

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation de la courbe de taux et valorisation
des dérivés de taux

Préparé par : **BEN ABDEL OUAHAB Alia**
IMEGRI Meriem

Sous la direction de : **M. EL ABDI Fouad** (INSEA)
M. CHARAFE-EDDINE Youssef (Banque Centrale Populaire)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

M. EL ABDI Fouad	(INSEA)
M. EL QALLI Yassine	(INSEA)
M. CHARAFE-EDDINE Youssef	(BCP)

Résumé

Afin de garantir leur gain, les banques ont besoin de maîtriser le risque du marché auquel elles se trouvent confrontées. Pour cela, il leur faut des instruments qui leur permettent de se couvrir contre ce risque. L'objet de notre étude s'inscrit dans cette perspective.

En effet, notre travail consiste à élaborer des outils qui assurent la valorisation des dérivés de taux, en utilisant les données marocaines. Pour ce faire, nous introduisons, dans le premier chapitre, les différentes notions relatives au taux d'intérêt, aux obligations et à la courbe de taux. Dans le chapitre qui suit, nous essayons de modéliser la courbe de taux, en ayant recours aux modèles déterministes et celles stochastiques. Et finalement, nous élaborons des pricers pour l'évaluation des options de taux, il s'agit des pricers des options sur obligations, de cap et de floor.

Mots clés :

Dérivés de taux, Courbe de taux, valorisation, modèles déterministes, modèles stochastiques, Option sur obligation, cap, floor.

Dédicaces

Je dédie cet humble travail

A Mes très chers parents pour les sacrifices, l'affection, l'amour et le soutien que vous m'avez apportés. Vous êtes ma fierté et ma raison d'être, Aucune dédicace ne saurait exprimer à sa juste valeur le profond amour que je vous porte.

Je vous aime.

A ma chère sœur Soukaina, mon cher frère Abdessamed, je suis très fière de vous, et je souhaite que vous réalisiez vos rêves et que vous alliez au-delà de vos ambitions.

Je vous aime.

A mes chers grands parents, à ma grande famille, ce travail est le vôtre.

A mon cher binôme et chère amie Alia, merci pour ta compréhension, ta patience et pour tous les joyeux moments que nous avons partagé ensemble durant ces trois ans.

A mes meilleurs amis Sohaib et Amina, je vous remercie d'être toujours là, à mes côtés, à me soutenir, et pour tous les joyeux moments qu'on a partagé ensemble, vous m'êtes chers.

A mes amies, Alia, Oulaya, Zineb, Ghizlane, Mariam, Soumaya, Sana, Meriem, Imane, soukeyna, Houda, Chaymae, Hafsa...

A tous ceux qui m'aiment.

MERIEM

Dédicaces

A mes chers parents qui m'ont toujours aimé et soutenu

Je ne vous remercierais jamais assez pour votre amour, votre affection, et votre présence à mes côtés dans toutes les étapes et les épreuves de ma vie

A mon cher frère et à ma chère sœur, Youssef et Bahia, vous êtes ma fierté, je vous aime et j'espère vous voir toujours heureux

A mon cher mari Yassir, qui est toujours là à mes côtés
Ma vie avec toi est remplie de belles surprises, je t'aime

A ma chère petite nièce Mariam, tu combles notre vie de bonheur telle une rose ornant un jardin de fleurs

A mes chers Yassine, Maha et Driss, je vous souhaite tout ce qui est beau dans cette vie, vous m'êtes très chers

A toute ma grande famille

A mon binôme et chère amie Meriem, nous avons partagé de très bons moments ensemble durant ces années à l'école, je suis très fière de notre amitié

A toutes mes chères amies, Meriem, Chaymae, Houda, Laila, Zineb, Ghizlane, Mariam, Hajar, Yasmina, Soukaina, Mounia, Ghita, Mouna, Saloua, Randa et Imane.
Je suis très chanceuse de vous avoir dans ma vie, je vous aime.

Alia

Remerciements

Nous avons l'honneur d'exprimer nos sincères et nos vifs remerciements à notre grand et respectueux professeur, Monsieur EL ABDI Fouad, d'avoir accepté de nous encadrer et de nous aider par ses fructueux conseils et son précieux soutien.

Nous devons également remercier notre encadrant externe, Monsieur CHARAFE-EDDINE Youssef, responsable des taux et Dérivés de taux, de nous avoir orienté et accompagné tout au long de la période de stage.

Nous remercions toute l'équipe de la salle des marchés de la Banque Centrale Populaire pour leur accueil, leur disponibilité, leur écoute et leur bonne humeur.

Nos remerciements les plus distingués vont également à nos professeurs Monsieur EL QALLI Yassine et Monsieur Marri Fouad qui ont contribué à l'avancement de ce travail

Et finalement, Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce mémoire.

Table des matières

<i>Résumé</i>	3
<i>Dédicaces</i>	4
<i>Dédicaces</i>	5
<i>Remerciements</i>	6
<i>Liste des abréviations</i>	11
<i>Liste des figures</i>	12
<i>Liste des tableaux</i>	14
<i>Introduction</i>	15
Chapitre1: Contexte général de l'étude	17
I. Présentation du milieu du travail :	18
I.1 Présentation de l'organisme d'accueil (BCP) :.....	18
I.2 Salle des marchés de la BCP :	19
I.2.1 Pôles de la salle de marchés :.....	19
I.2.1.1 Front Office :.....	19
I.2.1.2 Middle Office :.....	20
I.2.1.3 Back Office :	20
II. Marchés financiers :.....	21
II.1 Principaux marchés financiers.....	21
II.1.1 Marché des changes :.....	21
II.1.2 Marché des actions :	21
II.1.3 Marché des matières premières:	21
II.1.4 Marché des taux:.....	22
II.1.4.1 Définition du taux d'intérêt.....	22
II.1.4.2 Différents types du taux d'intérêt :	22
1-Taux d'intérêt nominal et réel :.....	22
2-Taux de rendement actuariel:	23
3-Taux zéro coupon :.....	23
4-Taux forward:.....	23
5-Taux interbancaire :.....	24
II.1.4.3 Généralités sur les obligations:	24

1-Définition d'une obligation :	24
2- Types des obligations :	25
3- Caractéristiques d'une obligation :	26
4- Valorisation d'une obligation :	28
II.1.4.4 Courbe de taux:	29
1- Définition:	29
2- Forme générale de la courbe de taux :	29
3- Caractéristiques de la courbe de taux :	30
Conclusion du premier chapitre:	32
Chapitre2 : Modélisation de la structure par terme	33
I. Modèles déterministes:	34
I.1 Méthode directe de modélisation de la courbe des taux : Bootstrap	34
I.1.1 Interpolation linéaire	35
I.1.2 Exemple de calcul	35
I.1.3 Application de l'interpolation linéaire sur VBA Excel	35
I.1.4 Interpolation cubique	36
I.1.5 Exemple de calcul	36
I.1.6 Application de l'interpolation cubique sur VBA Excel	37
I.2 Méthode indirecte de modélisation de la courbe de taux : Nelson Siegel	39
I.2.1 Définition d'une méthode indirecte	39
I.2.2 Modèle de Nelson Siegel	40
I.2.3 Application du modèle de Nelson Siegel :	42
II. Modèles stochastiques:	43
II.1 structure par terme :	43
II.1.1 Définition du modèle à une seule variable d'état :	43
II.1.2 Structure des prix d'une obligation :	44
II.1.3 Condition d'arbitrage	45
II.1.4 Equation de la structure par terme	46
II.2 Modèle de Vasicek :	47
II.3 Application du modèle de Vasicek	49
II.3.1 Discrétisation du modèle de Vasicek	49
II.3.2 Analyse des données	50
II.3.2.1 Statistique descriptive de la série TMP journalier :	51
II.3.2.2 Test de racine unitaire (Dickey-Fuller Augmenté) :	52

II.3.2.3 Test d'autocorrélation :	54
II.3.2.4 Estimation des paramètres du modèle.....	55
II.3.2.5 Test d'homoscédasticité des résidus :	55
II.3.2.6 MCO avec correction par la matrice de White :	56
II.3.2.7 Test de normalité :	57
II.3.2.8 Test du bruit blanc :	57
II.3.2.9 Estimation de la prime de risque :.....	58
II.4 Modèle de Cox Ingersol Ross :.....	60
II.5 Application du modèle de Cox, Ingersoll et Ross	62
II. 5.1 Discrétisation du modèle de Cox, Ingersoll, et Ross :	62
II.5.2 Analyse des données :.....	63
II .5.2.1 Statistique descriptive de TMP journalier.....	63
II.5.2.2 Test de la racine unitaire.....	64
II.5.2.3 Estimation des paramètres du modèle.....	65
II.5.2.4 Test d'hétéroscedasticité pour le modèle CIR	66
II.5.2.5 Tests de significativité des paramètres du modèle.....	66
II.5.2.6 Test de bruit blanc : Box Pierce.....	66
II.5.2.7 Test de normalité des résidus :	67
II.5.2.8 Estimation de la prime de risque :	68
II.5.2.9 Prévision de la courbe par le modèle de CIR.....	69
1) Prévision de taux moyen pondéré TMP par Monte Carlo :.....	69
2) Prévision de la prime de risque λ :	70
3) Prévision de la courbe de taux:	76
4) Comparaison de la courbe de taux prévisionnelle de 07/03/2015 avec la courbe réelle de 07/03/2014.....	76
5) Validité des prévisions des taux estimés par CIR	77
Conclusion du deuxième chapitre	79
Chapitre 3: Valorisation des dérivés de taux	80
I. Risque du taux d'intérêt	81
II. Généralités sur les options et les options de taux	82
II.1 Généralités sur les options.....	82
II.1.1 Définition et caractéristiques de l'option.....	82
II.1.2 Flux des options	82
II.2 Options de taux	83

II.2.1	Modèle de Black	83
II.2.2	Justification du résultat donné par le modèle de Black.....	85
II.2.3	Volatilité du modèle de Black	88
II.2.3.1	Volatilité historique	88
II.2.3.2	Volatilité implicite	89
III.	Cap, floor et collar.....	89
III.1	Cap.....	90
III.1.1	Définition du cap	90
III.1.2	Cap comme portefeuille d'options (caplets).....	90
III.1.3	Exemple du cap	91
III.2	Floor.....	91
III.2.1	Définition du floor.....	91
III.2.2	Floor comme portefeuille d'options (floorlets) :	92
III.3	Collar :.....	92
III.3.1	Définition et généralités :	92
III.3.2	Flux du collar :	92
III.4	Evaluation des caps et des floors	93
III.5	Mise en place de Pricers de cap, floor et collar :.....	94
III.5.1	Pricer de cap :	94
III.5.2	Pricer de floor :	98
III.5.3	Pricer de collar :	99
IV.	Les options sur obligations :	100
IV.1	Collable bonds :	100
IV.2	Puttable bonds :	101
IV.2	Valorisation de l'option sur obligation par le modèle de Black :	101
IV.2.1	Volatilité de taux:	102
IV.2.2	Exemple de calcul du prix d'une option sur obligation :.....	103
IV.3	Elaboration d'un pricer d'option sur obligation :.....	104
	Conclusion du dernier chapitre.....	106
	<i>Conclusion générale</i>	107
	<i>Bibliographie/Webographie</i> :	109
	<i>Annexes</i>	112

Liste des abréviations

- **BAM** : Bank Al Maghreb
- **CF** : Cash-flow
- **CIR** : Cox Ingersoll Ross
- **DFA** : Dickey Fuller Augmenté
- **EONIA** : Euro Over Night Index Average
- **EURIBOR** : Euro Inter-bank Offered Rate
- **J.B** : Jarque-Bera
- **MCO** : Moindres Carrés Ordinaires
- **NS** : Nelson Siegel
- **PAC** : Auto Corrélacion Partielle
- **TMP** : Taux Moyen Pondéré
- **VBA** : Visual Basic for Applications
- **ZC** : Zéro Coupon

Liste des figures

Figure 1 : Coupon couru d'une obligation	27
Figure 2 : Flux d'une obligation.....	28
Figure 3 : Formes usuelles d'une structure de taux.....	31
Figure 4 : Interpolation linéaire de la courbe de taux de BAM pour la date 07/03/2014.....	35
Figure 5 : Exemple de l'interpolation cubique de la courbe de taux.....	37
Figure 6 : Calcul des paramètres de la fonctionnelle de Nelson Siegel	42
Figure 7 : Estimation de la courbe de taux par Nelson Siegel.....	43
Figure 8 : Evolution journalière du TMP entre 2008 et 2014	50
Figure 9 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier.....	51
Figure 10 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec tendance et constante).....	52
Figure 11 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec constante).....	53
Figure 12 : Résultat du test de DFA concernant la stationnarité	53
Figure 13 : Test d'autocorrélation	54
Figure 14 : Estimation des paramètres du modèle.....	55
Figure 15 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité.....	55
Figure 16 : Estimation du modèle après correction de la matrice variance-covariance	56
Figure 17 : Test de la normalité des résidus.....	57
Figure 18 : Corrélogramme des résidus.....	57
Figure 19 : Estimation de la valeur de la prime de risque et calcul des rendements zéro coupon	58
Figure 20 : Comparaison entre la courbe de Vasicek et celle du marché pour la date 07/03/2014.....	59
Figure 21 : Prime de terme du modèle Vasicek	60
Figure 22 : Evolution du TMP journalier entre 24/03/2013 et 07/03/2014.....	63
Figure 23 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier	63
Figure 24 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec tendance et constante).....	64
Figure 25 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec constante).....	64
Figure 26 : Résultat du test de DFA concernant la stationnarité	65
Figure 27 : Estimation des paramètres du modèle de CIR	65
Figure 28 : Test d'hétéroscédasticité des résidus	66
Figure 29 : Corrélogramme des résidus.....	67
Figure 30 : Test de normalité des résidus.....	67
Figure 31 : Estimation de la prime de risque λ et calcul des rendements zéro coupon	68
Figure 32 : Comparaison entre courbe du marché et celle obtenue par CIR	69
Figure 33 : Simulation de 500 résidus pour 365 jours.....	70
Figure 34: Evolution de la série de la prime de risque	71

Figure 35 : Test de Dickey Fuller (modèle avec constante et tendance).....	71
Figure 36 : Graphe de la série dlambda.....	72
Figure 37 : Test de DFA, modèle avec tendance et constante.....	72
Figure 38 : Test de DFA (modèle avec constante).....	73
Figure 39 : Test de DFA, modèle sans tendance ni constante.....	73
Figure 40: Corrélogramme de la série dlambda.....	74
Figure 41 : Estimation des paramètres du modèle AR(2).....	74
Figure 42 : Test de Box Pierce.....	75
Figure 43 : Comparaison entre la courbe réelle du 07/03/2014 et la courbe prévue en 07/03/2015....	77
Figure 44 : Backtesting pour la validité des prévisions.....	78
Figure 45 : Dates d'activation du cap.....	91
Figure 46 : Flux appliqués chaque trimestre pour un cap trimestriel de deux ans.....	94
Figure 47 : Pricer du cap sous VBA.....	96
Figure 48 : Tombée de la date de valorisation.....	97
Figure 49 : Tombée de la date de valorisation.....	97
Figure 50 : Pricer de floor via VBA Excel.....	98
Figure 51 : Pricer du collar via VBA Excel.....	99
Figure 52 : Pricer d'option sur obligation.....	105
Figure 53 : stratégie des tests de Dickey Fuller.....	115
Figure 54 : Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour $\phi=1$	116
Figure 55: Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour la constante et tendance.....	117
Figure 56 : Table de loi Khi-deux.....	118
Figure 57 : Caractéristiques nécessaires pour valoriser l'obligation.....	119
Figure 58 : Valorisation de l'obligation par VBA Excel.....	119
Figure 59 : Pricer du cap.....	120
Figure 60 : Prix du cap calculé par Bloomberg.....	121

Liste des tableaux

Tableau 1 : Actionnaires de la Banque Populaire.....	19
Tableau 2 : Courbe du secondaire pour la date 07/03/2014	34
Tableau 3 : Taux de référence pour les maturités pleines trouvés par interpolation linéaire de la date 07/03/2014.....	37
Tableau 4 : Taux zéro coupon calculés pour la date 07/03/2014	39
Tableau 5: Prévisions du TMP journalier du 08/03/2013 au 30/03/2014.....	70
Tableau 6 : Lambdas prévisionnels du 08/03/2013 au 30/03/2014	75
Tableau 7 : Courbe de taux prévisionnelle de 08/03/2014 au 30/03/2014	76
Tableau 8 : Calcul des taux forward pour un caps trimestriel de maturité 2 ans.....	95
Tableau 9 : Calcul des taux forward pour un caps semestriel de maturité 2 ans	95
Tableau 10 : Volatiltés annuelles calculées à partir de la base journalière des taux forwards	96

Introduction

Il est évident que le risque se trouve au cœur de toute stratégie d'investissement créée sur les marchés financiers, c'est pour cela, que les analystes financiers sont toujours à la recherche de moyens permettant la mesure et la gestion du risque. Il s'agit, en fait, de trouver un certain équilibre entre les bénéfices et le risque.

C'est dans cette perspective que les marchés financiers ont élaboré leur propre approche pour une allocation optimale du risque, grâce aux produits dérivés, qui sont une sorte d'assurance contre la possibilité de perte.

L'évolution de ces produits est due à l'affirmation d'un rendement accru des marchés et d'une hausse des prix des matières premières, des taux de change des monnaies...

Cependant, l'objectif de ces produits n'est plus limité à la couverture, il s'est étendu à des fins de spéculation qui ont fait en sorte que les produits dérivés prennent une place très pesante parmi les activités financières.

Le marché des produits dérivés est créateur de profits importants pour les banques, vu la forte valeur ajoutée de ses opérations qui génèrent des marges très intéressantes.

Parmi ces produits dérivés, il y a les dérivés de taux qui font l'objet de notre travail, et qui permettent de se couvrir contre une évolution défavorable du taux d'intérêt.

Dans ce contexte, l'objectif principal de notre projet de fin d'études effectué au sein de la salle des marchés de la Banque Centrale Populaire, est d'élaborer des pricers pratiques permettant la valorisation des prix des options sur obligation, des caps et des floors, et cela en utilisant des données marocaines.

Pour ce faire, notre travail s'organise en trois chapitres, le premier chapitre sert à présenter la société d'accueil, définir les principaux marchés financiers et leurs caractéristiques, en donnant plus d'importance au marché de taux qui est le cadre de notre

projet, et au niveau duquel, nous présentons les différentes notions dont nous avons besoin dans la suite du travail, à savoir les différents types de taux d'intérêt, les obligations et ses caractéristiques, et finalement la courbe de taux qui fait l'objet principal du chapitre suivant.

Le second chapitre est consacré, à la modélisation de la courbe de taux à travers des modèles déterministes, et autres stochastiques qui permettent de faire les prévisions et d'obtenir la courbe de taux zéro coupon marocaine, qui nous est utile pour la valorisation des dérivés de taux.

Le troisième chapitre de ce mémoire, s'articule autour de la valorisation des dérivés de taux, il s'agit des options sur obligations, des caps et des floors. Nous élaborons en s'appuyant sur le modèle de Black, des pricers qui servent à calculer les prix de ces options tout en se servant des prévisions effectués dans le chapitre précédent.

Chapitre1: Contexte général de l'étude

Afin de bien cerner le cadre de notre étude, nous allons, premièrement, commencer par une présentation générale de la société d'accueil (la Banque Centrale Populaire), et plus particulièrement celle de la salle des marchés où s'est déroulé notre stage de fin d'études. Ensuite, nous allons introduire la notion du marché financier et ses différents types, en exhibant les caractéristiques de chacun de ces types, et mettant en exergue le marché de taux. Au niveau de ce marché, nous allons déterminer les types de taux d'intérêt, définir les notions relatives aux obligations et finalement, donner un aperçu sur la courbe de taux et ses principales particularités.

I. Présentation du milieu du travail :

I.1 Présentation de l'organisme d'accueil (BCP) :

Le Groupe Banque populaire est un groupe bancaire marocain créé en 1965. Il comprend 11 banques régionales organisées sous forme de coopératives, une **Banque Centrale populaire** et plusieurs filiales :

- Banque Populaires Régionales
- Upline Group
- Banque atlantique
- Maroco-Centrafricaine
- Maroco-Guinéenne
- Média Finance
- CIB Offshore
- Chaabi Bank Espagne
- Chaabi Bank Nederland

La Banque Centrale Populaire (BCP) est un établissement de crédit, sous forme de société anonyme à Conseil d'Administration. Elle est cotée en bourse depuis le 8 juillet 2004. La BCP assure un rôle central au sein du groupe des Banques Populaires. Elle a deux missions principales:

- Etablissement de crédit habilité à réaliser toutes les opérations bancaires, sans toutefois disposer d'un réseau propre.
- Organisme central bancaire des Banques Populaires Régionales.

La BCP coordonne la politique financière du Groupe, permet de refinancer les BPR et de gérer leurs excédents de trésorerie ainsi que les services d'intérêt commun pour le compte de ses organismes.

Les actionnaires du groupe:

BPR (Banque Centrale Populaire)	42,49 %
Divers actionnaires	8,99 %
Régime Collectif d'Allocation de Retraite	6,41 %
Trésorerie générale	6,02 %

Chapitre1 : Contexte général de l'étude

Personnel	5,87 %
Office Chérifien du Phosphate	5,06 %
Banque populaire Caisses d'Epargne	5,00 %
Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite	4,79 %
RMA Watanya	3,86 %
Caisse Marocaine des Retraites	2,58 %
Wafa Assurance	1,93%
International Finance Corporation	1,21 %
Mutuelles Centrale Marocaine d'Assurances	0,90 %
Mutuelle Agricole Marocaine d'Assurances	0,90 %
Africa Capitalization Fund LTD	0,57 %
CNIA	0,20 %

Tableau 1 : Actionnaires de la Banque Populaire

I.2 Salle des marchés de la BCP :

La salle de marchés de la BCP est un lieu regroupant multiples services spécialisés permettant aux Banques d'intervenir sur les Marchés de capitaux internationaux. Son objectif est de trouver des ressources à coût réduit et des emplois rémunérateurs, tout en minimisant les risques de marché.

I.2.1 Pôles de la salle de marchés :

Les différents pôles de la salle des marchés sont répartis en trois pôles distincts qui sont, le Front Office qui est chargé de la négociation avec les clients, le Middle Office chargé de contrôler les risques et d'analyser les résultats, le Back Office, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne.

Les trois pôles se définissent comme suit :

I.2.1.1 Front Office :

Le Front Office est l'interface de la banque avec le marché, Le Front Office centralise et traite tous les besoins de la banque et de ses clients en termes de couverture, financement, investissement, trading, gestion de position et arbitrage.

Le Front office de la BCP se compose de quatre desk, le desk trésorerie, desk sales, desk taux et dérivés de taux et le desk change/matières premières.

Desk change/matières premières :

- **Desk change** : usuellement appelé Forex est le desk du marché des changes sur lequel les devises sont échangées l'une contre l'autre, à des taux de change variant sans cesse. Ce desk se charge du trading aussi bien pour le propre compte de la banque que pour le compte des particuliers qui représentent essentiellement les entreprises marocaines qui ont accès à la salle des marchés.
- **Desk matières premières** : se charge du trading pour le compte propre de la banque en prenant des positions sur les différentes matières premières (Métaux, céréales,...).

Desk trésorerie: on peut distinguer le desk trésorerie dirham et celui des devises. Ils ont pour mission d'optimiser la trésorerie de la banque en MAD et en devises tout en veillant à l'équilibre des comptes.

Desk taux et dérivés de taux : assure la liquidité de la banque et gèrent le portefeuille de la banque.

Desk sales : a pour mission de répondre aux exigences des clients ; en effet, il leur offre des produits personnalisés « taillés sur mesure » : répondant à leur besoins de financement et respectant leur aversion aux risques.

I.2.1.2 Middle Office :

Le middle office intervient entre le front et le back. Il analyse les positions après chaque opération du négociateur. Il met en place un suivi des informations permettant le contrôle des risques pris par la salle de marchés et établit le niveau de perte et de gain du Front Office.

I.2.1.3 Back Office :

Le Back Office assure le suivi administratif et comptable des opérations effectuées sur les différents marchés (actions, obligations, OPCVM, devises et autres produits financiers). Il vérifie que les transactions enregistrées par le négociateur de marché (qu'il soit trader, broker, "sales") correspondent à celle du vendeur. Il réalise le règlement et la livraison des titres ou encore assure le versement des dividendes. Il assure aussi le lien avec les services informatiques, car tout repose sur des systèmes de nouvelles technologies de l'information.

II. Marchés financiers :

Un marché financier est un marché des capitaux où s'échangent des valeurs mobilières telles que les actions ou les obligations, soit au comptant, c'est-à-dire au prix actuel du marché (spot), soit à terme.

Le marché financier se décompose en marché primaire qui est le marché de l'émission et en marché secondaire qui correspond au marché de la revente ou de l'occasion. Il englobe les marchés d'actions, d'obligations et les marchés dérivés.

II.1 Principaux marchés financiers

II.1.1 Marché des changes :

Le marché des changes (FOREX en anglo-américain) est le marché sur lequel s'échangent les devises les unes contre les autres, contrairement aux marchés boursiers, qui ont une localisation géographique précise, le marché des changes ne connaît pas de frontières ; il y a un seul marché des changes dans le monde.

De par son caractère planétaire, le marché des changes est une organisation économique sans véritable réglementation, elle est auto-organisée par les instances publiques et privées qui y interviennent.

II.1.2 Marché des actions :

Le marché des actions est un marché financier où sont vendues et achetées des actions de différents types d'entreprises.

Les actions sont des titres de propriété représentatifs d'une fraction du capital de l'entreprise qui attribuent certains droits à leur détenteur.

Le marché des actions est composé d'actions cotées et d'actions non cotées. Les actions cotées peuvent être vendues ou achetées en Bourse. Les actions non cotées peuvent être achetées et vendues de gré à gré à travers un intermédiaire financier.

II.1.3 Marché des matières premières:

Le marché des matières premières est à la fois un marché de gros et un marché de détail.

Le terme matières premières est un terme générique qui désigne l'ensemble des ressources naturelles utilisées dans le secteur de l'industrie pour la production de produits

finis ou semi-finis, que ce soit composants ou ressources énergétiques entrant dans le cycle de production ou d'acheminement du produit. Sur ce marché sont échangés entre autre du cuivre, de l'or, du blé, du coton et du pétrole.

Les acteurs de ce marché sont des producteurs (exploitants, sociétés minières, industriels...), des institutions financières (banques, sociétés de gestion, investisseurs institutionnels...), des sociétés (en tant qu'émetteurs sur le marché primaire, ou comme investisseurs), et des particuliers.

II.1.4 Marché des taux:

Les marchés de taux sont les marchés de capitaux les plus importants du monde, par les volumes traités et aussi par leur importance économique.

II.1.4.1 Définition du taux d'intérêt

Le taux d'intérêt représente le coût de l'argent, il permet de calculer le prix qu'il faut payer pour emprunter de l'argent ou la rémunération reçue en cas de prêt d'argent, c'est le prix que les prêteurs demandent aux emprunteurs pour l'usage de l'argent qu'ils mettent à leur disposition. Ce taux d'intérêt est calculé en pourcentage de la somme empruntée ou prêtée.

Cette définition réfère à une multiplicité de taux qu'il est indispensable de définir.

II.1.4.2 Différents types du taux d'intérêt :

1-Taux d'intérêt nominal et réel :

Le taux d'intérêt nominal est le taux sur lequel se mettent d'accord l'émetteur et le souscripteur d'un emprunt qui détermine le montant des intérêts, sans prendre en compte la perte de valeur de la monnaie, sous l'effet de la hausse des prix (inflation).

