérêt à travers un processus stochastique. En conséquence, les facteurs d'actualisation P(t,T) (et de capitalisation par la même occasion) sont de même des processus stochastiques.

Reprenons encore une fois la formule d'évaluation du FRA définie précédemment :

$$\mathbf{V_{FRA}(t)= FRA(t,\ T,\ S,\ N,\ R_k)=N}\boldsymbol{\pi(S-T)P(t,S)[R_k-F(t,T,S)]}$$

Afin de trouver une valeur au FRA à l'instant t, il est nécessaire de calculer le taux Forward **F(t,T,S)** . ce dernier est considéré estimation du taux future **L(t,T,S)** qui est en fait aléatoire à la date t dépendant plus particulièrement des conditions de marché. Dans cette partie, nous avons estimé les taux zéro coupon ainsi que les taux forward en se basant sur la courbe de taux calculée grâce au modèle de Hull et White. Les taux sont déterminés par une simulation de Monte-Carlo tout en basant sur une discrétisation spatio-temporelle des taux.

3.4 Application : Pricer de FRA

L'application a consisté en premier lieu en l'élaboration d'un Pricer permettant d'une part le calcul des taux FRA auxquels une marge de gain « spread » est rajoutée par l'opérateur. Ce taux est sauvegardé et il est pris en considération dans l'évaluation du FRA à la valeur jour, un instant t donné.

Le pricer est lié au calculateur du prix FRA. Il prend comme entrée, les paramètres définis auparavant qui sont les suivants : Le notionnel, le type du FRA soit un FRA prêteur ou FRA emprunteur, ainsi que le Spread souhaité. Il prend la date de négociation et la durée du FRA selon la notation du marché et il calcule à partir de ces données la date de début de couverture et la date de fin du contrat.

Le Pricer tient en compte des deux approches présentées dessus. L'approche déterministe présentée dans le point précédent. Nous supposons ainsi que le taux d'intérêt est une fonction déterministe du temps afin que les formules en résultant le soient aussi. Nous justifions ceci par le fait que ce taux ne contribue au prix des sous-jacents que par un petit ordre de grandeur par rapport aux mouvements du sous-jacent. Ainsi, celui-ci effectuera ses calculs selon si les taux zéro-coupon sont issus de la courbe des taux zéro-coupon réalisée par interpolation et en se référant aux formules donnée par le modèle de Hull et White. Par contre, la méthode refait les mêmes calculs sauf en se basant sur une discrétisation spatio-temporelle pour calculer les taux dans durées infinitésimales petites ainsi le prix zéro coupon correspondant à cette période. Nous retiendrons vers la fin la moyenne de ces prix. Notre simulation de Monte-Carlo est faite en générant des nombres aléatoires par la méthode de Box-Muller (cf annexe).

L'illustration suivante donne une idée sur notre programme et les valeurs calculées dans les deux approches :

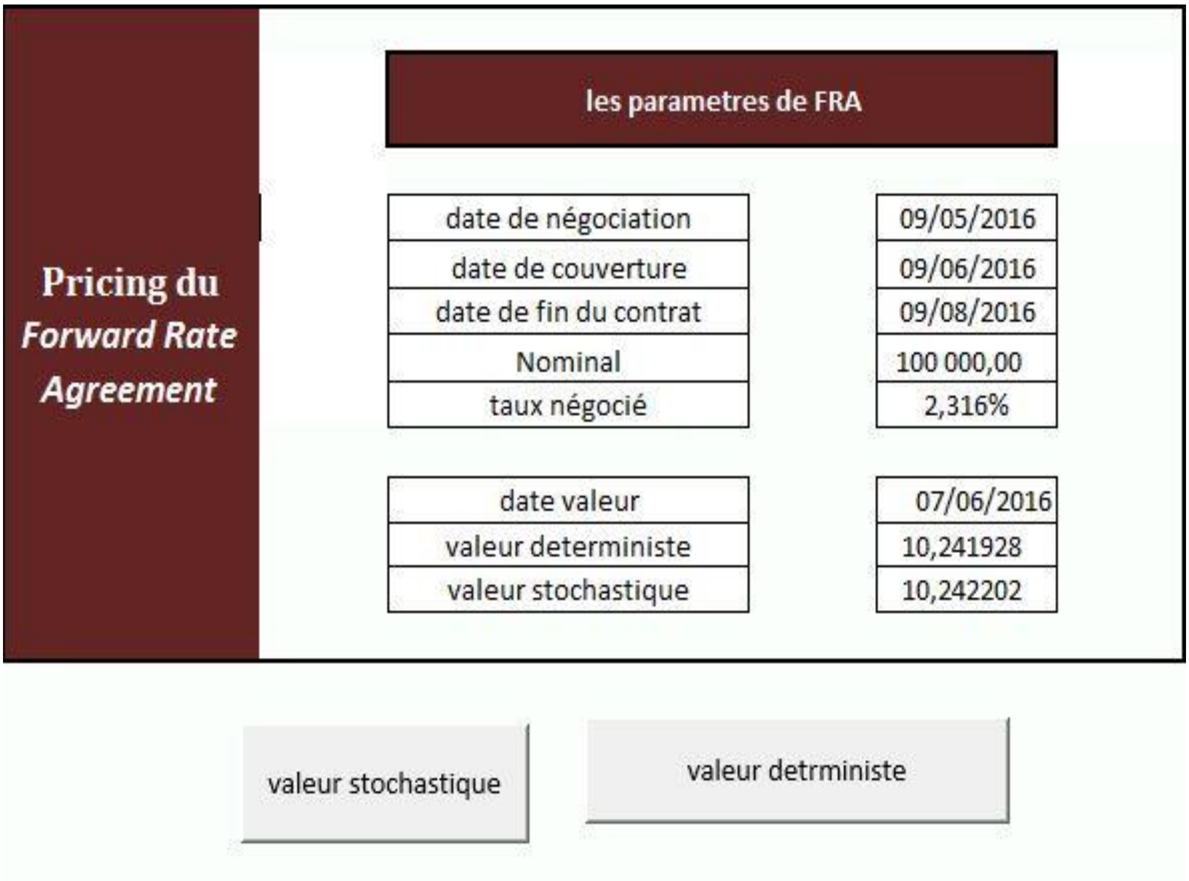


Figure 37: interface du pricer du Forward Rate Agreement

Evaluer un actif financier en général revient à estimer sa valeur à un instant t soit pour voir combien sa détention coûte à la trésorerie de la banque, ou encore pour en étudier diverses opportunités en établissant des stratégies bénéficiant des mouvements du cours ou du taux du sous-jacent. Evaluer un FRA revient donc à estimer sa valeur à l'instant t, strictement inférieur à la date d'initiation de financement T. comme nous remarquons sur l'interface les deux approches donne à la deuxième valeur après la virgule presque la même valeur.

Conclusion

Pour conclure, au fil de ce chapitre nous avons présenté la notion du contrat de Forward Rate Agreement tout en mettant le point sur sa méthode d'évaluation. Le FRA est considéré comme outil de couverture remarquable utile à la trésorerie des établissements financiers. C'est un instrument de couverture contre le risque de taux qui permet de fixer pour une date prochaine, son taux de prêt ou d'emprunt sans aucun versement de prime à la date de négociation. Vu sous cet angle et sans pour autant y associer un motif de spéculation quelconque, le FRA peut s'avérer être un outil de couverture judicieux. Sauf il n'est pas le seul instrument de couverture qui existe sur le marché. Nous présentons par la suite un instrument très liquide qui est le swap de taux.

Chapitre IV

Valorisation des Swaps de taux

Les premiers swaps furent négociés au début des années quatre-vingt. Depuis, ces marchés ont connu une croissance considérable. Un swap est un accord entre deux entreprises pour échanger des flux de trésorerie dans le futur. Cet accord définit dates auxquelles ces cash-flows seront échangés et la façon dont ils seront calculés. Généralement, ils dépendent d'une ou plusieurs variables économiques comme un taux d'intérêt ou un taux de change.

Un contrat Forward peut être vu comme un swap. Si, le 1er mars 2016, une entreprise prend une position longue sur un contrat Forward pour acheter 100 onces d'or à 1200 USD l'once dans un an, elle pourra vendre l‘or dès qu'elle 1'aura reçu. Le contrat Forward est alors équivalent à un swap dans lequel l'entreprise s'engage à payer 1 200 000 USD le 1er mars 2017 et à recevoir 100S, où, S est le prix de l'once d'or à cette date.

Alors « qu'un contrat Forward correspond à un échange de flux à une date unique, 1es swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Dans ce chapitre, nous nous procéderons de la même façon que le chapitre précédent. Nous commencerons par une définition générale des swaps et leurs fonctionnements. Puis nous nous intéresserons plus particulièrement aux swaps de taux, ses caractéristiques, son fonctionnement et sa méthode d'évaluation. Enfin, nous mettons une application qui permet de consolider l'ensemble de ces notions et la valorisation du Swaps de taux à tout moment.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le deuxième produit dérivés qui est le Swap de taux. Pour ce faire, nous allons définir les Swaps et plus particulièrement les Swaps des taux. Nous essayerons par la suite d'expliquer le fonctionnement de ce produit par des illustrations. Finalement, nous mettrons en place une application qui nous permettra d'évaluer le Swap de taux à tout moment.

4.1 Les Swaps

Le Swap est l'équivalent en anglais du mot « échange », il s'agit en fait d'un **accord** entre deux contreparties pour **échanger des flux de trésorerie** dans le futur. Cet accord définit les dates auxquelles ces cash-flows seront échangés et la façon avec laquelle ils seront calculés. Un swap peut s'étendre sur une période de deux à trente ans.

Les swaps existent depuis longtemps, quoique sous une forme informelle et non standardisée. Les premiers swaps sont apparus sur le marché des changes dans le courant du XIX^{e} siècle, entre banques centrales, sous la forme de prêts croisés : chacune accordait à l'autre un prêt dans sa propre devise nationale, les deux prêts étant d'un montant équivalent et de même échéance.

