
Résumé et mots clés

Le marché obligataire marocain est essentiel dans le secteur financier, principalement axé sur les échanges de Bons de Trésor émis par l'État. Ces obligations sont considérées comme des actifs financiers à faible risque de défaut, mais elles sont exposées aux fluctuations des taux d'intérêt. Notre objectif est de prévoir ces fluctuations afin de prendre des décisions éclairées et de se protéger contre les risques.

Pour ce faire, nous avons comparé les modèles de construction de la courbe des taux, tels que le modèle de Nelson-Siegel et le modèle de Nelson-Siegel Svensson, ainsi que l'utilisation du Deep Learning avec un modèle hybride CNN-LSTM. Nous cherchions à déterminer la méthode la mieux adaptée au marché marocain pour prévoir et évaluer les portefeuilles obligataires. Cette étude nécessitait une calibration préalable des modèles.

Les résultats contribueront à améliorer la gestion des actifs de la CDG Capital en fournissant des informations précises sur la courbe des taux marocaine pour des décisions stratégiques.

Mots-clés : Marché obligataire — Bons de Trésor — Risques de taux — Modèles de courbe des taux — Deep Learning — Gestion de portefeuille — Nelson-Siegel — CNN-LSTM — Nelson-Siegel- Svensson

Abstract and keywords

The Moroccan bond market plays a crucial role in the financial sector, primarily focused on the trading of Treasury Bills issued by the government. These bonds are considered low-risk financial assets in terms of default, but they are exposed to fluctuations in interest rates. Our objective is to forecast these rate fluctuations in order to make informed decisions and hedge against risks.

To achieve this goal, we compared different methods for constructing the yield curve, such as the Nelson-Siegel model and the Nelson-Siegel Svensson model, as well as the use of Deep Learning with a hybrid CNN-LSTM model. We aimed to determine the most suitable method for the Moroccan market to forecast and evaluate bond portfolios. This study required prior calibration of the models.

The findings of this research will contribute to enhancing the asset management of CDG Capital by providing accurate insights into the Moroccan yield curve for strategic decision-making.

Keywords : Bond market, Treasury Bills, Interest rate risks, Yield curve models, Deep Learning, Portfolio management, Nelson-Siegel, CNN-LSTM, Nelson-Siegel-Svensson.

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, ainsi qu'à mes sœurs Hajar, Doha, mon petit frère Hamza, et à mes amis, en particulier à

Wassim, je dédie ce mémoire avec une gratitude profonde et sincère. Votre amour inconditionnel, votre soutien indéfectible et votre présence constante ont été les fondations solides de mon parcours académique. Vous avez été mes sources d'inspiration, mes plus grands supporters et mes guides précieux à chaque étape de cette aventure. Ce mémoire est un témoignage de mon amour et de ma reconnaissance éternels envers vous tous.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à mon école, l'Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée à Rabat, ainsi qu'à l'ensemble du corps professoral qui m'a accompagné tout au long de mes trois années d'études à l'institut.

Au terme de ce travail, je souhaite adresser mes remerciements à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réussite de mon projet de fin d'études. Je tiens tout particulièrement à remercier le professeur M. Khalil Said pour son encadrement, ses conseils judicieux et toutes les connaissances qu'il m'a transmises.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à toute l'équipe de la salle de marché de CDG Capital pour leur contribution à ce travail, en particulier à mon encadrant M. Anas Lamrabet pour son accueil, sa confiance, son aide et ses conseils précieux.

Enfin, mes vifs remerciements vont à mes parents, mes proches et mes amis qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

Institut National de Statistique et Économie Appliquée

Rabat, Juin 2023

Table des matières

Introduction Générale	14
I Contexte Général et Problématique	16
Présentation de l'organisme d'accueil	17
1 Marchés financiers et Courbe des taux : Notions et définitions	21
1 Généralités sur les marchés financiers.	22
1.1 Définition et rôle du marché financier :	22
1.2 Organisation du marché financier :	22
1.3 Types de marchés financiers	23
2 Notions de base sur le taux d'intérêt :	28
2.1 Définition du taux d'intérêt	28
2.2 Classification des taux d'intérêt	28
3 La courbe des taux	34
3.1 Définition de la courbe des taux	34
3.2 Les facteurs de déformation de la courbe des taux	35
3.3 Les différentes formes de la courbe des taux	36
3.4 Inversion de la courbe des taux	37
3.5 Aplatissement de la courbe des taux	38
2 Construction de la courbe des taux zéro-coupon	40
1 Choix de la courbe zéro-coupon	41
2 Construction de la courbe zéro-coupon	43
2.1 Importation de la base	43
2.2 Transformation en taux actuariels	44

2.3	Interpolation de la courbe zéro-coupon	45
2.4	Application de la méthode de Bootstrapping	47
3	Problématique	49
II Modélisation, Prédiction, Application et Résultats		50
1 Modélisation paramétrique de la courbe des taux zéro-coupon		51
1	Le modèle de Nelson-Siegel	53
1.1	Estimation des paramètres du modèle	54
1.2	Construction de la courbe	55
2	Le modèle de Nelson-Siegel-Svensson	57
2.1	Estimation des paramètres du modèle	58
2.2	Construction de la courbe	59
3	Choix du modèle entre NS et NSS : Méthodes statistiques	61
4	Optimisation du modèle NESLON-SIEGEL-SVENSSON	65
2 Multihead CNN-LSTM et NSS : prédiction et construction de la courbe des taux		68
1	Introduction aux modèles deep learnings	69
1.1	Structure d'un neurone	69
1.2	Fonction de combinaison	70
1.3	Fonction d'activation	70
1.4	Modèle des réseaux de neurones	72
2	Types de réseaux de neurones récurrents	73
2.1	Réseaux de neurones récurrents (RNN)	73
2.2	Long Short Term Memory (LSTM)	74
3	Convolutional Neural Network (CNN)	80
4	Multihead CNN-LSTM	81
4.1	Architecture CNN-LSTM	84
4.2	Application et Résultats	85
3 Application à la valorisation d'un portefeuille obligataire		94
1	Formules d'actualisation pour les titres de créances émis par l'Etat	95

1.1	Évaluation des titres de créances de maturité initiale inférieure à 1 an	95
1.2	Évaluation des titres de créances de maturité initiale supérieure à 1 an	96
2	Résultats et interprétations	98
Conclusion générale		100
Bibliographie		103
Annexe		105
1	Annexe A (construction de la courbe zéros-coupons)	105
2	Annexe B(Modèles NSS et NS)	108
3	Annexe C (Implémentation du Z-score)	112
4	Annexe D (CNN-LSTM)	113
5	Annexe E (Pricer)	119

Table des figures

I.0.1 Logo de la CDG CAPITAL	17
I.1.1 Organisation des marches financiers	23
I.1.1 Explication du FRA	33
I.1.1 Facteur de niveau de la courbe des taux	35
I.1.2 Facteur de pente de la courbe des taux	36
I.1.3 Facteur de courbure de la courbe des taux	36
I.1.4 Courbe "normale" des taux	37
I.1.5 L'inversion de la courbe des taux	38
I.1.6 L'aplatissement de la courbe des taux	39
I.2.1 Courbe des taux actuariel résultant de l'interpolation linéaire	46
I.2.2 Courbe des taux actuariel résultant de l'interpolation cubique naturelle	47
I.2.3 Courbe des taux ZC par bootstrapping	48
II.1.1 Comparaison des courbes obtenus	56
II.1.1 Comparaison des courbes obtenus	60
II.1.1 Courbe regroupant NSS, NSS optimisé et la courbe de marché	67
II.2.1 Structure d'un neurone	69
II.2.2 Fonction Sigmoidé	71
II.2.3 Fonction Tangente hyperbolique	71
II.2.4 Fonction Rectified Linear Unit	72
II.2.5 Fonction Leaky ReLU	72
II.2.6 Un réseau de neurones à 2 couches	73
II.2.1 Un réseau de neurones à 2 couches	74

II.2.2 Cellules du réseau LSTM aux pas de temps $t-1$, t , $t+1$	77
II.2.1 La couche Fully-connected	81
II.2.1 Architecture du modèle hybride CNN-LSTM	83
II.2.2 Évolution des taux pour les maturités 6 mois et 2 ans	85
II.2.3 Évolution du taux pour les maturités 10 ans et 30 ans	85
II.2.4 Évolution du taux 6 mois(à gauche) et 2 ans(à droite)	90
II.2.5 Évolution du taux 10 ans(à gauche) et 30 ans(à droite)	90
II.2.6 Courbe prédite par NSS et CNN-LSTM au 31-05-2023	92
II.3.1 Extrait du portefeuille	98
A0.1 implementation du Z-score	112

Liste des tableaux

I.2.1 Taux de référence de BDT, 28-02-23	44
I.2.2 Calcul du taux actuariel	45
I.2.3 Taux actuariels et taux zc coupon, 28-02-2023	48
II.1.1Calcul des taux de NSI	55
II.1.1Calcul des taux ZC de NSS	60
II.1.1Les mesures de la qualité de l'ajustement	62
II.2.1Résultats de prédiction du modèle CNN-LSTM	91
II.3.1Extrait du portefeuille valorisé au 31-05-2023	98

Liste des abréviations

CNN	Réseau neuronal convolutif
LSTM	Mémoire à court et long terme
NSS	Nelson-Siegel-Svensson
NS	Nelson-Siegel
CDG	Caisse de Dépôt et de Gestion
ZC	Zeros-coupons
TMP	Taux moyen pondéré
AMMC	Autorité marocaine du marché des capitaux

Introduction générale

Dans le secteur bancaire d'investissement, la valorisation du portefeuille est d'une importance capitale, et elle est largement déterminée par la courbe des taux. Avec l'évolution de l'intelligence artificielle et du machine learning, de nouvelles méthodes sont apparues pour améliorer la valorisation des portefeuilles. Cela nous conduit à la question centrale de notre projet : "Comment une approche hybride combinant l'apprentissage profond (CNN-LSTM) et la modélisation financière paramétrique (Nelson-Siegel-Svensson) peut-elle optimiser la valorisation du portefeuille?"

Pour répondre à cette question, notre étude a été structurée autour de deux axes principaux.

Le premier axe a été consacré à la présentation de CDG Capital, à l'introduction des concepts clés relatifs aux marchés financiers et à la courbe des taux. Nous avons détaillé comment cette courbe peut être construite en utilisant des techniques telles que l'interpolation, le bootstrapping, le modèle Nelson-Siegel et finalement le modèle Nelson-Siegel-Svensson.

Dans le deuxième axe, nous avons adopté une approche plus moderne et technologiquement avancée en utilisant un modèle multi-têtes CNN-LSTM pour prédire les rendements de différentes maturités. Ces prédictions ont ensuite été utilisées pour construire la courbe des taux avec le modèle Nelson-Siegel-Svensson, démontrant ainsi une application pratique de l'apprentissage profond dans la construction de la courbe des taux. En outre, nous avons appliqué la courbe des taux obtenue à la valorisation du portefeuille, démontrant comment l'intégration de l'intelligence artificielle et de la modélisation financière traditionnelle peut offrir des avantages significatifs en termes de précision de la valorisation.

Au cours de ce projet, nous avons exploré l'intersection entre la finance traditionnelle et l'intelligence artificielle, fournissant un aperçu précieux de la manière dont cette fusion de

techniques peut améliorer les méthodes existantes de gestion de portefeuille. En outre, nous avons introduit le z-score dans le modèle CNN-LSTM, ce qui a contribué à améliorer la qualité de la prédiction, aboutissant à une prédiction quasi parfaite avec de faibles erreurs. Lors de la prédiction de la valeur du portefeuille à la fin, nous avons obtenu une erreur de précision de seulement 0.629

Première partie

Contexte Général et Problématique

Mise en contexte

Présentation de l'organisme d'accueil

CDG Capital, une filiale détenue à cent pour cent par la Caisse de dépôt et de gestion, a été établie en 2006 conformément à l'Arrêté numéro 284-06 du 11 moharrem 1427 (10 février 2006). Sa création faisait partie de la stratégie de filialisation mise en œuvre par la CDG dans le but de fournir un cadre juridique et légal ainsi qu'un environnement plus adapté aux activités financières de la CDG.



Logo de la CDG CAPITAL

CDG Capital est une banque de financement et d'investissement au service du développement durable de l'économie nationale et de son marché financier. Elle offre des expertises en ingénierie financière, développe une capacité de financement, d'investissement et de distribution utile aux acteurs publics et privés, et gère l'épargne nationale de manière responsable et efficace. CDG Capital occupe une position de premier plan dans les trois domaines d'activité de la banque d'investissement :

- Asset Management ;

-
- Corporate and Investment Banking ;
 - Marché des capitaux.

Voici l'organigramme des membres clés de CDG Capital :

- Président : Khalid Safir
 - Administrateurs
 - Hamid Tawfiki
 - Latifa Echihabi
 - Nouaman Al Aissami
 - Mustapha Lahboubi
 - Meriam Mechahouri
 - Khalid El Hattab
 - Administrateurs indépendants
 - Thierry Sciard
 - Ghislane Guedira

Présentation de la salle de marchés

Le présent projet s'est déroulé au sein de la salle de marchés de CDG Capital, une division de la Caisse de dépôt et de gestion. Cette salle regroupe divers services spécialisés permettant à la banque d'intervenir sur les marchés de capitaux locaux et internationaux. Les desks sont organisés au sein d'un grand espace ouvert et se spécialisent dans différents produits ou segments de marché tels que les actions, les taux, les options, etc. La salle de marchés de CDG Capital est structurée en trois pôles distincts :

Front Office Le front office joue un rôle d'interface directe avec le marché. Il centralise et gère les besoins d'investissement, de gestion de portefeuille et de trading de la salle de marchés et de ses clients. Le front office de CDG Capital comprend les desks suivants :

Desk Taux Le desk taux a pour responsabilité la gestion du portefeuille obligataire de la banque, ainsi que l'intermédiation entre les différents acteurs du marché, tant sur le marché primaire que sur le marché secondaire.

Desk Actions Le desk actions est responsable de l'exécution des opérations de trading et d'arbitrage pour compte propre sur les actions. Il prend des positions afin de bénéficier des opportunités à court terme. Pour accomplir ses missions, le desk s'appuie sur l'analyse fondamentale et technique émise par le desk Analyse et Recherche, ainsi que sur les analyses fournies par différentes sociétés de courtage opérant sur le marché.

Desk Recherche et Analyse Parallèlement aux solutions financières proposées, le desk Recherche et Analyse propose une analyse (quotidienne, hebdomadaire, etc.) des marchés financiers. Afin d'assurer un meilleur accompagnement des investissements, l'équipe du desk Recherche et Analyse réalise des notes de recherche relatives tant au volet macroéconomique qu'aux marchés de taux et de change.