Le taux d'intérêt réel d'un emprunt correspond au taux corrigé de l'inflation constatée sur la période de calcul des intérêts. Ainsi si π correspond au taux d'inflation, R au taux d'intérêt nominal et r au taux d'intérêt réel, on a $\left[1 + r = \frac{1+R}{1+\pi}\right]$ mais, si les taux ne sont pas très élevés, il est commode d'approximer cette relation par: $[\pi = R - r]$ (relation de Fisher).

Le taux d'intérêt réel peut donc être négatif, il suffit que le taux d'inflation soit plus élevé que le taux d'intérêt nominal.

2-Taux de rendement actuariel:

Le taux de rendement actuariel représente le taux d'actualisation qui égalise, la valeur actuelle d'une suite de cash-flow générés par un titre à revenu fixe, à son prix du marché.

Soit un titre à revenu fixe (une obligation par exemple), le taux de rendement actuariel est donc la solution de l'équation : $\left[P = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+a)^i} \right]$

Avec :

- **P** : Le prix du titre
- **CF_i** : Le flux reçu en i
- **n** : La maturité du titre

3-Taux zéro coupon :

Le taux zéro coupon est le taux de rendement actuariel d'un instrument financier qui ne comporte aucun détachement de coupon jusqu'à la maturité, un taux d'intérêt où il n'y a qu'un seul flux d'intérêt qui intervient à maturité, c'est le flux final de remboursement du nominal plus les intérêts.

4-Taux forward:

Un contrat forward sur taux d'intérêt est le contrat effectué à l'instant t , d'achat à T_1 ($> t$) d'une obligation zéro-coupon de maturité T_2 ($> T_1$).

Pour trouver, aujourd'hui, le taux de rendement appliqué à cet investissement futur, il faut acheter un zéro-coupon de maturité (T_2) et vendre un zéro-coupon de maturité (T_1) .

Par un simple argument de non-arbitrage, le prix du contrat forward est :

$$P(T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

Avec : $P(t, T)$ est le prix du zéro-coupon de maturité T à l'instant t

Ainsi, le taux d'intérêt forward à l'instant t , $f(t, T_1, T_2)$, vérifie :

$$\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} = e^{-f(t, T_1, T_2) * (T_2 - T_1)}$$

En d'autres termes il est donné par :

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{1}{T_2 - T_1} * \ln\left(\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}\right)$$

5-Taux interbancaire :

Les taux interbancaires correspondent aux taux des prêts à court terme entre les banques, ils influencent fortement le niveau des taux de crédits distribués par les banques.

Les principaux taux interbancaire de référence du marché monétaire en Europe sont EURIBOR et EONIA.

- L'EURIBOR (Euro Inter-bank Offered Rate ou taux interbancaire offert en euro) est égal à la moyenne des taux offerts sur le marché bancaire européen par un échantillon de cinquantaine de grandes banques. Ces taux ont des échéances variant entre 1 semaine et 12 mois.
- EONIA (Euro Over Night Index Average) est le taux de référence quotidien, c'est la moyenne des taux offerts par une quarantaine de banques européens à échéance une journée.

Au Maroc, le TMP est un taux au jour le jour du marché monétaire, c'est le taux de référence journalier pour le marché monétaire marocain, il s'agit d'un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire. Il est calculé et publié par la Banque Centrale (Bank Al Maghrib).

Puisque l'objet de notre travail consiste à, d'une part, modéliser la courbe de taux, et d'autre part élaborer des outils de valorisation des dérivés de taux. Nous allons, dans ce qui suit, introduire les obligations et leurs caractéristiques, et ensuite, définir la courbe de taux et ses particularités.

II.1.4.3 Généralités sur les obligations:

1-Définition d'une obligation :

Les obligations sont des parts d'emprunts émis par un organisme qui a besoin de financement. En souscrivant à une obligation, on prête à l'organisme émetteur pour, d'une part, avoir des revenus réguliers sous forme de coupons, et d'autre part, épargner avec moins de risque.

L'obligation peut être émise par l'Etat, par une collectivité publique, une entreprise nationale ou une société privée.

Lorsqu'un organisme émet des obligations, il fait appel au marché obligataire primaire sur lequel ces titres sont acquis par divers investisseurs. Sur ce marché, les prix d'émission sont intéressants car ils sont non encore modifiés par la loi de l'offre et de la demande entre les acheteurs et les vendeurs. Mais, une fois émises, les obligations peuvent être échangées sur le marché secondaire et elles deviennent des titres financiers négociables dont les cours fluctuent.

Les obligations émises par l'Etat sont appelées « les Bons de trésor », ils ont un niveau de risque presque nul, c'est pour cela que leur rémunération est minimale. C'est une référence dans la détermination du prix des obligations privées.

2- Types des obligations :

- **Obligations à taux fixe :**

Pendant toute la durée de l'emprunt, le titulaire perçoit un coupon fixe, déterminé en pourcentage de la valeur faciale de l'obligation.

Ce type d'obligation permet d'obtenir un revenu stable et régulier quel que soit le sens de l'évolution du marché.

- **Les obligations à taux variable :**

Ce sont les obligations dont le coupon est variable, il est indexé sur un taux de marché auquel s'ajoute un taux fixe. La plupart des obligations à taux variable présentent un risque faible car elles sont généralement indexées sur un taux court. Cependant, lorsque le taux de référence est un taux à long terme, le risque devient plus élevé et la volatilité non négligeable.

- **Les obligations à zéro coupon :**

Une obligation à zéro coupon est une obligation dont la totalité des intérêts sont versés à l'échéance, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun versement de coupons entre l'émission et le remboursement. Donc, la rémunération des investisseurs n'est que la différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission.

Cependant, l'investisseur ne profite pas des hausses de taux sur le marché car il ne pourra pas réinvestir à des taux plus élevés les coupons échus. Les obligations permettent aux

particuliers de capitaliser le revenu de leur épargne pour financer des dépenses à une date donnée.

3-Caractéristiques d'une obligation :

- **Valeur nominale** : est le montant que l'émetteur doit rembourser à l'échéance. Les coupons sont déterminés sur base de ce montant.
- **Coupon** : c'est l'intérêt offert par l'émetteur à l'investisseur comme rémunération pendant la durée de l'emprunt. Il est exprimé en pourcentage de la valeur nominale. Le montant du coupon dépend de la qualité de l'émetteur et de la durée.
- **La date d'échéance**: est la date d'expiration de l'obligation. Contrairement aux actions, les obligations ont une durée de vie limitée, et expirent à leur date d'échéance qui est déterminée à l'émission de l'obligation.
- **La maturité** : le temps qui reste pour le remboursement de l'obligation.
- **La date de règlement** : est le jour où le souscripteur verse à l'émetteur le prix de l'obligation.
- **La date de jouissance** : est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir. Les dates de jouissance et de règlement ne sont pas forcément simultanées.
- **Prix** : les obligations sont cotées en pourcentage, c'est-à-dire que leur prix représente un pourcentage de la valeur nominale. Quand une obligation est cotée à 100%, cela signifie que son prix est égal à sa valeur nominale, on dit alors qu'elle est cotée « au pair ». Si elle est cotée à 90%, son prix est alors inférieur à sa valeur nominale, on dit qu'elle est cotée « en dessous du pair ». Si elle vaut 110%, on dit qu'elle est cotée « au-dessus du pair ».
- **Coupon couru** : représente la fraction entre le dernier versement du coupon et la date de négociation de l'obligation. Il est exprimé en pourcentage de la valeur nominale. Le vendeur de l'obligation a droit à cette fraction du coupon qui a couru alors que l'obligation était toujours en sa possession. L'acheteur de l'obligation doit s'acquitter du coupon couru en plus de la valeur du titre. A la prochaine date de paiement de coupon, l'acheteur recevra le coupon dans son entièreté et pourra donc se rembourser sur la partie des intérêts payés au vendeur.

Calcul du coupon couru :

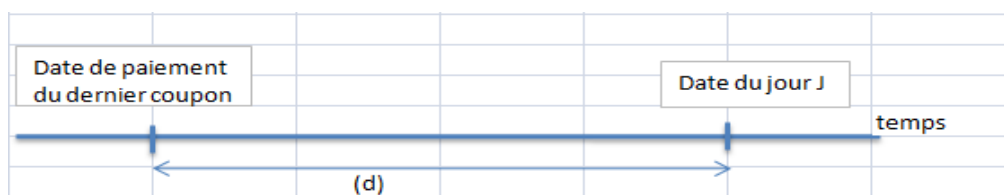


Figure 1 : Coupon couru d'une obligation

La date du jour (J) correspond au jour de l'observation ou de négociation de l'obligation. La période (d), est celle qui s'écoule entre la date du paiement du dernier coupon et la date du jour (J).

$$CC = \frac{t_c * d * N}{365}$$

Avec :

- CC : Coupon couru
 - N : Valeur nominale de l'obligation
 - t_c : Taux nominal ou de coupon (annuel) en pourcentage
 - d : Durée entre la date de paiement du dernier coupon et la date du jour (J)
- **Clean price** : prix «pied de coupon», ce prix ne tient pas compte des intérêts courus. La notion clean price s'utilise dans un contexte de pricing et de négociation.
 - **Dirty price** : prix « coupon couru », c'est le prix qui tient compte des intérêts courus, il intervient lorsqu'on parle de règlement. Une transaction est réglée par l'acheteur des titres en incluant les intérêts courus.
 - **Duration** : est une mesure de la durée de vie moyenne d'une obligation; elle mesure la sensibilité aux taux d'intérêt c'est-à-dire le temps à partir duquel la valeur de l'obligation ne dépend plus des fluctuations du taux d'intérêt. Les investisseurs sont attentifs aux variations du taux d'intérêt, car tout mouvement à la hausse ou à la baisse a un effet inverse sur leurs obligations. La duration s'exprime en unités de temps (fractions d'année) et elle est assimilée à un délai moyen de récupération de la valeur actuelle. Mathématiquement, elle est égale à :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot F_i}{(1+t)^i}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+t)^i}}$$

Où :

- t : Taux d'intérêt
 - n : Nombre de périodes
 - F_i : Cash-flow de la période i
- **Sensibilité** : c'est, en pourcentage, le potentiel de hausse ou de baisse du prix de l'obligation pour une variation de 1% des taux d'intérêt à la baisse ou à la hausse. Une obligation qui a une sensibilité de 4 verra ainsi sa valeur augmenter de 4% en cas de baisse des taux d'intérêt, et diminuer de 4% en cas de hausse des taux.

Cette formule montre que la sensibilité du prix d'une obligation à la variation du taux d'intérêt est d'autant plus forte que la durée est élevée.

$$S = \frac{D}{1 + t}$$

- **Convexité** : c'est la dérivée seconde du prix d'une obligation par rapport au taux d'intérêt, elle mesure la variation relative de la sensibilité suite à une petite fluctuation du taux d'intérêt. La convexité exprime la rapidité de l'appréciation et la lenteur de la dépréciation du cours de l'obligation si les taux baissent ou montent. Plus la convexité d'une obligation est forte, plus son prix baissera lentement (augmentera rapidement) si son taux de rendement augmente (baisse).

4- Valorisation d'une obligation :

- **Règle générale de calcul:**

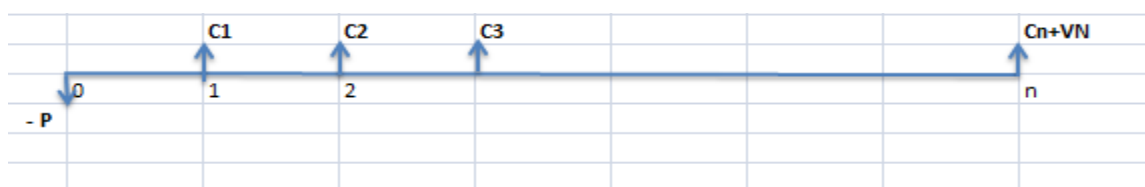


Figure 2 : Flux d'une obligation

Le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux différents taux zéro-coupon respectifs aux maturités de chacun de ces flux.

$$P = \sum_{n=0}^N \frac{C_i}{(1 + R_i)^n} + \frac{VN}{(1 + R_N)^N}$$

Avec :

- P : Prix d'une obligation
- C_i : Le $i^{\text{ème}}$ coupon
- VN : Valeur nominal
- R_i : Taux de rendement de maturité i

II.1.4.4 Courbe de taux:

1- Définition:

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux ou encore gamme des taux) est la représentation graphique, sous forme de courbe, des valeurs des taux d'intérêt (en ordonnée) en fonction de leurs maturités (en abscisse).

Il existe des courbes de taux multiples. On distingue les courbes de marché et les courbes implicites. Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché (courbe swap, courbe de rendement des obligations d'Etat), alors que les courbes implicites sont déduites indirectement de ces cotations suite à une transformation (courbe des taux zéro-coupon, courbe des taux forward).

On va s'intéresser à la courbe des taux zéro-coupon comme étant la fonction, qui, pour chaque maturité indique le taux zéro-coupon correspondant.

2- Forme générale de la courbe de taux :

La courbe de taux peut prendre cinq formes différentes en fonction des événements du marché :

- Plate
- Croissante
- Décroissante
- Décroissante puis croissante
- Croissante puis décroissante

Mais, la forme la plus couramment obtenue est la courbe croissante.

La partie de la courbe correspondante à petites et moyennes maturités (maturités inférieures à 10 ans):

Les courbes de taux sont, en général, concaves et croissantes, surtout sur la partie court terme. Cela est expliqué par la préférence des investisseurs pour la liquidité et donc pour les instruments de taux à court terme. C'est pour cette raison que ces taux sont réduits par rapport aux taux à long terme.

Une courbe de taux descendante sur sa partie 0-10 ans est assez rare et prend lieu dans les deux cas suivants:

- Lorsque la politique monétaire est restrictive (par exemple si la banque centrale lutte contre l'inflation)
- Lorsque le marché anticipe une récession dans le futur, qui entraîne un assouplissement des taux courts.

La partie de la courbe correspondante aux grandes maturités (maturités entre 10 et 50 ans) :

Les courbes de taux sont assez plates sur leur partie 10-50 ans, voire légèrement décroissantes.

3- Caractéristiques de la courbe de taux :

- **L'effet de retour à la moyenne :** Les valeurs basses de taux ont tendances à être suivies plutôt par des hausses que par des baisses, et les valeurs élevées de taux sont suivies par des baisses.
- **Les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélés :** Les taux à court terme et les taux à long terme sont peu corrélés.
- **Les facteurs de déformation de la courbe de taux :** il y a trois facteurs qui sont à l'origine de plus de 95% des déformations de la courbe de taux.
 - ✓ **Facteur niveau :** provoque les déformations parallèles de la courbe de taux
 - ✓ **Facteur de pente :** provoque les mouvements d'aplatissement ou de pentification de la courbe de taux
 - ✓ **Facteur de courbure :** provoque les changements de concavité de la courbe de taux

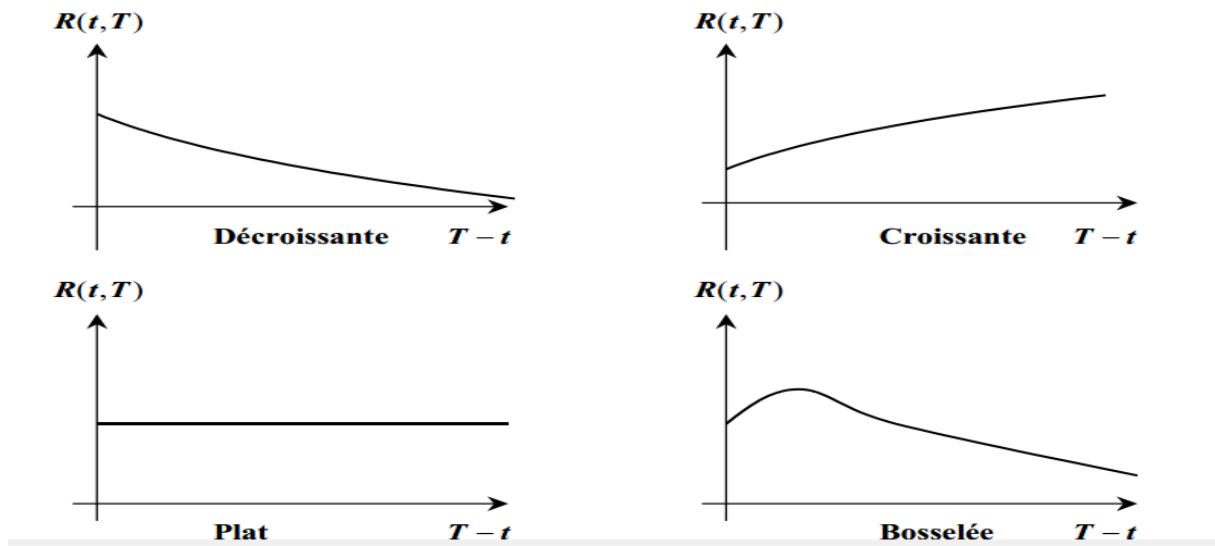


Figure 3 : Formes usuelles d'une structure de taux

Conclusion du premier chapitre:

Le passage en revue des différentes notions relatives aux marchés financiers en général et au marché de taux en particulier, est fort utile pour mieux appréhender l'objectif principal de notre sujet.

En effet, ce chapitre nous a fourni une vue d'ensemble du cadre général du projet, qui nous permettra d'introduire les méthodes de modélisation de la courbe de taux marocaine.

Chapitre2 : Modélisation de la structure par terme

L'objectif de ce chapitre réside dans la modélisation de la courbe de taux. Pour cela, nous répartissons ce chapitre en deux parties, la première permet de modéliser la courbe de taux par les méthodes déterministes directes et indirectes, et la seconde, par des modèles stochastiques tels que le modèle de Vasicek et de Cox, Ross et Ingersol.

Pour ce faire, nous travaillons sur une base de données journalière du taux moyen pondéré, sur lequel, nous effectuons une étude statistique, qui nous permet de vérifier la validité des deux modèles stochastiques et de faire les estimations. Ensuite nous effectuons les prévisions de la courbe de taux estimée par le modèle de CIR.

I. Modèles déterministes:

La reconstitution de la courbe de taux est devenue nécessaire par le fait qu'il n'y a pas assez d'obligations zéro-coupon cotées sur le marché, donc, il n'est pas possible d'obtenir les taux zéro-coupon pour un continuum de maturités. Aussi, les obligations zéro-coupon sont moins liquides que les obligations à coupons.

Il existe plusieurs méthodes de reconstitution de la courbe de taux parmi lesquelles se trouvent la méthode directe « Bootstrap » et la méthode indirecte « Nelson Siegel ».

I.1 Méthode directe de modélisation de la courbe des taux : Bootstrap

La méthode Bootstrap est une procédure en plusieurs étapes qui permet de reconstituer segment par segment de maturités, une courbe zéro-coupon. Cette procédure nécessite le recours à des méthodes d'interpolation comme l'interpolation linéaire ou cubique, que nous allons définir par la suite.

Pour ce faire, nous allons nous baser sur la courbe des taux de BAM qui fournit des taux de référence pour les maturités suivantes : 13 semaines, 26 semaines, 52 semaines, 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans et 30 ans.

Courbe du secondaire BAM du 07/03/2014		
Maturité	Maturité en jours	Taux
13 Semaines	91	3,250%
26 semaines	182	3,482%
52 Semaines	364	3,531%
2A	730	3,766%
5A	1 826	4,507%
10A	3 653	5,250%
15A	5 479	5,885%
20A	7 305	4,989%
30A	8 396	4,735%

Tableau 2 : Courbe du secondaire pour la date 07/03/2014

A partir de ces taux, nous allons essayer de chercher les taux zéro coupon, correspondants aux maturités pleines.

Pour les maturités inférieures ou égales à 1 an, les taux de référence correspondants sont à la base, des taux zéro coupon, car il n'y a pas de flux intermédiaires.

Pour les maturités supérieures à 1 an, nous utiliserons d'abord une méthode d'interpolation pour trouver les taux de référence pour les maturités non existantes dans la courbe de taux de BAM, et après, nous calculerons les taux zéros coupons correspondants. Nous définissons, tout d'abord, les méthodes d'interpolation.

I.1.1 Interpolation linéaire

Si on connaît les taux de maturité t_1 et t_2 , et on souhaite avoir le taux correspondant à la maturité t avec $t_1 < t < t_2$

$$R(0, T) = \frac{(t - t_1) * R(0, t_2) + (t_2 - t) * R(0, t_1)}{t_2 - t_1}$$

I.1.2 Exemple de calcul

Si le taux 2 ans est de 3.6% et que le taux 5 ans est de 4.2%, donc le taux 3 ans interpolé sera de 4%.

$$R(0,3) = \frac{(3 - 2) * 4.2\% + (5 - 3) * 3.6\%}{5 - 2} = 3.8\%$$

I.1.3 Application de l'interpolation linéaire sur VBA Excel

L'application suivante permet de calculer les taux dont les maturités ne figurent pas dans le premier tableau ci-dessous, ainsi en cliquant sur le bouton « interpolation linéaire », nous pouvons déterminer les taux recherchés.

Date: 07/03/2014			
maturité	taux de référence	interpolation linéaire	maturité a
0,25	3,250%		taux de référence interpolé
0,5	3,482%		0,25
1	3,531%		0,5
2	3,766%		1
5	4,507%		2
10	5,250%		3
			4
			5
			6
		7	
		8	
		9	
		10	

Figure 4 : Interpolation linéaire de la courbe de taux de BAM pour la date 07/03/2014

I.1.4 Interpolation cubique

Nous procédons à l'interpolation cubique par segment de courbes, nous définissons un premier segment entre t_1 et t_4 où nous disposons de quatre taux $R(0, t_1)$, $R(0, t_2)$, $R(0, t_3)$ et $R(0, t_4)$.

Nous déterminons le taux $R(0, t)$ de maturité t , sous la contrainte que la courbe passe par les quatre points de marché $R(0, t_1)$, $R(0, t_2)$, $R(0, t_3)$ et $R(0, t_4)$. Il est égal à:

$$R(0, t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} R(0, t_1) = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d \\ R(0, t_2) = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d \\ R(0, t_3) = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d \\ R(0, t_4) = at_4^3 + bt_4^2 + ct_4 + d \end{cases}$$

De façon matricielle, nous résolvons ce système

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^3 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^3 & t_3^2 & t_3 & 1 \\ t_4^3 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} R(0, t_1) \\ R(0, t_2) \\ R(0, t_3) \\ R(0, t_4) \end{pmatrix}$$

I.1.5 Exemple de calcul

Supposons les taux suivants : $R(0, 1) = 3\%$, $R(0, 2) = 5\%$, $R(0, 3) = 5.5\%$ et $R(0, 4) = 6\%$. Nous pouvons calculer le taux de maturité à 2.5 ans de la façon suivante:

$$R(0, 2.5) = a * 2.5^3 + b * 2.5^2 + c * 2.5 + d = 5.34\%$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 3\% \\ 5\% \\ 5.5\% \\ 6\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0025 \\ -0.0225 \\ 0.07 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

I.1.6 Application de l'interpolation cubique sur VBA Excel

Cette méthode nous permet de lisser la courbe pour chaque date donnée. Si nous prenons la date du 07/03/2014, nous obtenons les paramètres suivants :

$$a = 1,71378E - 05, b = -0,000380529, c = 0,004193747, d = 0,031475079$$

La courbe lissée du 07/03/2014 peut être schématisée comme suit :

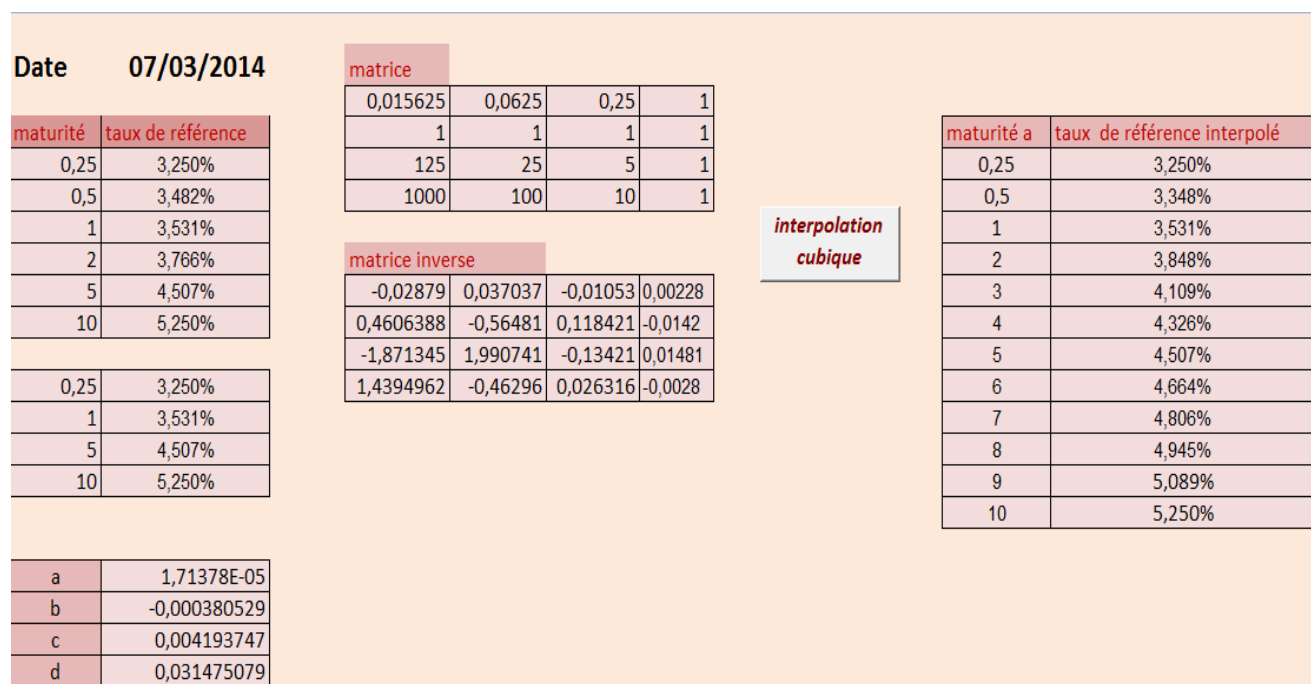


Figure 5 : Exemple de l'interpolation cubique de la courbe de taux

Afin de trouver les taux de référence correspondants aux maturités pleines, nous avons appliqué les méthodes d'interpolation. Ces taux nous permettront d'extraire les taux zéro coupon de la manière suivante :

Maturité	Taux de référence interpolé
0,25	3,250%
0,5	3,482%
1	3,531%
2	3,766%
3	4,013%
4	4,260%
5	4,507%
6	4,656%
7	4,804%
8	4,953%
9	5,101%
10	5,250%

Tableau 3 : Taux de référence pour les maturités pleines trouvés par interpolation linéaire de la date 07/03/2014

Pour les maturités supérieures à 1 an, nous utilisons la méthode Bootstrap qui consiste à égaliser la somme des flux actualisés par les taux zéro coupon au prix de l'obligation.