Par contre, Le premier swap sous la forme que nous connaissons, c'est un **swap de taux d'intérêt en plusieurs devises**. Ce fut une opération arrangée en 1981 par *Salomon Brothers* entre IBM et la Banque mondiale. Celui-ci a crû de manière exponentielle, jusqu'à devenir le deuxième plus actif marché de taux du monde, juste derrière celui des principaux emprunts d'État. Ceci dans le but de se couvrir contre le risque de taux surtout la volatilité importante au niveau des taux. Ces fluctuations sont principalement dues à la conjoncture économique de l'époque et des évènements majeurs comme le choc pétrolier, passage au régime flexible de taux de change...etc.

4.2 Types de Swaps

Il existe différent de types de swaps. Nous citons ici, cinq types de swaps selon l'ordre d'importance sur les marchés financiers :

- **Swap de taux** : « **Interest rate Swap (IRS)** », ceci fera l'objet de la suite de ce chapitre. Ils représentent l'essentiel du marché des swaps. Parmi ces swaps de taux, les plus répandus sont les « **plain vanilla** » qui impliquent un échange d'un taux fixe contre un taux variable ;
- **Swaps de devises : « currency swap »** c'est un échange des taux d'intérêt à moyen ou long terme libellés dans deux devises différentes ;
- **Swaps de crédit** : **« credit swaps »,** ceci est un échange de protection sur le risque de crédit d'un émetteur d'obligations contre des versements périodiques et réguliers pendant la durée du swap ;
- **Swaps de matières premières : « commodity swap »**, c'est un échange d'un prix fixe, déterminé au moment de la conclusion du contrat, contre un prix variable, en général calculé comme la moyenne d'un indice sur une période future ;
- **Swaps d'actions : « equity swaps »,** désignent des swaps dans lesquels au moins une des deux « jambes » est indexée sur le rendement d'une action ou d'un panier d'actions.

Apres avoir défini une panoplie des swaps les plus courants. Nous nous intéressons plus particulièrement au Swap de taux, car c'est un instrument de couverture contre le risque de taux. Ce qui fait l'objet de notre travail.

4.3 Swap de taux d'intérêt

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement aux swaps fixe/ variable. Par ailleurs, le Swap de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré d'échange de flux d'intérêts dans une même devise entre deux contreparties et selon un échéancier prédéterminé. Les swaps de taux d'intérêt les plus traités consistent à échanger des flux d'intérêt fixes contre des flux d'intérêts variables.

Il est à noter que pour un swap de taux, il n'y a pas d'échange de nominal, ni au début, ni au terme de l'opération. Les flux d'intérêts sont calculés en appliquant sur un montant nominal identique, d'une part un taux fixe, déterminé lors de la mise en place du contrat, et de l'autre, un taux variable qui est constaté à chaque période d'intérêt. La périodicité des flux variables peut être différente de celle des flux fixes. Dans le cas des swaps de taux nous parlons de swap payeur respectivement receveur de taux fixe :

- Un swap est **« payeur »** du taux fixe, c'est soit le cas où nous sommes emprunteurs à taux variable et nous cherchons à transformer notre dette en dette à taux fixe. Soit l'autre cas où nous sommes prêteurs à taux fixe et nous cherchons à transformer notre placement en un placement à taux variable.

- D’une manière similaire même, nous parlons de swap « **receveur** » du taux fixe. Lorsque nous sommes emprunteurs à taux fixe et que nous cherchons à modifier la dette en une dette à taux variable. Respectivement, lorsque nous sommes prêteurs à taux variable et nous cherchons à transformer notre placement en un placement à taux fixe.

4.3.1 Fonctionnement d’un swap de taux

Le swap le plus courant est 1e swap de taux « *vanille/plain vanilla* ». Dans un tel contrat, une entreprise s'engage à payer des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe sur un principal donné, pendant un certain nombre d'années, et en retour, elle reçoit des intérêts à un taux variable sur le même principal pendant la même durée. Pour bien comprendre le fonctionnement du Swap, prenons l’exemple suivant:

A et B, deux contreparties ont conclu un swap sur 3 ans, le premier Mars 2016. A s’engage à payer à B un taux d'intérêt de 5 % en composition semestrielle, sur un principal de 100 millions de MAD. B de son côté s'engage à payer des intérêts à A au taux LIBOR 6 mois. Le diagramme du swap est représenté dans le graphique suivant :

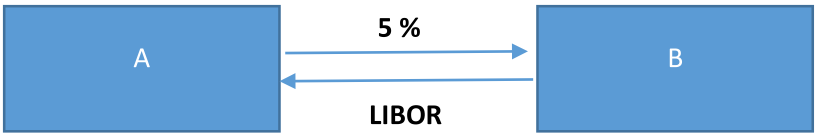


Figure 38: illustration d'un swap de taux entre deux contreparties

Le premier échange interviendra le 1er septembre 2016, après six mois de la conclusion du contrat, le premier échange aura lieu. A doit payer à B l’intérêt sur un principal de 100 MMDHS pendant la période de 6 mois, équivalent de 2,5 MMDHS. Tandis que, B doit payer à A l'intérêt au taux LIBOR 6 mois qui prévalait le 1er mars, sur ce même nominal. Si par exemple, ce taux était à 4,2%, B devra payer à A 2,1 MMDHS. Nous constatons que sur ce premier échange il n’y a aucune incertitude, puisque le LIBOR était observable le 1er Mars.

Le deuxième échange aura lieu ensuite le 1er Mars 2017, lors de cet échange A devra payer
à nouveau 2,5 MMDHS, alors que B paiera l’intérêt au LIBOR 6 mois constaté le 1er septembre 2016. Si ce taux est par exemple de 4,8 %, B paie 2,4 millions.

Au total il y aura six échanges de flux sur ce swap de trois ans. Les paiements de A seront systématiquement de 2.5 millions de MAD, alors que ceux de B changeront avec l’évolution du LIBOR 6 mois. Le swap est généralement conçu pour que seule la différence d’intérêts soit réglée par la partie qui doit payer le montant le plus élevé. Le tableau suivant résume les flux de A pour ce swap :

Date	LIBOR 6mois	Flux variable	Flux fixe	Flux net
01-mars-16	4,20%	-	-	-
01-sept-16	4,80%	2,10	-2,50	-0,40
01-mars-17	5,30%	2,40	- 2,50	-0,10
01-sept-17	5,50%	2,65	- 2,50	0,15
01-mars-18	5,60%	2,75	- 2,50	0,25
01-sept-18	5,90%	2,80	- 2,50	0,30
01-mars-19	6,40%	2,95	-2.50	0,45

Tableau 4:Cash-flows des deux contreparties pour un swap de 3ans, de principal 100 millions. Quand le taux fixe est 5% et le taux variable est le LIBOR 6 mois

L'entreprise A dont la position est décrite dans le tableau ci-dessus, a une position longue sur l'obligation à taux variable, et courte sur l'obligation à taux fixe. La position de B est symétrique. Cette présentation du swap explique pourquoi le taux variable est défini six mois avant le paiement effectif ; en effet, sur une obligation à taux variable, le taux d'intérêt est généralement déterminé en début de période et 1e coupon correspondant payé en fin de période.

4.3.2 Le rôle d'un market-maker

Dans la pratique, il est peu probable que deux entreprises aient besoin au même moment de deux positions parfaitement symétriques. De ce fait, certaines institutions financières jouent 1e rôle de market-makers sur les swaps. Cela signifie qu'elles sont prêtes, à tout instant, à conclure un swap dans l'une des deux positions (celles des deux entreprises industrielles A et B dans l'exemple précédent) sans forcément pouvoir immédiatement dénouer la position prise avec une autre contrepartie. Il est alors essentiel pour ces institutions de quantifier précisément et de couvrir le risque encouru. Les obligations, les FRA et les futures de taux sont les instruments privilégiés de cette couverture.

Les institutions financières qui jouent le rôle de market-makers sur 1es swaps affichent dans différentes devises et pour différentes maturités des taux (offerts et demandés) auxquels elles sont prêtes à conclure un swap.

Le taux demandé « **bid** » est 1e taux auquel le market-maker accepte de payer le taux fixe et de recevoir 1e taux variable. Réciproquement, le taux offert « **Ask** » est celui auquel il accepte de conclure un swap dans lequel il reçoit le taux fixe et paie le taux variable.

En général, deux entreprises industrielles comme A et B dans l'exemple précédent ne contractent pas directement, comme nous l'avons illustré. Ils vont recourir à un intermédiaire financier. Les swaps vanille taux fixe contre taux variable sont généralement proposés par 1es institutions financières pour que leur profit d'intermédiaire soit de l'ordre de 3 ou 4 points de base sur des transactions symétriques comme celle qui a été évoquée précédemment.

Nous avons déjà mentionné que le spread pour chaque maturité est en général de l'ordre de 3 ou 4 points de base. Il est à noter que le **« taux de swap »** est le milieu de fourchette. A titre d'exemple, considérons que les taux **bid** et **ask** correspondant à une maturité de 2ans, sont respectivement de l'ordre de 6,05% et 6,08%. Du coup, le taux de swap équivalent est 6,065%.