Desk Monétaire Le desk monétaire constitue l'interface du groupe CDG sur le marché monétaire. Il assure la gestion de la position monétaire de la banque CDG Capital et celle de la maison mère CDG. Ce desk offre à ses clients des solutions de placements des excédents de trésorerie et de couverture des besoins de financement, ainsi que l'accès aux conditions de financement du marché interbancaire (prêt/emprunts).

Desk Change Le desk change traite les opérations sur devises aussi bien pour le compte de la CDG Capital que pour le compte de sa clientèle.

Desk produits dérivés et structurés Il a pour mission de fournir des cotations sur les produits dérivés, la prise en charge des opérations de couverture des différents portefeuilles ainsi que la mise en place de nouveaux produits financiers répondant aux besoins d'investissement ou de couverture de ses différents clients (OPCVM, Assurance, Caisse de retraite, etc.).

Middle Office Le middle-office assume les tâches suivantes :

- La vérification des négociations effectuées par le Front Office : celles-ci doivent être conformes à la réglementation et aux bonnes pratiques définies en interne (exemples : abus de marché, délit d'initié, lutte contre le blanchiment, etc.).
- Le contrôle de non-dépassement des limites d'engagement par contrepartie.

-
- Le contrôle de non-dépassement des limites de position, par trader, mais aussi par segment de marché.
 - L'envoi de confirmation, à la contrepartie, par fax, par mail, ou via un logiciel dédié. La confirmation se réfère normalement à un contrat-cadre, qui dépend du type d'instrument traité.

Back Office Le back-office s'occupe de toute la gestion post-négociation des opérations financières. Cette entité assure les fonctions suivantes :

- Vérification (cohérence, conformité) des opérations enregistrées par le Front Office.
- Contrôle de provision (espèces ou titres).
- Vérification des encaissements.
- Gestion de la vie des contrats, suivi des échéances.
- Facturation des commissions.
- Comptabilisation.
- Reporting, notamment à vocation réglementaire.

Chapitre 1

Marchés financiers et Courbe des taux : Notions et définitions

Il est indéniable que le marché obligataire est étroitement, voire principalement, influencé par les taux d'intérêt et leurs variations. Ici, nous débuterons par une présentation des éléments fondamentaux liés aux taux d'intérêt, ce qui nous permettra ensuite d'analyser la structure qui caractérise leur évolution temporelle, notamment la "courbe des taux". Nous mettrons également en avant certaines notions de base utilisées dans sa construction.

Avant de nous pencher sur les différentes caractéristiques du marché obligataire, il est indispensable de se tourner vers l'image globale des marchés financiers et de s'arrêter sur les différentes notions de base relatives à ceux-ci. Les taux d'intérêt sont des éléments essentiels dans ces marchés. Nous nous concentrerons sur la courbe des taux, qui représente graphiquement les rendements offerts par les différents instruments financiers en fonction de leur échéance. Comprendre la courbe des taux est crucial pour évaluer les perspectives économiques et anticiper les mouvements futurs des taux d'intérêt. Ainsi, nous explorerons les facteurs qui influencent la forme de la courbe des taux et son interprétation dans le contexte des marchés financiers.

En résumé, ce chapitre fournira une introduction complète aux notions des taux d'intérêt et de la courbe des taux, en soulignant leur importance dans le fonctionnement des marchés financiers, notamment le marché obligataire.

1 Généralités sur les marchés financiers.

1.1 Définition et rôle du marché financier :

Selon la définition de l'AMMC (Autorité Marocaine du Marché des Capitaux), un marché financier est un lieu d'échange où les acheteurs et les vendeurs interagissent pour déterminer les prix en fonction de l'offre et de la demande. Cependant, ce qui distingue un marché financier des autres marchés, c'est que les échanges portent sur des produits ou instruments financiers.

En tant que moteur de l'économie, le marché financier joue un rôle essentiel dans le financement de l'économie et la croissance des investissements. Il permet la rencontre entre les agents ayant besoin de liquidités ou de financement (les vendeurs) et ceux disposant d'un excédent de liquidités (les acheteurs, les épargnants ou les investisseurs). Les échanges sont contractualisés à travers des instruments financiers, communément appelés titres ou valeurs mobilières.

1.2 Organisation du marché financier :

Les titres et valeurs mobilières sont échangés et négociés soit de gré à gré, par entente directe entre les parties, soit sur un marché organisé et réglementé connu sous le nom de Bourse ou Bourse des valeurs. La Bourse des valeurs de Casablanca est le principal marché centralisé et dirigé par les ordres au Maroc, avec la participation des sociétés de bourse, de l'AMMC (Autorité Marocaine du Marché des Capitaux), des banques, de Maroclear, de Bank Al Maghrib (la banque centrale du Maroc) et des OPCVM (Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières).

Les entreprises, l'État et les collectivités publiques émettent des actions et des obligations sur un marché organisé appelé "**marché primaire**" pour répondre à leurs besoins de financement. Ces émissions comprennent des opérations telles que les introductions en bourse, les augmentations de capital et les émissions d'obligations. Une fois que l'émission est terminée, ces mêmes titres peuvent être négociés sur un marché "**secondaire**", qui peut être réglementé ou non réglementé. Sur ce marché secondaire, les investisseurs peuvent acheter et vendre ces titres entre eux, en fonction de l'offre et de la demande.

La figure ci-dessous illustre cela :



Organisation des marchés financiers

1.3 Types de marchés financiers

Le marché des actions : Une action est un "titre de propriété" correspondant à une fraction du capital d'une entreprise, conférant à son détenteur plusieurs droits, dont principalement celui de la rémunération (dividendes) et celui du vote aux assemblées générales, ainsi que le droit à l'information. Ainsi, les actions sont considérées comme un instrument de placement permettant aux investisseurs de devenir associés des entreprises présentes sur le marché.

Le marché des actions regroupe la vente et l'achat d'actions cotées et non cotées de différents types d'entreprises. Les actions cotées peuvent être négociées en bourse, tandis que l'échange des actions non cotées se fait de gré à gré à travers un intermédiaire financier. En bourse, il existe trois types de marchés d'actions :

- **Le marché principal :** C'est le compartiment du marché d'actions où sont échangées les actions des grandes entreprises.
- **Le marché de développement :** C'est le compartiment où sont négociées les actions des entreprises de taille moyenne à fort potentiel.
- **Le marché de croissance :** C'est le compartiment réservé aux entreprises à forte croissance, avec un portefeuille d'opportunités d'investissement prometteur.

Ces différents marchés offrent aux investisseurs une diversité d'options d'investissement en fonction de leurs préférences et objectifs financiers.

Le marché monétaire Le marché monétaire est un marché où s'échangent des titres de courte durée contre des liquidités. Les intervenants principaux sont Bank Al Maghrib

(BAM), les banques, les entreprises et les sociétés de financement. Il se compose d'un marché interbancaire réservé aux banques et d'un marché de titres de créances réservé aux investisseurs.

- **Le marché interbancaire** : Il s'agit du marché où les banques prêtent et empruntent des liquidités à très court terme sans création de titres en contrepartie (prêts à blanc). La durée la plus fréquente est le jour le jour. Les prêts et emprunts garantis par des titres sont connus sous le terme de pensions. Une pension implique le transfert simultané de titres contre une certaine somme d'argent, avec l'engagement des deux parties de procéder au transfert inverse à une date ultérieure.
- **Le marché interbancaire** : Il s'agit du marché où les banques prêtent et empruntent des liquidités à très court terme sans création de titres en contrepartie (prêts à blanc). La durée la plus fréquente est le jour le jour. Les prêts et emprunts garantis par des titres sont connus sous le terme de pensions. Une pension implique le transfert simultané de titres contre une certaine somme d'argent, avec l'engagement des deux parties de procéder au transfert inverse à une date ultérieure.
- **Le marché des titres de créances négociables (TCN)** : C'est un marché où les établissements de crédit empruntent en émettant des Certificats de Dépôt (CD) ou des bons des sociétés de financement (BSF), et les entreprises empruntent en émettant des Billets de Trésorerie. Ces titres ont des durées courtes et moyennes.

Les transactions sur ce marché se font de gré à gré, c'est-à-dire directement entre les parties intéressées.

Le marché obligataire : Le marché obligataire est un marché financier où l'État et les entreprises bénéficiant de la garantie de l'État peuvent emprunter des liquidités en émettant des titres de créances appelés obligations (tels que les bons du trésor, les bons de société de financement et les billets de trésorerie). Comme tout marché financier, il se compose d'un marché primaire où ces obligations peuvent être souscrites lors du lancement de l'émission lors d'un appel public à l'épargne pendant la période de souscription, et d'un marché secondaire où ces obligations peuvent être revendues avant leur échéance (ou achetées pendant leur durée de vie) et peuvent être cotées en bourse. Ainsi, le marché obligataire constitue un circuit court de collecte de l'épargne, répondant aux besoins

des pouvoirs publics car il offre un moyen de financement non inflationniste. Bien que moins médiatique que le marché des actions, il revêt une importance tout aussi grande en termes de volume, car l'État y détient une part très significative et est considéré comme l'émetteur le plus fiable, offrant aux investisseurs l'assurance d'un remboursement certain.

Avant d'approfondir davantage, nous allons examiner en détail la notion d'obligations afin de mieux comprendre le contexte de leur échange et leurs particularités.

Définition et caractéristiques d'une obligation :

Une obligation est un instrument financier qui représente une dette contractée par une entreprise, un organisme public ou l'État. L'émetteur de l'obligation emprunte des fonds pour une période déterminée et s'engage à verser des intérêts (appelés coupons) périodiquement au détenteur de l'obligation, ainsi qu'à rembourser le montant emprunté à l'échéance.

Les principales caractéristiques des obligations sont les suivantes :

- **Le nominal ou principal** : C'est le montant initial de l'emprunt, sur la base duquel les intérêts sont calculés.
- **Le prix d'émission** : Il correspond au prix auquel l'obligation est initialement vendue sur le marché. Ce prix peut être différent du nominal.
- **Le prix de remboursement** : C'est le montant que l'investisseur reçoit lorsque l'obligation atteint sa maturité. La différence entre le prix de remboursement et le nominal est appelée prime de remboursement.
- **L'échéance** : C'est la date à laquelle l'obligation arrive à terme et doit être remboursée intégralement.
- **Le coupon** : Il représente le taux d'intérêt périodique versé au détenteur de l'obligation. Les coupons peuvent être payés annuellement, semestriellement ou à d'autres intervalles spécifiés.
- **Le coupon couru** : il correspond à la partie des intérêts annuels qui s'est écoulée depuis le dernier paiement de coupon jusqu'à la date considérée. Il est calculé en utilisant la formule suivante :

$$\text{coupon couru} = (\text{nombre de jours écoulés} / 365) \times \text{taux facial.}$$

- **La date de jouissance** : C'est la date à partir de laquelle l'obligation commence à générer des intérêts pour l'investisseur.

Les obligations peuvent être cotées en bourse, ce qui permet aux investisseurs de les acheter ou de les vendre avant leur échéance. La cotation en bourse offre ainsi une liquidité supplémentaire aux détenteurs d'obligations.

Modes de remboursement des obligations :

Le remboursement des obligations peut se réaliser selon différentes modalités prévues dans le contrat d'émission et dans la note d'information, telles que définies par l'AMMC :

- **Remboursement in fine** : L'émission obligataire prévoit le remboursement en totalité à l'échéance. Dans ce cas, la séquence des flux n'est composée que du paiement des intérêts, à l'exception de la dernière période où le remboursement du capital s'ajoute.
- **Remboursement constant du capital** : La base de calcul des intérêts diminue au fur et à mesure des amortissements, ce qui entraîne une diminution de l'annuité.
- **Remboursement progressif du capital (par annuités constantes)** : La part du capital remboursée suit une progression géométrique, tandis que la part des intérêts diminue progressivement.

Les principaux types d'obligations :

Les caractéristiques citées précédemment permettent de catégoriser les obligations en plusieurs types :

— **Classement par nature** :

- **Obligation subordonnée** : C'est une obligation remboursée en dernier lieu en cas de liquidation de la société après le remboursement de tous les créanciers privilégiés et les détenteurs des obligations ordinaires.
- **Obligation convertible en actions (OCA)** : Elle donne à son détenteur la possibilité, mais non l'obligation, de convertir ses créances en actions.

- **Obligation remboursable en actions (ORA)** : À son échéance, elle est obligatoirement (ou facultativement) remboursée en actions de la société émettrice.
- **Obligation zéro-coupon** : C'est une obligation qui ne paie pas d'intérêt durant toute sa durée de vie et qui est remboursée in fine.

— **Classement par taux :**

- **Obligation à taux fixe** : Il s'agit d'une obligation dont le taux facial sur lequel est basé le calcul des coupons est fixe pendant toute la durée de l'emprunt.
- **Obligation à taux flottant** : La rémunération de cette obligation évolue en fonction des conditions du marché. Les coupons ne sont pas connus au moment de l'émission, mais sont plutôt indexés par rapport à un taux de référence. Le taux flottant peut être variable ou révisable. Les obligations à taux révisable ont un coupon dont la valeur est connue au début de chaque période d'échéance, tandis que les obligations à taux variable ont un coupon dont la valeur n'est déterminée que la veille de la date d'échéance. Au Maroc, les obligations à taux flottant existantes, communément appelées "à taux variable" dans le jargon financier, sont en réalité des obligations à taux révisable.

Intervenants sur le marché obligataire :

En plus des acteurs veillant sur l'organisation du marché obligataire tels que l'AMMC et la Bourse de Casablanca, vus auparavant, les principaux acteurs contribuant à sa dynamique sont :

Emetteurs

- **L'Etat et les collectivités** : La politique budgétaire suivie par l'Etat l'oblige parfois à procéder à des émissions dans le but de financer ses insuffisances budgétaires. Ces titres sont appelés Bons de Trésor.
- **Les établissements de crédit** : Ce sont les banques et les entreprises financières qui recourent aux marchés financiers en vue du financement de leurs besoins économiques.
- **Les entreprises** : Les entreprises ont recours au marché obligataire pour financer leurs investissements dans la perspective d'une croissance continue et stable.

Investisseurs

- **Les banques** : Les banques occupent le rôle d'intermédiaire entre les acheteurs et les vendeurs de titres. Par ailleurs, elles peuvent constituer leurs propres portefeuilles obligataires pour développer leur situation financière.
- **Les institutionnels** : Cette catégorie d'investisseurs est constituée de sociétés d'assurance, de caisses de retraite et d'OPCVM, notamment les Fonds Communs de Placement.
- **Les institutions non financières et les particuliers** : Il s'agit des établissements autres que financiers et de toute personne morale ou physique pouvant également investir dans des titres obligataires.