Prenons comme exemple des obligations à maturités 2 ans et 3 ans, de prix égal à 100. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le taux zéro coupon pour la maturité un an est égal au taux de la courbe de BAM. Ainsi, pour trouver le taux zéro coupon 2 ans, il suffit d'appliquer la relation suivante :

$$100 = \frac{3,766}{(1 + 3,531\%)^1} + \frac{100 + 3,766}{(1 + R_{zc2})^2}$$

Donc :

$$R_{zc2} = \left[\frac{100 + 3,766}{100 - 3,766 * (1 + 3,531\%)^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$R_{zc2} = 3,770\%$$

Ainsi, à partir du taux R_{zc2} , nous pouvons trouver le taux zéro coupon de maturité 3 ans

$$100 = \frac{4.013}{(1 + 3,531\%)^1} + \frac{4.013}{(1 + 3,770\%)^2} + \frac{100 + 4.013}{(1 + R_{zc3})^2}$$

Donc :

$$R_{zc3} = \left[\frac{100 + 4.013}{100 - 4.013 * ((1 + 3,531\%)^{-1} + (1 + 3,770\%)^{-2})} \right]^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$R_{zc3} = 4,026\%$$

De manière générale on a:

$$R_{zcn} = \left[\frac{N + N * tr_n}{N - tr_n * N * \sum_{i=1}^{n-1} (1 + R_{zci})^{-i}} \right]^{1/n} - 1$$

Avec :

- n : Maturité
- tr_n : Taux de référence correspondant à la maturité n

Maturité	Taux de référence interpolé	Rendement ZC
0,25	3,250%	3,250%
0,5	3,482%	3,482%
0,75	3,51%	3,51%
1	3,531%	3,531%
1,25	3,589%	3,590%
1,5	3,648%	3,650%
1,75	3,707%	3,710%
2	3,766%	3,770%
3	4,013%	4,026%
4	4,260%	4,287%
5	4,507%	4,554%
6	4,656%	4,715%
7	4,804%	4,880%
8	4,953%	5,051%
9	5,101%	5,227%
10	5,250%	5,409%

Tableau 4 : Taux zéro coupon calculés pour la date 07/03/2014

Après une description de la méthode directe de reconstitution de la courbe de taux, nous passons au modèle de Nelson-Siegel et ses caractéristiques qui font de lui l'un des modèles les plus utilisés en finance

I.2 Méthode indirecte de modélisation de la courbe de taux : Nelson Siegel

I.2.1 Définition d'une méthode indirecte

Pour un panier d'obligations à coupons, la méthode indirecte consiste à minimiser l'écart au carré entre les prix de marché et les prix reconstitués à l'aide des taux zéro-coupon ou de la fonction d'actualisation.

Supposons un panier de n titres. Nous adoptons les notations suivantes à la date t :

- P_t^j : Prix de marché du $j^{\text{ème}}$ titre
- \hat{P}_t^j : Prix théorique du $j^{\text{ème}}$ titre
- F_s^j : Flux futur du $j^{\text{ème}}$ titre tombant à la date s ($s < t$)

Il s'agit de trouver le vecteur des paramètres β tel que :

$$\min_{\beta} \sum_{j=1}^n (P_t^j - \hat{P}_t^j)^2$$

Il existe deux grandes classes de modèles :

- Les modèles type Nelson Siegel sont fondés sur une modélisation du taux zéro coupon, le prix théorique s'écrit :

$$\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j B(t, s) = \sum_s F_s^j e^{-(s-t).R(s-t;\beta)}$$

R est la fonctionnelle des taux zéro-coupon. Le prix de l'obligation est une fonction non linéaire des paramètres d'estimation. La résolution d'un tel problème s'effectue à l'aide d'un algorithme de Newton modifié.

- Les modèles à Splines sont fondés sur une modélisation de la fonction d'actualisation

$$\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j B(t, s) = \sum_s F_s^j f(s - t; \beta)$$

f est une fonction linéaire des paramètres d'estimation. Par conséquent, le prix de l'obligation est également une fonction linéaire des paramètres d'estimation. La résolution d'un tel problème est donc matricielle.

I.2.2 Modèle de Nelson Siegel

Le modèle de Nelson Siegel (NS) est le modèle qu'on utilise le plus souvent en finance pour lisser la courbe des taux.

La fonction de Nelson Siegel a une forme souple et un nombre limité de paramètres à estimer, chose qui lui permet de s'adapter aux différentes configurations du marché.

La courbe des taux à terme résultante de l'approximation de Nelson Siegel est la solution d'une équation différentielle de second ordre qui prend la forme suivante :

$$f(0, T) = \mu_1 + \mu_2 e^{-\frac{T}{\tau}} + \mu_3 * \frac{T}{\tau} * e^{-\frac{T}{\tau}}$$

A partir de l'intégration de ce taux à terme, nous pouvons trouver le taux zéro-coupon de maturité T .

$$R(0, T) = \frac{1}{T} * \int_0^T f(0, s) ds$$

Ainsi, nous déduisons la fonctionnelle paramétrique du taux proposé par ce modèle :

$$R(0, T) = \beta_0 + \beta_1 * \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{\frac{T}{\tau}} + \beta_2 * \left(\frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)$$

Avec :

- $R(0, T)$: Taux zéro-coupon de maturité T
- β_0 : Facteur de niveau, il s'agit du taux long
- β_1 : Facteur de rotation, il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long
- β_2 : Facteur de courbure
- τ : Paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps

Chaque paramètre du modèle de Nelson Siegel influence particulièrement une partie de la courbe de taux.

- **Le facteur de niveau:** β_0 agit sur la partie long terme de la courbe, permet de déterminer son niveau. C'est la limite de la fonctionnelle lorsque la maturité tend vers l'infini, en d'autres termes, c'est son asymptote. Economiquement, β_0 est le taux long, donc il est toujours positif.
- **Le facteur rotation:** β_1 agit sur la partie court terme de la courbe, c'est le facteur qui modélise la pente ($-\beta_1$); s'il est positif, il entraîne une pente descendante, et s'il est négatif, il entraîne une pente ascendante.
- **Facteur de courbure :** β_2 a un effet sur la courbure que prend la courbe des taux à moyen terme. La composante associée à β_2 : $\left[\frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]$ décroît vers 0 quand la maturité augmente mais varie beaucoup pour des maturités moyennes.
- **Le paramètre d'échelle :** permet de mesurer la vitesse de décroissance vers 0 des composantes de moyen et court terme. τ détermine la position exacte du maximum et du minimum de la courbure. Puisqu'il est homogène à un temps, il doit être positif.

Ainsi, les contraintes de Nelson Siegel sont :

$$\begin{cases} \beta_0 > 0 \\ \beta_1 + \beta_2 > 0 \\ \tau > 0 \end{cases}$$

I.2.3 Application du modèle de Nelson Siegel :

Le solveur Excel permet de trouver les paramètres qui minimisent la somme des écarts au carré entre les prix de marché et les prix calculés. Mais, il est très sensible au choix des valeurs initiales données à ces paramètres qui affecte la justesse des résultats.

β_0 : Prend comme valeur initiale le taux long qui correspond à la maturité 10 ans

β_1 : Prend comme valeur initiale la différence entre le taux cours (correspondant à la maturité 13 semaines) et le taux long correspondant à 10 ans.

β_2 : Prend comme valeur initiale 0, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de courbure

τ : Prend comme valeur initiale 5 ans. Généralement si la courbe de taux présente une courbure, elle se positionne à la limite du moyen et long terme.

Nelson Siegel			Date: 07/03/2014						
	valeurs optimales	valeurs initiales	maturité a	Rzc calculé	Rzc réel	prix calculé	prix réel	prix calculé- prix réel	(prix calculé- prix réel) ²
β_0	4,129%	5,885%	0,25	3,371%	3,250%	0,991608172	0,99190792	-0,000299747	8,98482E-08
β_1	-0,801%	-2,403%	0,5	3,411%	3,482%	0,983087574	0,98274061	0,000346962	1,20382E-07
β_2	0,009500392	0	1	3,486%	3,51%	0,965736239	0,96554479	0,000191445	3,66511E-08
τ	4,999973714	5	2	3,615%	3,531%	0,930248575	0,93182442	-0,001575849	2,4833E-06
			3	3,720%	3,590%	0,894406861	0,89788634	-0,003479483	1,21068E-05
			4	3,805%	3,650%	0,858822752	0,86414933	-0,005326578	2,83724E-05
			5	3,874%	3,710%	0,823913429	0,83068503	-0,006771601	4,58546E-05
			6	3,930%	3,770%	0,789952402	0,7975614	-0,007608994	5,78968E-05
			7	3,975%	4,026%	0,757108876	0,75440802	0,002700858	7,29464E-06
			8	4,012%	4,287%	0,725477603	0,7096657	0,0158119	0,000250016
			9	4,041%	4,554%	0,695101141	0,66375066	0,031350476	0,000982852
			10	4,065%	4,715%	0,665986216	0,62408164	0,041904572	0,001755993
								somme de (prix calculé- prix réel) ²	0,003143117

Figure 6 : Calcul des paramètres de la fonctionnelle de Nelson Siegel

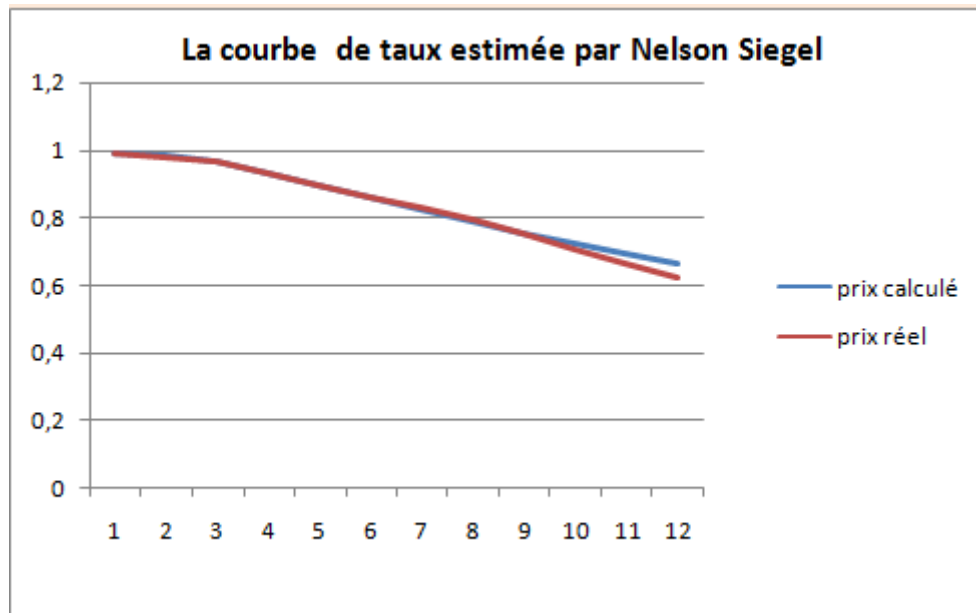


Figure 7 : Estimation de la courbe de taux par Nelson Siegel

La courbe de taux estimée à partir de la méthode indirecte Nelson Siegel, est très proche de la courbe réelle, donc cette méthode modélise bien la courbe de taux.

Malgré l'importance de ce modèle en finance, il ne permet pas de reconstituer toutes les formes des courbes de taux existantes sur le marché et il manque de souplesse d'ajustement pour les grandes maturités de sorte que les obligations de telles maturités sont mal évaluées par ce modèle.

II. Modèles stochastiques:

II.1 structure par terme :

II.1.1 Définition du modèle à une seule variable d'état :

Les modèles à une seule variable d'état ont pour principe que le taux d'intérêt à court terme, qui est un taux sans risque, est l'unique variable qui détermine la dynamique des obligations zéro coupon, et ainsi, détermine celle de la structure des taux.

Il existe plusieurs modèles à une seule variable d'état, les plus courants sont le modèle de Vasicek (1977) et le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985). Chacun de ces modèles fournit une forme spécifique de l'équation de structure par terme.

- Modèle de Vasicek : $dr_t = \beta(\alpha - r)dt + \sigma dw_t$
- Modèle de Cox Ingersoll & Ross : $dr_t = \beta(\alpha - r)dt + \sigma\sqrt{r_t}dw_t$

La modélisation de la courbe de structure par terme a pour principe d'admettre que la seule source de risque qui régit le prix des obligations est déterminée par le taux à court terme.

II.1.2 Structure des prix d'une obligation :

Le prix d'une obligation $P(t, T)$, d'échéance T en t , est déterminé par l'évolution du taux court entre t et T .

$$P(t, T, r) = P(t, T)$$

D'après la relation ci-dessus, on considère que le prix de l'obligation dépend seulement du taux court, ce dernier suit un processus d'Itô, ce qui nous permet d'écrire le lemme d'Itô comme suivant :

$$dP(t, T, r) = P(t, T, r)\theta(t, T, r)dt + P(t, T, r)\varphi(t, T, r)dW_t \quad (1)$$

D'où

$$\frac{dP(t, T, r)}{P(t, T, r)} = \theta(t, T, r)dt + \varphi(t, T, r)dW_t$$

Tel que :

- $\theta(t, T, r)$: L'espérance mathématique du rendement instantané de l'obligation
- $\varphi(t, T, r)$: La volatilité non anticipée, engendrée par les fluctuations imprévues du taux court.

$$\text{Or } dP(t, T, r) = \left[P_t + P_r(\alpha - r)\beta + \frac{1}{2}P_{rr} \sigma^2 \right] dt + P_r \sigma dW_t \quad (2)$$

P_r et P_{rr} sont respectivement les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de P par rapport au taux court $r(t)$.

Des deux équations (1) et (2), on peut déduire :

$$\begin{cases} \theta(t, T, r) = \frac{1}{P} \left[P_t + P_r(\alpha - r)\beta + \frac{1}{2}P_{rr} \sigma^2 \right] \\ \varphi(t, T, r) = -\frac{1}{P} [P_r \sigma] \end{cases}$$

Le signe (-) de $\varphi(t, T, r)$ est tiré du fait que P_r est négative, car en économie les prix décroissent en fonction du taux.

Donc l'équation (1) devient :

$$dP(t, T, r) = P(t, T, r)\theta(t, T, r)dt - P(t, T, r)\varphi(t, T, r)dW_t$$

Après avoir établi la relation entre le prix et le taux court, afin d'obtenir l'équation de structure par terme, il est essentiel que les rendements respectent une condition d'arbitrage.

II.1.3 Condition d'arbitrage

Soit un portefeuille de deux obligations zéro coupon sans risque à rendement $r(t)$ sur le prochain instant, les deux obligation sont respectivement d'échéance T_1 et T_2 , et sont détenues dans des proportions respectives : ω_1 et $\omega_2 = 1 - \omega_1$.

La valeur $W(t)$ du portefeuille s'écrit de la façon suivante :

$$W = \omega_1 P(t, T_1, r) + \omega_2 P(t, T_2, r)$$

D'où

$$\frac{dW}{W} = \omega_1 \frac{dP(t, T_1, r)}{P(t, T_1, r)} + \omega_2 \frac{dP(t, T_2, r)}{P(t, T_2, r)}$$

En remplaçant dP par son expression dans l'équation (1)

$$\frac{dW}{W} = [\omega_1 \theta(t, T_1, r) + \omega_2 \theta(t, T_2, r)]dt - [\omega_1 \varphi(t, T_1, r) + \omega_2 \varphi(t, T_2, r)]dw(t)$$

Le deuxième terme de l'équation est la source de l'incertitude du taux court. Donc, nous choisirons ω_1 et ω_2 de telle sorte que le deuxième terme s'annule.

$$\omega_1 \varphi(t, T_1, r) + \omega_2 \varphi(t, T_2, r) = 0 \quad (3)$$

Du fait que le rendement du portefeuille est égal au taux d'un actif sans risque, nous aurons :

$$\omega_1 \theta(t, T_1, r) + \omega_2 \theta(t, T_2, r) = r(t)$$

Et puisque nous avons $[\omega_1 + \omega_2 = 1]$, nous aurons :

$$\omega_1 [\theta(t, T_1, r) - r(t)] + \omega_2 [\theta(t, T_2, r) - r(t)] = 0 \quad (4)$$

De l'équation (3) et (4), nous formons un système de deux équations dont les inconnues sont ω_1 et ω_2 , et que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \theta(t, T_1, r) - r(t) & \theta(t, T_2, r) - r(t) \\ \varphi(t, T_1, r) & \varphi(t, T_2, r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que ce système ait une solution, il faut que son déterminant soit nul, donc nous devons avoir :

$$\frac{\theta(t, T_1, r) - r(t)}{\varphi(t, T_1, r)} = \frac{\theta(t, T_2, r) - r(t)}{\varphi(t, T_2, r)}$$

D'où, nous pouvons déduire que $\forall T$ maturité, nous avons :

$$\frac{\theta(t, T, r) - r(t)}{\varphi(t, T, r)} = \lambda_T(r, t)$$

Ainsi, nous pouvons dire que dans le cas de l'absence de l'opportunité d'arbitrage sur le marché obligataire, nous avons :

$$\theta(t, T, r) - r(t) = \lambda_T(r, t) \varphi(t, T, r) \quad \forall t, \forall T$$

Cette égalité évoque la contrainte qui désigne l'existence d'une structure des taux d'intérêt, elle établit également une relation entre le rendement espéré et la volatilité d'une obligation.

$\lambda_T(r, t)$ est définie comme la prime unitaire offerte, à l'instant t , pour le risque généré par les fluctuations imprévues du taux court .

II.1.4 Equation de la structure par terme

L'équation de la structure par terme s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(r, t) P_{rr} + (\theta - \lambda_T) P_r - r(t) P + P_r = 0$$

La résolution de l'équation différentielle, sous la condition $[P(T, T, r) = 1]$, fournit la structure des prix.

La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$P(r, T, t) = E_{r,t} = \left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda_T^2(r, s)ds - \int_t^T \lambda_T(r, s)dW(s)\right) \right]$$

Donc, la forme exacte du prix est assujettie à une précision des variables $\theta(r, t)$, $\sigma(r, t)$ et $\lambda_T(r, s)$, qui sont totalement exogènes au modèle.

Afin d'avoir une forme explicite de la structure par terme des taux, nous allons traiter deux parmi les modèles les plus utilisés pour la modélisation de la courbe de taux. Il s'agit du modèle de Vasicek et celui de Cox, Ingersoll et Ross.

II.2 Modèle de Vasicek :

Le modèle de Vasicek (1977), est parmi les premiers modèles stochastiques utilisés pour modéliser la courbe des taux, ce modèle suppose que le taux court suive un processus d'Ornstein - Uhlenbeck dont l'évolution stochastique obéit à l'équation différentielle suivante :

$$dr(t) = \beta[\alpha - r(t)dt] + \sigma dw(t) \quad (5)$$

Où $r(t)$ est le taux court à l'instant t , et les paramètres β , α et σ sont strictement positifs, tel que :

α : La moyenne sur long terme du taux court

β : La vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme

σ : La volatilité

$w(t)$: Un mouvement brownien standard

Ce processus admet la solution suivante :

$$r(t) = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dw(s) \quad (6)$$

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêts. Nous pouvons distinguer deux cas :

- Cas1 : on constate que si $r(t) < \alpha$, le taux court augmente, se rapprochant ainsi du taux moyen d'autant plus intensément que le paramètre β (vitesse de retour à la moyenne) est grand.

- Cas 2 : à l'inverse si $r(t) > \alpha$, le taux court diminue, se rapprochant du taux moyen d'autant plus intensément que le paramètre β (vitesse de retour à la moyenne) est grand.

L'espérance du taux court est :

$$E[r(t)] = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t})$$

Et $[\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)] = \alpha]$ représente le phénomène de retour à la moyenne.

Sa variance est:

$$\text{var}[r(t)] = \text{var} \left[\sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dw(s) \right] = \sigma^2 e^{-2\beta t} E \left(\int_0^t e^{\beta s} dw(s) \right)^2$$

Par l'isométrie d'Itô, nous pouvons montrer qu'on peut écrire cette variance de la façon suivante :

$$\text{var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\beta}$$

En introduisant l'expression des paramètres du processus dans l'équation de structure par terme, on obtient :

$$\frac{\sigma^2}{2} P_{rr} + \{\alpha(\beta - r) - \lambda\} P_r - rP + P_t = 0$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$P(t, T) = \exp(A(t, T) * r(t) + B(t, T)) \quad (7)$$

Avec:

- $A(t, T) = \frac{1}{\beta} (e^{-\beta(T-t)} - 1)$
- $B(t, T) = \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{-2\beta(T-t)}) + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta(T-t)}) - \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) (T - t)$

Sachant que λ est la prime de risque, celle-ci permet le calcul de la prime de terme de cette façon :

$$\psi(t, T, r) = \frac{\lambda}{\beta} (e^{-\beta(T-t)} - 1)$$

Ainsi, le rendement à l'instant t d'un titre de maturité T et de prix $P(t, T)$, s'écrit de la façon suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T))$$

En remplaçant $P(t, T)$, nous obtenons :

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \left[\frac{1}{\beta} (e^{-\beta(T-t)} - 1) r(t) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{-2\beta(T-t)}) + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta(T-t)}) - \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) (T-t) \right]$$

II.3 Application du modèle de Vasicek

Pour pouvoir appliquer ce modèle et faire les estimations des paramètres, nous devons nécessairement passer par la discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci nous permettra, par la suite, de modéliser la série du taux interbancaire pondéré TMP qui s'étend de 01/01/2008 au 07/03/2014

II.3.1 Discrétisation du modèle de Vasicek

Nous savons, d'après ce qui précède, que le taux instantané à court terme du modèle de Vasicek suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = \beta[\alpha - r(t)dt] + \sigma dw(t)$$

Pour estimer les paramètres α , β et σ qui sont positifs, nous appliquons la discrétisation exacte définie sous la forme suivante :

$$r_t - r_{t-1} = \alpha(1 - e^{-\beta}) + (e^{-\beta} - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec :

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\beta} * (1 - e^{-2\beta})\right)$$

Donc :

$$r_t = \alpha(1 - e^{-\beta}) + e^{-\beta} * r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Autrement
$$r_t = b + ar_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

Avec :

- $a = e^{-\beta}$
- $b = \alpha(1 - e^{-\beta})$

Cette équation montre que les taux courts suivent un processus autorégressif d'ordre 1. L'estimation des paramètres de l'équation (8) sera faite à partir des données discrètes du taux court, à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires.

Une fois ces paramètres estimés, nous pouvons calculer les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, en utilisant les formules suivantes :

$$\hat{\beta} = -\ln(\hat{a}) \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{a}} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon * \sqrt{\frac{-\ln\hat{a}^2}{1-\hat{a}^2}}$$

Notons que \hat{a} , \hat{b} et $\hat{\sigma}_\varepsilon$ sont les paramètres estimés, avec $\hat{\sigma}_\varepsilon$ est l'écart type estimé de ε_t

II.3.2 Analyse des données

Nous nous baserons dans notre étude sur des données journalières du Taux Moyen Pondéré (TMP), qui s'étalent du 01/01/2008 au 07/03/2014, soit 2258 observations.

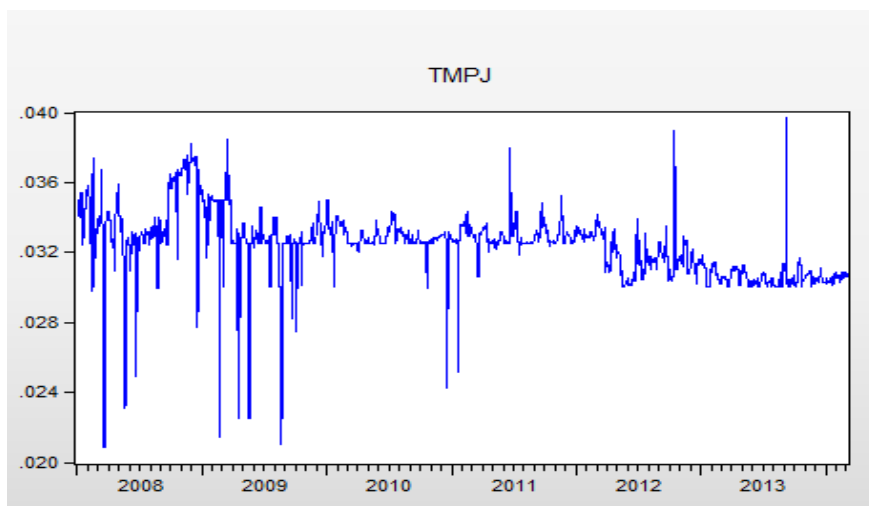


Figure 8 : Evolution journalière du TMP entre 2008 et 2014

A partir de l'évolution du TMP journalier, nous remarquons que la série est stationnaire, mais, nous ne pouvons le confirmer qu'en faisant appel aux tests de Dickey-Fuller Augmentés à l'aide du logiciel Eviews.

II.3.2.1 Statistique descriptive de la série TMP journalier :

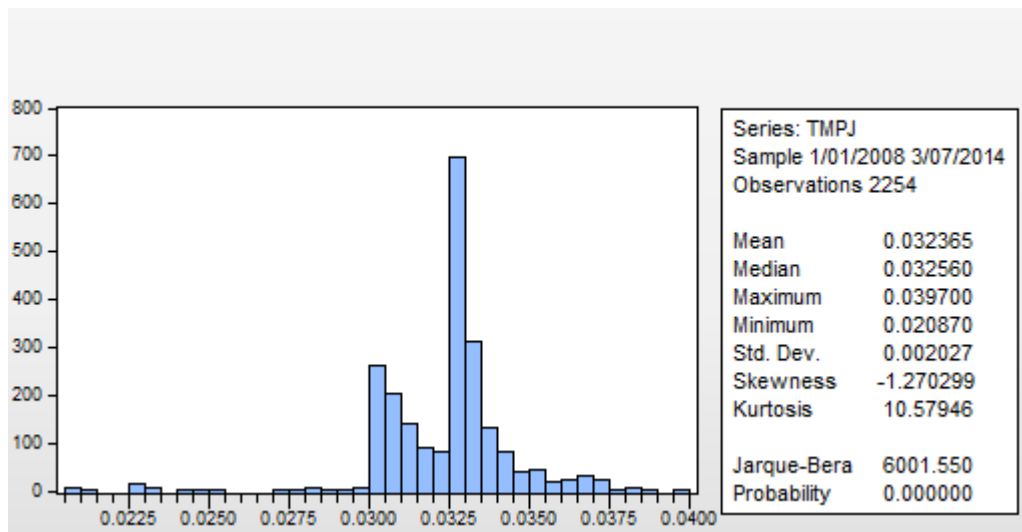


Figure 9 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier

Nous constatons que le TMP est très volatile. Il est borné, d'après les statistiques, entre une valeur minimale de 2.087% et une valeur maximale de 3.97%, avec un écart-type de 0,002027

La statistique de Skewness est le coefficient d'asymétrie autour de la moyenne:

- Skewness > 0 : signifie que la distribution est étalée à droite
- Skewness < 0 : signifie que la distribution est étalée à gauche
- Skewness = 0 : signifie que la distribution est symétrique

Nous constatons, selon la figure ci-dessus, que la valeur de skewness est de -1.270299, ce qui signifie que la distribution est étalée plus à gauche qu'à droite.

La statistique de Kurtosis mesure l'aplatissement de la distribution, de sorte que si kurtosis est égal à 3, la distribution est normale.

Dans notre cas, la valeur de kurtosis est égal à 10.57, donc la série n'est pas normale.

Cependant, il faut s'assurer de cette non normalité par le test Jarque-Bera, qui permet d'évaluer l'hypothèse $H_0 : skewness = 0$ et $kurtosis - 3 = 0$

La statistique du test est

$$J.B = \frac{n - k}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right) \sim \chi^2_{2; 0.05}$$

Avec:

- n = Nombre d'observations
- k = Nombre de variables explicatives si les données proviennent des résidus d'une régression linéaire. Sinon, $k = 0$.
- S = Skewness
- K = Kurtosis

Afin de tester la normalité de notre série, nous allons comparer la valeur de Jarque-Bera à la valeur de la table de la loi khi-deux. Puisque $J.B = 6001,55 > (\chi_{2;0,05}^2 = 5,99)$, on rejette l'hypothèse H_0 .

II.3.2.2 Test de racine unitaire (Dickey-Fuller Augmenté) :

Afin d'identifier les caractéristiques d'une série chronologique, il nous est primordial d'étudier sa stationnarité.

Nous optons pour le test de Dickey-Fuller (test de racine unitaire), qui a pour objectif de détecter l'existence ou non d'une tendance dans une série temporelle.

Ce test se base sur 3 modèles :

1. $r_t = \varphi r_{t-1} + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d'ordre 1 »
2. $r_t = \varphi r_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d'ordre 1 avec constante »
3. $r_t = \varphi r_{t-1} + bt + \alpha + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d'ordre 1 avec constante et tendance »

Nous commencerons par tester le 3^{ème} modèle avec tendance et constante. Pour cela, nous aurons besoin des valeurs tabulées correspondantes au test (annexe III).