4.3.3 Caractéristiques d'un Swap

Lorsqu'un swap de taux d'intérêt est conclu entre deux contreparties, celles-ci s'engagent à se verser mutuellement des taux d'intérêt, soit fixe soit variable. Le swap est donc constitué de deux jambes : l'une est liée à ce que paie la contrepartie A à la contrepartie B, et l'autre est liée à ce que paie B à A. Le swap de taux d'intérêt possède les caractéristiques suivantes :

- **Notionnel** : il s'agit du montant, un nominal, à partir duquel les flux d'intérêts vont être calculés qui seront échangés durant la durée de vie du swap. Seuls les flux sont échangés à une fréquence donnée, et non le notionnel.
- **Devise** : il s'agit de la devise du swap, c'est-à-dire, par exemple, MAD ou l'euro ou le dollar. La devise est identique pour les deux jambes. Un autre produit dérivé, appelé le Cross Currency Swap, permet d'échanger des flux d'intérêts libellés dans deux devises différentes. Dans notre travail, nous ne nous intéresserons pas la devise vue que nos swaps consistent à s'échanger des obligations dont le rendement fixe à d'autres qui rémunèrent avec un taux variable.
- **Date d'opération** : il s'agit de la date de négociation du swap.
- **Date de valeur** : il s'agit de la date à partir de laquelle le swap est effectif, c'est-à-dire, à partir de laquelle les intérêts sont calculés.
- **Date d'échéance** : il s'agit de la date de fin du swap.

Pour chaque jambe, les caractéristiques suivantes sont fixées lors de la négociation du swap :

- **Nature du taux** : taux fixe ou taux variable. Par exemple, la contrepartie A paie à B un taux d'intérêt fixe, jambe fixe, et B paie à A un taux d'intérêt variable, jambe variable.
- **Direction** : payeur ou receveur. En reprenant l'exemple ci-dessus, A est payeur de taux fixe et receveur de taux variable.
- **Périodicité** : les flux d'intérêt sont payés selon une certaine fréquence 3 mois, 6 mois, 1 an le plus souvent. La fréquence peut être différente sur les deux jambes.
- **Base de calcul calendaire** : à l'initiation du contrat, une base de calcul calendaire est définie. Généralement, nous travaillons avec la base monétaire, Exact/360.

4.3.4 Calcul du taux de Swap :

Afin de bien comprendre le calcul du taux de Swap, nous considérons l'exemple suivant :

Soient deux contreparties A et B. A une entreprise contracte une dette sur 3 ans de chez un tiers à taux variable, prenons dans ce cas à titre d'exemple LIBOR 6 mois + 3pb[6] . Cet

[6] Un point de base est équivalent à 0,01%

organisme désire se prémunir contre une éventuelle hausse du taux variable. Pour ce faire, elle s'adresse à BCP pour conclure un swap de taux sur 3 ans contre un taux fixe.

La BCP est donc amené à définir le taux fixe adéquat à échanger avec A. Un taux de référence noté R_F sera donc déterminé auquel le trader ajoutera une marge de gain spread. Ce taux est tel que la valeur du swap à la date t_0 est égale à 0, c'est à dire que la somme des flux générés par le taux fixe actualisés à la date t_0 est égale à la somme des flux générés par le taux variable actualisés également à la date t_0.

Il est à noter que les taux fixe avec lesquels nous travaillerons par la suite se sont des taux fixes définis en composition annuelle. Nous retiendrons aussi la base monétaire comme base de calcul Exact/360.

	Taux Zéro-coupon	Flux versés par BCP	Flux versés par A
6 mois	r1	f1	-
12 mois	r2	f2	F
18 mois	r3	f3	-
24 mois	r4	f4	F
30 mois	r5	f5	-
36 mois	r6	f6	F

Tableau 5:flux versés et reçus par chaque contrepartie

Ces flux versés ainsi que reçus peuvent être écrits sous une somme arithmétique des flux actualisés. A l'instant t_0 , les flux s'expriment de la manière suivante :

$$\text{Flux variable } (t_0) = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i}{1+\frac{x_i}{360}r_i} = \sum_{i=1}^{6} \frac{N\frac{x_i}{360}L_i}{1+\frac{x_i}{360}r_i} \quad (37)$$

$$\text{Flux fixe } (t_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{F}{1+\frac{x_i}{360}r_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N*t}{1+\frac{x_i}{360}r_i} \quad (38)$$

Avec :

- t : le taux fixe à déterminer ;
- x_i : nombre de jours entre la date initiale et la date du $i^{ème}$ paiement ;
- L_i : taux LIBOR + 6 mois à la date du $i^{ème}$ paiement ;
- N : le nominal.

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\frac{x_i}{360}L_i}{1+\frac{x_i}{360}r_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{t}{1+\frac{x_i}{360}r_i}$$

Afin d'effectuer ces calculs nous avons besoin de déterminer le taux zéro coupon r_i ainsi que le taux LIBOR Forward à l'instant i. les sections précédentes feront objet de déterminer ce dernier.

4.3.5 L’avantage comparatif des swaps

La notion « d’avantage comparatif » se définit comme étant la capacité d’un pays ou d’une compagnie pour générer des biens ou des services particuliers à un prix plus bas que l’autre partie. Or, la popularité des swaps est souvent justifiée par l’argument de l’avantage comparatif. Pour un couple d'entreprises donné, 1a facilité relative d'accès aux marchés des emprunts à taux fixe et à taux variable n'est pas la même. Chaque entreprise aura donc intérêt à emprunter sur le marché qui 1ui est le plus favorable, quitte ensuite à faire un swap avec l’autre si le type d'endettement contracté (fixe ou variable) ne 1ui convient pas.

La question est de savoir pourquoi, dans certains cas, 1e spread de taux fixe est supérieur au spread de taux variable. Alors que 1e marché des swaps existe depuis longtemps, nous pourrons être étonné que de telles différences existent encore. Une des explications concerne la nature des contrats sur chacun des deux marchés. Sur le marché à taux fixe, comme son nom f indique, le taux est fixé pour toute la durée de l'emprunt. Ce taux est modifié tous les six mois sur le marché à taux variable. Si la note de l'emprunteur vient à se dégrader, le prêteur a la possibilité de modifier l'écart de taux par rapport au LIBOR.

Les swaps permettent également de répondre à des problématiques de gestion des risques. Une entreprise détenant une dette à taux variable et anticipant une hausse des taux peut faire en sorte de transformer cette dette en une dette à taux fixe de façon à se prémunir contre la hausse attendue. Il lui suffit toutefois de trouver une contrepartie (généralement un intermédiaire financier) acceptant de lui payer le taux fixe en échange du taux variable.

Toutefois, les swaps de taux, comme autres produits dérivés sont également utilisés comme instruments de spéculation permettant au trader de prendre position sur les échéances de la courbe des taux en fonction de ses anticipations quant à l’évolution de celle-ci.

4.4 EVALUATION D’UN SWAP DE TAUX

Un swap peut être vu comme la différence entre deux obligations à même maturité, la première à taux variable et la seconde à taux fixe. C’est le cas le plus fréquent au marché marocain, car le trésor du royaume programme mensuellement des séances d’échange ou il rachète les obligations à court terme et émet des obligations à moyen et long termes. Nous expliciterons l’évaluation de ces Swaps ultérieurement.

Le swap peut être aussi vu comme un contrat Forward. La différence est celle qu'un contrat Forward correspond à un échange de flux à une date unique tandis que les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Du coup, le swap peut être ainsi considéré comme un portefeuille de FRAs.

Il existe différentes approches pour l’évaluation des swaps de taux d’intérêt. Ceci n’étant pas l’objet premier de notre étude, nous nous contentons de n’en présenter que deux qui sont par la même occasion les plus connues sur les marchés internationaux. Il s’agit de l’approche obligataire et l’approche FRA.

4.4.1 L'approche obligataire

En l'absence de risque de défaut, un swap de taux peut être traité comme un portefeuille d'obligations comme dans les swaps de taux. Cette approche, comme précisé ci-haut, considère un swap comme étant la différence entre deux obligations, la première à flux fixe, la seconde à flux variable.

Afin de mieux illustrer le principe de cette approche, considérons un swap « **receveur** » de taux fixe qui valoriser à la date telle **01/05/2016**.

Ce swap s'intéresse à une obligation d'une maturité de **cinq** ans émise le **02/02/2016**. Cette obligation rémunère à un taux fixe **annuel** de **3%** à partir d'un principal de **100 000** MAD. En contrepartie, m'organisme qui contracte ce swap paie des intérêts variables en se basant sur le TMP (MAD) semestriel.

Le digramme suivant illustre le paiement des flux variables et fixes :

Figure 39: illustration des flux variables et fixe d'un swap

Le swap est présenté ci-dessus avec échange du capital à l'échéance. La valeur du Swap s'écrit alors pour un receveur de taux fixe, comme suit :

$$\textbf{Valeur Swap} = B_{fixe} - B_{variable}$$

B_{fixe} est la valeur de l'obligation à taux fixe ;

$B_{variable}$ est la valeur de l'obligation à taux variable.

Cette méthode consiste en fait à actualiser les flux des deux obligations, avec remboursement du principal à l'échéance. Les deux jambes s'écrivent de la manière suivante :

$$B_{fixe} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F}{(1+r)^{t_i}} + \frac{L}{(1+r)^{t_n}} \quad \textbf{(39)}$$

$$B_{variable} = \frac{L+V}{(1+r_m)^{t_m}} \quad \textbf{(40)}$$

Avec :

- **r** : taux actuariel équivalent à la maturité de l'obligation à taux fixe ;
- t_i: la durée entre la date de valorisation jusqu'à la i^{ème} date de paiement, tenant compte la base de calcul considérée ;
- **L** : principal ;
- **F** : flux fixe à chaque date de paiement ;

- **V** : flux variable à chaque date de paiement.

date de valorisation : 01/05/2016				TMP: 2,5%	
dates	**nombre de jour depuis date de valorisation**	**Flux Fixes**	**Flux variables**	**Flux fixes actualisés**	**Flux variables actualisés**
02/02/2016	-	-	-	-	
02/08/2016	93	-	101 250,00	-	100 105,20
02/02/2017	277	3 000,00	-	2 921,63	-
02/08/2017	458	-	-	-	-
02/02/2018	642	3 000,00	-	2 821,48	-
02/08/2018	823	-	-	-	-
02/02/2019	1 007,00	3 000,00	-	2 724,77	-
02/08/2019	1 188,00	-	-	-	-
02/02/2020	1 372,00	3 000,00	-	2 631,37	-
02/08/2020	1 554,00	-	-	-	-
02/02/2021	1 738,00	103 000,00	-	87 238,57	-