2 Notions de base sur le taux d'intérêt :

2.1 Définition du taux d'intérêt

L'intérêt représente la compensation financière versée périodiquement par l'emprunteur au prêteur en échange d'un prêt. Pour le prêteur, il s'agit du prix de sa renonciation temporaire à la liquidité, tandis que pour l'emprunteur, l'intérêt représente le coût associé à l'utilisation anticipée de fonds. Le taux d'intérêt, quant à lui, correspond à la proportion de cette rémunération périodique par rapport au capital emprunté.

Dans le contexte du marché obligataire, outre le risque de contrepartie lié à la probabilité de défaut d'un emprunteur ou d'une entité ne parvenant pas à rembourser sa dette intégralement, les variations des taux d'intérêt exposent les détenteurs de titres financiers au risque de moins-value en capital. En d'autres termes, tant le porteur d'une obligation à taux fixe que son émetteur sont soumis au risque découlant de l'évolution des taux d'intérêt (gérés par les banques centrales) entre la date de l'engagement et la date de remboursement de la dette. Il convient de noter que ces titres de créances négociables ont généralement une durée de vie longue, ce qui les expose davantage au risque de taux.

2.2 Classification des taux d'intérêt

Les différents taux d'intérêt peuvent être classés selon :

La maturité : La valeur du taux d'intérêt est fortement liée à la durée, ou autrement dit à la maturité, car prêter (ou emprunter) pour une période de 10 ans n'est évidemment pas la même chose que de prêter (ou emprunter) pour 1 mois. Une différence de rémunération (pour un prêt) ou de coût (pour un emprunt) et donc de taux en découle. Ainsi, on distingue entre :

Les taux à court terme ou taux courts

- Représentant la rémunération de l'argent sur de courtes durées (entre 1 jour et 1 an), les taux courts sont déterminés en se basant sur la politique monétaire.
- Effectivement, la banque centrale ajuste au jour le jour un taux nommé *taux directeur* afin de mieux répondre à ses missions telles que le contrôle de l'inflation et l'optimisation de la croissance économique. Il est à noter que celle-ci n'intervient que sur les taux au jour le jour ou sur d'autres échéances inférieures à 3 mois.
- Les autres taux à court terme, dont les maturités vont jusqu'à un an, sont déterminés par la confrontation de l'offre et de la demande sans intervention de la banque centrale.

Les taux à moyen et long terme ou taux longs

- Représentant la rémunération de l'argent sur de longues durées (supérieures à 1 an), les taux longs comprennent des taux à moyen terme d'une maturité comprise entre 1 et 5 ans et des taux à long terme d'une maturité dépassant les 5 ans.
- Généralement, les taux à moyen et long terme sont impactés par la loi de l'offre et de la demande. Si les taux courts dépendent des politiques monétaires, les longs réagissent à la santé de l'économie et aux attentes inflationnistes. En effet, en cas normal, plus l'échéance de remboursement est lointaine, plus les taux sont élevés car ils doivent couvrir le risque de perte de valeur du capital dans la durée.

La flexibilité : On distingue entre :

- **Les taux fixes :** Dans ce cas, le taux d'intérêt est fixé dès le départ lors de la contraction du prêt et n'est plus susceptible de varier pendant toute la durée du contrat. L'avantage principal du taux fixe est sa sécurité pour l'emprunteur, puisqu'il lui permet de connaître dès le début le montant des versements mensuels d'intérêt

et donc le coût total du crédit, quelle que soit l'évolution du marché. Cependant, l'emprunteur ne pourra pas profiter d'éventuelles baisses de taux et risque donc de payer un montant plus élevé d'intérêts par rapport aux conditions du marché. Ce type de taux est préférable pour des prêts sur une longue durée (plus de 15 ans), car à long terme, personne ne peut prévoir l'évolution des taux.

- **Les taux révisables (ou prédéterminés)** : Le taux révisable qualifie un type de taux qui varie au cours de la vie d'un prêt ou d'un placement, à la hausse ou à la baisse, en fonction des conditions des marchés financiers ou des modalités d'un contrat de prêt ou d'émission. Ce taux est de plus en plus courant dans le monde des emprunts. Il est généralement révisé tous les ans, à la date d'anniversaire du prêt.
- **Les taux variables (ou post-déterminés)** : Les taux variables ne sont fixés que peu de temps avant leur perception. Si nous considérons l'exemple d'emprunts obligataires, le taux variable ne sera connu que quelques semaines avant le détachement du coupon correspondant.

Les différents types des taux d'intérêt : Il existe plusieurs types de taux d'intérêt dont on peut citer principalement :

Le taux nominal et taux réel : Notons que l'on parle souvent de taux nominal et de taux réel en économie pour prendre en compte la perte de pouvoir d'achat due à l'inflation.

Le taux d'intérêt nominal est le taux inscrit sur le contrat, celui qui est effectivement payé par l'emprunteur au prêteur. Cependant, pour obtenir une estimation plus réaliste du coût de l'emprunt, il est nécessaire de raisonner en termes "réels" en prenant en compte l'effet de l'inflation. Il existe deux approches pour effectuer cette correction :

La relation de Fisher (1930) ou effet Fisher :

L'effet de Fisher applique le principe de neutralité de la monnaie au taux d'intérêt. En d'autres termes, une augmentation de la masse monétaire entraîne une augmentation des prix, ce qui augmente le taux d'intérêt nominal sans affecter le taux réel. Mathématiquement, cela se traduit par la relation suivante : $r = i - \pi$

La relation précise :

La relation de Fisher reste une approximation quelque peu grossière ou relativement acceptable quand il s'agit de taux bas. Une relation plus exacte de calcul de taux réel serait la suivante :

$$(1 + r) = \frac{(1 + i)}{(1 + \pi)} \quad (2.1)$$

r = Taux d'intérêt réel ; i = Taux d'intérêt nominal ; π = Taux d'inflation

Le taux actuariel :

Le rendement actuariel se réfère au rendement réel d'un placement tel qu'une obligation ou un bon de caisse. Il permet de déterminer combien le placement rapportera en prenant en compte plusieurs facteurs influençant son rendement :

- Le prix d'achat de l'actif (ou le prix d'émission dans le cas d'une obligation)
- Le prix de remboursement à l'échéance
- Le montant et le calendrier des versements
- La durée restante jusqu'au remboursement

En combinant ces facteurs, le rendement actuariel correspond à ce que le détenteur d'une obligation obtiendrait s'il la conservait jusqu'à l'échéance (en réinvestissant les coupons au même taux).

Ainsi, le taux de rendement actuariel permet d'égaliser la valeur actuelle d'une obligation avec celle des flux futurs perçus (coupons et remboursement à l'échéance). Mathématiquement, le taux de rendement actuariel, noté a , est la solution de l'équation suivante :

$$P = \sum \frac{CF_i}{(1 + a)^i} \quad (2.2)$$

Le taux de rendement actuariel est un outil pratique pour évaluer le rendement d'une obligation à n'importe quel moment. Il s'agit d'un taux unique dépendant du nombre et de la valeur des flux futurs, facilement calculable et ayant une signification économique et financière.

Entre deux dates de coupon, l'acheteur doit rembourser au vendeur la fraction courue des intérêts. Cette fraction est calculée en multipliant le coupon par le nombre de jours écoulés depuis le dernier coupon. La formule de calcul du taux actuariel doit être modifiée pour prendre en compte les intérêts courus :

$$P = \sum \frac{CF_i}{(1+a)^{i-z}} - C \cdot z \quad (2.3)$$

où :

- P est le prix du titre
- CF_i représente le flux monétaire versé à la date i
- n correspond à la durée du titre
- a est le taux de rendement actuariel de l'obligation
- C est le coupon versé
- z est la fraction de période écoulée depuis le dernier coupon

Le taux zéro-coupon ou taux spot :

Une obligation à zéro-coupon est une obligation qui ne verse pas d'intérêt pendant toute sa durée de vie. Les investisseurs sont rémunérés par la différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission de l'obligation.

En notant $B(t, T)$ le prix du zéro-coupon de maturité T à l'instant t , et $R(t, T)$ son taux, la relation entre le prix et le taux du zéro-coupon est la suivante :

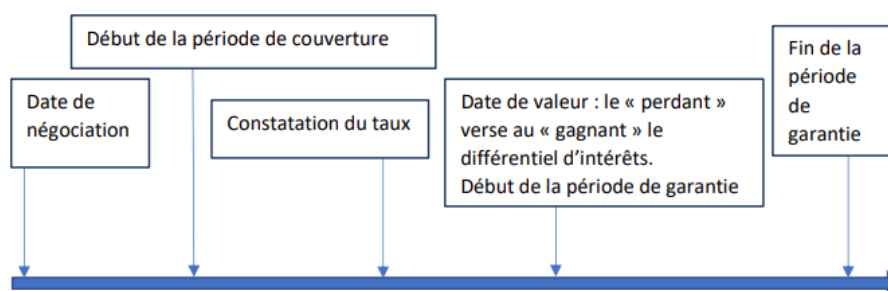
$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \cdot \ln(B(t, T)) \quad (2.4)$$

, $0 < t < T$

Le taux forward (FRA) : Un Future Rate Agreement (FRA) est un contrat conclu à l'instant t , pour l'achat à $T1$ ($> t$) d'une obligation zéro-coupon arrivant à échéance à $T2$ ($> T1$). Il s'agit d'un contrat de gré à gré dans lequel le vendeur du FRA garantit à l'acheteur, pendant une période déterminée (la période de couverture), un taux préalablement négocié (le taux garanti) pour un emprunt d'un montant et d'une durée convenus.

À la fin de la période de couverture, le vendeur verse à l'acheteur la différence d'intérêts entre le taux du marché et le taux négocié, appliquée au montant et à la durée de l'emprunt sous-jacent. Si cette différence est négative, c'est-à-dire que les taux du marché ont baissé, c'est l'acheteur du FRA qui paie la différence au vendeur.

On remarque ainsi que l'opérateur qui cherche à se protéger contre une hausse des taux d'intérêt (position emprunteuse à terme) sera acheteur d'un FRA. À l'inverse, celui qui cherche à se protéger contre une baisse des taux (position prêteuse) sera vendeur.



Explication du FRA

Le taux swap : Un swap de taux d'intérêt est un accord entre deux parties où elles conviennent d'échanger des flux d'intérêts fixes contre des flux d'intérêts variables, généralement dans la même devise. Lorsqu'une partie s'engage dans un swap dit "payeur", elle s'engage à verser un taux d'intérêt fixe, appelé "taux de swap", et reçoit en échange des paiements périodiques à taux variables. Il n'y a pas d'échange monétaire lors de la conclusion d'un swap, et sa valeur monétaire initiale doit être nulle, ce qui signifie que les deux contreparties ne doivent pas avoir d'avantage économique au moment de la conclusion du contrat. Cependant, la valeur du swap peut évoluer après sa conclusion. Par exemple, si les taux d'intérêt augmentent brusquement, la valeur d'un swap où une partie s'est engagée à verser un taux fixe augmentera. En quelque sorte, les swaps peuvent être considérés comme une combinaison de contrats à terme.

Le taux d'intérêt sans risque : Le taux d'intérêt sans risque diffère des taux d'intérêt mentionnés précédemment, car il ne prend pas en compte le risque de crédit (c'est-à-dire le risque de non-remboursement du capital prêté). Il représente le rendement attendu lorsqu'un capital est investi sans aucun risque de perte. Dans la pratique, les obligations

émises par certains États souverains sont considérées comme des investissements sans risque.

3 La courbe des taux

La courbe des taux d'intérêt est une représentation graphique de la relation entre les rendements des obligations et leur échéance. Cette structure par terme des taux d'intérêt évolue au fil du temps, et les gérants d'actifs à revenus fixes utilisent cette information pour ajuster leurs portefeuilles.

Elle est utilisée dans plusieurs dimensions de la gestion d'actifs, notamment pour comparer les rendements des investissements de même échéance, prendre des décisions de placement en fonction de la durée, spéculer sur la structure des taux et se couvrir contre les risques de taux.

L'analyse de la courbe des taux permet également de comprendre le consensus du marché concernant l'évolution future des taux d'intérêt. Les gestionnaires peuvent confronter leur opinion à ce consensus et ajuster leurs portefeuilles en conséquence.

La courbe des taux est également importante dans la gestion des risques de taux pour les bilans financiers, ainsi que dans l'évaluation et la couverture des nouveaux produits financiers liés aux risques de taux.

Dans la suite, nous fournirons une définition de la courbe des taux, expliquerons ses caractéristiques, les facteurs qui influent sur sa déformation, les différentes formes qu'elle peut prendre, ainsi que les théories économiques qui tentent d'expliquer la relation entre les taux courts et les taux longs.

3.1 Définition de la courbe des taux

La courbe des taux d'intérêt, également appelée courbe de rendement, offre une vue globale de l'évolution des taux d'intérêt pour différentes échéances. Elle est définie comme une fonction qui associe à une date t donnée le taux d'intérêt $R(t,T)$ correspondant à une maturité T pour un titre donné. Cette courbe est représentée graphiquement avec les maturités sur l'axe des abscisses et les taux d'intérêt des obligations sur l'axe des

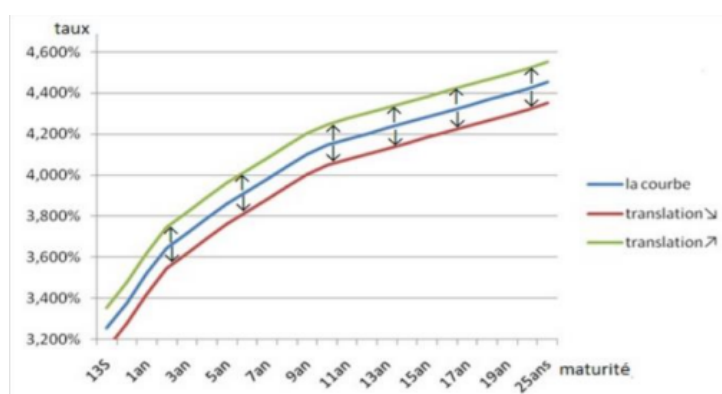
ordonnées.

La courbe des taux répond à deux besoins sur les marchés financiers. D'une part, elle regroupe tous les taux d'intérêt que doit payer un émetteur. D'autre part, elle informe les investisseurs des rendements des titres en fonction de leur maturité. La structure et l'évolution de la courbe sont donc des informations cruciales pour l'efficacité des marchés obligataires, et elles servent également d'indicateur avancé de l'activité économique.