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(TMPJ)				
Method: Least Squares				
Date: 05/12/14 Time: 22:39				
Sample (adjusted): 1/02/2008 3/07/2014				
Included observations: 2250 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMPJ(-1)	-0.184465	0.012204	-15.11495	0.0000
C	0.006251	0.000416	15.02047	0.0000
@TREND(1/01/2008)	-2.50E-07	3.79E-08	-6.596722	0.0000

Figure 10 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec tendance et constante)

Nous testons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance c'est-à-dire $H_0: b = 0$.

La t-statistic correspondante au trend ($t_{\hat{b}} = -6.596722$) est inférieure à la valeur tabulée critique qui est de 2.78, au seuil de 5% [voir annexe III]. Donc, nous acceptons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance.

Nous passons au modèle 2 avec constante, qui a pour hypothèse $H_0: \alpha = 0$. Nous obtenons la sortie suivante :

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(TMPJ)				
Method: Least Squares				
Date: 05/12/14 Time: 22:36				
Sample (adjusted): 1/02/2008 3/07/2014				
Included observations: 2250 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMPJ(-1)	-0.149207	0.011075	-13.47267	0.0000
C	0.004827	0.000359	13.43988	0.0000
R-squared	0.074712	Mean dependent var		-2.30E-06
Adjusted R-squared	0.074300	S.D. dependent var		0.001107
S.E. of regression	0.001065	Akaike info criterion		-10.85003
Sum squared resid	0.002552	Schwarz criterion		-10.84495
Log likelihood	12208.28	Hannan-Quinn criter.		-10.84817
F-statistic	181.5128	Durbin-Watson stat		2.104037
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 11 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec constante)

Comme c'est affiché dans la figure ci-dessus, la statistique de student correspondante à la constante ($t_{\hat{c}} = 13.43988$) est supérieure à la valeur tabulée critique qui est de 2.52, au seuil de 5%, [voir annexe III]. Donc, nous rejetons l'hypothèse H_0 .

Test de $\varphi = 1$

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-13.47267	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.433060	
5% level	-2.862623	
10% level	-2.567392	

Figure 12 : Résultat du test de DFA concernant la stationnarité

Nous remarquons que la statistique du test de Dickey-Fuller Augmenté (-13.47267) est inférieure à la valeur critique du test (-2,861960), au seuil de 5%. D'où la stationnarité de notre série.

II.3.2.3 Test d'autocorrélation :

Après avoir confirmé la stationnarité de notre série, nous essayerons d'identifier son modèle.

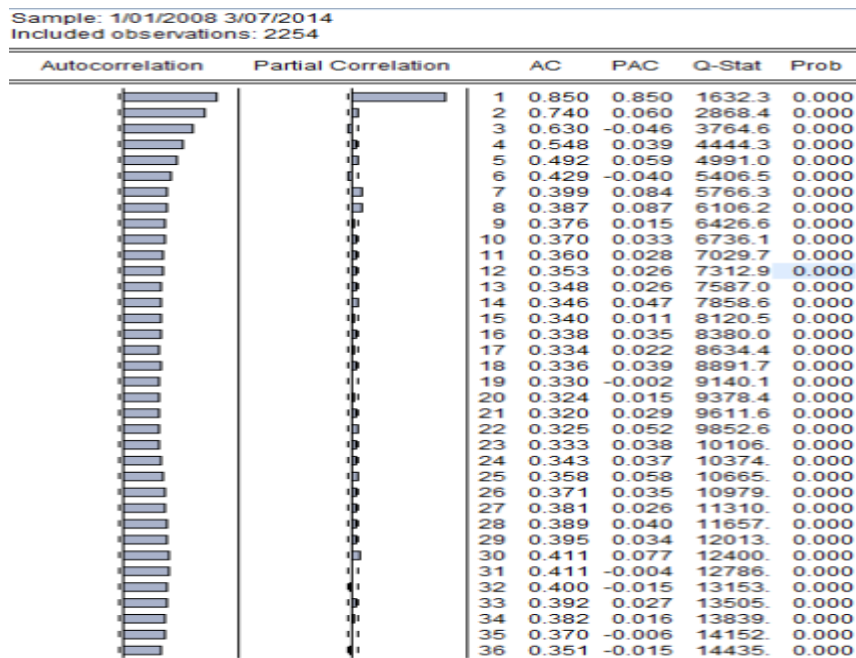


Figure 13 : Test d'autocorrélation

Soit PAC_i , le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre i , nous testons l'hypothèse $H_0 : PAC_i = 0, i = 1 \dots 36$. L'intervalle de confiance qui correspond à ce test, au niveau de confiance 95% est :

$$\left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{n}} \right] = \left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{2254}} \right] = [-0.04128 ; 0.04128]$$

Nous remarquons qu'à partir du second ordre presque tous les PAC rentrent dans l'intervalle de confiance, d'où le non rejet de H_0 , en plus les auto-corrélations décroissent exponentiellement. Ce qui mènent à dire que notre processus se rapproche d'un processus autorégressif d'ordre 1.

Puisque la série est stationnaire et qu'elle suit un processus AR(1), nous pouvons faire l'estimation de ses paramètres.

II.3.2.4 Estimation des paramètres du modèle

L'estimation du modèle suivant $r_t = b + ar_{t-1} + \varepsilon_t$, effectuée par la méthode des moindres carrés ordinaires, permet d'obtenir les résultats ci-dessous

Sample (adjusted): 1/02/2008 3/07/2014 Included observations: 2250 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.004827	0.000359	13.43988	0.0000
TMPJ(-1)	0.850793	0.011075	76.82254	0.0000
R-squared	0.724162	Mean dependent var		0.032363
Adjusted R-squared	0.724039	S.D. dependent var		0.002028
S.E. of regression	0.001065	Akaike info criterion		-10.85003
Sum squared resid	0.002552	Schwarz criterion		-10.84495
Log likelihood	12208.28	Hannan-Quinn criter.		-10.84817
F-statistic	5901.702	Durbin-Watson stat		2.104037
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 14 : Estimation des paramètres du modèle

En se basant sur les sorties d'Eviews, les valeurs des paramètres a et b sont :

$$b = 0,004827 \text{ et } a = 0.850793 \text{ et } \hat{\sigma}_\varepsilon = 0,002027$$

D'où, nous déduisons les valeurs estimés de α et β (voir la page 50)

$$\hat{\alpha} = 0.03235103 \text{ et } \hat{\beta} = 0,16158642 \text{ et } \hat{\sigma} = 0,002192793$$

La statistique de Durbin-Watson est proche de 2, ce qui montre qu'il n'y a pas d'autocorrélation des résidus.

Nous ne pouvons faire les tests de significativité des estimateurs qu'après avoir testé la condition d'homoscédasticité des résidus.

II.3.2.5 Test d'homoscédasticité des résidus :

Nous testons l'hypothèse H_0 : L'homoscédasticité des résidus. Cette hypothèse suppose que la variance du terme d'erreur est constante pour chaque observation et ne varie pas en fonction des observations $V(\varepsilon_t) = cte \quad \forall t$

Heteroskedasticity Test: White			
F-statistic	171.0627	Prob. F(2,2247)	0.0000
Obs*R-squared	297.3136	Prob. Chi-Square(2)	0.0000
Scaled explained SS	7113.879	Prob. Chi-Square(2)	0.0000

Figure 15 : Résultat du test de détection d'hétéroscédasticité

Puisque la p-value du test est inférieure au seuil qui est de 5%, nous rejetons l'hypothèse H_0 . D'où l'existence de l'hétéroscédasticité.

En cas d'hétéroscédasticité des résidus, les estimateurs restent sans biais et convergents, mais, la matrice de variance-covariance se biaise, donc il est impossible de faire les tests post-estimation usuels (t-statistic, F-statistic...).

Ainsi, pour pouvoir faire les tests de significativité des estimateurs, nous allons utiliser l'approche de White, qui permet de corriger la matrice de variance-covariance des paramètres estimés par la « matrice de White ».

II.3.2.6 MCO avec correction par la matrice de White :

Après avoir corrigé la matrice de variance-covariance par la matrice de White, nous pouvons faire, les tests de significativité des paramètres du modèle.

Included observations: 2250 after adjustments				
White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.004827	0.001065	4.530381	0.0000
TMPJ(-1)	0.850793	0.032573	26.11937	0.0000
R-squared	0.724162	Mean dependent var		0.032363
Adjusted R-squared	0.724039	S.D. dependent var		0.002028
S.E. of regression	0.001065	Akaike info criterion		-10.85003
Sum squared resid	0.002552	Schwarz criterion		-10.84495
Log likelihood	12208.28	Hannan-Quinn criter.		-10.84817
F-statistic	5901.702	Durbin-Watson stat		2.104037
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 16 : Estimation du modèle après correction de la matrice variance-covariance

Nous remarquons que les p-value associées à la statistique de Student sont toutes nulles inférieures au seuil de 5%, donc nous rejetons les deux hypothèses $H_0 : a = 0$ et $H_0 : b = 0$. On peut confirmer, alors, que les coefficients a et b sont significatifs. En outre, pour l'hypothèse $H_0 : a = b = 0$, la p-value de la statistique de Fisher est nulle inférieure au seuil de 5%, donc nous rejetons l'hypothèse de la nullité des coefficients simultanément. Ainsi, nous pouvons confirmer la significativité de notre modèle.

II.3.2.7 Test de normalité :

Nous testons H_0 : l'hypothèse de la normalité des résidus

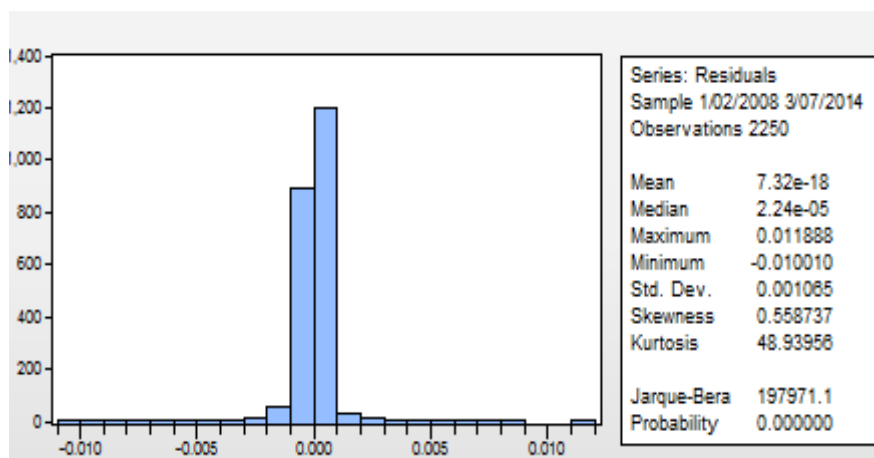


Figure 17 : Test de la normalité des résidus

Puisque la p-value du test Jarque-Bera est inférieure au seuil de 5%, nous déduisons qu'il n'y a pas de normalité des résidus.

II.3.2.8 Test du bruit blanc :

Included observations: 2250						
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.051	-0.051	5.8056	0.016
		2	0.058	0.055	13.326	0.001
		3	-0.038	-0.032	16.502	0.001
		4	-0.032	-0.039	18.835	0.001
		5	0.059	0.061	26.820	0.000
		6	-0.068	-0.061	37.388	0.000
		7	-0.025	-0.041	38.828	0.000
		8	0.030	0.039	40.871	0.000
		9	0.015	0.021	41.408	0.000
		10	0.039	0.027	44.900	0.000
		11	0.019	0.029	45.689	0.000
		12	0.026	0.028	47.226	0.000
		13	0.016	0.011	47.806	0.000
		14	0.042	0.047	51.876	0.000
		15	0.013	0.020	52.268	0.000
		16	0.034	0.036	54.947	0.000
		17	0.010	0.018	55.175	0.000
		18	0.051	0.055	61.146	0.000
		19	0.029	0.033	63.063	0.000
		20	0.015	0.017	63.552	0.000
		21	-0.001	0.000	63.557	0.000
		22	0.017	0.020	64.195	0.000
		23	0.024	0.023	65.511	0.000
		24	0.009	0.008	65.689	0.000
		25	0.035	0.036	68.422	0.000
		26	0.041	0.043	72.251	0.000
		27	0.032	0.026	74.564	0.000
		28	0.042	0.035	78.508	0.000
		29	-0.005	-0.001	78.554	0.000
		30	0.086	0.080	95.577	0.000
		31	0.064	0.075	104.88	0.000
		32	0.026	0.025	106.47	0.000
		33	0.035	0.035	109.26	0.000
		34	0.037	0.052	112.42	0.000
		35	0.054	0.051	119.07	0.000
		36	-0.003	-0.003	119.09	0.000

Figure 18 : Corrélogramme des résidus

Nous remarquons que toutes les probabilités sont inférieures au seuil de 5%, donc les résidus de notre série ne sont pas des bruits blancs.

L'estimation des paramètres du modèle de Vasicek, nous permet d'avoir toutes les données pour calculer les rendements d'une obligation zéro coupon, sauf le paramètre λ . Celui-ci représente la prime de risque et mesure la variation appliquée par les investisseurs pour compenser le risque auquel ils sont exposés en détenant cette obligation.

Nous ne pouvons observer λ directement sur le marché, mais nous pouvons l'évaluer comme la valeur qui réduit au minimum le carré des erreurs entre les rendements réels du marché et les rendements théoriques.

II.3.2.9 Estimation de la prime de risque :

Pour pouvoir construire la courbe de taux zéro coupon par le modèle de Vasicek, nous devons estimer la valeur de λ , qui est obtenue par la minimisation des écarts au carré entre les rendements théoriques et les rendements du marché à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

Nous nous basons sur la courbe de taux correspondante au 07/03/2014, nous initialisons λ par zéro, et puis nous utilisons le solveur Excel pour calculer sa valeur optimale qui minimise les écarts pour cette date. Nous calculons également, à partir de λ , la prime de terme $\psi(t, T, r)$ qui varie en fonction des maturités.

Modèle de Vasicek		entrer une date: 07/03/2014								
paramètres	valeurs	maturité a	A(0,T)	B(0,T)	A(0,T)*r(0)	Rendement calculé	Rendement réel	écart	ecart^2	prime de terme
a	0,8508	0,25	-0,24502	-0,0004	-0,0074779	3,154%	3,250%	0,096%	0,000%	0,001761514
b	0,0048	0,5	-0,48033	-0,0016	-0,0146598	3,243%	3,482%	0,239%	0,001%	0,003453288
ecart type	0,002027	1	-0,92339	-0,0060	-0,0281818	3,416%	3,531%	0,115%	0,000%	0,006638546
alpha	0,03235103	2	-1,709	-0,0225	-0,0521587	3,735%	3,770%	0,035%	0,000%	0,012286575
beta	0,16158642	3	-2,37739	-0,0481	-0,0725581	4,022%	4,026%	0,004%	0,000%	0,017091879
sigma	0,00219	4	-2,94606	-0,0813	-0,0899137	4,281%	4,287%	0,006%	0,000%	0,021180197
tmp	0,03052	5	-3,42987	-0,1211	-0,1046798	4,515%	4,554%	0,039%	0,000%	0,02465851
lamda	-0,0071893	6	-3,8415	-0,1663	-0,1172426	4,726%	4,715%	-0,011%	0,000%	0,027617834
ecart^2	0,001%	7	-4,19171	-0,2163	-0,127931	4,918%	4,880%	-0,037%	0,000%	0,030135606
		8	-4,48967	-0,2703	-0,1370246	5,092%	5,051%	-0,041%	0,000%	0,032277709
		9	-4,74316	-0,3277	-0,1447614	5,250%	5,227%	-0,023%	0,000%	0,034100195
		10	-4,95884	-0,3880	-0,1513438	5,394%	5,409%	0,016%	0,000%	0,035650754

Figure 19 : Estimation de la valeur de la prime de risque et calcul des rendements zéro coupon

$$\begin{aligned}
 & \bullet \mathbf{A}(t, T) = \frac{1}{\beta} (e^{-\beta(T-t)} - 1) \\
 & \bullet \mathbf{B}(t, T) = \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{-2\beta(T-t)}) + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta(T-t)}) - \\
 & \quad \left(\alpha - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) (T - t) \\
 & \bullet \mathbf{R}(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} [A(t, T) * r(t) + B(t, T)] \\
 & \bullet \mathbf{\psi}(t, T, r) = \frac{\lambda}{\beta} (e^{-\beta(T-t)} - 1)
 \end{aligned}$$

Après avoir estimé la prime de risque λ , on s'est rendu compte que la courbe obtenue par le modèle Vasicek est très proche de celle du marché, ce qui est montré par le graphe ci-dessous.

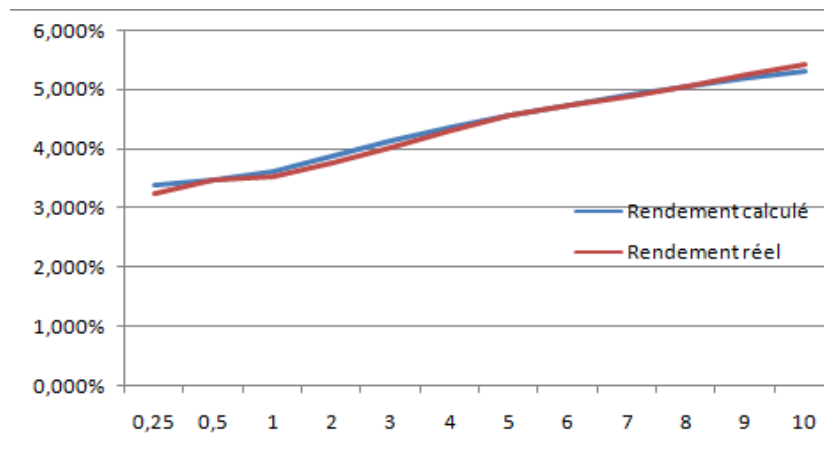


Figure 20 : Comparaison entre la courbe de Vasicek et celle du marché pour la date 07/03/2014

Donc, nous pouvons conclure que le modèle de Vasicek modélise bien la courbe de taux marocaine, et même confirmer que la courbe théorique estimée par Vasicek est celle qui reflète le mieux la réalité du marché national.

En outre, l'estimation de λ nous a permis de calculer la prime de terme présentée par le graphe suivant :

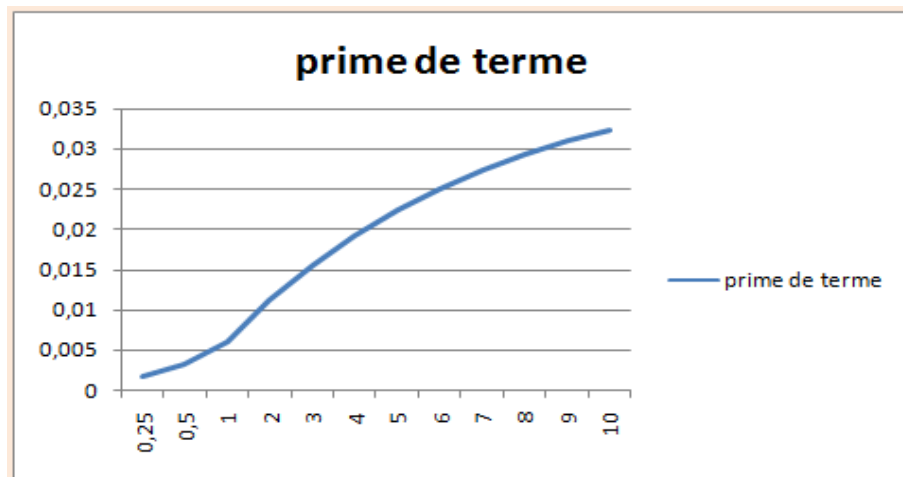


Figure 21 : Prime de terme du modèle Vasicek

Nous remarquons que la prime croît avec les maturités, ce qui paraît logique car plus le risque est important plus la prime est élevée.

Le modèle Vasicek a plusieurs avantages : Sa distribution gaussienne est facile à manipuler, la simulation est aisée puisque les formules sont explicites pour les obligations et les taux zéro-coupon.

Mais, son défaut majeur est dû à son caractère gaussien qui ne garantit pas la positivité du taux court. Donc, pour remédier à cela, nous allons utiliser le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, qui ajoute de nouvelles contraintes sur la dynamique des taux, garantissant la positivité des taux.

II.4 Modèle de Cox Ingersoll Ross :

Afin de corriger le modèle de Vasicek et d'assurer la positivité du taux d'intérêt, Cox, Ingersoll et Ross(1985) ont introduit le modèle dit en « racine carrée », dont l'équation différentielle s'écrit de la façon suivante:

$$dr_t = a (b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dw_t \quad r(0) = r_0$$

Avec r_0 , a , b et σ sont des constantes positives vérifiant $2ab > \sigma^2$, cette condition permet de s'assurer de la stricte positivité du taux court.

Ce processus « racine carré » est caractérisé par l'effet du retour à la moyenne b , avec une vitesse d'ajustement a .

Notons que lorsque $r(t)$ devient nul, la dynamique du taux court est décrite par l'équation déterministe positive ($dr_t = a * b * dt > 0$). Ceci montre que, le taux court n'est jamais négatif, et qu'une fois il atteint la valeur zéro, il redevient positif. Ainsi, nous pouvons assimiler la valeur zéro à une barrière réfléchissante du taux court.

La solution du processus « racine carré » s'écrit de la façon suivante :

$$r_t = r_0 + \int_0^t a (b - r_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s} dw_s$$

En introduisant l'expression des paramètres dans l'équation de structure par terme, nous obtenons :

$$\frac{\sigma^2}{2} P_{rr} + \{a * (b - r) - \lambda\} P_r - rP + P_t = 0$$

La solution de cette équation différentielle qui régit le prix d'une obligation zéro coupon est la suivante :

$$P(T, t, r) = A(t, T) * \exp(-B(t, T) * r)$$

Tel que :

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma \exp\left(\frac{(a+\lambda+\gamma)*(T-t)}{2}\right)}{(a + \lambda + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T - t)) - 1)}{(a + \lambda + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1) + 2\gamma}$$

Avec :

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

La relation $\left[R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T)) \right]$ permet d'aboutir à la structure par terme de taux :

$$R(T, t, r) = \frac{B(t, T) * r(t) - \ln(A(t, T))}{T - t}$$

II.5 Application du modèle de Cox, Ingersoll et Ross

Pour appliquer ce modèle et faire les estimations des paramètres, nous devons passer par la discrétisation du modèle CIR.

Puisque la discrétisation exacte n'existe pas dans le cas du CIR, on a recours à une discrétisation approximative suivant différents schémas, les plus connus sont le schéma d'Euler et le schéma de Milstein.

II. 5.1 Discrétisation du modèle de Cox, Ingersoll, et Ross :

Dans notre cas, nous avons opté pour le schéma d'Euler. Le procédé de discrétisation consiste en l'approximation du processus continu r par le processus discret \tilde{r} , d'où ce dernier s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} * \delta * \varepsilon_{t+\delta}$$

Tel que $\varepsilon_{t+\delta}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite

Si nous considérons que δ est égale à une période, on aura donc :

$$r_t = a * b + (1 - a) r_{t-1} + \sigma \sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_t$$

Les paramètres de ce modèle peuvent être estimés selon la régression suivante :

$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{a b}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1 - a) \sqrt{r_{t-1}} + \sigma \varepsilon_t$$

Posons $X_t = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}}$; $Z_t = \sqrt{r_{t-1}}$; $Y_t = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}}$

Donc l'équation de régression devient :

$$X_t = a b Y_t + (1 - a) Z_t + \sigma \varepsilon_t$$

Et soit $\alpha = ab$ et $\beta = 1 - a$, nous aurons :

$$X_t = \alpha Y_t + \beta Z_t + \sigma \varepsilon_t$$

II.5.2 Analyse des données :

Afin d'estimer les paramètres du processus « racine carrée », nous allons utiliser le taux moyen pondéré journalier sur la période allant du 24/03/2013 au 07/03/2014.

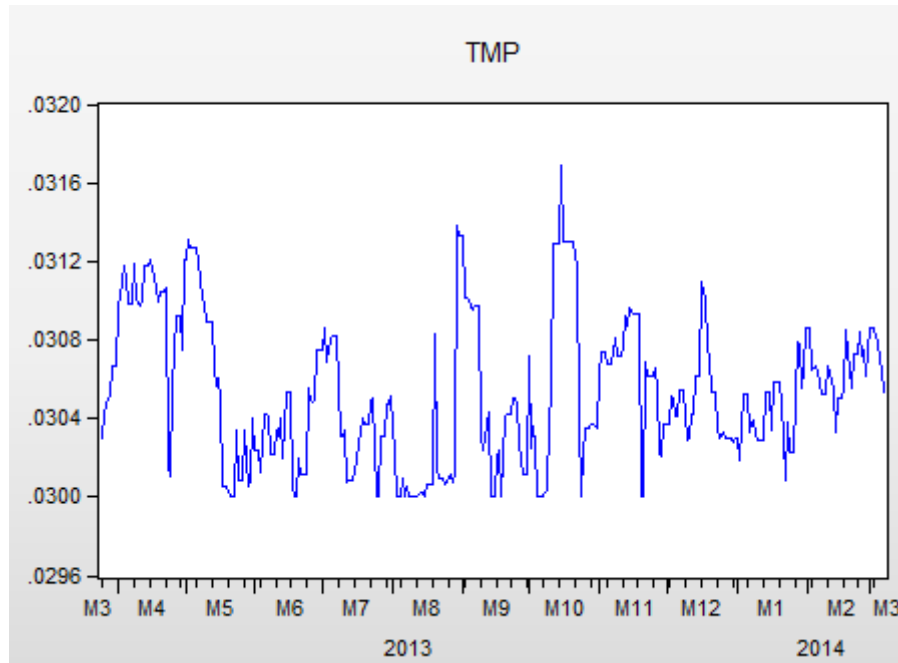


Figure 22 : Evolution du TMP journalier entre 24/03/2013 et 07/03/2014

A partir de l'évolution du TMP journalier, nous remarquons que la série est stationnaire sur toute la période. Cette stationnarité sera confirmée par le test de Dicky Fuller.

II .5.2.1 Statistique descriptive de TMP journalier

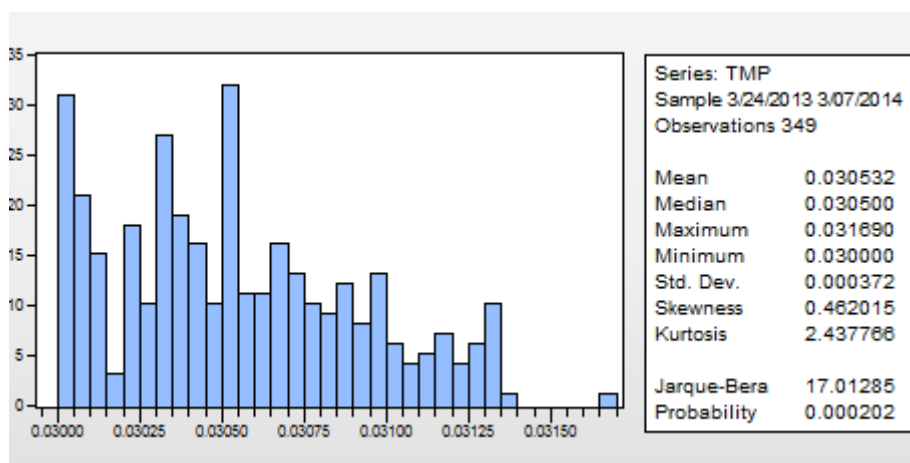


Figure 23 : Histogramme et statistique descriptive du TMP journalier

La série du TMP journalier fluctue entre une valeur minimale de 3% et une valeur maximale de 3,169%, sa moyenne est de 3,0532%, et son écart type est égal à 0,000372.