Tableau 6: calcul des flux selon l'approche obligataire

- **Jambe fixe :**

$$F=100000*3\%=3000$$

Le taux d'actualisation quant à lui, correspondant à la durée de la jambe fixe est obtenu à partir de la courbe des taux en effectuant une interpolation linéaire des maturités présentes. Dans notre exemple, le choix du taux est fait de manière arbitraire. Il est situé aux alentours de 3.5%. Quant à la base de calcul utilisé, c'est la base monétaire Exact/360. Du coup, la jambe fixe est de la valeur :

$$B_{fixe}=98337.83$$

- **Jambe variable :**

$$V=100000*[1+2.5\%*\frac{180}{360}]=101250$$

De la même manière, nous retrouvons par interpolation à partir de la courbe des taux, le taux équivalent à la jambe flottante. Supposons, que ce taux est pris aux alentours de 4,5% pour la période de 93 jours. Le flux actualisé est le suivant :

$$B_{variable}=\frac{101250}{(1+4{,}5\%)^{93/360}} = 100105{,}20$$

Par la contrepartie, recevant le flux fixe la valeur du swap est ainsi :

$$\text{Valeur Swap}=B_{fixe}-B_{variable}$$

$$= -1767{,}38 \text{ DHs}$$

L'inconvénient qui fait le point faible de cette méthode malgré sa simplicité, est qu'elle procède à l'actualisation en utilisant les taux actuariels. Les résultats sont de ce fait le plus souvent erronés. Le gap entre les deux méthodes est très important. En réalité, la formule la plus proche de la réalité serait celle qui tient compte des taux variables zéro-coupon pour l'actualisation de chaque flux :

$$B_{fixe}=\sum_{i=1}^{n} \frac{F}{(1+r_i)^{t_i}} + \frac{L}{(1+r_n)^{t_n}}$$

Toutefois, l'approche obligataire ne tient compte pour le calcul de la valeur du swap que du taux variable observé. Il serait plus intéressant de prendre en considération les flux à venir que nous pourrions éventuellement estimer.

4.4.2 Approche FRA

La deuxième approche se base sur l'hypothèse qu'un FRA est assimilable à un swap, et que les taux *Forward* calculés pour les dates de paiements de flux variables sont effectivement les taux spot futures.

Dans cette section, elle est question de déterminer dans un premier temps les taux LIBOR Forward correspondant aux dates de paiements ;puis de calculer ensuite tous les flux en supposant que les taux *Forward* observés à l'instant sont les taux variables qui seront effectivement observés à chaque date de paiement ; finalement, de calculer la valeur du swap en sommant enfin les flux actualisés aux taux zéro-coupon. Reprenons l'exemple précèdent sauf cette fois en précisant les taux zéro coupon et les taux Forward. Le tableau suivant, représente l'échéancier des versements suivant cette approche :

date de valorisation : 01/05/2016				TMP: 2,5%	
Dates	**nombre de jour depuis date de valorisation**	**Taux Zéro-coupon**	**taux Forward**	**Flux fixes actualisés**	**Flux variables actualisés**
02/02/2016	-		0,045	-	
02/08/2016	93	0,0356	0,0421	-	100 105,20
02/02/2017	277	0,0397	0,0434	2 921,63	-
02/08/2017	458	0,0402	0,0452	-	-
02/02/2018	642	0,0411	0,0477	2 821,48	-
02/08/2018	823	0,04197	0,0499	-	-
02/02/2019	1 007	0,0428	0,0502	2 724,77	-
02/08/2019	1 188	0,04325	0,0505	-	-
02/02/2020	1 372	0,0439	0,0512	2 631,37	-
02/08/2020	1 554	0,044	0,05137	-	-
02/02/2021	1 738	0,0475	0,0475	87 238,57	-

Tableau 7: calcul des flux selon l'approche FRA

Ce calcul prend en compte les taux zéro-coupon publiés quotidiennement par Bank Al-Maghrib. Alors que, les taux *Forward* sont calculés à travers les formules définies dans la section précédente.

- **Jambe fixe :**

$$\mathbf{F=100000*3\%=3000}$$

Le taux d'actualisation cette fois sont pris à partir d'une interpolation de la courbe ZC. Ainsi chaque flux est actualisé à travers le taux équivalent à sa durée. De ceci, la jambe fixe a une valeur de:

$$\mathbf{B_{fixe}= 93244{,}76}$$

- **Jambe variable :**

Quant à la jambe variable, les flux sont calculés à travers une actualisation à partir des taux Forward. Le premier flux quant à lui, il est calculé en se basant sur le taux observé qui est de 4,5%. Alors que les autres flux sont calculés en se basant sur les taux Forward :

$$\mathbf{V_1=100000*4{,}5\%*\frac{183}{360}=2250}$$

Alors, que le deuxième flux :

$$\mathbf{V_2=100000*4{,}21\%*\frac{182}{360}=2105}$$

Le calcul se poursuit de la même manière jusqu'au dernier flux, où il y' remboursement du principal. Le résultat final de la jambe variable obtenu à partir des flux actualisées à la date de valorisation, est égal à :

$$\mathbf{B_{variable}= 101263{,}31\ DHs}$$

Ainsi, nous obtenons une valeur de swap de,- **8018,55** qui diffère de **6251 DHs** de l'approche précédente, qui est un montant énorme. Ainsi, dans la mesure où nous avons précédemment traité les FRAs et leur évaluation, nous nous intéresserons plus particulièrement à cette méthode. La démarche que nous venons tout juste de présenter est de l'ordre du déterministe étant donné que les taux *Forward* sont calculés à partir des taux zéro-coupon établis dans la troisième colonne du tableau précédent qui, à leur tour.

4.5 Implémentation d'une application sur VBA

Dans cette autre phase de notre application, nous poursuivrons à quelques détails près, la même démarche décrite précédemment. En ce sens, nous établirons un autre Pricer dédié à la couverture contre le risque de taux. Ce Pricer permet en fait d'un côté, de calculer les flux que BCP est en mesure de recevoir ou de verser, dans le cas où celle-ci effectue un swap de taux avec un établissement tiers, et de l'autre d'évaluer le Swap à tout instant t. Notons que, contrairement au FRA, le Swap de taux dispose de plusieurs dates de versement. Aussi, le Pricer établi tient compte de tous les flux effectivement reçus ou versés avant la date de valorisation dans son calcul au moment de l'évaluation. En revanche, les flux futurs sont déterminés à partir des taux Forwards calculés quant à eux à partir des taux zéro-coupon. Lequel calcul a été précédemment été expliqué dans le second chapitre du présent rapport.

Pour valoriser le Swap, ce programme reçoit comme entrée :

- Nominal de l'opération qui, comme nous l'avons précisé avant, ce montant n'est pas forcement échangé à l'échéance ;
- Date de valorisation, c'est la date retenue pour le calcul des flux ;

- Echéance, c'est la date de fin des flux constituant le swap ;
- Durée de swap, la durée de vie du swap en mois ;
- Base de calcul, le pricer donne le choix entre Exact/365, Exact/360, et 30/360.
- Jambe fixe et variable, le programme fait la différence entre la jambe des flux fixe et ceux variables.
- Taux, il s'agit du taux fixe et celui variable.
- Fréquence : elle donne une idée sur la période du paiement des flux pour les deux jambes, soit variable soit fixe.
- Organisme payeur et receveur de ce swap, ceci montre la partie qui paye les flux fixes et reçoit ceux variable, vice versa. Ce qui revient à savoir, la position du BCP.

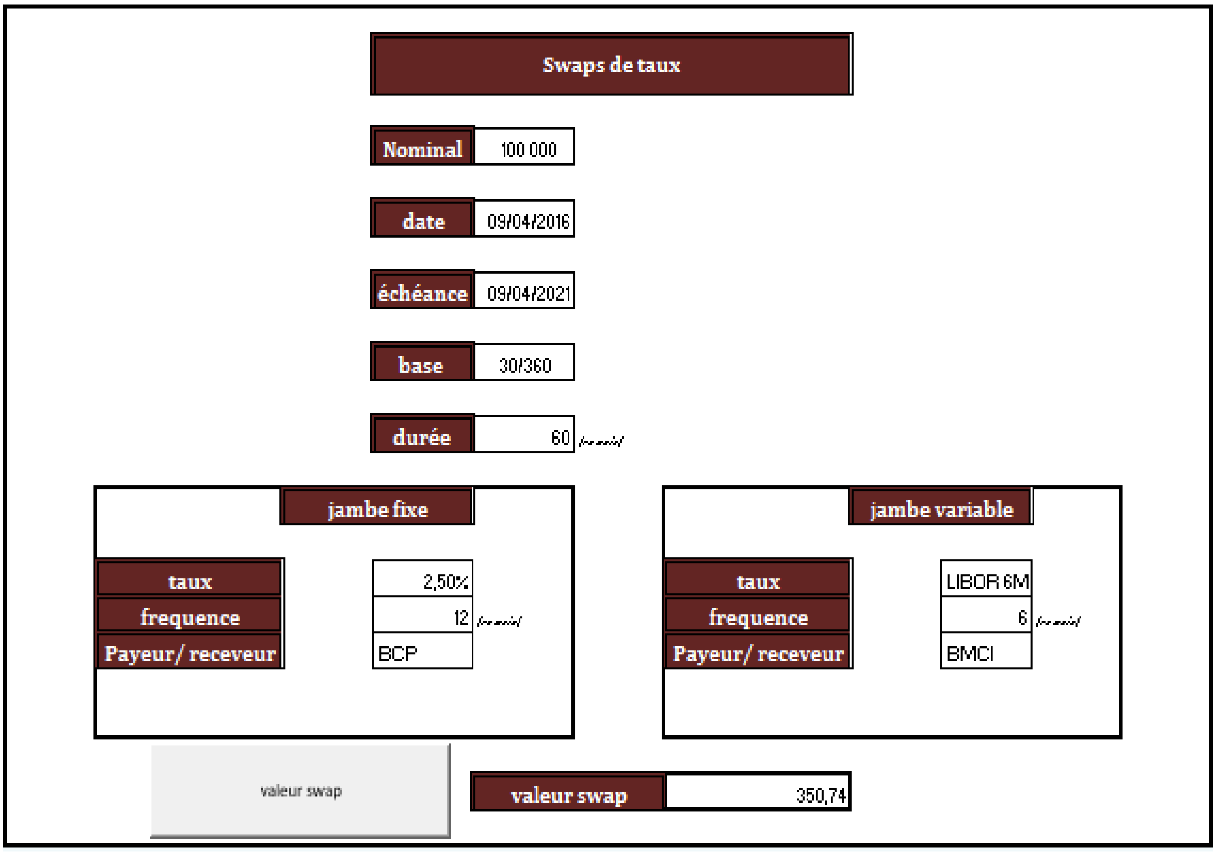


Figure 40: interface du pricer de swap de taux

Conclusion

A l'instar du FRA, tout au long ce chapitre spécialement dédié au Swap de taux, nous avons essayé de nous intéresser à ce second dérivé de taux, à son fonctionnement et à la démarche établi pour son évaluation.