La courbe des taux peut être divisée en deux parties : la partie courte, avec des maturités inférieures à 2 ans, et la partie longue, avec des maturités supérieures à 2 ans, pouvant aller jusqu'à 50 ans. La partie courte est généralement plus liée à la politique monétaire, car la banque centrale détermine les taux auxquels les banques commerciales peuvent emprunter des liquidités. En revanche, la partie longue reflète le risque lié à la solvabilité et au défaut de l'émetteur, ainsi que le risque inflationniste. L'écart entre la partie courte et la partie longue permet de mesurer la pente de la courbe. Si cet écart est important ou augmente, on dit que la courbe est pentue ou qu'elle "s'apentifie". En revanche, si l'écart diminue, on dit que la courbe s'aplatit.

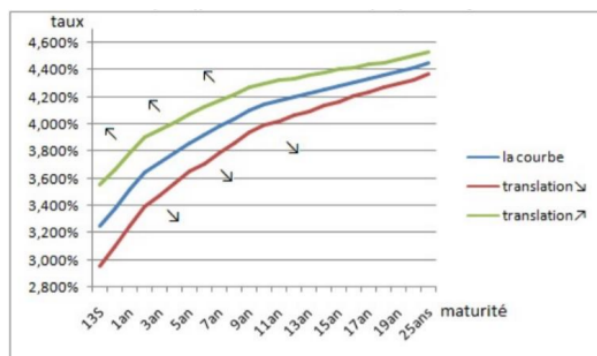
3.2 Les facteurs de déformation de la courbe des taux

On distingue trois facteurs responsables de la déformation de la courbe des taux : **Le facteur de niveau** : Il provoque les déformations parallèles de la courbe des taux.



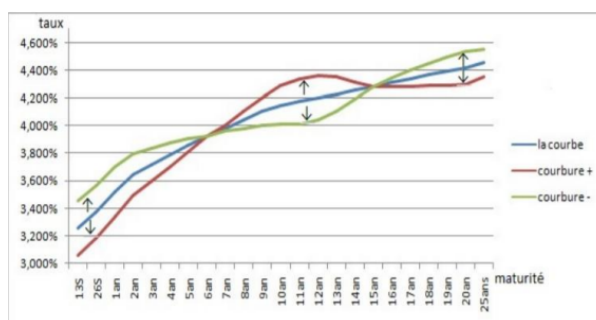
Facteur de niveau de la courbe des taux

Le facteur de pente : Celui-ci provoque les mouvements d'aplatissement ou de pentification de la courbe des taux.



Facteur de pente de la courbe des taux

Le facteur de courbure : Il est responsable des changements de concavité de la courbe des taux.

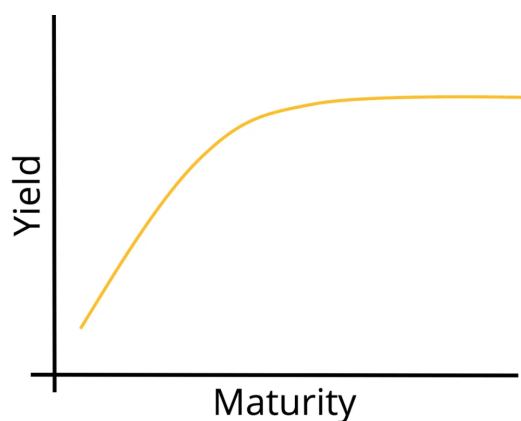


Facteur de courbure de la courbe des taux

3.3 Les différentes formes de la courbe des taux

La courbe des taux d'intérêt des emprunts souverains offre des indications sur les anticipations des investisseurs, les risques de défaut de l'État émetteur, ainsi que le niveau futur de l'inflation et des taux d'intérêt. Elle constitue ainsi un indicateur fiable de la santé économique et financière d'un pays. Dans un environnement économique stable, caractérisé par une inflation modérée et une dette publique soutenable, les rendements des obligations augmentent avec la maturité des titres. En d'autres termes, les taux d'intérêt augmentent progressivement à mesure que l'échéance du titre s'éloigne. Cette évolution s'explique par le fait que plus l'échéance est éloignée, plus le risque de perturbations susceptibles d'affecter la valeur de l'obligation est élevé. En effet, à mesure que le temps passe, l'incertitude concernant la capacité de remboursement de l'émetteur ou le niveau des taux d'intérêt et de l'inflation devient plus importante. Dans ces conditions, les investisseurs exigent une prime de risque plus élevée pour prêter sur des échéances longues

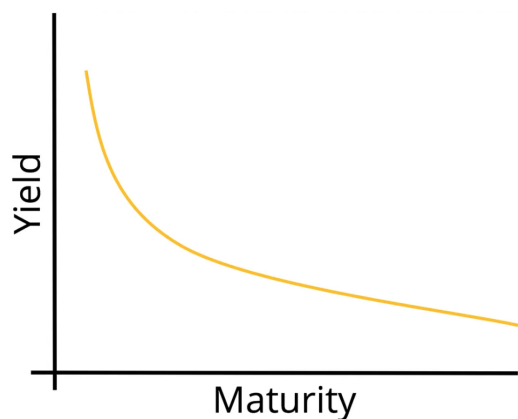
par rapport à des échéances plus courtes. Cependant, les emprunts d'état sont généralement considérés comme des titres "sûrs", avec peu de risques de défaut. Par conséquent, les primes de risque associées aux échéances lointaines sont relativement faibles. Sur les échéances les plus longues, telles que 20, 30 ou 50 ans, ces primes de risque peuvent même être quasi nulles, car sur ces horizons très lointains, le risque de défaut ainsi que les risques de taux et d'inflation sont considérés comme globalement similaires. On peut donc en déduire que la prime de risque, appelée prime de terme, augmente avec le temps mais de manière marginale décroissante. Ainsi, en règle générale, la courbe des taux des emprunts d'état des principaux pays développés présente une forme croissante et concave, comme illustré sur le graphique :



Courbe "normale" des taux

3.4 Inversion de la courbe des taux

L'inversion de la courbe des taux se produit lorsque les taux d'intérêt à court terme deviennent supérieurs aux taux d'intérêt à long terme. Cette situation se produit généralement lors d'une forte hausse de l'inflation, ce qui pousse la banque centrale à augmenter les taux d'intérêt à court terme. Cette hausse se propage à toutes les échéances courtes, allant de 3 mois à moins de 2 ans. Lorsque la banque centrale est considérée comme crédible par les investisseurs, ces derniers anticipent une baisse de l'inflation à l'avenir et réduisent la prime de risque associée aux obligations à long terme.



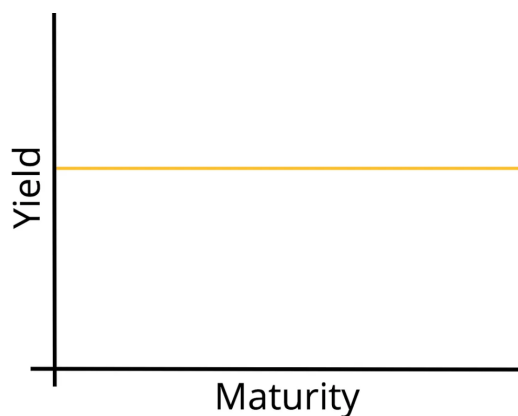
L'inversion de la courbe des taux

L'inversion de la courbe des taux est souvent associée à des périodes de surchauffe économique, où l'activité économique est forte et entraîne des tensions inflationnistes. Dans ce contexte, la banque centrale intervient en augmentant les taux d'intérêt à court terme, ce qui finit par entraîner un ralentissement économique. Ainsi, l'inversion de la courbe des taux est considérée comme un indicateur précoce du début d'une récession à moyen terme.

3.5 Aplatissement de la courbe des taux

L'aplatissement de la courbe des taux d'intérêt se produit lorsque les taux d'intérêt à long terme baissent et se rapprochent du niveau des taux d'intérêt à court terme, tout en restant supérieurs à ces derniers. Cette situation peut être causée par différents facteurs. Par exemple, si les investisseurs estiment que l'inflation va diminuer dans les années à venir, la prime exigée pour acheter des titres obligataires à long terme va baisser. D'autres éléments peuvent également contribuer à l'aplatissement de la courbe des taux d'intérêt.

Par exemple, si la situation budgétaire d'un État fortement endetté s'améliore, la probabilité de défaut à moyen et long terme de cet État diminue, ce qui entraîne une baisse de la prime de risque exigée par les investisseurs pour souscrire à ses émissions de titres à long terme.



L'aplatissement de la courbe des taux

De plus, lorsque l'environnement est caractérisé par une faible inflation et une abondance de liquidités à l'échelle mondiale, les investisseurs internationaux recherchent des placements à la fois peu risqués et offrant des rendements supérieurs à ceux proposés par les titres à court terme. Cette demande accrue de titres obligataires à long terme des principaux pays développés entraîne une baisse des taux d'intérêt à long terme.

Chapitre 2

Construction de la courbe des taux zéro-coupon

Dans le but de sélectionner le modèle le plus approprié pour représenter la courbe des taux observée sur le marché, il est essentiel de reconstruire cette courbe à partir des données disponibles. Ensuite, nous examinerons différentes méthodes de modélisation, en mettant en évidence leur contexte d'utilisation, leurs avantages et leurs inconvénients. C'est précisément l'objectif de ce chapitre. Cependant, avant d'entrer dans les détails, nous commencerons par justifier le choix de travailler avec la courbe zéro-coupon en expliquant ses caractéristiques distinctives.

1 Choix de la courbe zéro-coupon

Afin d'obtenir une série de données cohérentes, les courbes de taux sont généralement construites en utilisant des taux de rendement provenant d'instruments financiers homogènes. Dans le cas des courbes obligataires, cela implique l'utilisation de taux provenant d'émetteurs identiques, ou, dans le cas d'une courbe sectorielle, d'émetteurs du même secteur. Cependant, la construction d'une courbe de taux à partir d'obligations classiques dotées de coupons entraînerait certaines incohérences. Par exemple, deux obligations ayant la même échéance mais des durées très différentes n'auraient pas le même taux de rendement. De même, deux obligations avec des coupons identiques mais des échéances différentes ne seraient pas actualisées au même taux de rendement, même si elles génèrent des flux financiers strictement identiques. Pour remédier à ces problèmes, nous allons nous intéresser à la courbe zéro-coupon, dont nous décrirons les caractéristiques dans la suite de ce document.

La courbe des taux zéro-coupon :

L'obligation zéro-coupon : Comme le nom l'indique, une obligation zéro-coupon (également nommée "obligation de capitalisation" ou "Strip" en anglais) ne verse aucun flux intermédiaire (coupon) et ne donne lieu qu'à un seul flux de remboursement à sa date d'échéance. Ainsi, à titre d'exemple simpliste, un zéro-coupon de nominal $N=1$ devra verser à son détenteur cette valeur faciale à la date de sa maturité T .

Le prix zéro-coupon : Le prix $B(t,T)$ d'un bon zéro-coupon de maturité T à un instant t ($t < T$) correspond à la valeur en cette date t d'une unité monétaire payée à T ($B(T,T)=1$) sans paiements intermédiaires entre les deux dates. Nous supposerons dans toute la suite que le prix zéro-coupon est un processus positif strictement et adapté sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Le taux zéro-coupon : Communément connu comme étant le taux le plus utile sur le marché financier, le taux zéro-coupon à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années sans flux intermédiaires.

A chaque fois que l'on parle d'évaluation de produits financiers, qu'il s'agisse d'obligations, d'options ou autres, le taux zéro-coupon est forcément évoqué. Il permet l'actualisation

des flux à une date donnée, ce qui constitue en fait le principe de l'évaluation d'un actif quelconque. L'intérêt du taux zéro-coupon dans ce sens, apparaît principalement à travers son unicité. En effet, pour une maturité donnée il n'existe qu'un seul taux zéro-coupon permettant l'actualisation à une date préalable t .

Les taux utilisés pour calculer les prix des obligations doivent être des taux "purs" c'est-à-dire des titres zéro coupon afin d'éviter des distorsions dues à des niveaux de coupons annuels différents. Connaître la courbe des taux zéro coupon au comptant est très important en pratique car cela permet aux acteurs du marché :

- D'évaluer et de couvrir à la date de reconstitution les produits de taux délivrant des flux futurs connus (obligation à taux fixe, par exemple) ;
- De dériver les autres courbes implicites : la courbe des taux forward, la courbe des taux de rendement au pair et la courbe des taux de rendement instantanés ;
- Enfin, la courbe spot est le point de départ pour la mise en place de modèles stochastiques de déformation de cette courbe dans le temps.

En temps continu, à une date t le taux zéro-coupon correspondant à une maturité T est obtenu à partir du prix $B(t,T)$ défini précédemment en appliquant la relation :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{T - t} \quad (1.1)$$

Ainsi comme toute autre structure par terme des taux, la courbe zéro-coupon est la fonction qui donne les différents taux de la date t en fonction de leur maturité T , $T \rightarrow R(t, T)$.

Les types de courbes des taux zéro-coupon :

Il existe trois grands types de courbes de taux zéro-coupon : la courbe Trésor, la courbe interbancaire et les courbes dites corporate. Le choix de la courbe diffère selon le produit financier à valoriser et la notation de la contrepartie. L'actualisation des flux futurs se fait sur l'une d'entre elles.

- **La courbe Trésor (ou courbe d'état)** est construite à partir des obligations émises par l'état. Il s'agit de la courbe dite sans risque dans les pays du G7, dans la

mesure où les États de ces pays sont censés ne jamais faire défaut. Ils sont notés AAA par les agences de notation (meilleure notation possible).

- **La courbe interbancaire**, comme son nom l'indique, résulte d'opérations financières entre les banques. Elle est construite à partir des taux de dépôt, des futures et des swaps. Il ne s'agit pas d'une courbe sans risque, puisque les banques ne jouissent pas du meilleur rating des agences de notation. Leur rating moyen se situe entre A et AA pour SP et A1 et Aa1 pour Moody's.
- **Les courbes "corporate"** sont les courbes qui caractérisent les entreprises du secteur privé. Il en existe de multiples qui dépendent du rating des entreprises et de leur secteur économique.

2 Construction de la courbe zéro-coupon

Pour construire la courbe zéro-coupon, nous procédons comme suit :

2.1 Importation de la base

Nous allons utiliser les BDT disponible sur le site de la BAM. En effet, La BAM publie régulièrement une courbe de taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés primaire et secondaire les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les prix.