Nous constatons que la valeur de skewness est de 0.462015, ce qui signifie que la distribution est étalée plus à droite qu'à gauche.

Quant à la normalité de la série, suite à la comparaison de la valeur de la statistique de Jarque-Bera avec celle qui se trouve dans la table de la loi khi-deux, nous trouvons que $[J.B = 13.41 > \chi_{2;0,05}^2 = 5,99]$. D'où le rejet de l'hypothèse de la normalité de la série.

II.5.2.2 Test de la racine unitaire

Nous allons tester la stationnarité de la série par le test de Dickey-Fuller qui se base sur les 3 modèles que nous avons déjà vu dans le cas de Vasicek.

Nous commençons par le modèle avec tendance et constante :

Sample (adjusted): 3/25/2013 3/07/2014
Included observations: 348 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.147663	0.028083	-5.258157	0.0000
C	0.004516	0.000859	5.259790	0.0000
@TREND(3/24/2013)	-3.83E-08	1.04E-07	-0.368310	0.7129

Figure 24 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec tendance et constante)

Nous testons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance c'est à dire $H_0: b = 0$.

La t-Statistic correspondante au trend ($t_{\hat{b}} = -0.368310$) est inférieur à la valeur tabulée critique au seuil de 5%, qui est de 2.78 [voir annexe III], donc nous acceptons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance.

Nous passons au modèle 2 avec constante, qui a pour hypothèse $H_0: \alpha = 0$, nous obtenons la sortie suivante :

Sample (adjusted): 3/25/2013 3/07/2014
Included observations: 348 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.147168	0.028015	-5.253098	0.0000
C	0.004494	0.000855	5.253447	0.0000

Figure 25 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec constante)

Comme il est affiché dans la figure ci-dessus, la valeur de la statistique de student correspondante à la constante ($t_c = 5.253447$) est supérieure à la valeur tabulée critique au seuil de 5%, qui est de 2.52 [voir annexe III]. Donc, nous rejetons l'hypothèse H_0 .

Test de $\varphi = 1$

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-5.253098	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.448943	
5% level	-2.869629	
10% level	-2.571148	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Figure 26 : Résultat du test de DFA concernant la stationnarité

Nous remarquons que la statistique du test de Dickey-Fuller Augmenté qui est égale à (-5.253098), est inférieure à la valeur critique du test qui vaut (-2,869629) au seuil de 5%. D'où la stationnarité de notre série.

II.5.2.3 Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres de l'équation [$X_t = \alpha Y_t + \beta Z_t + \sigma \varepsilon_t$] par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO), permet d'obtenir les résultats suivants.

Sample: 3/24/2013 3/07/2014
Included observations: 349

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y	0.004508	0.000856	5.267090	0.0000
Z	0.852352	0.028038	30.39969	0.0000
R-squared	0.313866	Mean dependent var		0.174734
Adjusted R-squared	0.311888	S.D. dependent var		0.001340
S.E. of regression	0.001112	Akaike info criterion		-10.76043
Sum squared resid	0.000429	Schwarz criterion		-10.73834
Log likelihood	1879.695	Hannan-Quinn criter.		-10.75164
Durbin-Watson stat	1.973205			

Figure 27 : Estimation des paramètres du modèle de CIR

D'après ce résultat nous avons $\hat{\alpha} = 0.004508$ et $\hat{\beta} = 0.852352$

Donc : $\hat{a} = 1 - 0.852352 = 0.147648$ et $\hat{b} = \frac{0.004508}{0.147648} = 0,03053208$ (voir page 62)

L'estimateur de σ est l'écart type qui se trouve dans la figure 23 : $\hat{\sigma} = 0,000372$

II.5.2.4 Test d'hétéroscédasticité pour le modèle CIR

Afin de tester l'hétéroscédasticité des résidus, nous avons opté pour le test de White sous Eviews

Heteroskedasticity Test: White			
F-statistic	0.150655	Prob. F(2,346)	0.8602
Obs*R-squared	0.303657	Prob. Chi-Square(2)	0.8591
Scaled explained SS	1.465455	Prob. Chi-Square(2)	0.4806

Figure 28 : Test d'hétéroscédasticité des résidus

Puisque la p-value est supérieur au seuil de 5%, nous acceptons l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus.

II.5.2.5 Tests de significativité des paramètres du modèle

Nous remarquons que les p-value associées à la statistique de Student sont toutes nulles inférieures au seuil de 5%, donc nous rejetons les deux hypothèses $H_0 : \alpha = 0$ et $H_0 : \beta = 0$. Cela mène à dire que les coefficients a et b sont significatifs. En outre, pour l'hypothèse $H_0 : \alpha = \beta = 0$, la probabilité de la statistique de Fisher (P-value) est nulle inférieure au seuil de 5%, donc nous rejetons l'hypothèse de la nullité des coefficients simultanément. Ainsi, nous pouvons confirmer la significativité de notre modèle.

Notre modèle s'écrit donc comme suit :

$$X_t = 0.004508 * Y_t + 0.852352 * Z_t + 0,000372$$

II.5.2.6 Test de bruit blanc : Box Pierce

Dans le dessein de tester si les résidus de notre série sont des bruits blancs, nous procédons au test de Box Pierce qui a pour hypothèse nulle H_0 : les résidus sont des bruits blancs

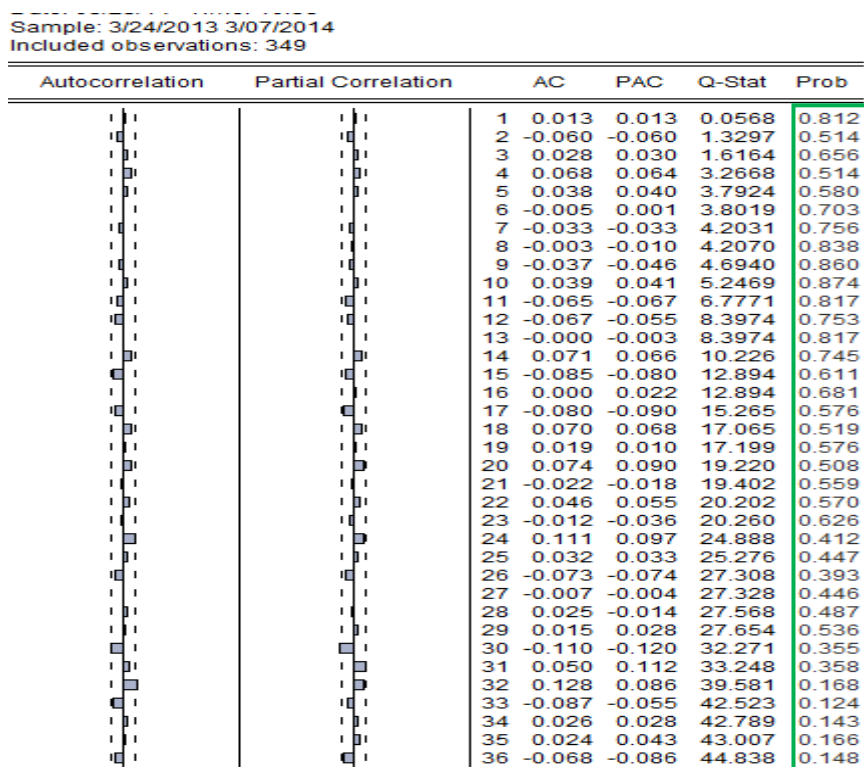


Figure 29 : Corrélogramme des résidus

Nous constatons, d'après le corrélogramme des résidus, que les p-value sont toutes supérieures au seuil de 5%, d'où le non rejet de l'hypothèse H_0 . Ainsi, les résidus sont des bruits blancs.

II.5.2.7 Test de normalité des résidus :

Testons H_0 : l'hypothèse de normalité des résidus

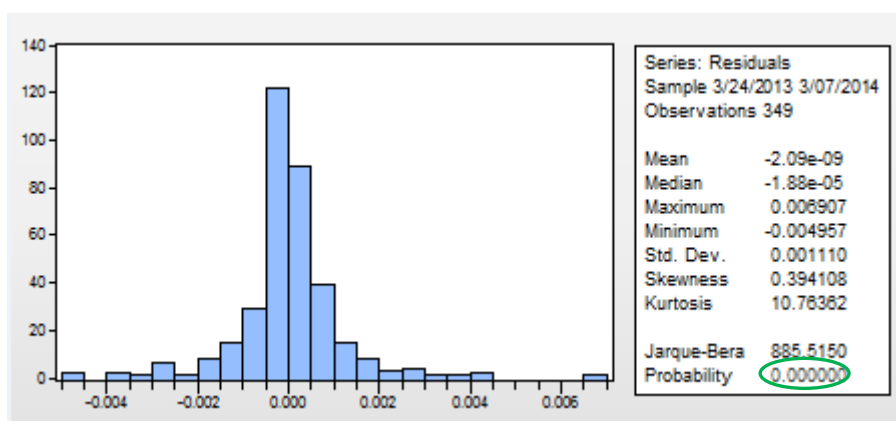


Figure 30 : Test de normalité des résidus

Puisque la p-value du test Jarque-Bera est inférieure au seuil de 5%, nous déduisons qu'il n'y a pas de normalité des résidus.

II.5.2.8 Estimation de la prime de risque :

Afin de construire la courbe du taux zéro coupon par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, nous devons faire l'estimation de λ . Celle-ci est obtenue par la minimisation des écarts au carré entre les rendements théoriques et les rendements du marché à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

Comme dans le modèle de Vasicek, nous allons travailler sur la courbe de taux correspondante au 07/03/2014. Nous allons initialiser λ par zéro, et puis utiliser le solveur Excel pour calculer la valeur de λ qui minimise les écarts pour cette date.

Modèle CIR		Date	07/03/2014					
paramètres	valeurs	maturité a	A(T)	B(T)	Rendement calculé	Rendement réel	écart	écart^2
a	0,147648	0,25	0,99985897	0,2504	3,114%	3,250%	0,136%	0,0001859%
b	0,03053208	0,5	0,99943537	0,5017	3,175%	3,482%	0,307%	0,0009397%
sigma	0,000372	1	0,99773821	1,0069	3,299%	3,531%	0,231%	0,0005339%
gamma	0,013743623	2	0,99094215	2,0277	3,549%	3,770%	0,221%	0,0004870%
tmp	0,03052	3	0,97964258	3,0627	3,801%	4,026%	0,225%	0,0005049%
lamda	-0,16138155	4	0,96393294	4,1119	4,056%	4,287%	0,231%	0,0005350%
ecart^2	0,005%	5	0,94396872	5,1757	4,312%	4,554%	0,241%	0,0005828%
		6	0,91996519	6,2541	4,572%	4,715%	0,143%	0,0002049%
		7	0,8921938	7,3475	4,833%	4,880%	0,047%	0,0000223%
		8	0,86097715	8,4560	5,097%	5,051%	-0,046%	0,0000213%
		9	0,82668272	9,5798	5,363%	5,227%	-0,136%	0,0001861%
		10	0,78971556	10,7192	5,632%	5,409%	-0,223%	0,0004979%

Figure 31 : Estimation de la prime de risque λ et calcul des rendements zéro coupon

$$\begin{aligned}
 & \bullet A(t, T) = \left(\frac{2\gamma \exp\left(\frac{(a+\lambda+\gamma)(T-t)}{2}\right)}{(a+\lambda+\gamma)(\exp(\gamma(T-t))-1)+2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\
 & \bullet B(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T-t))-1)}{(a+\lambda+\gamma)(\exp(\gamma(T-t))-1)+2\gamma} \\
 & \bullet \gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2} \\
 & \bullet R(T, t, r) = \frac{B(t, T)*r(t) - \ln(A(t, T))}{T-t}
 \end{aligned}$$

Après avoir estimé la valeur de la prime de risque λ , nous allons comparer entre la courbe calculée par le modèle de CIR et celle du marché.

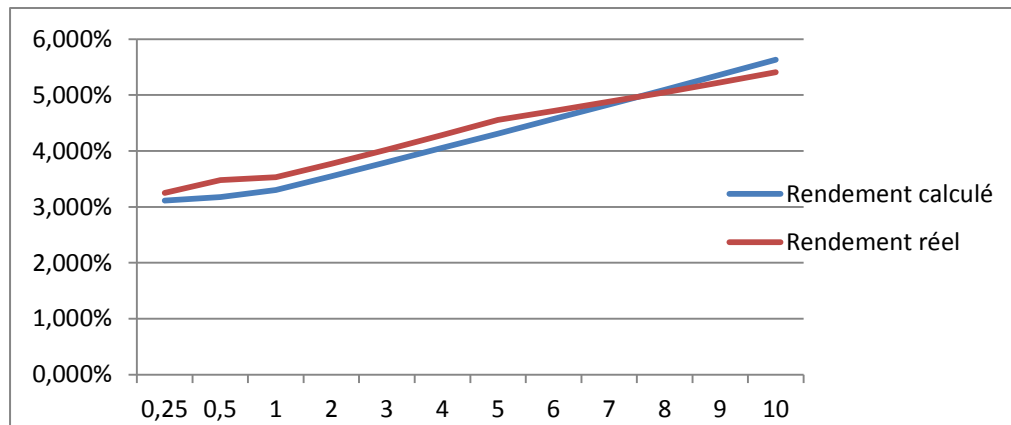


Figure 32 : Comparaison entre courbe du marché et celle obtenue par CIR

Nous remarquons que les deux courbes sont proches, et presque collées, ce qui montre que le modèle de CIR modélise bien la courbe de taux marocaine.

Nous allons opter pour le modèle de CIR pour faire les prévisions car :

- Il garantit la positivité des taux
- Ses résidus vérifient l'hypothèse d'homoscédasticité
- Ses résidus sont des bruits blancs

II.5.2.9 Prévision de la courbe par le modèle de CIR

Pour pouvoir faire les prévisions de la courbe de taux zéro coupon par le modèle de CIR, il faut, d'abord, faire les prévisions du taux moyen pondéré (TMP) et de la prime de risque λ .

1) Prévision de taux moyen pondéré TMP par Monte Carlo :

Pour faire des prévisions sur le taux court, nous allons essayer de simuler le mouvement brownien en utilisant VBA Excel.

Pour ce faire, nous générons 500 variables de loi normale $N(0,1)$ pour chaque jour t des 365 jours dont nous souhaitons faire les prévisions.

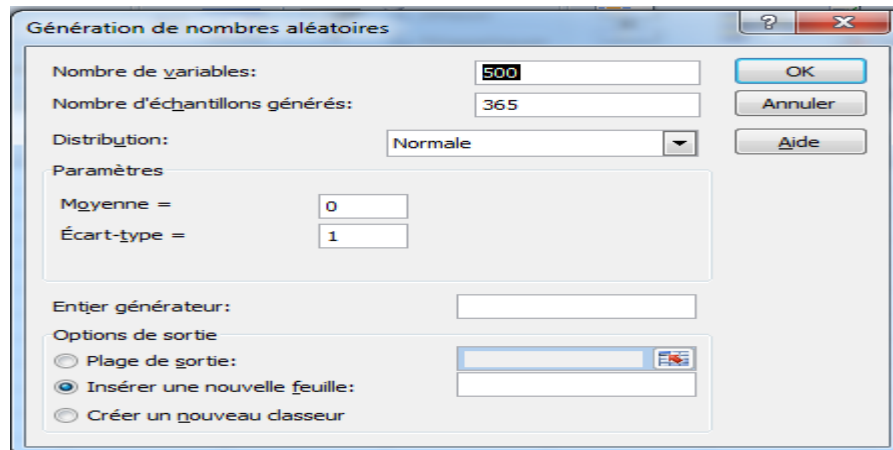


Figure 33 : Simulation de 500 résidus pour 365 jours

Ensuite, nous remplaçons les résidus simulés pour le jour t , dans l'équation du modèle de CIR : $r_t = a b + (1 - a) r_{t-1} + \sigma \sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_t$, afin d'obtenir 500 TMP simulés. La moyenne calculée sur ces TMP permet d'avoir le taux prévisionnel correspondant au jour t . On passe, après, au jour suivant, et on reprend le calcul.

date	tmp prévisionnel
08/03/2014	3,0522604%
09/03/2014	3,0522884%
10/03/2014	3,0521761%
11/03/2014	3,0526156%
12/03/2014	3,0525349%
13/03/2014	3,0526447%
14/03/2014	3,0528409%
15/03/2014	3,0525489%
16/03/2014	3,0521410%
17/03/2014	3,0528474%
18/03/2014	3,0527119%
19/03/2014	3,0528125%
20/03/2014	3,0528252%
21/03/2014	3,0528631%
22/03/2014	3,0524389%
23/03/2014	3,0522500%
24/03/2014	3,0514200%
25/03/2014	3,0519969%
26/03/2014	3,0523966%
27/03/2014	3,0524182%
28/03/2014	3,0524592%
29/03/2014	3,0526995%
30/03/2014	3,0522769%

Tableau 5: Prévisions du TMP journalier du 08/03/2013 au 30/03/2014

2) Prévision de la prime de risque λ :

Afin de pouvoir effectuer des prévisions sur la prime de risque, nous avons calculé une série de λ , allant du 01/11/2013 au 07/03/2014, soit 127 observations.

Le graphe montre que la série des λ est non stationnaire.

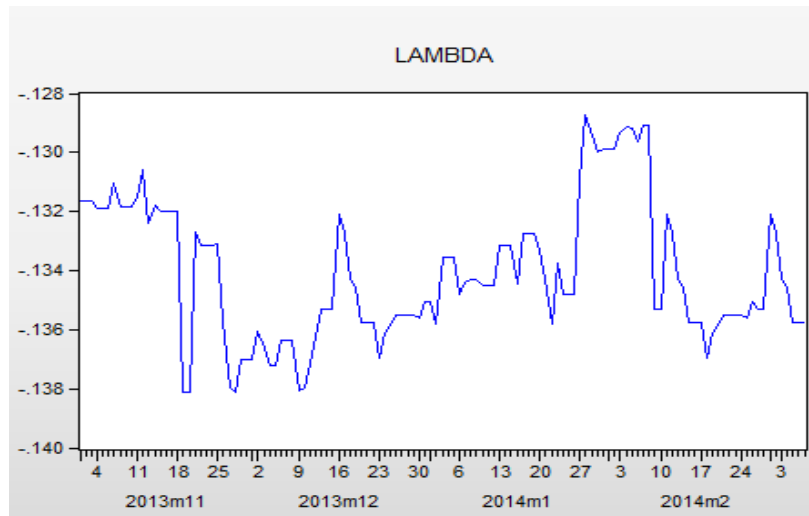


Figure 34: Evolution de la série de la prime de risque

Cette absence de stationnarité dans la série est confirmée par le test de Dickey-Fuller Augmenté :

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.374426	0.0595
Test critical values:		
1% level	-4.032498	
5% level	-3.445877	
10% level	-3.147878	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(LAMBDA)
 Method: Least Squares
 Date: 05/25/14 Time: 10:08
 Sample (adjusted): 11/02/2013 3/07/2014
 Included observations: 126 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LAMBDA(-1)	-0.167183	0.049544	-3.374426	0.0010
C	-0.022471	0.006648	-3.379897	0.0010
@TREND(11/01/2013)	4.42E-07	3.17E-06	0.139242	0.8895

Figure 35 : Test de Dickey Fuller (modèle avec constante et tendance)

En effet, d'après la figure ci-dessus, la statistique du test de DFA qui est égale à (-3,374426), est supérieure à la valeur critique du test qui vaut (-3,445877) au seuil de 5%. Donc la série est non stationnaire (série DS).

Ainsi, pour faire les prévisions sur la prime de risque, nous avons stationnarisé la série en utilisant la première différence [$d\lambda = \lambda - \lambda(-1)$]. Le graphe suivant montre l'évolution de la nouvelle série :

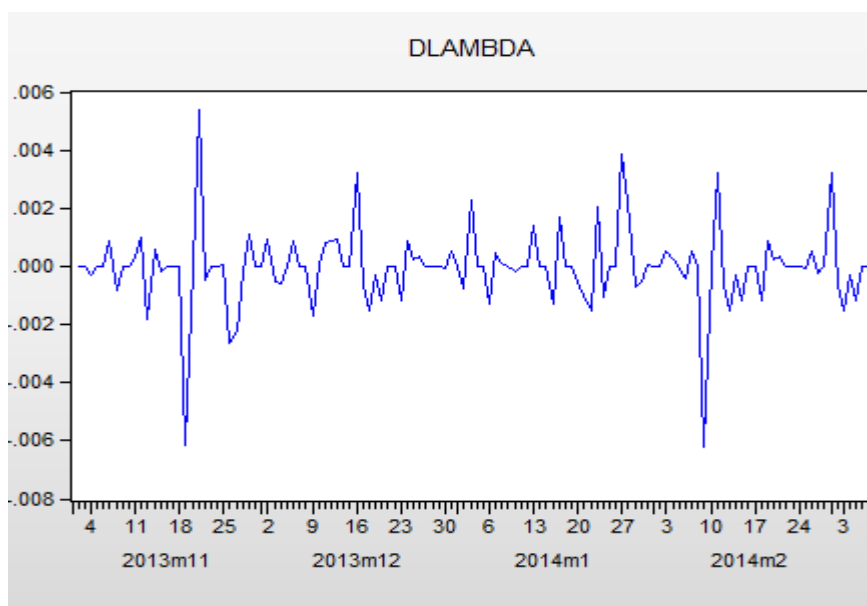


Figure 36 : Graphe de la série dlambda

La série apparaît stationnaire, mais comme toujours, on va le confirmer par le test de Dickey-Fuller Augmenté.

- **Test de la nullité de la tendance :**

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-10.90047	0.0000
Test critical values:		
1% level	-4.033727	
5% level	-3.446464	
10% level	-3.148223	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DLAMBDA)
 Method: Least Squares
 Date: 05/25/14 Time: 10:36
 Sample (adjusted): 11/04/2013 3/07/2014
 Included observations: 124 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLAMBDA(-1)	-1.336454	0.122605	-10.90047	0.0000
D(DLAMBDA(-1))	0.325121	0.086327	3.766165	0.0003
C	-7.03E-05	0.000240	-0.292726	0.7702
@TREND(11/01/2013)	3.98E-07	3.25E-06	0.122472	0.9027

Figure 37 : Test de DFA, modèle avec tendance et constante

La t-statistic correspondante au trend (0,122472) est inférieure à la valeur tabulée critique (2.79) au seuil de 5%. Donc on ne rejette pas l'hypothèse de la nullité de la tendance.

• **Test de la nullité de la constante :**

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-10.94443	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.483751	
5% level	-2.884856	
10% level	-2.579282	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DLAMBDA)
 Method: Least Squares
 Date: 05/25/14 Time: 10:38
 Sample (adjusted): 11/04/2013 3/07/2014
 Included observations: 124 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLAMBDA(-1)	-1.336300	0.122099	-10.94443	0.0000
D(DLAMBDA(-1))	0.325047	0.085973	3.780826	0.0002
C	-4.46E-05	0.000116	-0.384050	0.7016

Figure 38 : Test de DFA (modèle avec constante)

La t-statistic de Student correspondante à la constante (-0.384050) est inférieure à la valeur tabulée critique (2,53) au seuil de 5%. D'où le non rejet de l'hypothèse de la nullité de la constante.

• **Test du modèle sans tendance ni constante :**

Null Hypothesis: DLAMBDA has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-10.97610	0.0000
Test critical values:		
1% level	-2.583744	
5% level	-1.943427	
10% level	-1.615011	

Figure 39 : Test de DFA, modèle sans tendance ni constante

La statistique du test de DFA (-10,97610) est inférieure à la valeur critique (-1,943427) au seuil de 5%. Donc, la série est stationnaire.

Nous allons essayer de trouver le modèle de dlamba :

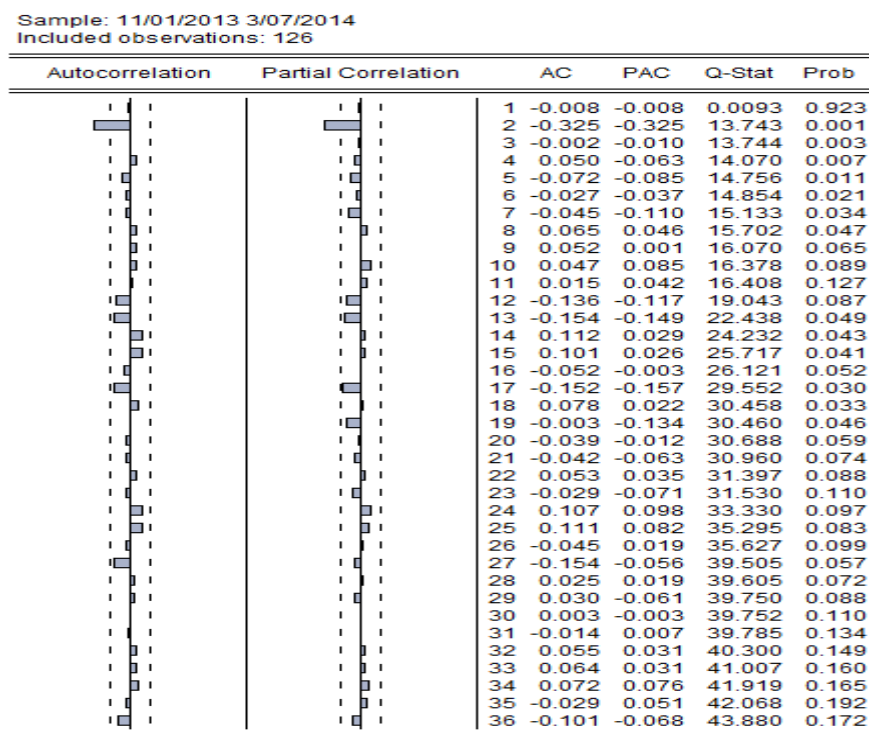


Figure 40: Corrélogramme de la série dlamba

Le corrélogramme montre que la série peut être l'un des processus suivants : AR(2), MA(2) ou ARMA(2,2). Mais après avoir effectué les tests de significativité des estimateurs sur les trois modèles, nous avons trouvé que le modèle qui vérifie ce test est le processus AR(2).

Sample (adjusted): 11/04/2013 3/07/2014
Included observations: 124 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	-0.324142	0.085299	-3.800085	0.0002

Figure 41 : Estimation des paramètres du modèle AR(2)

La p-value associé au coefficient du modèle AR(2) est inférieure du seuil de 5%, d'où la significativité de l'estimateur.

Par la suite, vérifions si les résidus de la régression sont des bruits blancs

chapitre2 : Modélisation de la courbe de taux

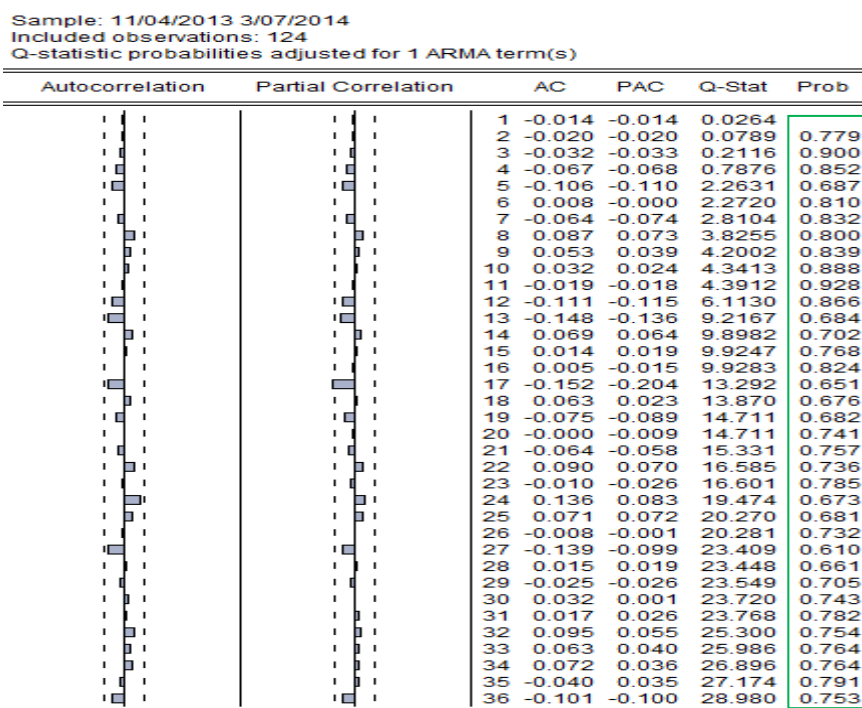


Figure 42 : Test de Box Pierce

Le test de Box Pierce réalisé sur les résidus de la régression atteste la présence du « bruit blanc » au seuil de 5%.