Fondé sur l'avantage comparatif, le Swap de taux présent cette spécificité de faire des gagnants parmi les deux contreparties, en ce sens qu'il permet à chacune des deux de tirer profit du marché sur lequel elle est la plus avantagée. Ainsi, en tant qu'instrument de couverture contre le risque de taux, il permet entre autres de changer sa dette en figeant par exemple son taux d'emprunt. Enfin, tout comme le FRA, vu sous cet angle et en marge de tout motif de spéculation quelconque, le Swap de taux peut s'avérer être un outil de couverture marquant, utile à la trésorerie des établissements financiers sauf que c'est un produit bilatéral et il est peu probable de trouver une partie qui a un besoin équivalent. La section suivante traitera le dernier instrument de couverture de notre étude, qui est **« option de taux »**.

Chapitre V

Valorisation des options de taux

Ce chapitre introduit le dernier produit dérivé de notre travail qui est l'option de taux. En premier lieu, nous introduirons les définitions relatives aux options en général, et aux dérivés de taux en particulier. Ensuite, nous définirons les formules qui nous permettront d'évaluer le prix de ces options. Finalement, nous essayerons, d'élaborer des pricers pour cette dérive de taux, à l'aide du VBA Excel.

5.1 Les options

5.1.1 Définition

Alors que les contrats Forward sont organisés sur un marché de gré à gré, OTC[7]. Les options sont échangées sur le marché OTC et sur des marchés organisés. Il en existe de deux types.

Une option d'achat, appelée **« call »** par la suite, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu.

Une option de vente « **put »** donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. Ce prix est appelé prix d'exercice **« Strike »**; la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance.

Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, 1'option est dite américaine. Par contre, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne.

Un point essentiel est que l'achat d'une option donne le droit, non pas l'obligation, de faire quelque chose. C'est la différence fondamentale avec les contrats Forward ou Futures pour lesquels les contreparties sont obligées d'acheter ou de vendre. Cette particularité implique qu'acheter un contrat d'option a un coût initial, ce qui n'est pas le cas pour un Forward ou un Futures.

5.1.2 Les caractéristiques

Les caractéristiques d'une option se résument en :

- **Actif sous-jacent** : C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'options peut être un actif physique (matières premières ou

[7] Over The Counter.

agricoles), un instrument financier (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique.

- **Echéance :** C'est la date de fin de validité du contrat. Par ailleurs, il faut distinguer deux types d'options selon le mode d'exercice européen ou américain.
- **Le prix d'exercice ou Strike :** C'est le prix auquel l'acheteur de l'option peut acheter l'actif sous-jacent si il s'agit d'un call, ou de vendre l'actif sous-jacent lorsque c'est un put. Ce prix d'exercice est déterminé lors de la négociation de l'option et n'est pas modifiable pendant toute la durée de vie de l'option. Le prix d'exercice est également le prix auquel le vendeur devra livrer les actions dans le cas d'un call, ou le prix auquel il devra les acheter dans le cas d'un put. Attention, le vendeur n'aura l'obligation de le faire que si l'acheteur demande l'exercice de l'option.
- **La prime ou le prix de l'option :** En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution: la prime, c'est-à-dire le prix de l'option. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit. Contrairement au prix d'exercice, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande.

5.2 Les options sur taux : Caps et Floors

L'équivalent du Put et du call dont le sous-jacent est le taux d'intérêt sont nommées Caps et les Floors. Ils s'appliquent essentiellement aux opérations de trésorerie. L'acheteur du Cap ou du Floor doit, comme pour les options, payer une prime. En contrepartie, le vendeur s'engage à payer à l'acheteur un différentiel de taux entre le prix d'exercice et le taux du marché, en général un taux de référence classique LIBOR ou EURIBOR.

5.2.1 Cap

Les caps de taux sont des options très couramment négociées par les institutions financières sur le marché OTC. Les **Caps** sont des options sur taux d'intérêt, il s'agit d'un contrat de gré à gré entre deux contreparties permettant à son acheteur de **se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt** au-delà d'un niveau prédéterminé (taux plafond ou taux d'exercice : **le *Strike***), moyennant le paiement immédiat d'une prime. A chaque constat, si le niveau du taux variable constaté est **supérieur au taux d'exercice**, l'acheteur du Cap **reçoit du vendeur** le différentiel de taux, appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt. Chaque Cap peut être divisé en un ensemble d'options sur taux dites **Caplets**

Pour comprendre de quoi il retourne, considérons un bon à taux variable pour lequel l'intérêt est périodiquement réajusté au niveau du LIBOR. Le délai entre deux réajustements est appelé **« tenor »**. Supposons que le **« tenor »** soit de trois mois ; 1e taux du bon pour 1es trois premiers mois est le LIBOR initial; pour les trois mois suivants, le taux d'intérêt payé par 1e bon est le LIBOR qui prévaut à 1a fin du premier trimestre, et ainsi de suite.

Un cap de taux procure une assurance contre une hausse des taux au-delà d'un seuil spécifié appelé taux plafond **« cap rate »**. Supposons que 1e principal soit de 10 millions, le tenor de trois mois, la durée du cap de 5 ans et le taux plafond de 4 %. Imaginons qu'à une date de réajustement quelconque, 1e LIBOR atteigne 5 %. Le bon doit payer un intérêt à la fin du trimestre qui suit cette date éga1 à :

0,25*0,05*10 000 000 = 125 000

Si le LIBOR était à 4%, le paiement serait de 100 000; dans ces conditions, le cap que nous venons de décrire engendrera un flux de **25 000= 125 000 - 100 000**. Ce calcul suppose qu'il y a exactement 0,25 an entre deux dates de réajustement. En pratique, le calcul tient compte du nombre exact de jours entre ces deux dates, avec des règles précises quant au décompte des jours.

Le payoff du cap ne survient pas à la date à laquelle le taux est arrivé à 5 %, mais trois mois plus tard. Cela est dû au fait que les intérêts à 5 % sur le bon seront aussi payés trois mois après 1'observation d'un LIBOR à 5 %.

À chaque date de réajustement, le taux LIBOR est constaté. S'il est inférieur à 4%, le cap n'engendre aucun flux, les trois mois plus tard ; si, par contre, il dépasse 4 %, le payoff engendré trois mois plus tard est ca1cu1é comme ci-dessus, c'est-à-dire **l/4** du différentiel de taux d'intérêt entre le taux LIBOR observé et le taux plafond, appliqué au principal de 10 millions. Les caps sont définis de façon que, même si le taux initial est supérieur au taux plafond, cela n'engendre pas de flux à la première date de réajustement, puisqu'il n'y a pas de risque sur ce premier flux. Dans notre exemple, le cap dure 5 ans, il y a donc 19 dates de réajustement correspondant aux fins de trimestres 1 à 19, et 19 paiements potentiels aux fins de trimestres 2 à 20.

5.2.2 Floor

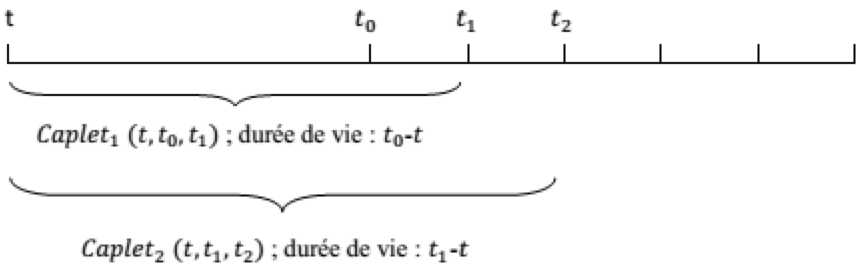
Les Floors sont tout simplement l’inverse des Caps. Un Floor est donc un contrat de taux d'intérêt qui, moyennant le paiement d'une prime, permet à son acheteur de se couvrir ou de tirer profit d'une baisse des taux monétaires en deçà d'un certain niveau au taux plancher ou taux d'exercice.

De même, au moment de paiement, si le niveau du taux variable constaté est inférieur au taux d'exercice, le vendeur verse à l'acheteur la différence entre les deux taux. Ce différentiel de taux est appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jour exact de la période d'intérêt.
De même qu’un Cap, un Floor peut être divisé en plusieurs Floorlets.

5.3 Evaluation des caps et des floors

Les produits de couverture du taux les caps, floors sont évalués à partir du modèle de Black. Le modèle de Black est une version du modèle BSM (BlackScholes-Merton) adapté aux produits de taux d’intérêt.