Date d'échéance	Transaction	TMP	Date de la valeur
4/3/2023	1 107,00	3.11%	2/28/2023
4/10/2023	603,00	3.14%	2/28/2023
4/17/2023	1 021,00	3.12%	2/28/2023
4/24/2023	502,00	3.16%	2/28/2023
5/1/2023	1 000,00	3.04%	1/30/2023
8/7/2023	7 270,00	3.15%	2/6/2023
5/20/2024	1 139,00	3.58%	2/20/2023
7/14/2025	1 310,00	3.87%	2/28/2023
4/17/2028	617,00	4.09%	2/20/2023
6/16/2031	-	4.12%	1/6/2023
6/20/2033	1 923,00	4.58%	2/28/2023
4/16/2040	-	4.63%	1/6/2023
8/17/2043	30,00	4.78%	1/16/2023
2/20/2051	-	5.12%	1/6/2023
Total	16 522,00		

TABLE I.2.1 – Taux de référence de BDT, 28-02-23

2.2 Transformation en taux actuariels

Nous transformons ces taux en des taux actuariels en se basant sur la règle suivante : « Les maturités inférieures à 365 jours seront considérés comme des taux monétaires. Tandis que pour les taux de maturités supérieures à 365 jours sont taux actuariels. » La formule utilisée pour passer du taux monétaire vers le taux actuariel est la suivante :

$$t_a = \left(1 + \frac{tm \cdot n}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1 \quad (2.1)$$

Où : t_a : taux actuariel ; tm : taux monétaire ; n : la maturité du titre.

Maturite(jrs)	Maturite(annees)	Taux actuariel
34	0.093150685	3.20%
41	0.112328767	3.23%
48	0.131506849	3.21%
55	0.150684932	3.25%
91	0.249315068	3.12%
182	0.498630137	3.22%
455	1.246575342	3.58%
867	2.375342466	3.87%
1883	5.15890411	4.09%
3083	8.446575342	4.12%
3765	10.31506849	4.58%
6310	17.28767123	4.63%
7518	20.59726027	4.78%
10272	28.14246575	5.12%

TABLE I.2.2 – Calcul du taux actuariel

2.3 Interpolation de la courbe zéro-coupon

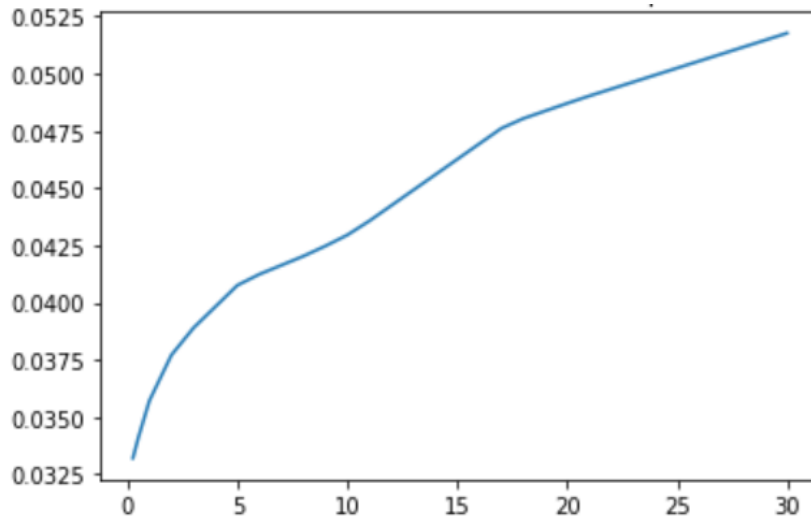
La courbe des taux zéro-coupon est définie comme la donnée des taux zéro-coupon pour des maturités croissantes $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. En pratique, les taux zéro-coupon pour des maturités différentes de t_i (où $i = 1 \dots N$) sont calculés par interpolation à partir des taux existants et par transformation des taux.

Plusieurs méthodes sont utilisées quand on veut faire l'interpolation. Dans notre étude nous appliquerons une interpolation linéaire et une spline cubique naturelle

Interpolation linéaire

Elle consiste à calculer le taux zéro-coupon Z pour une durée f quelconque à partir des taux zéro-coupon adjacents Z_k et Z_{k+1} de durées respectives f_k et f_{k+1} , avec $f_k < f < f_{k+1}$. Cette méthode utilise une combinaison linéaire des deux taux, en fonction du temps « prorata temporis » :

$$Z = \frac{(f_{k+1} - f) \times Z_k + (f - f_k) \times Z_{k+1}}{f_{k+1} - f_k} \quad (2.2)$$



Courbe des taux actuariel résultant de l'interpolation linéaire

Interpolation par splines cubiques naturelles

C'est une technique couramment utilisée pour l'interpolation d'une courbe de taux zéro-coupon. Elle est considérée comme particulièrement adaptée car elle permet d'obtenir une courbe lisse et continue, tout en préservant les propriétés de convexité et de monotonie inhérentes aux taux d'intérêt.

L'interpolation par splines cubiques consiste à diviser la courbe des taux en segments, puis à ajuster une fonction polynomiale cubique à chaque segment. Les splines cubiques naturelles imposent des conditions supplémentaires aux extrémités de la courbe¹, ce qui garantit que la courbe interpolée est "naturelle" et ne présente pas de courbure excessive aux extrémités.

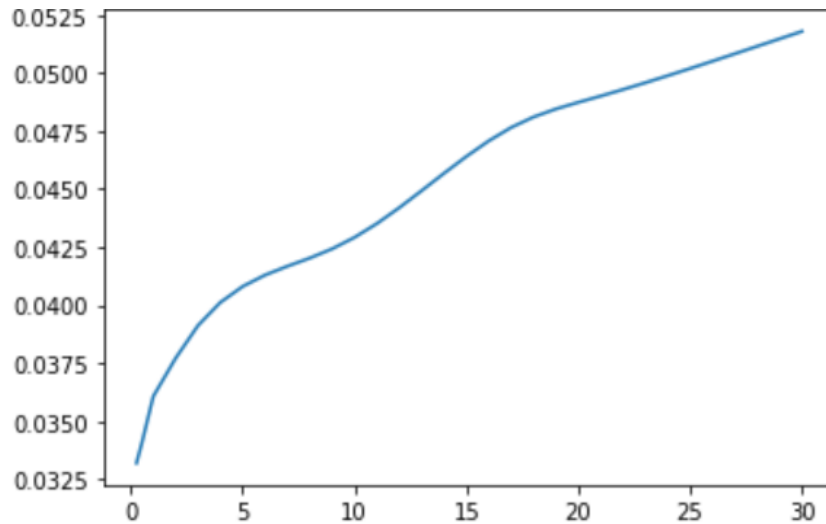
Elle permet aussi de minimiser la courbure totale de la courbe interpolée, ce qui permet d'obtenir une courbe régulière et réaliste. De plus, elle évite les oscillations indésirables qui peuvent se produire avec d'autres méthodes d'interpolation.

La formule générale pour la méthode des splines cubiques naturelles peut être exprimée comme suit : Pour chaque segment i (de t_i à t_{i+1}), la fonction polynomiale cubique est donnée par :

$$S(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3 \quad (2.3)$$

Les coefficients a_i , b_i , c_i et d_i sont calculés à partir des conditions d'interpolation et de la continuité de la courbe.

1. La dérivée seconde aux extrémités est nulle



Courbe des taux actuariel résultant de l'interpolation cubique naturelle

2.4 Application de la méthode de Bootstrapping

On utilise la méthode du Bootstrapping, également connue sous le nom de méthode de proche en proche, afin de construire une courbe des taux zéro-coupon à partir des prix des instruments cotés. Cette méthode s'appuie sur la structure par terme des taux d'intérêt et utilise le principe d'interpolation. Lorsqu'on envisage une période de plus d'un an, on doit généralement tenir compte des paiements intermédiaires d'intérêts, tels que les coupons annuels. Cela nécessite la conversion des taux actuariels en taux zéro-coupon. La relation de la méthode de bootstrap provient de la formule suivante :

$$\frac{C_n}{(1 + R_{ZC1})} + \frac{C_n}{(1 + R_{ZC2})^2} + \dots + \frac{C_n}{(1 + R_{ZCi})^i} + \dots + \frac{1 + C_n}{(1 + R_{ZCn})^n} = 1 \quad (2.4)$$

$$1 = C_n \times \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + R_{zci})^i} + \frac{1}{1 + R_{zcn}^n} \quad (2.5)$$

C_n : taux actuariel correspondant à l'échéance n...1DH=coupon annuel versé à l'échéance n

Ainsi, le taux zéro-coupon correspondant à l'échéance n est :

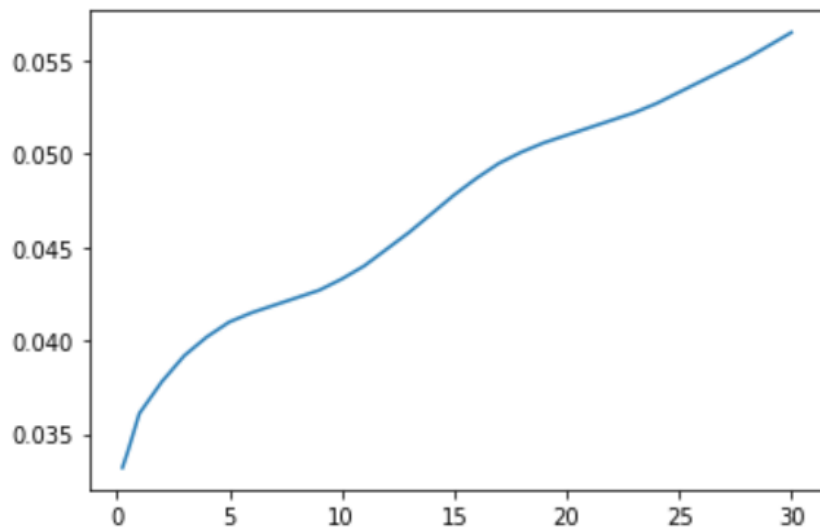
$$R_{zcn} = \left(1 + \frac{C_n}{1 - C_n \times \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + R_{zci})^i}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (2.6)$$

L'application de l'algorithme nous donne le tableau suivant :

Maturité (jours)	Maturité (années)	Taux Actuariel	Taux zero coupon
91	0.25	3.32%	3.32%
182	0.5	3.41%	3.41%
365	1	3.61%	3.61%
730	2	3.77%	3.78%
1095	3	3.91%	3.92%
1460	4	4.01%	4.02%
1825	5	4.08%	4.1%
2190	6	4.13%	4.15%
2555	7	4.17%	4.19%
2920	8	4.2%	4.23%
3285	9	4.24%	4.27%
3650	10	4.29%	4.33%
4015	11	4.35%	4.4%
4380	12	4.42%	4.49%
4745	13	4.49%	4.58%
5110	14	4.57%	4.68%

TABLE I.2.3 – Taux actuariels et taux zc coupon, 28-02-2023

Ainsi la courbe zéros-coupons se trace comme suit :



Courbe des taux ZC par bootstrapping

3 Problématique

Après avoir examiné les notions fondamentales des marchés financiers et de la courbe des taux, ainsi que la construction de la courbe des taux ZC , une question importante se pose : comment pouvons-nous améliorer la modélisation et la prédiction de la courbe des taux, ainsi que l'estimation de la valeur des portefeuilles ? Dans cette perspective, une approche hybride combinant l'apprentissage profond basé sur les réseaux de neurones convolutifs et à mémoire à court et long terme (CNN-LSTM) avec la modélisation financière paramétrique telle que le modèle de Nelson-Siegel-Svensson se présente comme une voie prometteuse. Ainsi, notre deuxième partie vise à explorer comment cette approche hybride peut optimiser la modélisation et la prédiction de la courbe des taux, ainsi que la valorisation du portefeuille.

Deuxième partie

Modélisation, Prédiction, Application et Résultats

Chapitre 1

Modélisation paramétrique de la courbe des taux zéro-coupon

Dans le domaine des prévisions financières, et plus particulièrement des courbes de rendement, de nombreux modèles ont été proposés et utilisés au fil du temps. Ces modèles se répartissent en deux grandes catégories : les modèles stochastiques et les modèles paramétriques. Si les modèles stochastiques ont leurs avantages, ils impliquent souvent un degré élevé de complexité et peuvent conduire à des solutions gourmandes en ressources informatiques. Cela peut être problématique lorsque l'on travaille avec de grands ensembles de données ou lorsqu'un haut degré de précision est requis dans un court laps de temps.

C'est là que les modèles paramétriques, tels que le modèle de Nelson-Siegel, entrent en jeu. Le modèle de Nelson-Siegel, qui comporte moins de paramètres, fournit un cadre plus simple mais puissant pour la prévision des courbes de rendement. Il offre une solution élégante qui concilie complexité et efficacité informatique. Sa nature paramétrique fournit des paramètres interprétables, qui peuvent donner un aperçu du niveau, de la pente et de la courbure de la courbe de rendement. En outre, il s'est avéré qu'il offrait une précision compétitive, voire supérieure, dans les prévisions par rapport à de nombreux modèles stochastiques. C'est pourquoi nombre de banques, comme la Banque fédérale de réserve de San Francisco, La Banque Centrale Européenne, La Banque Centrale du Chili, Deutsche Bank, utilisent ces modèles paramétriques comme outils de décision.

Il est aussi nécessaire de mentionner que nous avons l'intention d'utiliser des modèles

l'apprentissage profond pour la prédiction des courbes des taux. Et bien que ces techniques puissent être adaptées à des modèles non paramétriques et stochastiques, elles tendent à s'épanouir lorsque les relations sous-jacentes sont bien définies et que les paramètres peuvent être interprétés. Cette interprétabilité peut fournir des informations essentielles sur le processus de prévision et permettre une prise de décision plus solide.

Nous avons donc opté pour le modèle de Nelson-Siegel et son extension Nelson Siegel Svensson pour la construction de la courbe des taux.

Christensen, J. H. E., Diebold, F. X., Rudebusch, G. D. (2011). The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, 164(1), 4-20
European Central Bank. (2020). Euro yield curves. Banco Central de Chile. (2005). Metodología de cálculo de la estructura a plazo de las tasas de interés. Deutsche Bundesbank. (2019). Estimation procedure of Deutsche Bundesbank

1 Le modèle de Nelson-Siegel

Le modèle de Nelson-Siegel est basé sur une fonction de taux d'intérêt à terme qui utilise trois composantes pour décrire la courbe de rendement : le niveau, la pente et la courbure. Le niveau représente le taux d'intérêt à long terme, la pente représente la différence entre les taux d'intérêt à court et à long terme, et la courbure décrit la forme de la courbe de rendement.

L'un des principaux avantages du modèle de Nelson-Siegel est sa capacité à s'adapter à diverses formes de courbes de rendement. De plus, il est dynamique, ce qui signifie qu'il peut évoluer avec le temps pour refléter les changements dans la structure par terme des taux d'intérêt.