Nous pouvons, Ainsi, faire les prévisions sur λ à partir de $d\lambda$, pour un horizon d'un an, grâce au logiciel Eviews :

date	lambda prévisionnel
08/03/2014	-0,135818672
09/03/2014	-0,13585202
10/03/2014	-0,135885369
11/03/2014	-0,135918717
12/03/2014	-0,135952065
13/03/2014	-0,135985413
14/03/2014	-0,136018761
15/03/2014	-0,136052109
16/03/2014	-0,136085457
17/03/2014	-0,136118805
18/03/2014	-0,136152153
19/03/2014	-0,136185501
20/03/2014	-0,136218849
21/03/2014	-0,136252197
22/03/2014	-0,136285545
23/03/2014	-0,136318893
24/03/2014	-0,136352241
25/03/2014	-0,136385589
26/03/2014	-0,136418937
27/03/2014	-0,136452285
28/03/2014	-0,136485633
29/03/2014	-0,136518982
30/03/2014	-0,13655233

Tableau 6 : Lambdas prévisionnels du 08/03/2013 au 30/03/2014

3) Prédiction de la courbe de taux:

Puisque nous avons effectué des prévisions sur λ et TMP, il suffit juste de les remplacer dans la formule du rendement estimé par le modèle de CIR, pour avoir la courbe de taux prévisionnels. Ci-dessous les calculs des rendements zéro coupon du 08/03/2014 au 30/03/2014

date	R(t,T)											
	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
08/03/2014	3,10405%	3,15573%	3,25879%	3,46370%	3,66701%	3,86872%	4,06885%	4,26742%	4,46444%	4,65992%	4,85388%	5,04632%
09/03/2014	3,10409%	3,15578%	3,25887%	3,46384%	3,66721%	3,86898%	4,06918%	4,26783%	4,46492%	4,66048%	4,85452%	5,04706%
10/03/2014	3,10399%	3,15570%	3,25881%	3,46384%	3,66727%	3,86911%	4,06938%	4,26810%	4,46527%	4,66091%	4,85504%	5,04766%
11/03/2014	3,10444%	3,15616%	3,25930%	3,46438%	3,66787%	3,86978%	4,07011%	4,26890%	4,46614%	4,66186%	4,85607%	5,04878%
12/03/2014	3,10437%	3,15611%	3,25928%	3,46441%	3,66796%	3,86993%	4,07034%	4,26920%	4,46652%	4,66232%	4,85662%	5,04941%
13/03/2014	3,10449%	3,15624%	3,25944%	3,46463%	3,66824%	3,87028%	4,07075%	4,26968%	4,46708%	4,66296%	4,85734%	5,05022%
14/03/2014	3,10470%	3,15646%	3,25969%	3,46494%	3,66861%	3,87070%	4,07125%	4,27025%	4,46773%	4,66369%	4,85815%	5,05111%
15/03/2014	3,10442%	3,15620%	3,25945%	3,46476%	3,66849%	3,87066%	4,07127%	4,27035%	4,46790%	4,66394%	4,85849%	5,05155%
16/03/2014	3,10403%	3,15582%	3,25910%	3,46447%	3,66826%	3,87049%	4,07118%	4,27033%	4,46797%	4,66409%	4,85872%	5,05187%
17/03/2014	3,10475%	3,15655%	3,25985%	3,46527%	3,66913%	3,87142%	4,07217%	4,27140%	4,46910%	4,66530%	4,86001%	5,05324%
18/03/2014	3,10463%	3,15644%	3,25977%	3,46525%	3,66916%	3,87153%	4,07235%	4,27164%	4,46943%	4,66571%	4,86050%	5,05383%
19/03/2014	3,10474%	3,15657%	3,25992%	3,46546%	3,66943%	3,87186%	4,07275%	4,27212%	4,46998%	4,66634%	4,86122%	5,05463%
20/03/2014	3,10476%	3,15660%	3,25999%	3,46558%	3,66962%	3,87211%	4,07307%	4,27251%	4,47045%	4,66689%	4,86185%	5,05535%
21/03/2014	3,10482%	3,15667%	3,26008%	3,46573%	3,66983%	3,87238%	4,07341%	4,27293%	4,47094%	4,66746%	4,86251%	5,05609%
22/03/2014	3,10440%	3,15627%	3,25971%	3,46542%	3,66958%	3,87221%	4,07331%	4,27289%	4,47099%	4,66759%	4,86273%	5,05640%
23/03/2014	3,10423%	3,15611%	3,25958%	3,46534%	3,66957%	3,87226%	4,07343%	4,27309%	4,47126%	4,66795%	4,86317%	5,05693%
24/03/2014	3,10341%	3,15531%	3,25880%	3,46463%	3,66892%	3,87168%	4,07293%	4,27267%	4,47092%	4,66769%	4,86300%	5,05686%
25/03/2014	3,10400%	3,15591%	3,25943%	3,46531%	3,66966%	3,87248%	4,07379%	4,27360%	4,47193%	4,66878%	4,86417%	5,05811%
26/03/2014	3,10441%	3,15633%	3,25988%	3,46582%	3,67023%	3,87311%	4,07449%	4,27437%	4,47277%	4,66970%	4,86517%	5,05920%
27/03/2014	3,10445%	3,15638%	3,25996%	3,46595%	3,67042%	3,87337%	4,07482%	4,27477%	4,47325%	4,67026%	4,86581%	5,05993%
28/03/2014	3,10450%	3,15645%	3,26005%	3,46610%	3,67063%	3,87365%	4,07516%	4,27519%	4,47374%	4,67083%	4,86647%	5,06068%
29/03/2014	3,10475%	3,15671%	3,26034%	3,46645%	3,67104%	3,87412%	4,07570%	4,27580%	4,47443%	4,67160%	4,86732%	5,06161%
30/03/2014	3,10435%	3,15632%	3,25997%	3,46614%	3,67079%	3,87394%	4,07560%	4,27577%	4,47448%	4,67173%	4,86754%	5,06192%

Tableau 7 : Courbe de taux prévisionnelle de 08/03/2014 au 30/03/2014

4) Comparaison de la courbe de taux prévisionnelle de 07/03/2015 avec la courbe réelle de 07/03/2014

Nous avons fait les prévisions sur un horizon d'un an, afin de voir comment va évoluer le taux d'intérêt durant l'année à venir, et décider ainsi, des positions que peuvent prendre les investisseurs face à cette variation des taux.

Le graphe ci-dessous montre que la courbe prévue pour la date 07/03/2015 par le modèle de CIR, ne s'éloigne pas vraiment de celle observée à la date 07/03/2014. Il s'agit d'un déplacement parallèle qui survient lorsque les changements des taux est le même pour toutes les échéances (court, moyen et long terme).

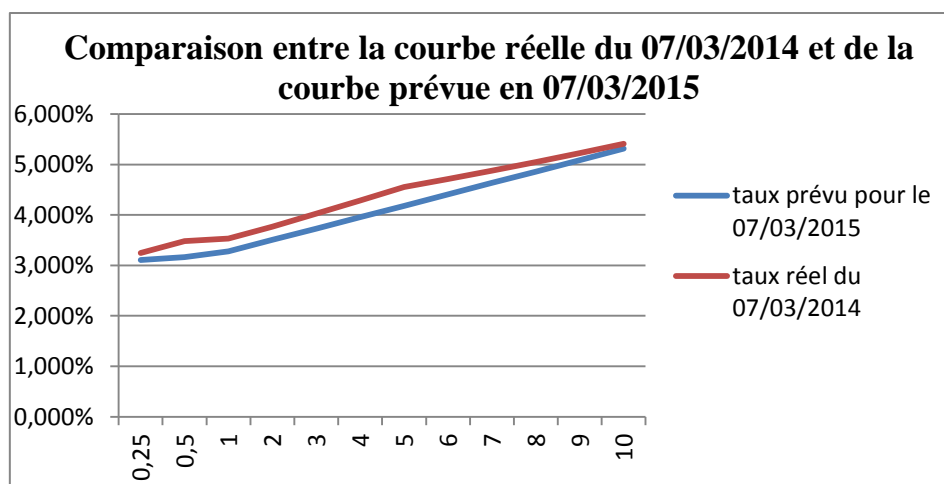


Figure 43 : Comparaison entre la courbe réelle du 07/03/2014 et la courbe prévue en 07/03/2015

En effet, nous remarquons une tendance baissière pour l'ensemble des maturités. Ce constat influence les positions prises par les investisseurs, qui, dans ce cas, ont intérêt à investir dans les titres pour fixer de manière définitive les taux d'intérêt courants comparativement élevés avant que la baisse prévue n'ait lieu. Donc, pour les nouveaux investisseurs qui préfèrent n'investir qu'après un an : ils recevront un rendement plus bas que celui touché par leurs aînés, et courent des risques de moins-values en capital, car les cours vont monter.

Pour les emprunteurs, ils ont intérêt à attendre à ce que les taux baissent pour s'endetter à des taux d'intérêt plus modestes.

5) Validité des prévisions des taux estimés par CIR

Afin de s'assurer de la qualité des prévisions effectuées suite à l'estimation de la courbe par le modèle de CIR, nous avons fait des prévisions sur des jours dont nous disposons, déjà, des rendements réels. Cela nous a permis de vérifier si les taux prévus s'approchent de la réalité ou s'il y a assez de décalage qui biaise les prévisions et réduit l'ajustement du modèle.

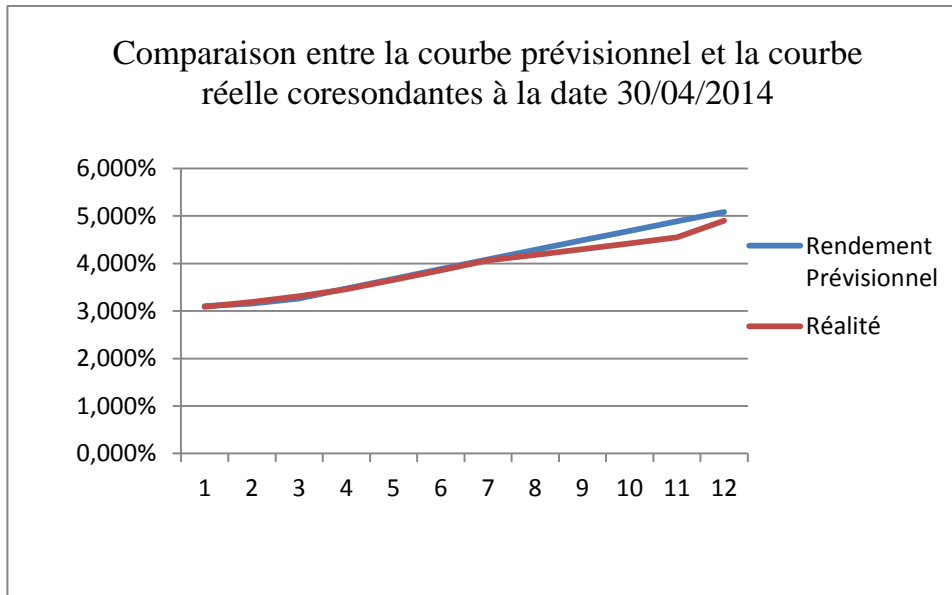


Figure 44 : Backtesting pour la validité des prévisions

Nous remarquons que les prévisions effectuées par le modèle de CIR, permettent d'obtenir une courbe qui s'approche bien de celle du marché. Ce test, a été fait sur plusieurs autres dates et a donné un bon résultat. D'où la confirmation de l'effcience des prévisions faites par CIR.

Conclusion du deuxième chapitre

La méthode de Nelson Siegel et les deux modèles stochastiques ont permis d'obtenir une courbe de taux très proche de la courbe de taux réelle, ce qui conduit à conclure que ces modèles modélisent bien la courbe de taux marocaine.

Cependant, en tenant compte des résultats statistiques de chacun des deux modèles stochastiques, nous avons opté pour le modèle de CIR pour effectuer les prévisions sur un horizon d'un an, chose qui nous a menées à confirmer que les taux auront une tendance baissière dans un an.

Ces prévisions nous seront utiles pour la valorisation des dérivés de taux à savoir les options sur obligation, les caps et les floors. C'est ce que nous allons traiter dans le chapitre suivant.

Chapitre 3: Valorisation des dérivés de taux

Ce chapitre représente le vif de notre sujet, nous y introduisons les définitions relatives aux options en général, et aux dérivés de taux en particulier.

Dans le dessein de valoriser ces produits de taux, nous définissons dans un premier lieu, le modèle de Black (1976), qui calcule à travers une formule simpliste le prix de ces options. Pour cela, il nous est primordial d'estimer sa volatilité. Ce modèle est appliqué pour valoriser les options sur obligations, les caps, les floors et les collars.

Nous essayons par la suite, d'élaborer des pricers pour chaque dérivé de taux, à l'aide du VBA Excel.

I. Risque du taux d'intérêt

Les fluctuations des taux d'intérêt peuvent avoir un impact significatif sur le résultat de l'entreprise, elles peuvent l'exposer au risque de perte ou de diminution des revenus. Si les taux sont à la hausse, l'entreprise est en mesure de perdre ou de rater l'opportunité de gagner si :

- Elle doit faire un emprunt dans l'avenir
- Elle a déjà emprunté à taux variable
- Elle a fait un placement à taux fixe

Si les taux sont à la baisse, le manque à gagner ou la perte auront lieu si :

- elle a emprunté à taux fixe
- elle prévoit réaliser des placements dans le futur
- elle a déjà réalisé des placements à taux variable

Ainsi, qu'il s'agisse d'emprunts ou de placements, pour pouvoir maîtriser les risques encourus par l'entreprise, assurer le gain, et limiter l'impact de la fluctuation des taux d'intérêt, plusieurs instruments de couverture sont présents sur le marché permettant à l'entreprise de se protéger. Il s'agit des dérivés de taux qui sont des instruments financiers dont les payoffs dépendent d'une façon ou d'une autre du niveau des taux.

Les volumes de transactions sur ces produits sont très importants, ce qui nécessite alors de trouver des modèles d'évaluation et de couverture efficaces et robustes pour ces produits.

Les dérivés de taux sont plus difficiles à évaluer que les dérivés sur actions ou sur devises pour les raisons suivantes :

- L'évolution d'un taux d'intérêt est plus compliquée à modéliser que celle d'une action ou d'une devise.
- Pour l'évaluation de nombreux produits, il est indispensable de recourir à un modèle d'évolution de la courbe des taux dans son ensemble.
- Les taux d'intérêt interviennent à la fois dans la définition des payoffs de ces actifs et dans l'actualisation de ceux-ci.

Nous allons essayer, dans ce qui suit, d'évaluer les options de taux les plus classiques : il s'agit des options sur obligations, des caps, et des floors.

II. Généralités sur les options et les options de taux

Nous allons voir les caractéristiques des options en général et comment nous pouvons les évaluer, puis, nous allons montrer la particularité des dérivés de taux que nous allons traiter par la suite, et finalement nous allons introduire le modèle le plus souvent utilisé pour leur valorisation, qui est le modèle de Black.

II.1 Généralités sur les options

II.1.1 Définition et caractéristiques de l'option

L'option donne à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre à une date future, un actif qualifié d'actif sous-jacent, à un prix fixé au moment de la conclusion du contrat.

Il existe deux types d'options : celle qui permet d'acheter (option d'achat ou call) et celle qui permet de vendre (option de vente ou put).

On dit que le détenteur exerce l'option, lorsque celui-ci achète ou vend le sous-jacent au prix fixé par l'option, ce prix s'appelle le prix d'exercice.

Les options européennes ne sont exerçables qu'à leur échéance tandis que les options américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment entre la date d'émission et la date d'échéance.

Pour acheter une option, il faut payer une prime, et on ne l'exerce que si elle procure un gain.

II.1.2 Flux des options

Flux du call : Si, à l'échéance, le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, la valeur du call est égale à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice. Et si, le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, le détenteur de l'option n'exerce pas et la valeur de l'option est nulle.

Donc la valeur de l'option d'achat à l'échéance est :

$$C = \text{Max} (S - K ; 0)$$

Avec :

- S : Prix du sous-jacent à l'échéance.
- K : Prix d'exercice.

Flux du put : l'acheteur d'un put exercera l'option si le prix du sous-jacent S est inférieur au prix d'exercice :

$$P = \text{Max} (K - S ; 0)$$

- Lorsque la valeur d'une option est positive, elle est dite dans la monnaie.
- Lorsque le détenteur de l'option n'a pas intérêt à l'exercer, l'option est dite en dehors de la monnaie.
- Lorsque la valeur d'une option est nulle, c'est à dire le prix d'exercice est égal au prix de marché. L'option est alors à la monnaie.

Selon la Loi du prix unique, le prix d'un actif financier est égal à la somme actualisée de ses flux futurs. Donc, pour évaluer le prix d'une option, il faut estimer les flux qui surviendront à l'échéance de l'option.

II.2 Options de taux

Les options de taux sont des options dont le sous-jacent dépend d'une manière ou d'une autre du taux d'intérêt. Le calcul du prix de ces options peut être simplifié par le modèle de Black, sous l'hypothèse de la log-normalité du prix du sous-jacent à l'échéance.

II.2.1 Modèle de Black

Ce modèle est une variante du modèle Black and Scholes d'évaluation d'option. Ses applications primaires sont pour des options sur obligations, caps et floors.

Considérons une option européenne sur une variable de valeur V et définissons :

- T : Durée de vie de l'option
- F : Prix forward de V pour un contrat d'échéance T
- F_0 : Valeur de F à la date 0
- K : Prix d'exercice de l'option
- $P(t, T)$: Prix en date t d'un zéro-coupon de maturité T
- V_T : Valeur de V en T

- σ : Volatilité de F

Le modèle de Black consiste à calculer le payoff espéré de l'option en supposant que :

- V_T a une distribution log-normale telle que l'écart-type de $\ln(V_T)$ est $\sigma\sqrt{T}$.
- L'espérance de V_T est F_0

On actualise ensuite le payoff espéré sur T années au taux sans risque en multipliant par $P(0, T)$. Le payoff de l'option à la date T est $[Max(V_T - K; 0)]$.

L'hypothèse de log-normalité implique que le payoff espéré est égal à :

$$E(Max(V_T - K; 0)) = E(V_T) N(d_1) - K N(d_2)$$

Où $E(V_T)$ est la valeur espérée de V_T et :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) - \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $N(x)$ désigne la fonction de répartition de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire, c'est la probabilité qu'une variable suivant une loi normale $N(0,1)$ soit inférieure à x .

Comme nous avons supposé que $E(V_T) = F_0$, l'actualisation au taux sans risque implique :

$$c = P(0, T) [F_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

De même, la valeur du put :

$$p = P(0, T) [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

Une des caractéristiques importantes de ce modèle est que l'hypothèse d'un mouvement brownien géométrique pour l'évolution de V ou F n'est pas nécessaire. Par contre il faut supposer qu'à la date T la variable V_T est log-normale. Le paramètre σ est généralement appelé volatilité de F ou volatilité forward de F . Cependant son rôle se limite à permettre la définition de l'écart-type de V_T par la relation :

$$\text{Ecart - type}(\ln(V_T)) = \sigma\sqrt{T}$$

Ce paramètre de volatilité ne nous dit cependant rien sur l'écart-type de $\ln(V_T)$ à d'autres dates t que T .

II 2.2 Justification du résultat donné par le modèle de Black

La démonstration consiste à expliquer pourquoi le payoff espéré d'une options d'achat $[E(\max(V_T - K; 0))]$ est égal, selon le modèle de Black, à $[E(V_T)N(d_1) - K N(d_2)]$

L'hypothèse du modèle de Black consiste à supposer que V_T suit une loi log-normale et que l'écart type de $\ln(V_T)$ est $\sigma\sqrt{T}$

Notons $g(V_T)$ la fonction de densité de probabilité de V_T , nous avons alors

$$E(\max(V_T - K; 0)) = \int_K^{+\infty} (V_T - K) g(V_T) dV_T \quad (9)$$

La variable $\ln(V_T)$ est distribuée selon une loi normale d'écart-type $\sigma\sqrt{T}$. Grâce aux propriétés de la distribution log-normale, la moyenne de $\ln(V_T)$ est égale à m , où :

$$m = \ln(E(V_T)) - \frac{\sigma^2 T}{2} \quad (10)$$

Procédons au changement de la variable :

$$Q = \frac{\ln(V_T) - m}{\sigma\sqrt{T}}$$

Cette variable est gaussienne centrée réduite. Notons $h(Q)$ fonction de densité de Q , définie par :

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{Q^2}{2}}$$

Nous pouvons transformer l'intégrale de l'équation (9) en intégrale par rapport à Q au lieu de V_T

$$E(\max(V_T - K; 0)) = \int_{\frac{\ln(K)-m}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} (e^{Q\sigma\sqrt{T}+m} - K) h(Q) dQ$$

Donc :

$$E(\max(V_T - K; 0)) = \int_{\frac{\ln(K)-m}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{Q\sigma\sqrt{T}+m} h(Q) dQ - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} h(Q) dQ$$

Nous écrivons :

$$\begin{aligned} e^{Q\sigma\sqrt{T}+m} h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{(-Q^2+2Q\sigma\sqrt{T}+2m)}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(Q-\sigma\sqrt{T})^2+T*\sigma^2+2m}{2}} \\ &= \frac{e^{\frac{T*\sigma^2}{2}+m}}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-(Q-\sigma\sqrt{T})^2}{2}} \\ &= e^{\frac{T*\sigma^2}{2}+m} * h(Q - \sigma\sqrt{T}) \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$E(\max(V_T - K; 0)) = e^{\frac{T*\sigma^2}{2}+m} \int_{\frac{\ln(K)-m}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} h(Q - \sigma\sqrt{T}) dQ - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} h(Q) dQ \quad (11)$$

Puisque nous avons noté $N(x)$ la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à x , la première intégrale de l'équation devient :

$$1 - N\left(\frac{\ln(K) - m}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right) = N\left(\frac{-\ln(K) + m}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}\right)$$

En remplaçant m par son expression déduite de l'équation (10), nous avons :

$$\begin{aligned} N\left(\frac{-\ln(K) + \ln(E(V_T)) - \frac{\sigma^2 * T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}\right) &= N\left(\frac{-\ln(K) + \ln(E(V_T)) + \frac{\sigma^2 * T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) + \frac{\sigma^2 * T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) = N(d_1) \end{aligned}$$

De la même façon, nous montrons que la seconde intégrale de l'équation (11) est $N(d_2)$, l'équation devient donc :

$$E(\max(V_T - K; 0)) = e^{\frac{T * \sigma^2}{2} + m} N(d_1) - K N(d_2)$$

Si nous remplaçons encore une fois m par son expression dans $e^{\frac{T * \sigma^2}{2} + m}$:

$$e^{\frac{T * \sigma^2}{2} + m} = e^{\frac{T * \sigma^2}{2} + \ln(E(V_T)) - \frac{\sigma^2 * T}{2}} = E(V_T)$$

Nous trouvons le résultat

$$E(\max(V_T - K; 0)) = E(V_T) N(d_1) - K N(d_2)$$

$$c = P(0, T) (E(V_T) N(d_1) - K N(d_2))$$

- $N(d_2)$ est la probabilité, dans l'univers risque-neutre, que l'option soit exercée. Donc $K N(d_2)$ est l'espérance du décaissement à l'échéance.
- $E(V_T) N(d_1)$ est l'espérance d'une variable valant V_T , si $V_T > K$, et zéro sinon. C'est donc l'encaissement espéré à l'échéance.

Le prix de l'option peut donc être vu comme la valeur actuelle nette espérée du projet d'investissement « achat de l'option ».

II.2.3 Volatilité du modèle de Black

Parmi tous les paramètres entrant dans la formule de Black, seule la volatilité n'est pas observable directement sur le marché. C'est dans le choix de la valeur de ce paramètre essentiel que se posent les problèmes de mise en œuvre du modèle. Dans la pratique, deux approches sont utilisées pour l'identifier :

- la méthode "historique" : ce sont des méthodes empiriques utilisant les données historiques sur les cours du forward.
- la méthode implicite : ce sont des méthodes basées sur l'observation des prix des options.

II.2.3.1 Volatilité historique

Dans le modèle de Black, la volatilité σ est l'écart-type des rentabilités du sous-jacent. Cette volatilité provient de la tombée de nouvelles informations, qui entraînent des variations de cours (lorsqu'elles ne sont pas anticipées).

L'estimation empirique du paramètre σ est facile si les rentabilités, et également les log-rentabilités, sont indépendamment distribuées, ce qui implique que la volatilité est constante. Il suffit de prendre n log-rentabilités $[R_i = \ln(F_{i+1}) - \ln(F_i)]$ historiques, avec ($n \geq 30$), calculées sur des périodes i de durée constante (jours, semaines, mois, trimestres...) et de calculer leur moyenne empirique.

$$\hat{\mu}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

Et l'écart-type empirique

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \hat{\mu}_p)^2}$$

$\hat{\sigma}_p^2$ est un estimateur sans biais du carré de la volatilité forward (mensuelle si les rentabilités sont mensuelles, hebdomadaires si les rentabilités sont hebdomadaires...). Par la suite, pour trouver la volatilité annuelle notée $\hat{\sigma}$, qui est le paramètre intervenant dans la

formule d'évaluation, on multiplie la volatilité période $\hat{\sigma}_p$ par \sqrt{p} , où p est le nombre de périodes dans une année ; par exemple $\sqrt{12}$ si les observations sont mensuelles, $\sqrt{256}$ si les observations sont quotidiennes (parce qu'il y a 252 jours de bourse par an en moyenne).

L'estimation obtenue est appelée la volatilité (annuelle) historique. Cette annualisation de la volatilité n'est valable que si les log-rentabilités sont indépendantes, ce qui est souvent le cas, sauf sur les marchés peu liquides et inefficients.

II.2.3.2 Volatilité implicite

La méthode implicite repose sur l'idée que dans un marché liquide, la loi de l'offre et de la demande permet la fixation des prix d'équilibre correspondants à un consensus du marché.

Ainsi, la volatilité implicite est obtenue en inversant la formule de Black, qui donne le prix du call C^B par rapport au prix du call de même caractéristiques $C^{marché}$ observé sur le marché.

$$C^B(t, F, K, T, \sigma^{imp}) = C^{marché}(T, F, K, T)$$

On définit bien de manière unique σ^{imp} puisque le prix C^B de Black est une fonction strictement croissante de la volatilité. Il n'existe pas de formule explicite pour σ^{imp} mais on utilise des méthodes numériques pour la calculer (méthodes par dichotomie, méthode de Newton-Raphson...).

σ^{imp} dépend du strike et de la maturité liés au prix du call observé sur le marché. Souvent, on calcule cette volatilité implicite pour différents strikes et différentes maturités de call et on représente alors son graphe en fonction du strike et/ou de la maturité.

Après avoir défini le modèle de Black et introduit les méthodes de calcul de son paramètre inconnu σ , nous allons essayer de l'appliquer aux différents dérivés de taux que l'on va traiter en détails dans ce qui suit.

III. Cap, floor et collar

Ces produits d'option peuvent être employés pour établir le maximum (cap), ou les taux minimum (floor), ou une combinaison des deux, qui est désignée sous le nom d'un

Collar. Ces produits sont employés par des investisseurs et des emprunteurs, pour se protéger contre les mouvements défavorables des taux d'intérêt.