Les caps sont décomposés en caplets et les floors en floorlets. Le schéma suivant illustre cette décomposition :



Le modèle de Black est une version du modèle le plus commun dans la valorisation, qui est le modèle de Black-Scholes-Merton adaptée aux produits de taux d'intérêt. Il est d'ailleurs très prisé pour l'évaluation des options de taux européennes. Le point fort de ce modèle est l'hypothèse de Log-Normalité (cf annexe) du sous-jacent à la date d'échéance de l'actif dérivé. Pour un cap, c'est le taux de Caplets qui est supposé log-normal.

Le modèle de Black suppose de calculer le Payoff espéré en s'appuyant sur l'hypothèse que la valeur future espérée du sous-jacent est égale à sa valeur Forward. Du coup, l'actualisation se fait ensuite au taux zéro-coupon observé sur le marché aujourd'hui. La variable du modèle de Black de taux est le taux Forward linéaire supposé suivre une loi log-normale.

Le taux Forward linéaire noté $F(t, t_i, t_{i-1})$ est en fait une martingale sous la probabilité Forward-neutre.
Un Cap implique le paiement aux dates t_i des flux variables, taux variable multiplié par le nominal dont l'expression s'écrit :

$$V_i = \max(r_i - R_K\ ;\ 0) \tag{41}$$

Avec :

- R_K : taux du cap fixé ;
- r_i : taux de marché observé à la date t_{i-1} et payé à la date t_i.

Avant de démontrer la relation de valorisation, il est important de comprendre la notion du risque-neutre. L'univers neutre au risque est une notion très particulière au monde des produits dérivés. En effet, dans un tel univers l'on peut évaluer un produit dérivé en termes de son sous-jacent en faisant comme si les investisseurs n'éprouvaient aucune aversion au risque. Il est alors possible d'actualiser les flux monétaires d'un produit dérivé au taux sans risque, ce qui simplifie énormément les calculs.

Avant Black & Scholes (1973), l'on évaluait les produits dérivés en se positionnant dans le monde réel, chose qui impliquait la prise en compte de la prime de risque du sous-jacent en vue d'actualiser les flux monétaires du produit dérivé de manière à calculer son prix. Cependant, le prix du risque étant non observable, il était difficile de l'évaluer et de déterminer par la suite le prix du produit.

C'est ainsi que les travaux de Black & Scholes révolutionnèrent la Finance. Or la question à se poser est de comment passer du monde réel de la **« probabilité objectives »** à l'univers neutre au risque **« Probabilité neutres au risque ».** Lors du passage des probabilités objectives aux probabilités neutres au risque, des primes de risque s'ajoutent à ces dernières, mais elles sont oubliées pour le reste des calculs. Cette transformation se fait grâce au théorème de Girsanov (cf annexe). La transformation s'effectue au niveau du processus stochastique du sous-jacent. Toutefois, le théorème de Girsanov ne modifie que la dérive **« drift »** du processus stochastique du sous-jacent et non sa volatilité. Il permet en effet de corriger la dérive du prix du risque. Certes, il s'ensuit automatiquement un ajustement au niveau de la partie stochastique du sous-jacent. À la suite de cette transformation, le sous-jacent devient une martingale (cf annexe).

Chaque paiement à une date i est appelé **Caplet**. Le Cap est alors la somme d'un ensemble de Caplets. Si l'on suppose que le taux $\mathbf{r_i}$ est le taux spot ($\mathbf{r_i \approx r}$), alors un Caplet peut être évalué en résolvant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \quad \textbf{(42)}$$

Avec

$$V(r, t) = \max(r - R_K\, ;\, 0) \quad \textbf{(43)}$$

En effet, le lemme d'Itô, implique que pour **r** tel que :

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dw(t)\ ;$$

Du coup pour toute fonction G de r et de t :

$$dG(r, t) = \frac{\partial G}{\partial t}\, dt + \frac{\partial G}{\partial r}\, dr + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\, dt \quad \textbf{(43)}$$

En remplaçant dans cette formule **dr** par son expression donnée par le lemme d'Itô, nous obtenons la formule suivante :

$$dG(r, t) = \frac{\partial G}{\partial t}\, dt + \frac{\partial G}{\partial r}\, [\mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dw(t)] + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\, dt$$

En regroupant ensuite les termes variant selon le temps :

$$dG(r, t) = [\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r}\, \mu(r,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\,]\, dt + \frac{\partial G}{\partial r}\sigma(r,t)dw(t)$$

Sous probabilité risque-neutre, en remplaçant le taux de rendement espéré par le taux sans risque r, aucune prime n'est attribuée à la prise de risque. Cette hypothèse de risque neutre, implique la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage dans le marché. Ceci peut être résumé dans l'expression ci-dessous :

$$dW^*(t) = \lambda dt + dW(t)$$

- $dW^*(t)$ **:** Processus de Wienner sous probabilité risque-neutre ;
- λ **:** La prime de risque.

A partir, de la formule suivante nous pouvons simplifier les calculs, ainsi :

$$dG(r, t) = [\frac{\partial G}{\partial t} + \mu\, \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\,]\, dt + \sigma\, \frac{\partial G}{\partial r}[\, dW^*(t) - \lambda dt]$$

Du coup,

$$\mathbf{dG\ (r,\ t)} = [\frac{\partial G}{\partial t} + \mu\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \lambda\sigma\frac{\partial G}{\partial r}]\, dt + \sigma\frac{\partial G}{\partial r}\, dW^*(t)$$

Grâce à cette formule, nous pourrons déduire la valeur du caplet/ floorlet étant fonction de r suivant la prochaine expression:

$$\mathbf{dV\ (r,\ t)} = [\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \lambda\sigma\frac{\partial V}{\partial r}]\, dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial r}\, dW^*(t) \qquad \mathbf{(44)}$$

Par unicité du drift, de la variation de la valeur des caplets, et sous l'hypothèse de probabilité risque neutre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \lambda\sigma\frac{\partial V}{\partial r} = rV$$

D'où, l'expression :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

Réciproquement, le Pay-Off d'un Floorlet est déterminée de la même façon sous la forme suivante :

$$\mathbf{V(r,\ t) = max\ (R_K - r\ ;\ 0)}$$

5.3.1 Valorisation des options de taux

En général, pour évaluer une option de taux nous faisons appel à la Formule de Black vu sa simple d'utilisation. Ainsi, chaque Caplet et Floorlet sont valorisés en tant que Call et Put suivant une distribution log-normale des taux d'intérêt. Les entrées du modèle sont définies ainsi :

- σ : Volatilité du taux d'intérêt entre $\mathbf{t_i}$ et $\mathbf{t_{i-1}}$;
- $\mathbf{R_k}$: Le taux d'exercice ;
- $\mathbf{t_i}$: Date de versements des flux ;
- $\mathbf{F(t,\ t_i,\ t_{i-1})}$: Taux Forward à l'instant **t** entre $\mathbf{t_i}$ et $\mathbf{t_{i-1}}$;
- $\mathbf{r_i}$: Taux d'actualisation entre $\mathbf{t_i}$ et $\mathbf{t_{i-1}}$;
- $\mathbf{n_i}$: Nombre de jours entre $\mathbf{t_i}$ et $\mathbf{t_{i-1}}$

Du coup, la formule du Pay-Off éventuellement pour le caplet et floorlet. :

$$e^{-r_i(t_i - t)}[\mathrm{F(t, ti\ , ti - 1\ )N}(d'_1) - R_K \mathrm{N}(d'_2)\ ] \qquad \mathbf{(45)}$$

De même, d'un Floorlet :

$$e^{-r_i(t_i - t)}[R_K \mathrm{N}(-d'_2) - \mathrm{F(t, ti\ , ti - 1\ )N}(-d'_1)] \qquad \mathbf{(46)}$$

Avec

$$d'_1 = \frac{\log\left({}^{F}/_{R_K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 n_{i-1}}{\sigma\sqrt{n_{i-1}}}$$

Et

$$d'_2 = d'_1 - \sigma\sqrt{n_{i-1}}$$

Cette expression peut également être formulée en considérant le prix zéro-coupon, comme facteur d'actualisation. Notons alors, $T_{\alpha+1}; \dots ; T_\beta$ les dates de paiement de flux. Le taux variable est cela dit, observé aux dates$T_\alpha; \dots ; T_{\beta-1}$.

$$N * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \pi_i \, P(t, T_i)[L(t, T_{i-1}, T_i) - R_K\,]^+ \qquad \textbf{(47)}$$

Cette expression ressemble bien à la formule payeur de fixe pour lequel, seuls les flux positifs pour l'acheteur sont échangés. Par contre, un Floor correspond à un swap receveur dont seuls les flux positifs sont échangés. Le payoff s'écrit alors :

$$N * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \pi_i \, P(t, T_i)[R_K - L(t, T_{i-1}, T_i)\,]^+ \qquad \textbf{(1)}$$

Il est à noter que pour les produits dérivés cités dans les chapitres précédents, la valeur à la date initiale est nulle. Alors que pour les options de taux, la valeur est égale la prime que doit payer l'acheteur d'option.

5.3.2 La volatilité

Parmi les éléments les plus importants pour l'évaluation des options sur taux, la volatilité intervient dans le calcul de la prime et dans le calcul des flux. De manière schématique, la volatilité est un estimateur statistique mesurant la dispersion d'une série, de valeurs, autour de la moyenne. Elle mesure ainsi l'incertitude quant aux variations futures de son cours. Plus 1a volatilité est grande, plus la probabilité que le cours atteigne des sommets, ou subisse de fortes baisses, est importante. Elle est alors mesure de l'incertitude sur la rentabilité des titres.

La volatilité est un indicateur primordial de la fluidité des marchés en ce sens qu'elle permet de mesurer le degré de dépendance d'un titre par rapport aux fluctuations du marché. En effet, un marché qui stagne est un marché à volatilité très faible. Plus la volatilité est importante, plus l'option est chère. Deux types de volatilités s'appliquent au trading sur options:

La **volatilité historique,** dite aussi **« volatilité non-conditionnelle »**, correspond au niveau de volatilité atteint dans le passé. Elle se base sur les constatations ex-post des fluctuations passées des cours/taux. Elle se calcule à la base de l'historique de l'évolution des cours du sous-jacent.