Dans cette section, nous allons décrire en détail le modèle de Nelson-Siegel, discuter de ses propriétés et de son utilisation dans la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt.

La formule de base du modèle de Nelson-Siegel est la suivante :

$$R(t) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t} \right) \quad (1.1)$$

où :

- $R(t)$ est le taux d'intérêt à l'instant t
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont des paramètres du modèle qui permettent de modéliser respectivement le niveau de long terme du taux, la pente de la courbe des taux et la courbure de cette courbe.
- λ est un paramètre qui contrôle la vitesse à laquelle les taux d'intérêt se rapprochent de leur niveau de long terme. Plus λ est grand, plus cette vitesse est grande.

1.1 Estimation des paramètres du modèle

Dans le cadre de notre étude, les paramètres du modèle de Nelson-Siegel ont été estimés en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).¹ Cette méthode statistique est largement utilisée pour l'estimation des paramètres dans les modèles de régression. Elle fonctionne en minimisant la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire la différence entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle. Dans le contexte du modèle de Nelson-Siegel, les paramètres estimés sont ceux qui rendent la courbe de rendement du modèle aussi proche que possible des taux d'intérêt observés pour différentes maturités. L'utilisation de la méthode MCO pour estimer les paramètres du modèle de Nelson-Siegel assure que les estimations sont les meilleures au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'elles minimisent la variance résiduelle.

On présente le résultat de l'estimation comme suit :

```
The factors of the Nelson Siegel model are:
beta0: 0.0600817268665262
beta1: -0.025722566221692094
beta2: -0.02215277657606237
tau: 3.0489962705022275
Mean Square Error: 2.151244826032983e-06
Root Mean Square Error: 0.00146671225059075
```

Après avoir appliqué la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS) à nos données, nous avons obtenu les estimations des paramètres du modèle de Nelson-Siegel. Voici une interprétation générale de ces paramètres :

- $\beta_0 = 0.0600817268665262$ (6%) : Ce paramètre représente le taux d'intérêt de long terme dans le modèle de la courbe des taux NS. Une valeur estimée élevée de 6% indique des attentes de taux d'intérêt plus élevés à long terme.
- $\beta_1 = -0.025722566221692094$: Ce paramètre mesure la pente de la courbe des taux. Une valeur estimée négative suggère une courbe descendante, avec des taux d'intérêt à long terme inférieurs aux taux d'intérêt à court terme.

1. La fonction à minimiser dans la méthode des moindres carrés ordinaires est la somme des carrés des résidus (SSE), qui est définie comme : $SSE = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$ où n est le nombre d'observations.

- $\beta_2 = -0.02215277657606237$: Ce paramètre correspond au facteur de courbure. Il permet de modéliser les variations de la pente de manière asymétrique. Une valeur estimée négative indique une courbure convexe de la courbe des taux.
- $\tau = 3.0489962705022275$: Ce paramètre de temps contrôle la convergence des taux d'intérêt courts vers le taux d'intérêt à long terme. Dans ce cas, cela suggère une convergence relativement rapide des taux courts vers le taux de long terme.
- $RMSE=0.00146671225059075$: Elle mesure l'écart moyen entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles observées.

Remarque. *Une convergence rapide des taux courts vers le taux de long terme signifie que les taux d'intérêt à court terme s'alignent rapidement sur le taux d'intérêt de long terme. Cela indique une réaction rapide du marché aux changements économiques et financiers, ce qui permet une stabilité et une prévisibilité accrues des taux d'intérêt à court terme.*

Nous utiliserons la RMSE qui est une métrique pour comparer la performance de deux modèles ou méthodes de prédiction à savoir NSS et NS.

1.2 Construction de la courbe

Une fois que les paramètres du modèle sont estimés, le modèle de Nelson-Siegel peut être utilisé pour prédire les taux d'intérêt à terme pour les maturités souhaitées. En utilisant les paramètres estimés, le modèle calcule les taux d'intérêt correspondants en appliquant la formule du modèle à chaque maturité. Le résultat s'illustre comme suit :

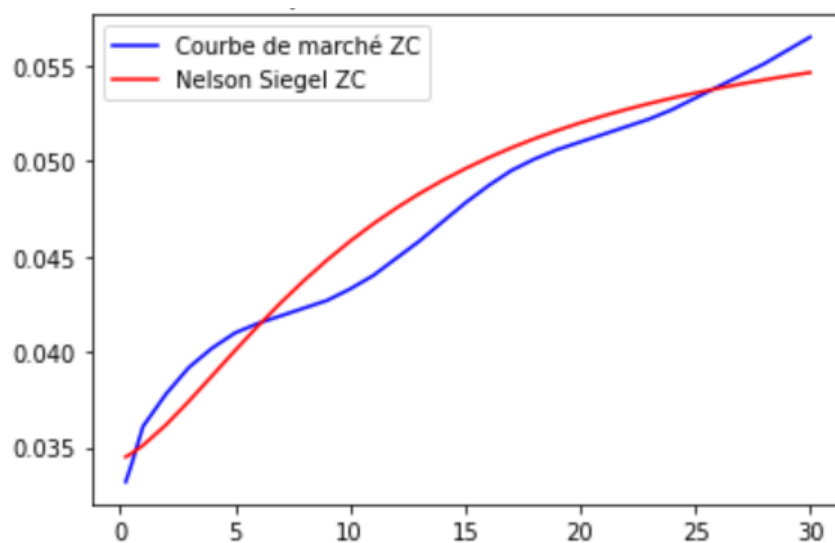
Maturité (années)	Taux Actuariel	Taux zero coupon	Taux ZC Nelson Siegel	Ecart carré
0.25	3.32%	3.32%	3.45%	1.70431E-06
0.5	3.41%	3.41%	3.47%	3.37718E-07
1	3.61%	3.61%	3.51%	9.81404E-07
2	3.77%	3.78%	3.62%	2.61624E-06
3	3.91%	3.92%	3.74%	3.13473E-06
4	4.01%	4.02%	3.87%	2.10435E-06
5	4.08%	4.1%	4.01%	8.54588E-07
6	4.13%	4.15%	4.14%	1.80664E-08
7	4.17%	4.19%	4.26%	4.81263E-07
8	4.2%	4.23%	4.37%	2.09035E-06
9	4.24%	4.27%	4.48%	4.47501E-06

TABLE II.1.1 – Calcul des taux de NSI

L'écart au carré entre les taux prédits par le modèle de Nelson-Siegel et les taux réels observés est une mesure de l'erreur de prédiction. En calculant les écarts au carré, on pénalise davantage les erreurs plus importantes, ce qui permet de quantifier l'adéquation du modèle par rapport aux données réelles.

Il est calculé en soustrayant le taux réel observé du taux prédit par le modèle de Nelson-Siegel, puis en élevant cette différence au carré. Cela permet de prendre en compte les écarts positifs et négatifs de manière équilibrée et d'éviter que les erreurs s'annulent mutuellement.

On trace la courbe obtenue :



Comparaison des courbes obtenus

Remarque (Limites du modèle). *Le modèle de Nelson-Siegel présente certaines limites lorsqu'il s'agit de s'adapter à différentes formes de courbes de rendement. on cite :*

- *Flexibilité limitée* : Le modèle de Nelson-Siegel utilise une fonction de taux d'intérêt à terme avec un nombre fixe de paramètres pour décrire la courbe de rendement. Cela limite sa flexibilité pour s'adapter à des formes de courbes de rendement complexes ou non conventionnelles.
- *Contraintes structurelles* : Le modèle de Nelson-Siegel repose sur des hypothèses simplificatrices, telles que l'évolution exponentielle de la courbure avec la maturité. Cela peut ne pas capturer avec précision les caractéristiques réelles des courbes de rendement observées.
- *Incapacité à capturer des phénomènes spécifiques* : Le modèle de Nelson-Siegel ne

prend pas en compte certains phénomènes spécifiques tels que les comportements extrêmes des taux d'intérêt, les pics ou les creux abrupts de la courbe de rendement.

Conclusion

En conclusion, le modèle de Nelson-Siegel joue un rôle crucial dans la construction de la courbe des taux. Grâce à sa simplicité et à sa capacité à capturer les grandes tendances de la structure par terme des taux d'intérêt, il est largement utilisé dans la modélisation financière et l'évaluation des instruments financiers. Le modèle de Nelson-Siegel permet de représenter de manière concise les paramètres clés de la courbe des taux, tels que le niveau, la pente et la courbure, ce qui facilite l'analyse et l'interprétation des données. Cependant, malgré les avantages du modèle de Nelson-Siegel, il présente certaines limitations. Sa flexibilité est limitée pour s'adapter à des formes de courbes de rendement complexes, et il ne capture pas certains phénomènes spécifiques observés sur les marchés financiers. C'est là que le modèle de Nelson-Siegel-Svensson entre en jeu. En ajoutant des termes supplémentaires, le modèle de Nelson-Siegel-Svensson offre une plus grande flexibilité et une meilleure adéquation aux données réelles. Il permet de modéliser plus précisément les courbes de rendement en capturant des caractéristiques plus fines et en s'adaptant à une plus grande variété de formes de courbes.

2 Le modèle de Nelson-Siegel-Svensson

Le modèle de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) est une extension du modèle de Nelson-Siegel, il a été introduit par Svensson en 1994 pour améliorer la capacité du modèle de Nelson-Siegel à représenter des formes complexes de courbes de rendement et à capturer certains phénomènes spécifiques.

Le modèle de Nelson-Siegel-Svensson étend cette approche en ajoutant deux termes supplémentaires à la formule du modèle de Nelson-Siegel. La formule du modèle NSS s'écrit comme suit :

$$R(t) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{t/\tau_1} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{t/\tau_1} - e^{-t/\tau_1} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-t/\tau_2}}{t/\tau_2} - e^{-t/\tau_2} \right) \quad (2.1)$$

Dans cette formule, $R(t)$ représente le taux d'intérêt à la maturité t , et les paramètres suivants ont les interprétations suivantes :

- β_0 : Le taux d'intérêt de long terme ;
- β_1 : La pente de la courbe des taux, qui mesure la différence entre les taux courts et les taux longs ;
- β_2 et β_3 : Les facteurs de courbure, qui permettent de modéliser les variations de la pente de manière asymétrique ;
- τ_1 et τ_2 : Les paramètres de temps qui contrôlent la vitesse à laquelle les taux d'intérêt convergent vers le taux de long terme.

2.1 Estimation des paramètres du modèle

Pour estimer les paramètres du modèle de Nelson-Siegel-Svensson, nous avons pris les valeurs des paramètres de temps comme standard car le package Python `nelson-siegel-svensson`, pour la modélisation de la courbe de Nelson-Siegel-Svensson, ne dispose pas d'une fonctionnalité intégrée permettant d'optimiser directement les paramètres τ_1 et τ_2 . La méthode `.fit` utilise une fonction de `scipy.optimize` appelée `leastsq` pour trouver les valeurs optimales, mais les paramètres τ_1 et τ_2 restent fixes à 2,0 et 5,0 respectivement. Puis nous avons utilisé la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) afin d'estimer les autres paramètres. Cette méthode est largement utilisée dans l'analyse statistique et permet d'ajuster les paramètres du modèle aux données observées en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs réelles.

Après avoir appliqué la méthode MCO nous avons obtenu les paramètres comme suivants :

```
The factors of the Nelson Siegel Svenson model are:
beta0: 0.06982115390319456
beta1: -0.038005934692267
beta2: 0.01274106008779399
beta3: -0.07148038378693324
tau1: 2.0
tau2: 5.0
Mean Square Error: 4.632187648680281e-08
Root Mean Square Error: 0.00021522517623828957
```

Après avoir appliqué la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS) à nos données, nous avons obtenu les estimations des paramètres du modèle de Nelson-Siegel-Svensson. Voici une interprétation de ces paramètres :

- $\beta_0 = 0.06982115390319456$: Ce paramètre correspond au taux d'intérêt de long terme dans le contexte de la courbe des taux zéro coupon marocaine. Une valeur estimée élevée (7%) indique des attentes de taux d'intérêt plus élevés à long terme.
- $\beta_1 = -0.038005934692267$: Ce paramètre représente la pente de la courbe des taux. Une valeur estimée négative suggère une courbe descendante, avec des taux d'intérêt à long terme inférieurs aux taux d'intérêt à court terme dans le cadre spécifique de la courbe des taux zéro coupon marocaine.
- $\beta_2 = 0.01274106008779399$ et $\beta_3 = -0.07148038378693324$: Ces paramètres de courbure capturent les variations de la courbe des taux. Une valeur estimée positive pour β_2 indique une courbure concave, où les taux d'intérêt à long terme sont inférieurs aux taux d'intérêt à court terme, et les taux d'intérêt de moyen terme sont plus élevés. En revanche, une valeur estimée négative pour β_3 suggère une courbure convexe, avec des taux d'intérêt à long terme supérieurs aux taux d'intérêt à court terme, et des taux d'intérêt de moyen terme plus bas.
- $\tau_1 = 2$ et $\tau_2 = 5$: les paramètres de temps, pris de manière standard. Pour $\tau_1 = 2$, cela indique une convergence relativement rapide des taux courts vers le taux de long terme. Cela peut être interprété comme une attente que les taux d'intérêt courts s'ajustent rapidement aux changements dans les conditions économiques et aux fluctuations de la courbe des taux. Pour $\tau_2 = 5$, cela suggère une convergence relativement lente des taux d'intérêt longs vers le taux de long terme. Cela signifie que les taux d'intérêt longs peuvent prendre plus de temps pour refléter complètement les changements économiques et les fluctuations de la courbe des taux.
- $RMSE=0.00021522517623828957$: Elle mesure l'écart moyen entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles observées.

2.2 Construction de la courbe

Une fois que nous avons estimé les paramètres du modèle de NSS, nous pouvons utiliser ces paramètres pour construire la courbe de taux d'intérêt. Pour chaque maturité donnée, nous

utilisons la formule du modèle NSS en utilisant les valeurs estimées des paramètres. Cela nous permet de calculer le taux d'intérêt zéro coupon correspondant à chaque maturité.