III.1 Cap

III.1.1 Définition du cap

Un cap est un contrat permettant à son acheteur une couverture contre la hausse des taux d'intérêt, au-delà d'un seuil spécifié à l'avance (taux plafond, taux d'exercice), moyennant le paiement immédiat d'une prime. Tout en conservant un profit d'une éventuelle baisse des taux d'intérêt. Les caps peuvent effectuer des paiements à son détenteur sur une base mensuelle, trimestrielle ou semi-annuelle.

III.1.2 Cap comme portefeuille d'options (caplets)

Le cap est une somme de plusieurs caplets successifs, qui peuvent être assimilés à des options d'achat sur des périodes régulières. Chaque période, le paiement est déterminé en comparant le niveau actuel du taux d'intérêt variable au taux d'exercice, si le niveau de ce taux variable est supérieur au taux d'exercice, le vendeur du cap verse à l'acheteur le différentiel de taux appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt. Au cas où le taux variable ne dépasse pas le taux plafond, aucun paiement n'est effectué pour cette période.

Considérons un cap de durée de vie T , avec un principal N et un taux plafond K . Les dates de réajustement sont notées $t_1, t_2 \dots \dots, t_n$ et on note $t_{n+1} = T$. Soit R_k le taux effectif pour la période $[t_k, t_{k+1}[$, observé à la date t_k . Le payoff du caplet sur cette période en t_{k+1} s'écrit :

$$N \delta_k \max(R_k - K; 0)$$

Où $[\delta_k = t_{k+1} - t_k]$, appelé tenor.

Donc le cap peut être vu comme un portefeuille de n caplets. Les taux variables sont observés aux dates $t_1, t_2 \dots \dots, t_n$ et les paiements sont réalisés aux dates $t_2, t_3 \dots \dots, t_{n+1}$.

III.1.3 Exemple du cap

Supposons que le taux variable est le taux Euribor 3 mois et que le tenor soit de 3 mois : le taux pour les trois premiers mois est le Euribor initial, pour les trois mois suivants, le taux d'intérêt payé est le Euribor constaté à la fin du premier trimestre, et ainsi de suite.

Supposons que le principal est de 10 millions, le tenor de 3 mois, la durée de cap est de 5 ans et le taux plafond de 6%. Si à une date de réajustement quelconque le taux atteint 7%. Le flux à payer à la fin du trimestre qui suit, est égale à :

$$0.25 * 10\,000\,000 * (0.07 - 0.06) = 25000$$

A chaque date de réajustement, le taux Euribor est constaté, s'il est inférieur à 6%, le cap n'engendre aucun flux (trois mois plus tard), si, par contre, il dépasse 6%, le payoff engendré 3 mois plus tard est calculé de la même façon que ci-dessus.

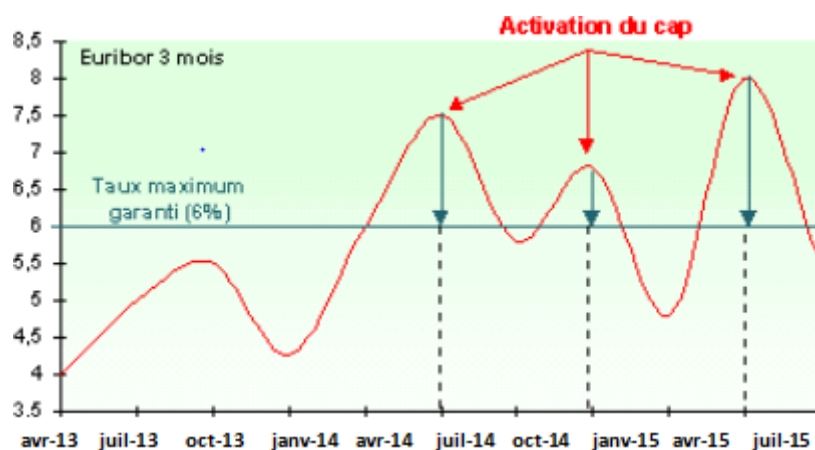


Figure 45 : Dates d'activation du cap

III .2 Floor

III.2.1 Définition du floor

Un floor est un contrat permettant à son acheteur une couverture contre la baisse des taux d'intérêt en deçà d'un certain niveau (taux plancher ou taux d'exercice), moyennant le paiement d'une prime, tout en maintenant un profit d'une éventuelle hausse des taux d'intérêt. Les floors peuvent garantir des paiements à son détenteur sur une base mensuelle, trimestrielles.....

III.2.2 Floor comme portefeuille d'options (floorlets) :

Le floor est une somme de plusieurs floorlets successifs, qui peuvent être assimilés à des options de vente sur des intervalles réguliers. Chaque période, le paiement est déterminé en comparant le niveau actuel du taux d'intérêt variable au taux d'exercice, si le niveau de ce taux variable est inférieur au taux d'exercice, l'acheteur du floor reçoit du vendeur le différentiel de taux appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt. Et si le taux variable est supérieur au taux plancher, aucun paiement n'est effectué pour cette période.

Le floor engendre un flux lorsque le taux variable est inférieur au taux plancher. En utilisant les notations précédentes, le payoff d'un floor en t_{k+1} s'écrit :

$$N \delta_k \max(K - R_k; 0)$$

III.3 Collar :

III.3.1 Définition et généralités :

Un collar est un instrument conçu pour garantir que le taux d'intérêt variable se trouve toujours entre deux niveaux. C'est une combinaison d'une longue position sur cap et de courte position sur floor.

Les emprunteurs et les investisseurs peuvent tous les deux, bénéficier des collars. Dans le cas d'un emprunteur, le collar protège contre la hausse des taux mais limite les rendements en cas de baisse de taux. Dans le cas d'un investisseur, le collar protège contre la baisse des taux mais limite les bénéfices engendrés en cas de hausse des taux. Dans l'un ou l'autre de scénarios, le client est un acheteur d'un produit, et un vendeur de l'autre.

L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur le terme (tenor), les taux d'exercice de cap et de floor, le notional, la date de début, la fréquence de règlement et la date d'échéance.

III.3.2 Flux du collar :

Un collar peut être considéré comme un portefeuille composé d'une longue position sur cap avec un taux d'exercice K_C et d'une courte position sur floor avec un taux

d'exercice K_f , sachant que $K_f < K_c$ (et les mêmes dates de paiement et taux sous-jacent).

$$Payoff = N \delta_k [\max\{R_k - K_c, 0\} - \max\{(K_f - R_k), 0\}]$$

- $Payoff = N\delta_k(K_f - R_k)$ si $R_k \leq K_f$
- $Payoff = 0$ si $K_f \leq R_k \leq K_c$
- $Payoff = N\delta_k(R_k - K_c)$ si $K_c \leq R_k$

La valeur du collar est donné par : $C_k(K_c) - F_k(K_f)$

Un investisseur qui a emprunté des fonds sur la base d'un taux flottant peut, en achetant un collar, s'assurer que le taux d'intérêt payé se situe toujours entre K_f et K_c .

Clairement, le prix du collar est inférieur au prix du cap (avec le même taux de cap), mais les bénéfices engendrés par des taux d'intérêt très bas sont sacrifiés.

III.4 Evaluation des caps et des floors

Comme on a vu précédemment, le caplet qui correspond au taux observé en t_k paye un flux en t_{k+1} qui est égal à :

$$N \delta_k \max(R_k - K; 0)$$

Si on considère que R_k est log-normal avec une volatilité σ_k , le modèle de Black permet d'avoir la valeur du caplet comme suit :

$$N \delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - KN(d_2)]$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{K}\right) + \sigma_k^2 \frac{t_k}{2}}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{K}\right) - \sigma_k^2 \frac{t_k}{2}}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

Tel que F_k est le taux forward entre t_k et t_{k+1} , sachant que $E_{k+1}(R_k) = F_k$

La valeur du floorlet est donnée par le modèle de Black :

$$N \delta_k P(0, t_{k+1}) [KN(-d_2) - F_k N(-d_1)]$$

III.5 Mise en place de Pricers de cap, floor et collar :

III.5.1 Pricer de cap :

Il est vrai qu'il n'existe pas au Maroc un marché des options sur taux, mais, nous avons essayé quand même d'élaborer un pricer qui permet de valoriser des produits indexés à la courbe de taux marocaine.

En effet, Nous avons essayé d'automatiser, via VBA Excel, la valorisation du cap par le modèle de Black. Pour cela, il nous fallait travailler avec les taux forwards que nous avons calculé à partir des rendements zéro coupon selon la relation suivante :

$$F(t, T_1, T_2) = \left[\frac{(1 + R(t, T_2)^{T_2-t})^{\frac{1}{T_2-T_1}}}{(1 + R(t, T_1)^{T_1-t})} \right] - 1$$

Supposons un cap dont le tenor est de 3 mois et la maturité de 2 ans

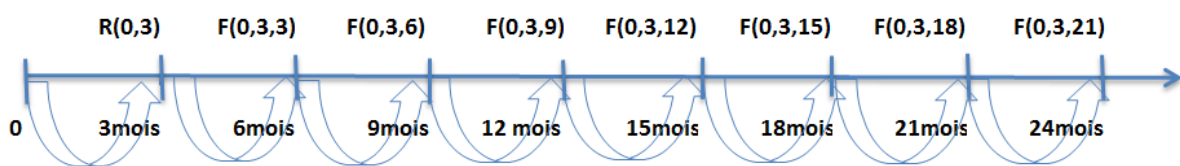


Figure 46 : Flux appliqués chaque trimestre pour un cap trimestriel de deux ans

A la fin du 1^{er} trimestre, nous appliquons le taux constaté à la date initiale qui est le rendement de 3 mois. A la fin du 2^{ème} trimestre, nous appliquons le taux constaté au 1^{er} trimestre et qui est estimé par le taux forward 3 mois dans 3mois. A la fin du 3^{ème} trimestre, nous appliquons le taux constaté au 2^{ème} trimestre et qui est estimé par le taux forward 3 mois dans 6 mois. Et ainsi de suite.

Voici un exemple de calcul du taux forward pour des caps trimestriel et semestriel ayant une maturité 2 ans pour la date 07/03/2014 :

	3moisx3mois	3moisx6mois	3moisx9mois	3moisx1an	3moisx15mois	3moisx18mois	3moisx21mois
07/03/2014	3,715%	3,555%	3,603%	3,830%	3,950%	4,070%	4,190%

Tableau 8 : Calcul des taux forward pour un caps trimestriel de maturité 2 ans

	6moisx6mois	6moisx1an	6moisx18mois
07/03/2014	3.579%	3.89%	4,13%

Tableau 9 : Calcul des taux forward pour un caps semestriel de maturité 2 ans

Maintenant que nous avons déterminé les taux forwards, nous pouvons appliquer le modèle de Black pour calculer le prix du cap, mais le problème qui se pose, est que la volatilité n'est pas observable sur le marché. Donc nous sommes contraintes de l'estimer.

Du fait, que nous allons travailler sur les données marocaines et qu'il n'existe pas encore un marché d'option sur taux, nous ne pouvons pas s'appuyer sur les prix du marché et calculer la volatilité implicite. Mais, vu que nous avons calculé un historique journalier des taux forward à partir de la courbe de taux marocaine, nous pouvons estimer la volatilité historique.

Pour cela, nous avons calculé les rendements, $[R_i = \ln(N * F_{i+1}) - \ln(N * F_i)]$ à partir desquels, nous avons déterminé les volatilités forwards quotidiennes pour des tenors de 3 mois, 6 mois et 1 an, par la relation suivante

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \hat{\mu}_p)^2}$$

Tel que :

$$\hat{\mu}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

Nous avons transformé ces volatilités en volatilités forward annuelles en les multipliant par $\sqrt{256}$,

Chapitre 3 : valorisation des dérivés de taux

Les volatilités annuelles historiques que nous avons trouvées en utilisant cette méthode sont :

Tenor	3 mois	6 mois	1 an
Volatilités annuelles	25,410%	24,011%	23,058%

Tableau 10 : Volatilités annuelles calculées à partir de la base journalière des taux forwards

Une fois la volatilité estimée, nous pouvons directement passer à l'application du modèle de Black, que nous avons automatisé via VBA Excel.

valorisation du cap

convention	Exact/365
fréquence paiement	trimestriel
valeur faciale	1 000 000
strike	4,00%
volatilité	25,41%

calculer

date	forward	caplets
06/12/2013	4,579%	1531,90895
06/03/2014	4,457%	1277,86581
06/06/2014	4,431%	1226,56477
06/09/2014	4,511%	1390,448
06/12/2014	4,598%	1575,21931
06/03/2015	4,687%	1771,47159

date début	06/03/2013
date d'échéance	06/03/2015
date de valorisation	09/06/2013

cap	8773,47844
	0,88%

Figure 47 : Pricer du cap sous VBA

Le pricer que nous avons élaboré, s'appuie sur les données suivantes :

Convention : c'est la base de calcul, nous supposons que l'année contient 365 jours (nous ne prenons pas en considération les années bissextiles), et le nombre de jours entre deux dates se calcule par le nombre de jours calendaires exact.

Fréquence de paiement : nous avons programmé le calcul du prix du cap, en tenant compte de trois fréquences de paiements : trimestrielle, semestrielle et annuelle.

Valeur faciale : c'est le nominale de l'emprunt qui sert au calcul des intérêts versés.

Strike : taux d'exercice du cap (taux plafond).

Volatilité : volatilité historique qu'on a estimée à partir de la base des taux forwards.

Date début : date d'activation de l'option cap.

Date d'échéance : date d'expiration de l'option.

Date de valorisation : date où nous voulons valoriser le prix du cap, ça peut être la date d'aujourd'hui si nous voulons connaître la valeur actuelle du cap, ou une date ultérieure, si nous voulons connaître sa valeur dans le futur.

Si la date de valorisation diffère de la date de début du cap, on distingue deux cas :

- *Date de valorisation coïncide avec une date de caplet :*

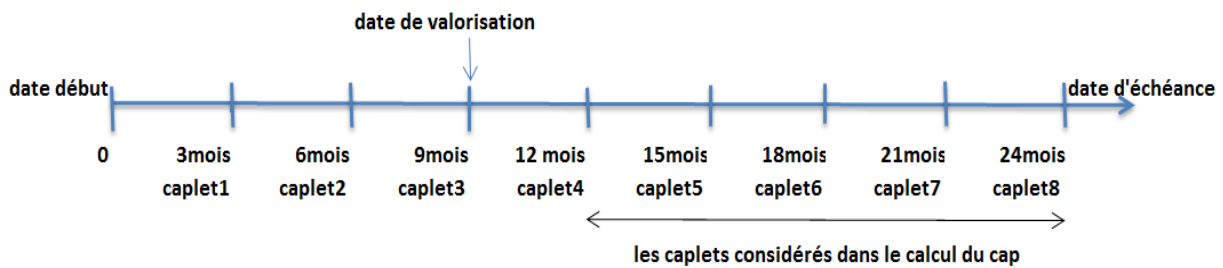


Figure 48 : Tombée de la date de valorisation

Dans ce cas, nous ne prenons pas en considération dans le calcul, le flux du 3^{ème} caplet, puisque sa date de constatation a eu lieu 3 mois avant la date de valorisation.

- *Date de valorisation ne coïncide pas avec une date de caplet :*

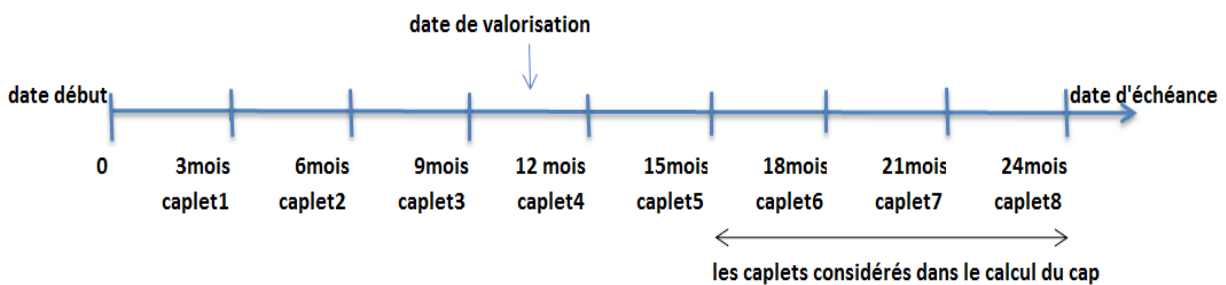


Figure 49 : Tombée de la date de valorisation

Dans ce cas, nous ne prenons pas en considération dans le calcul, le flux du 4^{ème} caplet, puisque sa date de constatation a eu lieu avant la date de valorisation.

Le pricer que nous avons mis en place permet de calculer et d'afficher les dates des caplets et leurs flux actualisés à la date de valorisation, ainsi que le prix du cap qui n'est que la somme de ces flux.

On peut assimiler l'exemple calculé par notre pricer, à un détenteur de cap, qui l'a acheté au 06/03/2013, et qui voulait le valoriser à la date 06/07/2013.

Ce cap engendre 6 payoffs à partir de la date de valorisation, donc le détenteur a une option dont le prix est la somme actualisés de ces caplets, cette somme est égale, dans ce cas, à 0,88%.

III.5.2 Pricer de floor :

La mise en place d'un pricer de floor nécessite les mêmes procédures de calcul et les mêmes données que nous avons utilisées pour valoriser les caps, seule la formule de Black qui change.

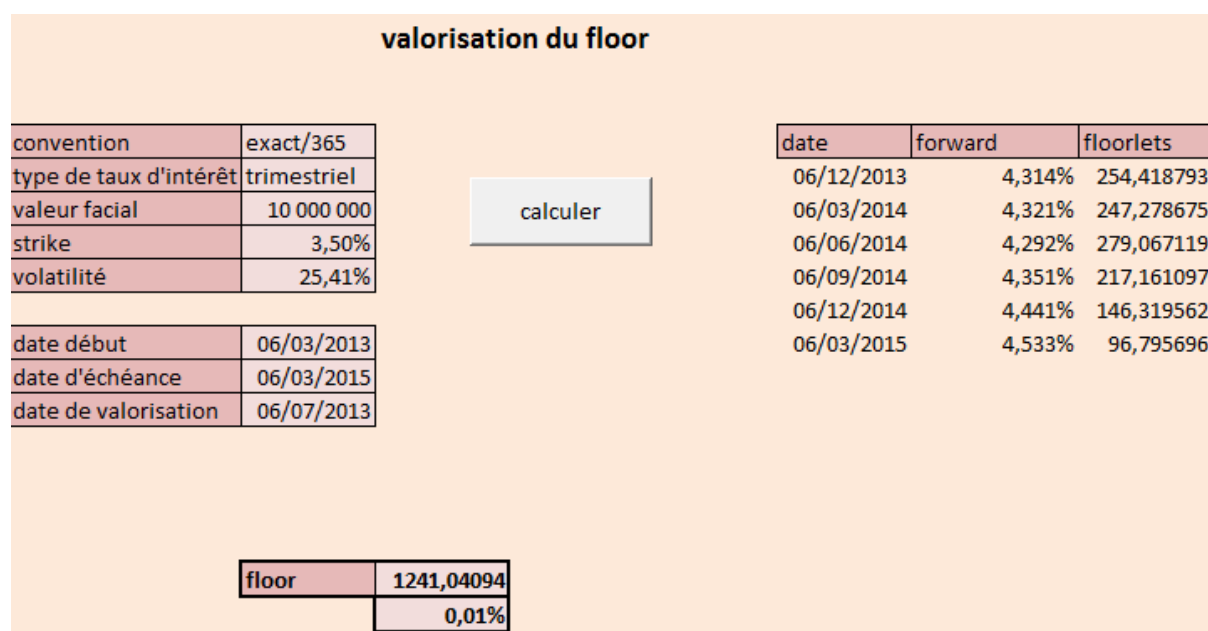


Figure 50 : Pricer de floor via VBA Excel

De la même manière, nous avons calculé les dates de tombées des floorlets qui viennent après la date de valorisation ainsi que leurs flux actualisés. Puis nous avons déterminé la valeur du floor comme étant la somme de ces flux.

III.5.3 Pricer de collar :

La mise en place d'un pricer de collar suit la même logique de calcul, puisque c'est une combinaison d'achat de cap et de vente de floor ayant les mêmes caractéristiques à l'exception du strike qui est différent : $[K_{floor} < K_{cap}]$.

Donc il suffit de calculer les caplets et les floorlets et de faire la soustraction de la somme actualisée des floorlets de celle des caplets pour obtenir la valeur du collar.

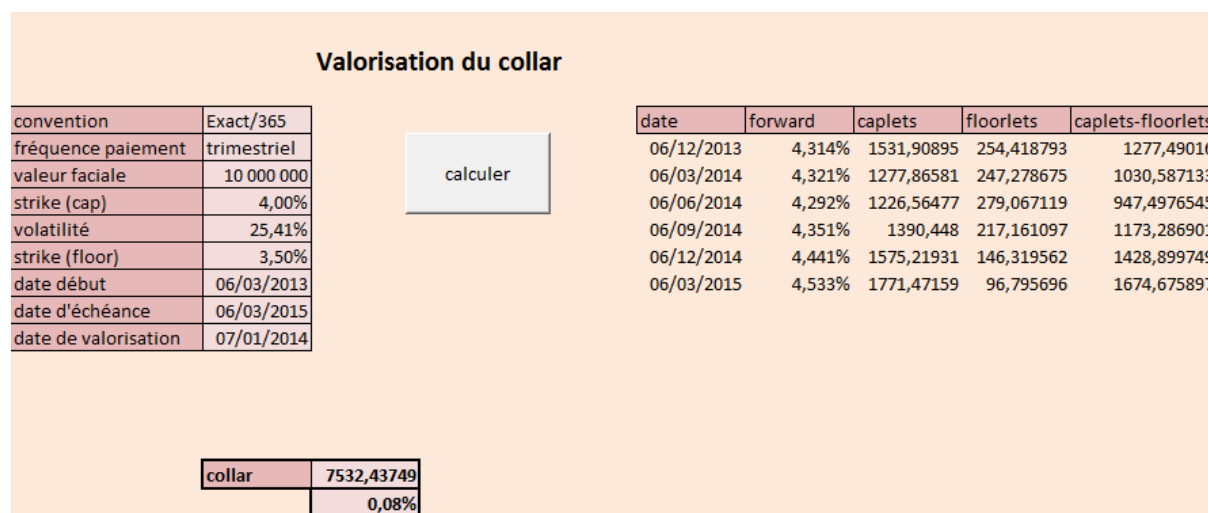


Figure 51 : Pricer du collar via VBA Excel

L'application permet de calculer et d'afficher les flux de paiement durant la période de couverture, ce qui permet d'obtenir le prix du collar.

Dans cet exemple, on a valorisé un collar qui est une combinaison de cap et de floor traités dans les exemples précédents. Nous remarquons que le prix du collar qui est de 0.08% est inférieur au prix du cap calculé précédemment dont la valeur est 0.88%. Ce qui paraît logique puisque le collar, contrairement au cap, limite les rendements en cas de baisse de taux.

La valeur du prix du caller est très petite, parce que l'intervalle entre le taux plafond et le taux plancher est réduit, ceci veut dire que si les taux dépassent le taux plafond, le collar est exercé, mais si les taux franchissent le taux plancher, on ne bénéficie pas de cette baisse qui est fort probable puisque le taux plancher est assez élevé (proche du taux plafond).

IV. Les options sur obligations :

Après avoir déterminé, dans le premier chapitre, les caractéristiques d'une obligation classique ainsi que la méthode de son évaluation, nous allons voir ce que sont les obligations avec options.

Une option sur obligation est le droit d'acheter ou de vendre une obligation particulière à une date future donnée et à un prix spécifié. Ces options sont en général cotées sur le marché, mais des options de ce type sont souvent incluses dans des émissions d'obligations, c'est ce qu'on appelle des obligations avec options.

Il existe de nombreuses options européennes sur obligations, mais nous allons nous concentrer sur les options de remboursement anticipé.

Les obligations ayant ce genre d'options sont les obligations remboursables au gré de l'émetteur (ou callable bonds) et les obligations remboursables au gré du souscripteur (ou puttable bonds).

IV.1 Callable bonds :

C'est une obligation avec une option qui permet à l'émetteur d'avoir le privilège de racheter l'obligation à une certaine date et à un certain prix avant qu'elle n'atteigne son échéance. Donc, c'est l'investisseur qui se retrouve vendeur de cette option à l'émetteur. Le prix d'exercice est le prix auquel l'émetteur convient de rembourser l'obligation. En général, l'option de remboursement anticipé ne peut être exercée dans les premières années de vie de l'obligation. À partir du moment où cet exercice est possible, le prix d'exercice est le plus souvent une fonction décroissante du temps.

Ainsi, l'émetteur a une option qu'il paye en offrant un taux nominal plus élevé. S'il y a une baisse des taux d'intérêts sur le marché avant la date d'exercice du call, l'émetteur pourra refinancer sa dette à un niveau de marché meilleur et sera motivé pour racheter les obligations qu'il a à l'origine émises.

De même, l'investisseur a l'avantage de recevoir des valeurs de coupons plus importantes de celles qu'il aurait eu avec une obligation non-rachetable. Mais, si les taux d'intérêt baissent, l'émetteur exerce son option et rachète l'obligation de l'investisseur qui investira à un taux bas.

IV.2 Puttable bonds :

C'est une obligation avec une option qui permet au détenteur de la revendre à l'émetteur à n'importe quel moment au prix convenu au moment de l'émission. Ainsi, Le détenteur de l'obligation a le droit, mais pas l'obligation, d'exiger le remboursement tôt du principal. Cette option est donc vendue par l'émetteur à l'investisseur et peut être exercée à une ou plusieurs dates spécifiées.

Ce type d'obligation protège l'investisseur : si les taux d'intérêt sont en hausse, la valeur future des paiements de coupons deviendra moins précieuse. Par conséquent, l'investisseur préférera de se débarrasser de cette obligation et de la revendre à l'émetteur pour pouvoir prêter le montant ailleurs à un niveau supérieur. L'investisseur est prêt à payer une telle protection en acceptant un rendement inférieur relatif par rapport à celui des obligations classiques.

Il y a plusieurs exemples de clauses optionnelles semblables aux options sur obligation tels que :

- Les possibilités de remboursement anticipé sur les emprunts immobiliers auprès des banques.
- Lorsque la banque propose à un client un prêt au taux de 5 % pour cinq ans et lui donne deux mois pour se décider. C'est comme si le client avait obtenu une option de vente de durée de vie deux mois et dont le sous-jacent est une obligation à 5 ans avec un taux de coupon de 5 %.

IV.2 Valorisation de l'option sur obligation par le modèle de Black :

L'hypothèse la plus commune est que le prix de l'obligation suit à l'échéance de l'option une loi log-normale. Le modèle peut donc être utilisé pour évaluer l'option en considérant que F_B est le prix forward de l'obligation. σ_B est défini de façon à ce que $\sigma_B \sqrt{T}$ soit l'écart-type du logarithme du prix à la date T . Les équations définissant les prix d'options sur cette obligation sont :

$$c = P(0, T) [F_B N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) + \sigma_B^2 \frac{T}{2}}{\sigma_B \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) - \sigma_B^2 \frac{T}{2}}{\sigma_B \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

Pour le paramètre F_B , il est calculé par la formule :

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)}$$

- B_0 est le prix de l'obligation à la date 0
- I est la valeur actuelle des coupons qui sont payables pendant la durée de vie de l'option.

Dans cette formule, il faut noter que les prix de l'obligation sont des prix coupon couru (dirty price).

Le prix d'exercice devrait être un prix d'exercice coupon couru. Il faut donc être vigilant dans la définition des caractéristiques de l'option. Si le prix d'exercice est défini comme le montant qui sera échangé au moment de l'exercice, le prix K devra être égal à ce montant. Si par contre, comme c'est plus courant, le prix d'exercice est le prix pied de coupon (clean price) applicable à la date d'exercice, K doit être égal au prix d'exercice plus le coupon couru.