La **volatilité implicite** qui elle, reflète le « prix du risque » attaché à une option. Sa valeur est en fait « estimée » par le marché. Généralement, sur le marché action, les mouvements baissiers sont accompagnés d'une volatilité implicite forte, inversement celle-ci est faible pour les mouvements haussiers.

Dans le modèle Black & Scholes, la volatilité est définie comme étant l'écart-type annuel du cours du sous-jacent. L'investisseur peut laisser le marché calculer la volatilité pour lui en recourant à la volatilité implicite. La volatilité implicite est fonction du Strike et de l'échéance choisis par le client. L'opérateur insère cette volatilité anticipée dans la formule de Black & Scholes afin de calculer le prix de l'option correspondant.

5.4 Application : Implémentation sur VBA

A l'instar des autres produits dérivés traités dans ce qui précède, à savoir le FRA et le Swap de taux, nous consacrerons cette partie à la présentation du programme implémenté sur VBA que nous avons établi, destiné d'une part, à évaluer la valeur du Cap et le Floor à la date en question.
Ces formules sont celles considérées par le programme établi sur VBA-Excel, et qui requiert pour entrées les données suivantes :

- date d'échéance d'option ;
- date d'échéance de début d'option ;
- nominal de l'opération ;
- Strike, taux plancher, pour lequel l'option est établi ;
- Date de valeur ;
- Nombre et pas de simulations pour la méthode stochastique ;

Les paramètres du modèle Hull and White, ils ont été aussi pris en considération pour estimer les taux variables à partir de ce processus.

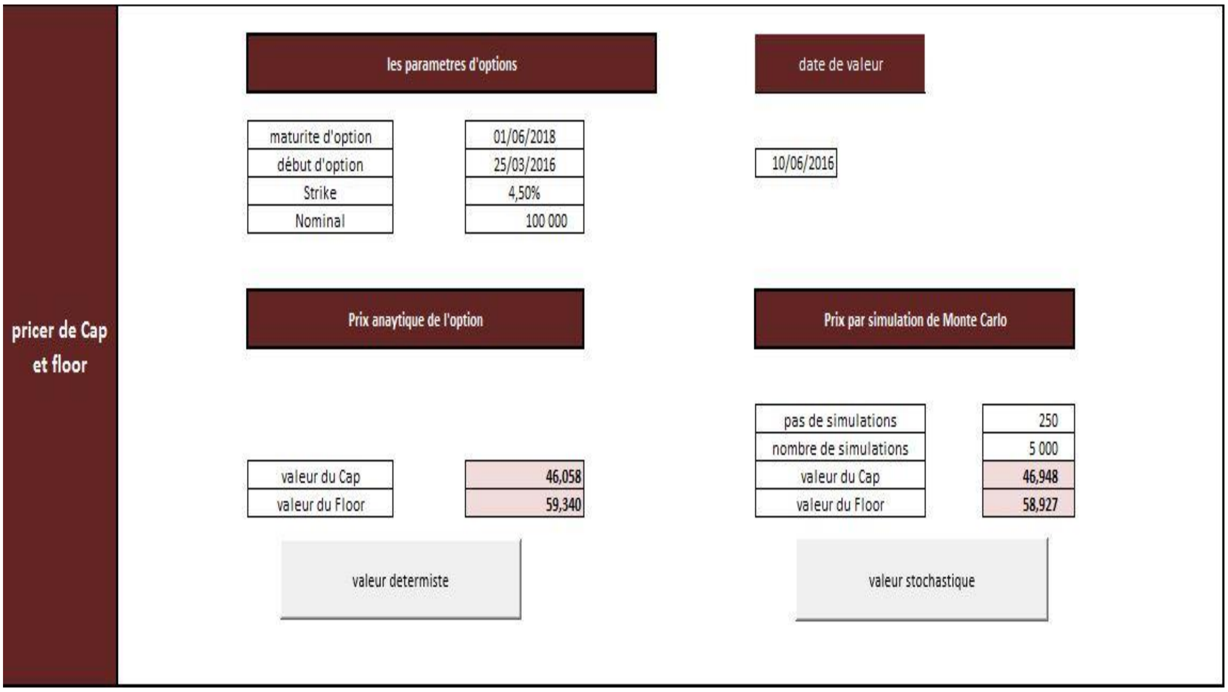


Figure 41: interface du pricer d'option sur VBA-Excel

Une fois les entrées requises en place, le programme peut dès lors calculer la prime à verser par la contrepartie et ce, en actualisant à la date actuelle les flux estimés. Ces derniers sont calculés en rapportant le notionnel aux taux Forward déterminés de la même manière considérée tout au long de ce rapport, c’est-à-dire à partir des taux zéro-coupons. Il faut toutefois préciser qu’ici, dans la mesure où les Caps et Floors considérés par les deux approches stochastique et déterministe. Or, nous remarquons que les résultats donnés par les deux méthodes sont très proches.

Le modèle de Black est très prisé pour l’évaluation des options de taux européennes. Le point clé de ce modèle est l'hypothèse de log-normalité du sous-jacent à la date d'échéance de l'actif dérivé. Pour une option, c'est le prix zéro-coupon qui est supposé log-normal, pour un cap c'est le taux des caplets qui est log-normal, c'est le taux de swap. Chacun de ces modèles a sa cohérence interne, mais ils ne sont pas cohérents entre eux.

Le modè1e de Black suppose de calculer le pay-off espéré en s'appuyant sur l'hypothèse que la valeur future espérée du sous-jacent est égale à sa valeur Forward; nous l’actualisons ensuite au taux zéro-coupon observé sur le marché aujourd'hui.

Conclusion

Cette partie a été consacrée au dernier produit dérivé. Nous nous sommes arrivés, au travers cette partie consacrée au dernier produit dérivée, à évaluer les options. Cette valorisation a été faite par le modèle de Black Or ce dernier, modèle n’est pas le seul utiliser pour évaluer les options, ce qui laisse à penser aux autres modèles de pricing d’options proposés.

Conclusion générale

Au dénouement de ces quelques mois qui furent à la fois instructifs et agréables, ce que nous pouvons conclure c'est que ce stage fut l'occasion de découvrir de plus près l'activité des marchés des capitaux ainsi que ses enjeux, d'autant plus que ce fut dans une des salles des marchés leaders au Maroc à savoir Banque Centrale Populaire. Cela nous a permis, entre autres d'associer une vision plus réaliste à un bon nombre d'acquis théoriques reçus tout au long de notre cursus scolaires respectifs.

Par ailleurs, l'objectif de notre travail était de concevoir des outils de Pricing pour des produits dérivés de taux tout en utilisant les prévisions issues de la modélisation de la structure par terme. Pour ce faire, la modélisation de la courbe de taux était une étape primordiale. Du coup, nous avons présentés plusieurs modèles de la structure par terme, notamment celui de Vasicek, Cox-Ingersoll- Ross et celui de Hull et White. Il est à noter que ces processus modélisent bien la courbe réelle, sauf ils ne prennent pas en considération les sauts que connaissent les taux dû à des éléments externes et aux changements réguliers dans la politique monétaire.

Cependant, faute de temps, nous nous pûmes étendre le travail de façon à modéliser la structure par terme par un modèle « à sauts ». Nous nous sommes également contentées de quelques modèles d'équilibre et d'arbitrage pour la détermination du prix zéro coupon, bien qu'il en existe d'autres de modèles qui pourraient bien s'avérer meilleurs. Enfin, en ce qui concerne la volatilité qu'implique l'évaluation des options sur taux, nous proposons d'élargir notre vision vers d'autres horizons, nous citerons la modélisation GARCH qui pourrait bien être utile. Il est également possible de valoriser les prix des options de taux par des autres modèles que Black. Nous estimons toutefois que notre travail peut éventuellement faire foi d'une première pierre et représenter un cadre autant théorique que pratique pour le sujet, et être, pourquoi pas le point de départ de problématiques et des réflexions plus repoussés.

Bibliographie et Webographie

[1] HULL, J.C « Options futures et autres produits dérivés », 8ème édition
[2] BRIGO et MERCURIO « interest rate models-Theory and Practice with Smile, Inflation and credit », deuxième édition
[3] Catharine RAJASUNDRAM « Développement d'un générateur de scénario économique dans le cadre de solvabilité II », Lyon Institut de science financière et d'assurances.
[4] Pierre DEVOLDER « Finance Stochastique » 1993, éditions de l'Université de Bruxelles
[5] LUNVEN Christophe 2012, « pricing du taux d'intérêt des caplets avec le modèle de taux G2++ », master 272 ingénierie économique et financière, Université Paris Dauphine.
[6] PELTIER Claire cours de VBA Finance EDC 2007
[7] BEN ABDEL OUAHAB et IMEGRI « Modélisation de la courbe de taux et valorisation des dérivés de taux », Rapport de Projet de Fin d'études, 2010, INSEA
[8] Maroua DAOUDY, Sanae FAIK, « pricing des produits dérivés de taux et application à la gestion de la trésorerie». Rapport de Projet de Fin d'études, 2011, INSEA
[9] Kaoutar LAHLOU, Abdellah TOUATI, P. 2013. «Conception d'une application pour le Pricing, la valorisation et la gestion des Swaps de taux ». Rapport de Projet de Fin d'études, 2013, INSEA
[10] Fayçal Hitmi, « Estimation de la Structure ». Rapport de Projet de Fin d'études, 2002, INSEA
[11] ACHERGUI Sara, « Estimation de la Structure ». Rapport de Projet de Fin d'études, 2015, INSEA

Note de cours

[1] Prof. ELQALLI Yassine, « Finance stochastique valorisation et couverture ». INSEA.2015-2016
[2] Prof. ELQALLI Yassine, « simulation des modèle financiers». INSEA.2015-2016
[3] Prof. ELMARRI Fouad, « série chronologique». INSEA.2014-2015
[4] Cours de « gestion du portefeuille » assuré par l'ex directeur de la salle des marchés ATTIJARIWAFA Bank

Sites WEB :

[1] http://www.bkam.ma/
[2] http://gestion-des--risques.blogspot.com/
[3] http://www.excel-pratique.com/
[4] http://www.sport-histoire.fr/en/Finance/
[5] https://financetrainingcourse

Annexes

Annexe I : Le lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est utilisé dans le processus stochastiques. Si X est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\mathbf{X(t)=X(0)}+\int_0^t \mu(X(s),s)ds + \int_0^t \sigma(X(s),s)dBs$$

Le processus d'Itô s'écrit :

$$\mathbf{dX(t)} = \mu(X(t),t) + \sigma(X(t),t)dBt$$

Avec Bt un mouvement brownien, μ le drift et σ la volatilité.

Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant :

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)\right]dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)dz$$

Où z est le même processus de Wiener standard que dans dx.

Ainsi, G suit également un processus d'Itô de paramètres $\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)$.

Annexe II : Ornstein-Uhlenbeck

En mathématiques, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nommé d'après Leonard Ornstein et George Uhlenbeck et aussi connu sous le nom d'un **« processus de retour à la moyenne »**, est un processus stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique.

$$dr(t) = \theta\big(\mu - r(t)\big) + \sigma dW(t)$$

Où $\theta, \mu\ et\ \sigma$ sont des paramètres déterministes et W(t) est le processus de Wiener.

Cette équation est résolue par la méthode de variation des constantes. Appliquons le lemme d'Itô à la fonction **f** $(r_t, t) = r_t e^{\theta t}$ pour obtenir

$$\mathbf{df}\,(r_t, t) = \theta r_t e^{\theta t}dt + e^{\theta t}dr_t$$

$$\mathbf{df}\,(r_t, t) = \theta\mu e^{\theta t}dt + \sigma e^{\theta t}dW_t$$

En intégrant de 0 à t, nous obtenons :

$$r_t = r_0 e^{-\theta t} + \mu\big(1 - e^{-\theta t}\big) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)}dW_s$$

Ainsi, le premier moment est donné, en supposant que r_0 est déterministe par :

$$E(r_t) = r_0 e^{-\theta t} + \mu\left(1 - e^{-\theta t}\right)$$

De même, la variance sera considérée ainsi :

$$\mathbf{V}\ (r_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta t}\right)$$

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un exemple de processus gaussien à variance bornée, il admet une distribution de probabilité stationnaire, contrairement au processus de Wiener.

Annexe III : Processus de Wiener

En mathématique, le processus de Wiener est un processus stochastique à temps continu. Il permet de modéliser le mouvement brownien. Il est très souvent utilisé en mathématique appliquée, en économie. Or un mouvement brownien est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Or la difficulté de modélisation de ce mouvement en mathématique réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant.

Un processus B_t avec $t \geq 0$ est considérée comme mouvement brownien si et seulement si :

- $B_0 = 0$ presque sûrement ;
- Pour tous $0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de σ (X_r, $r \leq s$) et suit la loi N(0, t-s).
- Les trajectoires de B sont tous continues

Annexe IV : Discrétisation d'Euler du modèle de Vasicek

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck a été utilisé éventuellement pour modéliser les taux d'intérêt à court terme et d'illustre le processus décrit par Vasicek :

$$dX(t) = k\big(\mu - X(t)\big)dt + \sigma dB(t)$$

Une discrétisation du modèle a été élaboré par Philips en 1972, sous la forme suivante :

$$X_{ih} = e^{-kh} X_{(i-1)h} + \mu\left(1 - e^{-kh}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2kh}}{2k}}\,\varepsilon_i$$

Où $\varepsilon_i \sim N(0,1)$

Le schéma d'Euler donne une approximation pour le processus de diffusion générale par le modèle à temps discret suivant :

$$X_{ih}/X_{(i-1)h}\ \sim N\Big(X_{(i-1)h} + \mu\big(X_{(i-1)h}, k\big)h\ ;\ \sigma^{2\left(X_{(i-1)h}, k\right)} h\Big)$$

Or pour le modèle de Vasicek l'approximation d'Euler est sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{X_{ih} = k\mu h + (1 - kh)X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}\,\varepsilon_i}$$

Où $\boldsymbol{\varepsilon_i \sim N(0,1)}$

Par comparaison entre les deux équations, par unicité de chaque terme nous obtenons grâce à un développement de Taylor du premier ordre :

$$\boldsymbol{e^{-kh}X_{(i-1)h} = \ k\mu h + O(h^2)}$$

$$\boldsymbol{\mu\left(1 - e^{-kh}\right) = (1 - kh) + O(h^2)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sigma\left(1 - e^{-2kh}\right)}{2k} = \sigma h + O(h^2)}$$

Evidemment, quand h est petit, le schéma d'Euler devrait fournir une bonne approximation de la discrétisation exacte du modèle. Toutefois, lorsque h est grand, l'approximation d'Euler peut être mauvaise.

Annexe V : Résolution des équations différentielles Stochastiques du modèle de Hull et White à deux facteurs

Pour résoudre les deux équations du modèle nous commençons par du modèle des taux longs. En posant $\boldsymbol{X_t = l_t - u_l}$ sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{dX_t = -k_l X_t + \sigma_l dB_{l,t}}$$

Ce processus est également un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce processus vérifie les hypothèses du lemme d'Ito, nous pouvons donc l'appliquer à la formule$\boldsymbol{f(l_t, t) = X_t e^{k_l t}}$**.**

Apres simplification, ceci nous donnera :

$$\boldsymbol{df(l_t, t) = e^{k_l t}\sigma_l dB_{l,t}}$$

Apres intégration, nous avons :

$$\boldsymbol{X_t e^{k_l t} = X_0 + \int_0^t e^{k_l t}\sigma_l dB_{l,t}}$$

$$\boldsymbol{X_t = e^{-k_l t}[X_0 + \int_0^t e^{k_l t}\sigma_l dB_{l,t}]}$$

En remplaçant, X_t par son expression, nous obtenons **:**

$$\boldsymbol{l_t - u_l = e^{-k_l t}[l_0 - u_l + \int_0^t e^{k_l t}\sigma_l dB_{l,t}]}$$

$$\boldsymbol{l_t = e^{-k_l t}l_0 + u_l(1 - e^{-k_l t}) + \sigma_l \int_0^t e^{-k_l(t-s)} dB_{l,s}}$$

Il est également possible d'obtenir une version discrétisée de la résolution de l'équation des taux longs. En effet, le terme intégrale suit une loi normale de moyenne nulle et de variance la variance conditionnelle des taux longs, ainsi l'expression de $\boldsymbol{l_t}$ devient :

$$l_{t+1} = e^{-k_l} l_t + u_l\left(1 - e^{-k_l}\right) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-k_l}}{2k_l}}\, d\varepsilon_{l,s}$$

Avec $\varepsilon_{l,s} \sim N(0,1)$

En ce qui concerne le taux court, il suffit de partir de l'expression $r_t e^{k_r t}$.

$$d\left(r_t e^{k_r t}\right) = k_r r_t e^{k_r t} dt + e^{k_r t} dr_t$$

$$d\left(r_t e^{k_r t}\right) = k_r l_t r_t e^{k_r t} dt + \sigma_r e^{k_r t} dB_{r,t}$$

En intégrant, nous obtenons :

$$r_{t+1} = r_t e^{-k_r} + k_r r_t e^{-k_r(t+1)} \int_t^{t+1} l_u\, e^{-k_r u} du + \sigma_r e^{-k_r(t+1)} \int_t^{t+1} e^{-k_r u}\, dB_{r,u}$$

Si nous supposons que les taux longs ne varient pas dans l'intervalle [t, t+1], alors l'expression devient :

$$r_{t+1} = r_t e^{-k_r} + l_t(1 - e^{-k_r}) + \sigma_r e^{-k_r(t+1)} \int_t^{t+1} e^{-k_r u}\, dB_{r,u}$$

En effectuant, la même discrétisation que dans le modèle de Vasicek pour obtenir une expression discrétisée du taux court, nous avons :

$$r_{t+1} = r_t e^{-k_r} + l_t\left(1 - e^{-k_r}\right) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_r}}{2k_r}}\, \varepsilon_{r,t}$$

Avec $\varepsilon_{r,t} \sim N(0,1)$

Annexe VI : Martingale

En calcul stochastique, une martingale désigne un type de processus stochastique, c'est-à-dire un processus aléatoire et dynamique. Ce type de processus X est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date s, dénotée $\mathbf{F_s}$, est la valeur à cette même date :

$$\mathbf{E\,(X_t / F_s) = X_s \text{ (avec } s \leq \mathit{t}\text{)}}$$

Annexe VII : Simulation de Monte- Carlo

Une simulation de Monte Carlo d'un processus stochastique est une procédure permettant de créer un échantillon aléatoire du processus. Cette méthode désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Ces méthodes sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que un. Elle se base sur le théorème des grands nombres. Afin de générer, des nombres aléatoires nous utilisons une simulation de Box Muller décrite dessus.

Annexe VIII : Simulation par la méthode de Box Muller

Cette méthode transforme des coordonnées cartésiennes uniformément distribuées dans le cercle unité en des coordonnées normalement distribuées.

Soient x et y choisis indépendamment et uniformément dans [-1, 1], et **$s=x^2+y^2$**. Si $s \geq 1$ ou $s=0$, rejetons-le et choisissons à nouveau un couple **(x, y)**, jusqu'à ce que s'appartienne à **]0,1[**. Pour ces points « filtrés », calculons ensuite :

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{x}.\sqrt{-\frac{2\ln(s)}{s}}$$

Et

$$\mathbf{B}=\mathbf{y}.\sqrt{-\frac{2\ln(s)}{s}}$$