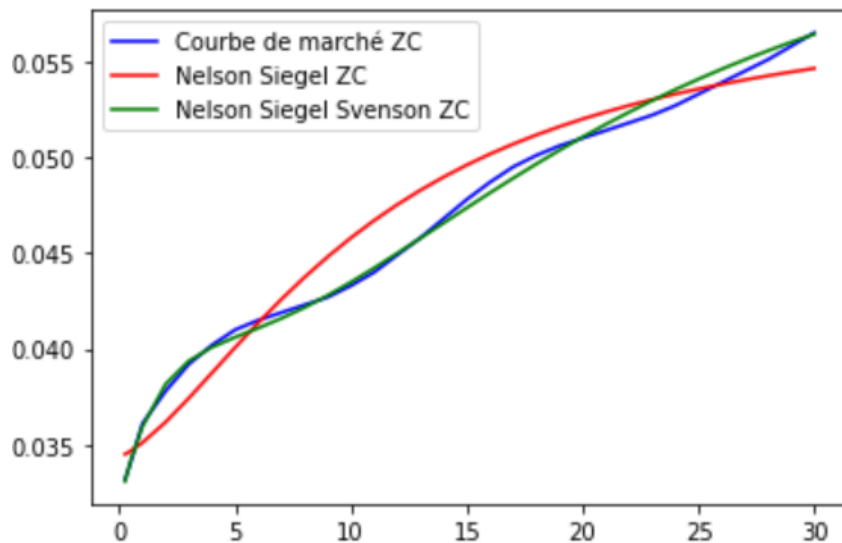
Maturité (années)	Taux Actuariel	Taux zero coupon	Taux ZC NSS	Ecart carré
0.25	3.32%	3.32%	3.31%	1.08576E-08
0.5	3.41%	3.41%	3.42%	8.85349E-09
1	3.61%	3.61%	3.59%	2.29174E-08
2	3.77%	3.78%	3.82%	1.326E-07
3	3.91%	3.92%	3.94%	2.91147E-08
4	4.01%	4.02%	4.01%	1.22099E-08
5	4.08%	4.1%	4.06%	1.51442E-07
6	4.13%	4.15%	4.11%	1.69579E-07
7	4.17%	4.19%	4.16%	9.24858E-08
8	4.2%	4.23%	4.22%	1.86497E-08

TABLE II.1.1 – Calcul des taux ZC de NSS

Remarque. On remarque que comparé aux résultats obtenus pour le premier modèle, l'écart au carré pour chaque maturité est bien plus inférieure et donc nous pouvons dire que le modèle NSS présente une meilleure ajustement aux données par rapport au modèle NS.

Pour encore évaluer la performance du modèle de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) dans la construction de la courbe des taux d'intérêt, nous avons comparé la courbe NSS avec la courbe de marché de référence.

La figure suivante présente cette comparaison :



Comparaison des courbes obtenus

En observant la figure, nous pouvons constater que la courbe NSS (en vert) suit de près la courbe de marché (en rouge), avec une adéquation visuelle étroite entre les deux courbes. Cette adéquation démontre l'aptitude du modèle NSS à capturer les caractéristiques importantes de la courbe des taux d'intérêt observée sur le marché.

En revanche, la courbe de Nelson-Siegel présente des écarts plus importants par rapport à la courbe de marché. Ces écarts soulignent les limitations du modèle de Nelson-Siegel dans la représentation précise de la courbe des taux, notamment en ce qui concerne les formes complexes et les variations asymétriques.

3 Choix du modèle entre NS et NSS : Méthodes statistiques

Dans notre analyse précédente, nous avons constaté visuellement que le modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS) semble s'adapter de manière plus précise à la courbe des taux par rapport au modèle Nelson-Siegel (NS).

Cependant, pour confirmer ces observations initiales et prendre une décision plus rigoureuse et objective quant au choix du modèle, nous allons examiner les performances des modèles NS et NSS en utilisant des mesures d'ajustement telles que la RMSE (Root Mean Square Error), la MSE (Mean Squared Error) et la statistique U de Theil.

En outre, nous utiliserons également des méthodes statistiques supplémentaires qui nous permettront de comparer les modèles NS et NSS sur la base de critères statistiques tels que l'AIC, le BIC et le test de Durbin-Watson.

Indicateurs	Expression
Mean Squared Error (MSE)	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$
Root Mean Squared Error (RMSE)	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}$
Theil U-statistic	$\frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2}}}$
Akaike Information Criterion (AIC)	$2k - 2 \ln(\hat{L})$
Bayesian Information Criterion (BIC)	$\ln(n)k - 2 \ln(\hat{L})$

TABLE II.1.1 – Les mesures de la qualité de l’ajustement

Dans ces formules :

- Y_i représente les valeurs observées,
- \hat{Y}_i représente les valeurs prédites par le modèle,
- n est le nombre total d’observations,
- k est le nombre de paramètres dans le modèle,
- \hat{L} est la vraisemblance maximisée du modèle.

Le test de Durbin-Watson est une statistique de test utilisée pour évaluer la présence de corrélation sérielle dans les résidus d’un modèle. Il mesure l’autocorrélation des résidus en comparant les différences entre les résidus adjacents aux différences entre les résidus observés et prédits. Les valeurs de la statistique de test de Durbin-Watson varient entre 0 et 4. Une valeur proche de 2 indique une absence d’autocorrélation, tandis que des valeurs plus éloignées de 2 suggèrent une autocorrélation positive (valeurs inférieures à 2) ou négative (valeurs supérieures à 2) dans les résidus. Le test de Durbin-Watson est une mesure statistique utilisée pour évaluer la présence d’autocorrélation dans les résidus d’un modèle. Il est largement utilisé dans l’analyse de séries temporelles pour vérifier si les résidus présentent une dépendance temporelle.

La formule du test de Durbin-Watson est donnée par :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

où DW est la statistique de Durbin-Watson, e_t représente les résidus du modèle pour l'observation t et T est le nombre total d'observations.

Résultats

En analysant les performances des modèles, nous constatons que le modèle NSS présente une meilleure précision d'ajustement par rapport au modèle NS. Les mesures d'erreur de prédiction, telles que la Mean Squared Error (MSE) et la Root Mean Squared Error (RMSE), sont significativement inférieures pour le modèle NSS par rapport au modèle NS. Cela indique que le modèle NSS est capable de fournir des prédictions plus précises et plus proches des valeurs réelles observées. Les sorties sont les suivantes :

```

=====Nelson Siegel=====
Mean Square Error: 2.151244826032983e-06
Root Mean Square Error: 0.00146671225059075
=====Nelson Siegel Svensson=====
Mean Square Error: 4.632187648680281e-08
Root Mean Square Error: 0.00021522517623828957
    
```

Après avoir calculé la statistique Theil U pour les modèles Nelson-Siegel (NS) et Nelson-Siegel-Svensson (NSS), nous pouvons tirer la conclusion suivante :

La statistique Theil U est une mesure comparative de l'erreur de prédiction qui prend en compte à la fois l'erreur de prédiction relative et l'erreur de prédiction absolue. En analysant les résultats, nous constatons que la valeur de la statistique Theil U est significativement plus faible pour le modèle NSS par rapport au modèle NS. Cela signifie que le modèle NSS est capable de produire des prédictions plus précises et plus proches des valeurs réelles observées par rapport au modèle NS. Les sorties sont les suivantes :

```

=====Nelson Siegel=====
Theil U statistic : 0.017322932131719506
=====Nelson Siegel Svensson=====
Theil U statistic : 0.0025412174480929175
    
```

L'analyse des critères statistiques tels que l'AIC et le BIC nous permet de comparer encore une fois nos modèles et de déterminer lequel est le plus approprié pour notre analyse de la courbe des taux. Nous avons constaté que le modèle NSS présente des valeurs d'AIC et de BIC inférieures à celles du modèle NS. Les sorties sont les suivantes :

```

=====Nelson Siegel=====
AIC: -96.39570278009157
BIC: -96.07793661337223
=====Nelson Siegel Svensson=====
AIC: -123.10121194503293
BIC: -122.62456269495391
    
```

Remarque. *En prenant en compte les critères d'évaluation statistique tels que l'AIC, le BIC, la RMSE, la statistique Theil U et la visualisation de la courbe, nous pouvons affirmer de manière concluante que le modèle NSS est préférable au modèle NS pour la construction de la courbe des taux. NSS offre une meilleure adaptation aux données observées, des prédictions plus précises et une représentation plus fidèle des caractéristiques de la courbe des taux. En conséquence, il est fortement recommandé d'utiliser le modèle NSS dans le cadre de la modélisation et de la prédiction des taux d'intérêt.*

Maintenant, afin d'évaluer la présence d'autocorrélation dans les résidus du modèle. Dans le cas du modèle NSS (démontrant une meilleure adaptation à la courbe) l'autocorrélation dans les résidus peut avoir des implications importantes. La sortie du test sur le modèle de NSS est la suivante :

```

=====Nelson Siegel Svensson=====
Durbin-Watson statistic: 3.51
    
```

Dans le cas d'une statistique de Durbin-Watson égale à 3.51 pour le modèle NSS, cela indique donc une forte autocorrélation négative dans les résidus du modèle. En effet, cela signifie qu'il existe une dépendance temporelle entre les observations successives des résidus. Cela peut indiquer que le modèle ne capture pas pleinement la structure temporelle des données et qu'il reste des erreurs systématiques ou des tendances non expliquées.

Cette situation nous mène à penser à comment optimiser ce modèle afin de

réduire cette autocorrélation des résidus.

On a opté à essayer d'estimer la valeurs des paramètres de temps du modèle NSS de manière à ce qu'ils s'adaptent à notre cas et non de travailler avec des valeurs standards.

4 Optimisation du modèle NESLON-SIEGEL-SVENSSON

Maintenant, nous aborderons une méthode d'optimisation pour estimer les paramètres du modèle NSS : la méthode Nelder-Mead. Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec le modèle NSS en fixant les valeurs des paramètres de temps, tau 1 et tau 2, de manière préalable. Cependant, nous pouvons améliorer l'ajustement du modèle en permettant à ces paramètres de varier et en les estimant de manière plus précise.

La méthode de Nelder-Mead est une technique d'optimisation numérique souvent utilisée pour estimer les paramètres de modèles complexes tels que le modèle NSS. Comparée à la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), la méthode de Nelder-Mead présente plusieurs avantages.

- **Non-linéarité** : Le modèle NSS est un modèle non linéaire. La méthode MCO est idéale pour les modèles linéaires, mais elle peut être moins efficace pour les modèles non linéaires. La méthode de Nelder-Mead, en revanche, est conçue pour gérer les problèmes d'optimisation non linéaires.
- **Pas de dérivées** : La méthode de Nelder-Mead ne nécessite pas le calcul de dérivées, ce qui est bénéfique lorsque la fonction est complexe ou non différentiable. En revanche, la méthode MCO nécessite le calcul de dérivées, ce qui peut être difficile ou impossible pour certaines fonctions.
- **Robustesse** : La méthode de Nelder-Mead est considérée comme robuste car elle peut converger vers une solution même en présence de bruit ou d'irrégularités dans la fonction.

L'idée principale derrière l'utilisation de cette méthode dans notre contexte est de rechercher les valeurs optimales des paramètres de temps tau 1 et tau 2, ainsi que

des autres paramètres du modèle NSS, en minimisant l'écart entre les taux observés et les taux prédits par le modèle.

Nous serons en mesure d'explorer l'espace des paramètres de manière itérative, en ajustant les valeurs des paramètres pour trouver celles qui conduisent à la meilleure adéquation aux données observées.

Les paramètres estimés et le test de Durbin-Watson

Après avoir appliqué la méthode Nelder-Mead pour optimiser les paramètres du modèle NSS, nous avons obtenu les nouveaux paramètres suivants :

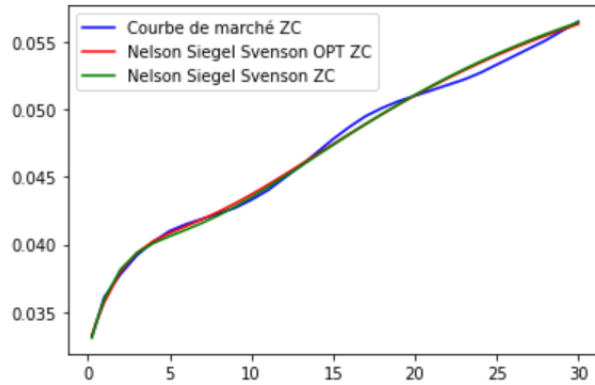
```
The factors of the Nelson Siegel Svenson OPT model are:  
beta0: 0.06977120774329898  
beta1: -0.037359030350420507  
beta2: -0.015410450998845191  
beta3: -0.06862971096275486  
tau1: 1.068691497772134  
tau2: 5.168403660604535  
Mean Square Error: 5.3321857806128347e-08  
Root Mean Square Error: 0.00023091526109403931
```

Ensuite, nous avons effectué le test de Durbin-Watson pour évaluer l'autocorrélation résiduelle dans le modèle optimisé NSS. Le résultat du test a donné une statistique de Durbin-Watson de 2.42, ce qui indique une absence d'autocorrélation positive ou négative dans les résidus du modèle.

```
====Nelson Siegel Svenson OPT====  
Durbin-Watson statistic: 2.42
```

Ces nouveaux paramètres optimisés ainsi que l'absence d'autocorrélation dans les résidus nous donnent confiance dans la performance et la fiabilité du modèle NSS après l'ajustement. Cela renforce notre conclusion précédente selon laquelle le modèle NSS est préférable au modèle NS pour la construction de la courbe des taux.

Finalement on peut tracer le graphique regroupant les différentes courbes comme suit :



Courbe regroupant NSS,NSS optimisé et la courbe de marché

Conclusion

En conclusion, notre étude comparative entre le modèle Nelson-Siegel (NS) et le modèle Nelson-Siegel Svensson (NSS), notamment sa version optimisée, démontre que NSS est nettement plus performant dans la construction de la courbe des taux. L'utilisation de NSS, en particulier sa version optimisée qui permet d'estimer de manière générale tous les paramètres du modèle, offre une meilleure adaptation aux données observées, des prévisions plus précises et une représentation plus fidèle des caractéristiques de la courbe des taux. Nous pouvons donc affirmer qu'il peut être considéré comme un outil fiable et efficace pour la construction de la courbe des taux.

Chapitre 2

Multihead CNN-LSTM et NSS : prédiction et construction de la courbe des taux

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'amélioration de la prédiction des taux d'intérêt et de la modélisation de la courbe des taux en combinant deux approches : le modèle multihead CNN-LSTM et le modèle NSS.

Tout d'abord, nous introduisons le modèle multihead CNN-LSTM, qui est une fusion puissante de deux architectures de réseaux de neurones populaires : les réseaux de convolutions (CNN) et les réseaux récurrents à mémoire à long terme (LSTM). En combinant ces deux approches, nous sommes en mesure de capturer à la fois les caractéristiques locales et séquentielles des données, ce qui est crucial pour la prédiction précise des taux d'intérêt.