IV.2.1 Volatilité de taux:

Nous pouvons trouver la volatilité de prix à partir de la volatilité de taux, en introduisant la duration D (voir page 28) qu'on a traité dans le chapitre précédent. La relation entre les variations des prix forward F_B et les variations des taux forward y_F s'écrit :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D * \Delta y_F$$

Ou encore

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D * y_F * \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

La volatilité du prix forward est reliée à celle du taux forward, de manière approximative selon la relation suivante :

$$\sigma_B = D * y_0 * \sigma_y$$

Avec y_0 la valeur initiale de y_F .

IV.2.2 Exemple de calcul du prix d'une option sur obligation :

Soit une option sur obligation ayant les caractéristiques suivante :

- Maturité de l'obligation : 9 ans
- Nominal : 1000
- Prix de l'obligation (dirty price) : 900
- Prix d'exercice (dirty price) : 1000
- Coupon : 8%
- Fréquence de paiements des coupons : semestrielle
- Maturité de l'option : 13 mois
- Volatilité du prix forward : 10%
- Date de valorisation : 05/03/2014
- Taux sans risque à 6 mois : 3,492%
- Taux sans risque à 12 mois : 3,541%
- Taux sans risque 13 mois : 3.56%

Calcul :

Donc, la valeur actuelle des coupons : $40 * e^{-0.5*3.49\%} + 40 * e^{-1*3.54\%} = 77,92$

Et :

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)} = \frac{900 - 77.92}{e^{-\frac{13}{12} * 3.56\%}} = 854,404197$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{854.404}{1000}\right) + 0.1^2 * \frac{13/12}{2}}{0.1 \sqrt{\frac{13}{12}}} = -1,45973688$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{854.404}{1000}\right) - 0.1^2 * \frac{13/12}{2}}{0.1 \sqrt{\frac{13}{12}}} = -1,56382018$$

$$N(d_1) = 0,0721812$$

$$N(d_2) = 0,0589299$$

D'après les calculs effectués ci-dessus, nous appliquons la formule de Black et nous obtenons le prix de l'option :

$$C = e^{-\frac{13}{12} * 3,56\%} * (854.404 * 0,0721812 - 1000 * 0,0589299)$$

$$C = 2,63826922$$

NB : Si le prix d'exercice est clean price alors:

$$K = \text{prix d'exercice} + \text{coupon couru} = 1000 + \frac{1}{6} * 4\% * 1000$$

IV.3 Elaboration d'un pricer d'option sur obligation :

Nous avons établi un pricer d'options sur obligation qui permet de calculer et d'afficher les valeurs des coupons tombant avant la date d'échéance de l'option, et actualisés à la date de valorisation. Ces coupons servent au calcul du prix forward entrant dans la formule de Black.

Aussi cette application permet de déterminer la volatilité du prix forward, qui nécessite le calcul de la duration du sous-jacent (l'obligation).

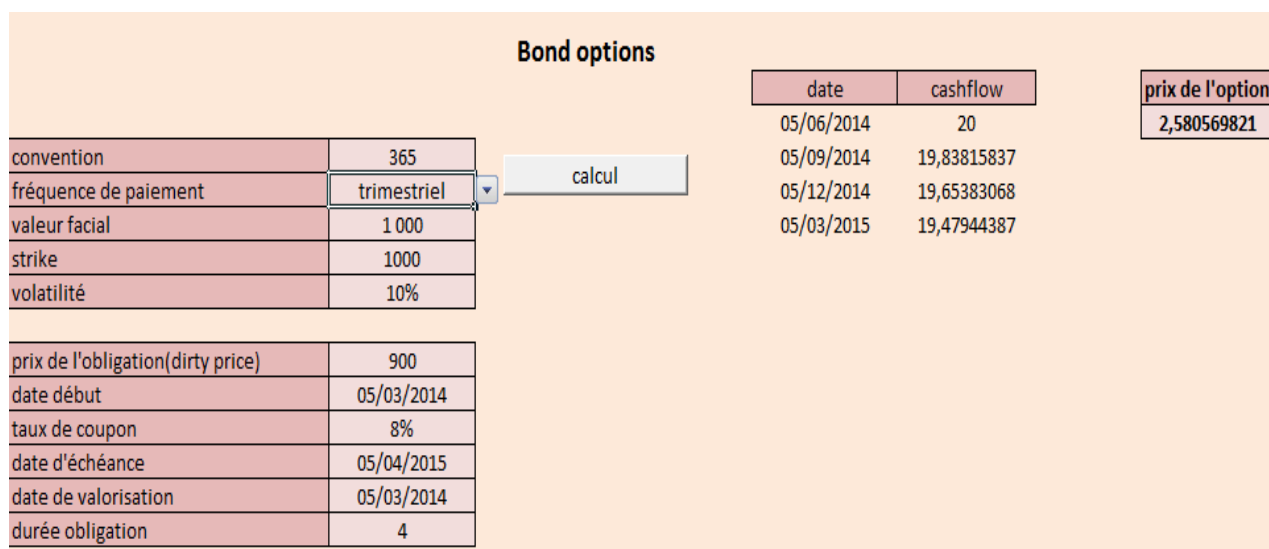


Figure 52 : Pricer d'option sur obligation

Convention : c'est la base de calcul, nous supposons que l'année contient 365 jours (nous ne prenons pas en considération les années bissextiles) et le nombre de jours entre deux dates se calcule par le nombre de jours calendaires exact.

Fréquence de paiement : nous avons programmé le calcul du prix du cap, en tenant compte de trois fréquences de paiements : trimestrielle, semestrielle et annuelle.

Valeur faciale : c'est le nominal qui sert au calcul des coupons

Strike : prix d'exercice

Volatilité : volatilité de prix calculée à partir de la volatilité de taux forward

Date début : date d'activation de l'option sur obligation

Date d'échéance : date d'expiration de l'option sur obligation

Date de valorisation : date où nous voulons valoriser le prix de l'option sur obligation.

Ainsi, ce pricer permet de calculer, à partir des données ci-dessus, les coupons qui entrent dans le calcul du prix forward, la volatilité, et d'en déduire le prix de l'option sur obligation.

Conclusion du dernier chapitre

En se servant du modèle de Black, nous sommes arrivées à élaborer des pricers qui permettent de calculer automatiquement les prix des dérivés de taux à partir de leurs caractéristiques.

Vu que nous avons travaillé sur des données marocaines, nous étions contraintes de calculer un historique de forwards, pour pouvoir calculer la volatilité qui n'est pas observable sur le marché.

Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire est de concevoir une application qui permet de valoriser à n'importe quelle date, les prix des dérivés de taux, en utilisant les prévisions issues de la modélisation de la structure par terme.

Dans ce contexte, il serait opportun de mentionner que la structure par terme des taux est parmi les problématiques financières les plus complexes auxquelles, il n'était pas évident de trouver des réponses définitives.

Le premier chapitre de ce mémoire, n'était qu'une initiation à notre sujet, où nous avons introduit les notions générales relatives aux marchés financiers et au marché de taux.

Le deuxième chapitre a traité la modélisation de la structure par terme par les modèles stochastiques et déterministes, il est à signaler en guise de synthèse générale des résultats obtenus des trois modèles : Nelson Siegel, Vasicek et CIR, que pour chaque date la courbe du rendement du marché et celle du rendement théorique estimée par l'un des trois modèles étaient très proches. Ce qui montre qu'effectivement ils modélisent bien la courbe réelle.

Il est à noter que dans ce chapitre, pour presque toutes les dates qu'on a choisies pour faire le back testing, le modèle de CIR a bien approché la courbe des taux du marché.

Le dernier chapitre était consacré à la valorisation des dérivés de taux, pour cela nous sommes arrivés à adapter les données marocaines au modèle de Black, par le biais du calcul des taux forward à partir des rendements zéro coupon, ce qui nous a permis d'estimer la volatilité comme étant le seul paramètre inconnu du modèle.

L'automatisation de ces pricers des dérivés de taux nous a permis de calculer les prix des options à partir de leurs caractéristiques.

Au terme de ce mémoire, nous aimerions dire qu'il est possible d'étendre la problématique de structure par terme en procédant à sa modélisation par des modèles à deux variables d'état.

Il est également possible de valoriser les prix des dérivés de taux en ayant recours à des modèles autres que celui de Black 1976.

Bibliographie/Webographie :

Bibliographie :

- [1] HULL, John. Options, futures et autres actifs dérivés. PEARSON Education, New Jersey, 6^{ème} Ed, 2007, 348 page
- [2] PORTAIT, Roland. Poncet, Patrice. FINANCE DE MARCHE. DALLOZ, coll. "Dalloz gestion", 3e Ed, 2011, 5 pages
- [3] QALLY, Yassine. Calcul stochastique, 2013
- [4] MARRI, Fouad. Séries chronologiques, 2013
- [5] THEROND, Pierre. Génération de scénarios économiques Modélisation des taux d'intérêt. [document électronique]. France, Lyon, 2003, <http://www.pierretherond.fr/wp-content/uploads/cours/Taux.pdf>
- [6] JAUVION, Gregoire. Adaptation de la structure part terme des taux aux conditions de marché actuelle. [document électronique]. France, Paris, ISUP-Ecole Centrale, 2009, [http://www.ressources-actuarielles.net/ext/isfa/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/8c32060711e1d541c1257a1800654f3e/\\$FILE/ATT6YGF9.pdf/Memoire%20&%20Resume%20JAUVION%20Gregoire.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/ext/isfa/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/8c32060711e1d541c1257a1800654f3e/$FILE/ATT6YGF9.pdf/Memoire%20&%20Resume%20JAUVION%20Gregoire.pdf)
- [7] HERLEMONT, Daniel. Projet Courbe de Taux Estimation de la courbe zéro coupon spline polynomiaux. [document électronique]. France, 2007, <http://www.yats.com/doc/fixed-income-tp-002-statements.pdf>
- [8] DeMarzo, Peter et al. Les options. [document électronique]. France, Pearson Education, 2011, <http://www.ces.univ-paris1.fr/membre/capelle/Cours/FE/BerkDeMarzo%20-%20chap4.pdf>

- [9] Régis Bourbonnais. 2001. « Econométrie » Manuel et Exercices corrigés ». Paris. 5ème édition DUNOD. 345 p
- [10] LAHLOU, Kaoutar. TOUATI, Abdellah. P. 2013. «Conception d'une application pour le Pricing, la valorisation et la gestion des Swaps de taux». Rapport de Projet de Fin d'études. Rabat. Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée.
- [11] BIAD, Sahar. HATIM, Sara. P. 2009. «Modélisation de l'évolution de la courbe des taux et réalisation d'un simulateur de performance». Rapport de Projet de Fin d'études. Rabat. Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée.
- [12] HITMI, Fayçal. P. 2002. «Estimation de la Structure par Termes des Taux d'Intérêt». Rapport de Projet de Fin d'études. Rabat. Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée.

Webographie :

- [1] EFE. Maîtriser les produits dérivés de taux.[document électronique].
<http://www.efc.fr/formation/maitriser-les-produits-derives-de-taux.html/>
- [2] CDVM. Obligations.[enligne]. <http://www.cdvm.gov.ma/espace-epargnants/obligations/> [01 /04/2014]
- [3] Desjardins. Les caractéristiques des obligations.
[enligne].<https://www.desjardins.com/coopmoi/plans-action-conseils/epargne-placements/caracteristiques-obligations/>[01 /04/2014]
- [4] Iotafinance. Le calcul du prix d'une obligation. [document électronique].<http://www.iotafinance.com/Article-Calcul-du-Prix-d-une-Obligation.html/>
- [5] IEFP.Obligations.[enligne].<http://www.lafinancepourtous.com/Decryptages/Dossiers/Obligations/Comprendre-les-obligations/Les-caracteristiques-d-une-obligation>[08 /04/2014]

- [6] MAINA, Eric. Les obligations avec options de remboursement anticipées ou « Collable ». [enligne]. <http://www.gestionobligataire.fr/les-options-de-remboursement-anticipees-ou-callable/>[09 /04/2014]
- [7] WikiMemoires. La banque populaire du Maroc : la présentation et l’histoire. [en ligne]. <http://www.wikimemoires.com/2011/04/la-banque-populaire-bp-presentation-et-histoire/>[01/05/2014]
- [8] TANDU, Ocean. BANQUE POPULAIRE DU MAROC : CE QU'IL FAUT SAVOIR.[document électronique].Maroc,Rabat ,<http://www.tonton-beaugars.over-blog.com/article-banque-populaire-maroc-qu-il-faut-savoir-86030120.html/>
- [9] FiMarkets.Front, middle et back-office.[enligne].http://www.fimarkets.com/pages/front_back_middle_office.php[04/05/2014]
- [10] FEDERATION BANCAIRE FRANCAISE. Back et Middle Office de la banque de marchés.[enligne].<http://www.fbf.fr/fr/secteur-bancaire-francais/metiers-de-la-banque/metiers-de-la-banque/back-et-middle-office-de-la-banque-de-marches>[04/05/2014]
- [11] CAMBISTE. Salles des marches.[enligne].
<http://www.cambiste.info/sdmpage/market/salle10.php>
[04/05/2014]
- [12] Iotafinance. La construction d'une courbe de taux zéro-coupon par la méthode dite du « bootstrapping ». [document électronique].<http://www.iotafinance.com/Article-Construction-d-une-Courbe-de-Taux-Zero-Coupon-par-Bootstrapping.html>
- [13] BNPPARIBAS.LesMarchésFinanciers.[enligne].http://entreprises.bnpparibas.fr/marches_taux/[01/05/2014]

Annexes

Annexe I :

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien (standard) si :

- B_0
- Les trajectoires $t \rightarrow B_t$ sont presque sûrement continues
- Le processus est $(B_t)_{t \geq 0}$ à accroissement indépendants et stationnaires:
 - 1) $\forall s < t, \quad B_t - B_s$ est indépendant de $\sigma(B_u; u \leq s)$.
 - 2) $\forall s < t, \quad B_t - B_s \sim N(0, t - s)$

Lemme d'Itô :

Le lemme d'Itô est utilisé dans les processus stochastiques. Si est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB_s$$

Le processus d'Itô s'écrit :

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB_t$$

Avec B_t un mouvement brownien, μ le drift et σ la volatilité.

Si $f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors :

$$df(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} B_t$$

Stationnarité :

Un processus X_t est dit stationnaire au sens large si et seulement si

- $E(X_t)$ est constante (indépendante de t)
- $E(X_t^2) < \infty$ indépendant de t
- $\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E\{(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))\}$ est indépendante de $t, \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\rho(k) = corr(X_t, X_{t+k}) = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_{t+k})}}$, la fonction d'autocorrélation.

Bruit blanc :

X_t est un bruit blanc et on note $X_t \sim BB(0, \sigma^2)$, si

- X_t est centré $E(X_t) = 0$
- $var(X_t) = \sigma^2$
- $\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = 0$ pour $k \neq 0$

Tout bruit blanc est un SSL.

Bruit blanc gaussien :

X_t est un bruit blanc gaussien si : $X_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2)$

Statistique de Durbin Watson :

Le test de Durbin-Watson est utilisé pour détecter l'autocorrélation entre les résidus d'une régression linéaire

$$d = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^N e_t^2}$$

Si $d=2$, donc il n'y a pas d'autocorrélation des erreurs.

Processus MA(1) :

Un processus MA(1) est processus moyenne mobile d'ordre 1, défini par :

$$X_t = \mu + a_t + \theta a_{t-1}$$

Où $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$ et $\theta \in \mathbb{R}$

- $E(X_t) = \mu$
- $var(X_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2$
- $\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ \theta\sigma^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

Tout processus MA(1) est SSL.

Processus AR(1) :

Processus AR(1) est un processus autorégressif d'ordre (1) :

$$X_t = \mu + \varphi X_{t-1} + a_t$$

Tel que $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$ $\mu, \varphi \in \mathbb{R}^2$ et $\phi \neq 0$

un modèle ARMA(1, 1)

ce modèle s'écrit de la façon suivante :

$$X_t - \mu - \varphi X_{t-1} = \mu + a_t + \theta a_{t-1}$$

Où $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$

Annexe II

Le test de Dickey-Fuller

Stratégie des tests de racine unitaire

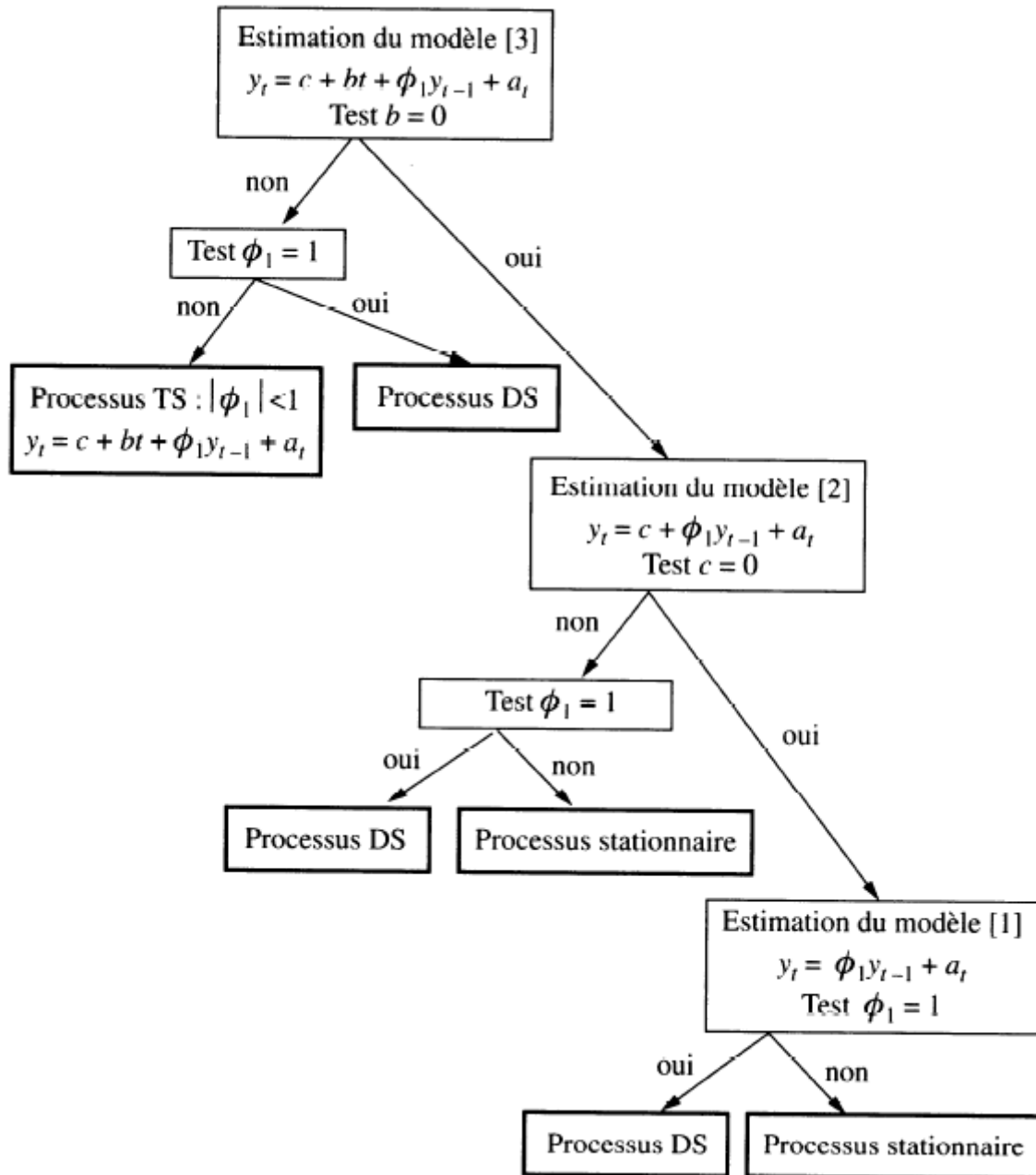


Figure 53 : stratégie des tests de Dickey Fuller

Annexe III
valeurs critiques du test Dickey Fuller

Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour $\varphi = 1$:

T	1%	5%	10 %
Modèle 1			
100	-2.60	-1.95	1.61
250	-2.58	1.95	-1.62
500	-2.58	-1.95	-1.62
∞	-2.58	-1.95	-1.62
Modèle 2			
100	-3.51	-2.89	-2.58
250	-3.46	-2.88	-2.57
500	-3.44	-2.87	-2.57
∞	-3.43	-2.86	-2.57
Modèle 3			
100	-4.04	-3.45	-3.15
250	-3.99	-3.43	-3.13
500	-3.98	-3.42	-3.13
∞	-3.96	-3.41	-3.12

Figure 54 : Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour $\varphi=1$

Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour la constante et tendance :

Modèle 2						
Constante						
T	1%	5%	10 %			
100	3.22	2.54	2.17			
250	3.19	2.53	2.16			
500	3.18	2.52	2.16			
∞	3.18	2.52	2.16			

Modèle 3						
T	Constante			Trend		
	1%	5%	10 %	1%	5%	10 %
100	3.78	3.11	2.73	3.53	2.79	2.38
250	3.74	3.09	2.73	3.49	2.79	2.38
500	3.72	3.08	2.72	3.48	2.78	2.38
∞	3.71	3.08	2.72	3.46	2.78	2.38

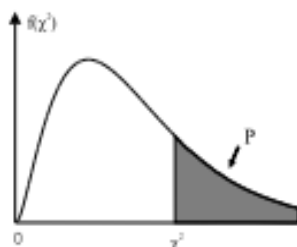
Figure 55: Valeurs critiques de Dickey Fuller simple pour la constante et tendance

Annexe VI

Table de loi Khi-deux :

Table de la loi du Khi-deux

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassées



ν	P = 0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00004	0,0002	0,001	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,39	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672

Nota. ν est le nombre de degrés de liberté.
 Pour $\nu > 30$, on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ suit la loi normale centrée réduite.

Figure 56 : Table de loi Khi-deux

Annexe V :

Pricing d'obligation par VBA Excel :

Nous avons programmé la méthode de valorisation de l'obligation sur VBA Excel, de sorte que nous pouvons, en entrant les caractéristiques de l'obligation sur UserForm et en cliquant sur calculer, avoir tous les flux de l'obligation depuis la date de valeur jusqu'à la date d'échéance ainsi que la valeur du coupon couru, du dirty price et du clean price.

Figure 57 : Caractéristiques nécessaires pour valoriser l'obligation

Valorisation d'une obligation		CashFlows
Valeur nominale	100000	3949,3935
Coupon	4%	3854,9473
taux sans risque	2,45%	3762,7597
date d'émission	28/04/2007	3672,7767
date de jouissance	28/04/2007	93208,583
date d'échéance	25/04/2014	
date de valeur	15/10/2009	
maturité	4,528767123	
coupon couru	1,896%	
dirty price	108,448%	
clean price	106,553%	

Figure 58 : Valorisation de l'obligation par VBA Excel

Annexe VI :

Vu que les pricers des quatre dérivés de taux reposent sur le même modèle et sur le même principe de calcul, il suffit de vérifier la fiabilité de l'un de ces pricers pour s'assurer de celle des autres. Donc, nous allons essayer de comparer les résultats calculés par notre pricer du cap avec ceux déterminés par Bloomberg.

Puisque on ne peut pas valoriser le prix du cap sur Bloomberg en se basant sur les données marocaines, nous avons utilisés comme base pour le calcul, la courbe USD ISDA 15 ans, qui est proche de la courbe marocaine. Et qui, doit ainsi, fournir des prix proches de ceux calculés sur la base de la courbe marocaine.

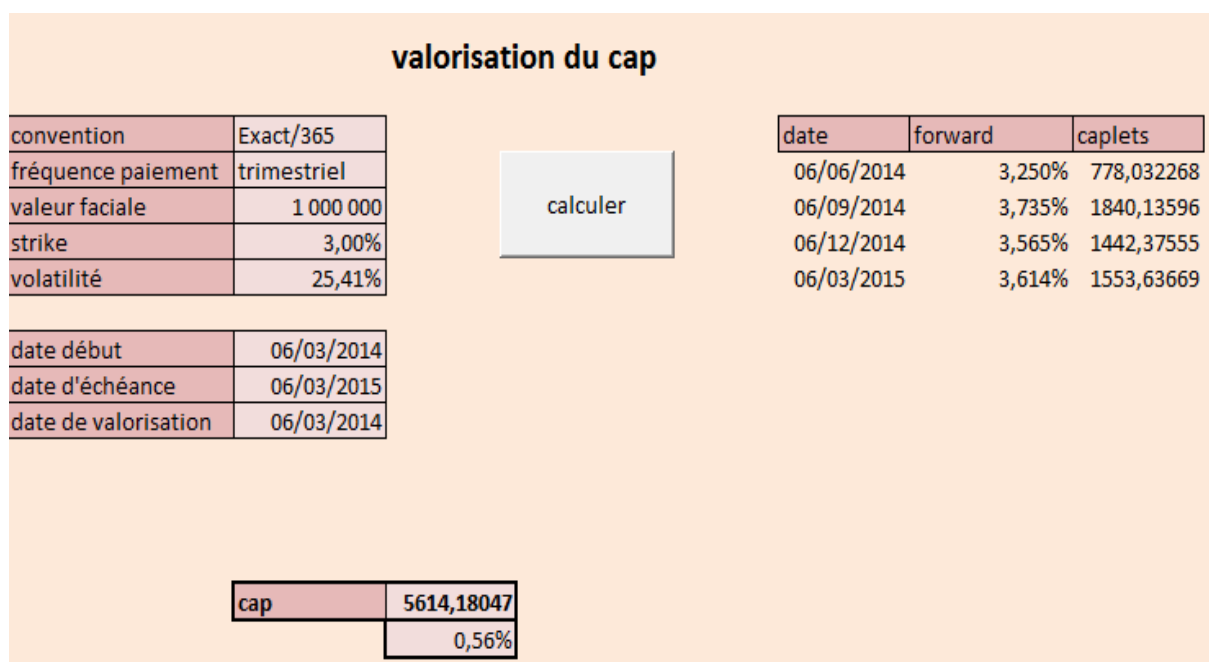


Figure 59 : Pricer du cap

CMS Cap		CCP	OTC	Ctp	CAP CNTRPARTY	ID deal	20) Propriétés
3) Charger 32) Sauvegarder 34) Ticket 37) Marge CCP 43) Send to VCON/TR							
Type	Cap	CMS					
Notionnel	1M				Indice	USISDA15	
Devise	USD				Tenor	15 Year	
Effectif	03/06/2014	0 YR	X	9 MO	Levier	1.00000	
Maturité	03/06/2015				Spread	0.00 pb	
Fréq Pmt	Trimestre	Single Look			BaseCalcul	ACT/365	
Fixing	Trimestre				Type reset	En avance	
Stratégie							
Strike Cap	3.00000 %	Rcv	X	1	Digital		%
Option							
Position	Long						61) Détail
Marché							
Dt courbe	03/06/2014	OIS DC Stripping OFF					
Crb escpte	23 Mid	USD Bloomberg Curve			Valoris.	03/06/2014	
Cube vol	FLAT	25.41 %			Crb fwd	23 Bid	USD Bloomberg Curve
Valorisation					Modèle	Black-Scholes	Ajust conv Lognormal
Strike ATM	3.44384	Calculer	Prime		DV01		-0.07
Vlr marché	4.86	Vlr Rdmt	Prime		Gamma (1pb)		0.00
					Véga (1%)		0.06
					Thêta(1-jour)		0.00

Figure 60 : Prix du cap calculé par Bloomberg

Le prix du cap déterminé par Bloomberg qui est 0.49% est très proche de celui calculé par notre pricer qui vaut 0.56%. Cette différence assez légère entre les deux prix est due aux différences qui existent entre la courbe marocaine et la courbe USD 15 ans.