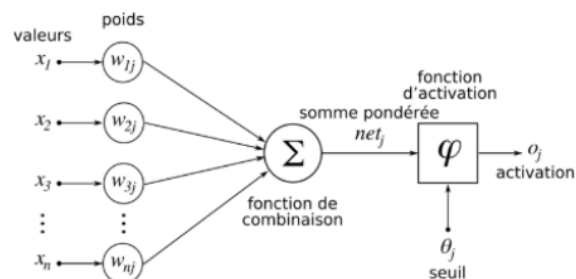
Ensuite, nous mettons en pratique le modèle multihead CNN-LSTM pour prédire les taux d'intérêt, puis nous utilisons ces prédictions pour construire la courbe des taux en utilisant le modèle NSS. En intégrant le modèle NSS, nous bénéficions des avantages des deux approches, ce qui permet d'améliorer à la fois la précision des prévisions et la modélisation de la courbe des taux.

1 Introduction aux modèles deep learnings

Un réseau de neurones est une série de neurones organisés en couches. Un neurone prend des entrées, effectue des calculs sur ces entrées et donne une sortie. Le réseau de neurones est une combinaison de ces neurones et est utilisé pour modéliser des relations complexes entre les entrées et les sorties, pour trouver des modèles dans les données.

1.1 Structure d'un neurone

Un réseau de neurones est en général composé d'une succession de couches de neurones dont chacune prend ses entrées sur les sorties de la précédente.



Structure d'un neurone

Un neurone artificiel reçoit plusieurs stimuli provenant de neurones sources via des poids.

Il analyse ces informations et produit un résultat en suivant les étapes suivantes :

- Chaque poids est représenté par une valeur notée w_{ij} , indiquant l'influence du neurone source i sur le neurone cible j .
- Chaque poids module le stimulus x_i provenant du neurone source i , ce qui se traduit mathématiquement par $w_{ij} \cdot x_i$.
- Le neurone cible j reçoit plusieurs stimuli pondérés par les poids et les somme pour obtenir une somme pondérée : $\sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot x_i$, où n est le nombre de neurones sources connectés au neurone cible.
- Le neurone cible traite cette somme pondérée en utilisant une fonction de combinaison.

1.2 Fonction de combinaison

Dans le domaine du traitement du signal, une fonction de transfert est "un modèle mathématique de la relation entre l'entrée x et la sortie y d'un système linéaire, le plus souvent invariant". Dans le domaine des réseaux de neurones, cette fonction peut également être appelée fonction de combinaison.

La fonction de combinaison p peut être formalisée comme étant une fonction vecteur-à-scalaire, notamment :

- Les réseaux de type MLP (multi-layer perceptron) calculent une combinaison linéaire des entrées, c'est-à-dire que la fonction de combinaison renvoie le produit scalaire entre le vecteur des entrées et le vecteur des poids : c'est le cas le plus simple¹.
- Les réseaux de type RBF (radial basis function) calculent la distance entre les entrées, c'est-à-dire que la fonction de combinaison renvoie la norme euclidienne du vecteur résultant de la différence vectorielle entre les vecteurs d'entrées².

1.3 Fonction d'activation

La fonction d'activation, notée f , est utilisée pour déterminer l'état du neurone, c'est-à-dire la sortie qu'il produit. Elle prend en entrée la somme pondérée des stimuli (comme expliqué précédemment) et effectue une transformation avant de fournir la sortie finale.

Différentes fonctions d'activation peuvent être utilisées en fonction des situations. Les fonctions d'activation les plus couramment utilisées dans la littérature sont les suivantes :

1. **Fonction Sigmoidale** : La fonction sigmoïde transforme la somme pondérée en une valeur comprise entre 0 et 1. Elle est définie par l'équation suivante :

$$f(p) = \frac{1}{1 + e^{-p}}$$

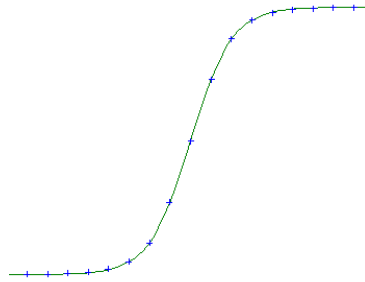
1. Mathématiquement : $\Sigma = \sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot x_i$.

2. Soit x et y les vecteurs d'entrée. La fonction de base radiale (RBF) est définie comme une fonction qui dépend de la distance entre x et y . Formellement, cela peut être exprimé comme suit :

$$\Sigma(x, y) = \exp(-\gamma \|x - y\|^2)$$

où $\| \cdot \|$ dénote la norme euclidienne, c'est-à-dire la distance entre x et y , et γ est un paramètre qui contrôle la largeur de la fonction de base radiale.

Cette fonction est souvent utilisée dans les tâches de classification binaire.

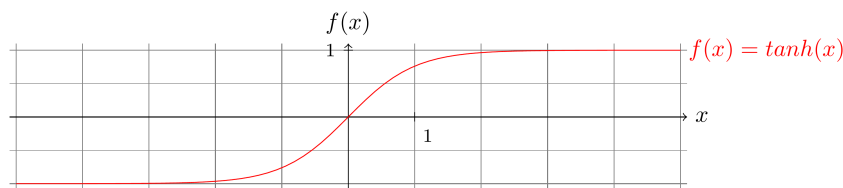


Fonction Sigmoide

2. **Fonction Tangente hyperbolique (Tanh)** : La fonction tanh est similaire à la fonction sigmoïde, mais elle produit des valeurs entre -1 et 1. Elle est définie par l'équation suivante :

$$f(p) = \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$$

La fonction tanh est couramment utilisée dans les réseaux de neurones où les valeurs positives et négatives sont importantes.

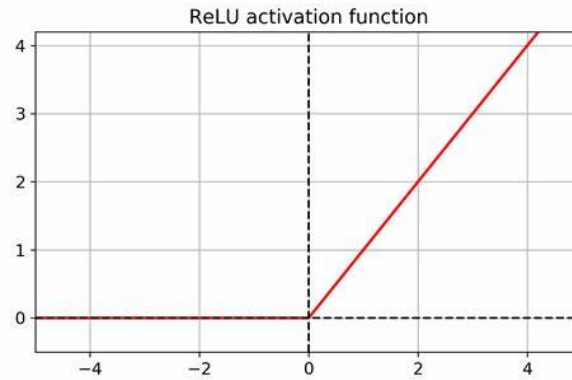


Fonction Tangente hyperbolique

3. **Fonction Rectified Linear Unit (ReLU)** : La fonction ReLU est une fonction d'activation simple qui transforme toutes les valeurs négatives en zéro et laisse les valeurs positives inchangées. Elle est définie par l'équation suivante :

$$f(p) = \max(0, p)$$

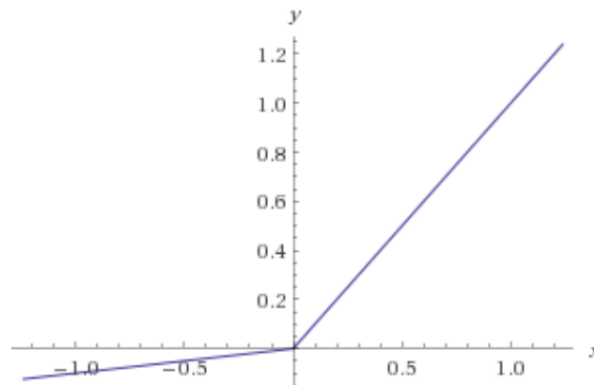
La fonction ReLU est largement utilisée dans les réseaux de neurones convolutifs (CNN) en raison de sa simplicité et de ses bons résultats empiriques.



Fonction Rectified Linear Unit

4. **Fonction Leaky ReLU** : La fonction Leaky ReLU est une variation de la fonction ReLU qui permet une petite pente³ pour les valeurs négatives au lieu de les rendre directement zéro. Elle est définie par l'équation suivante :

$$f(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p > 0 \\ |\alpha| \cdot p, & \text{sinon} \end{cases}$$

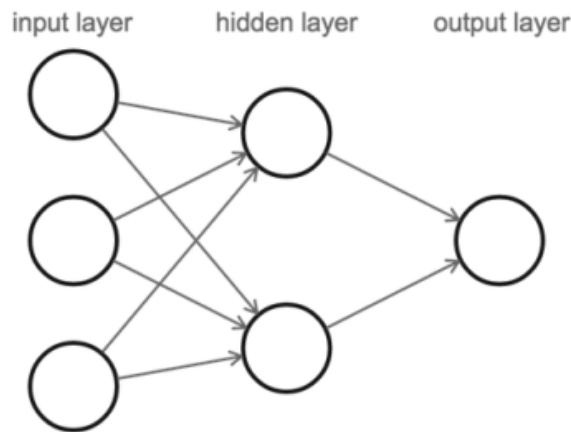


Fonction Leaky ReLU

1.4 Modèle des réseaux de neurones

Maintenant que nous avons expliqué le fonctionnement des neurones, nous pouvons définir les réseaux de neurones. Un réseau de neurones est constitué d'une série de couches de neurones, où chaque neurone de chaque couche est connecté aux neurones de la couche suivante.

3. pente = $|\alpha| \ll 1$



Un réseau de neurones à 2 couches

Lorsque nous comptons le nombre de couches dans un réseau de neurones, nous ne considérons que les couches ayant des connexions entrantes (en excluant la première couche d'entrée). Ainsi, dans l'exemple de la figure ci-dessus, nous avons un réseau de neurones à 2 couches comprenant une couche cachée. Il comporte 3 neurones en entrée, 2 neurones dans la couche cachée et 1 neurone en sortie.

Le calcul commence avec la couche d'entrée à gauche, à partir de laquelle les valeurs sont transmises à la couche cachée. À son tour, la couche cachée envoie ses valeurs de sortie à la dernière couche, qui contient notre valeur finale.

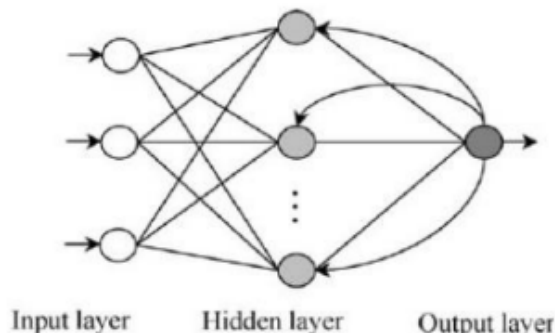
Il peut sembler que les trois neurones d'entrée envoient des valeurs multiples car chacun d'entre eux est connecté aux deux neurones de la couche cachée. Cependant, il n'y a en réalité qu'une seule valeur de sortie par neurone, qui est simplement copiée le long de chacune de ses connexions de sortie. Les neurones émettent toujours une valeur, quel que soit le nombre de neurones suivants.

2 Types de réseaux de neurones récurrents

2.1 Réseaux de neurones récurrents (RNN)

Les Réseaux de Neurones Récurrents (RNN) sont des réseaux de neurones conçus pour traiter des données séquentielles en conservant une "mémoire" de l'information précédente dans la séquence. Ils sont particulièrement utiles pour les tâches qui impliquent des séries

temporelles ou des séquences de texte. Cependant, ils ont du mal à gérer les dépendances à long terme, un problème qui est atténué dans des variantes plus sophistiquées comme les LSTM.



Un réseau de neurones à 2 couches

2.2 Long Short Term Memory (LSTM)

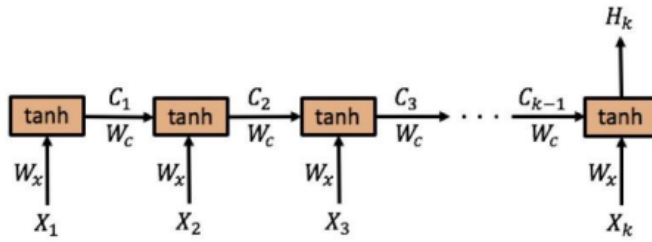
Le réseau de neurones LSTM est une variante du réseau de neurones récurrent (RNN) qui a été spécifiquement conçue pour capturer les relations à long terme dans des séries chronologiques. Contrairement aux RNN traditionnels, qui ne peuvent prendre en compte que des dépendances à court terme, les LSTM sont capables de conserver et d'utiliser des informations sur de plus longues périodes grâce à une structure spéciale.

Les RNN sont confrontés au problème de la disparition du gradient, ce qui limite leur capacité à apprendre à partir de séquences de données longues. Les gradients contiennent les informations nécessaires pour mettre à jour les paramètres du RNN lors de l'apprentissage. Lorsque les gradients deviennent très petits, les mises à jour des paramètres deviennent négligeables, ce qui signifie que l'apprentissage réel ne se produit pas de manière significative.

Avant de présenter l'architecture d'un modèle LSTM, il est important de comprendre le problème de la disparition du gradient.

Problème de disparition du gradient (Vanishing gradients) :

A titre de simplification, nous allons travailler dans la suite avec un simple RNN à couche cachée avec une seule séquence de sortie. Le réseau ressemble à ceci :



Le réseau de neurones récurrents (RNN) que nous considérons est structuré pour traiter une séquence d'entrée de vecteurs, que nous notons (X_1, X_2, \dots, X_k) . À chaque pas de temps t , nous avons un vecteur d'entrée X_t .

En plus de l'entrée actuelle, le RNN maintient un vecteur d'état qui représente les informations accumulées jusqu'à présent. Ce vecteur d'état est noté $(C_1, C_2, \dots, C_{k-1})$, ou plus généralement C_{t-1} , qui est l'état à la fin du pas de temps précédent.

L'entrée complète au réseau à chaque pas de temps est donc le vecteur concaténé (C_{t-1}, X_t) .

Le RNN utilise deux matrices de poids, W_c et W_x , pour transformer cette entrée combinée en un nouvel état caché. Pour simplifier notre discussion, nous combinons ces deux matrices de poids en une seule, que nous notons $W = (W_c, W_x)$.

À la fin de la séquence, à l'étape de temps k , le RNN produit un vecteur de sortie, H_k . Alors que certains RNN peuvent être configurés pour produire une sortie à chaque étape de temps, dans ce modèle plus simple, nous ne considérons que la sortie à la fin de la séquence.

Un réseau de neurones récurrents (RNN) génère une prédiction sous la forme d'un vecteur, H_k , à chaque pas de temps k . L'erreur de prédiction est calculée par la fonction E_k , et nous cherchons à minimiser cette erreur en ajustant les paramètres du modèle (les matrices de poids W_c et W_x).

Nous utilisons l'algorithme de la rétropropagation à travers le temps (BPTT) pour calculer

le gradient de l'erreur par rapport à chaque poids, que nous notons $\frac{\partial E_k}{\partial W}$. Cette quantité mesure la contribution de chaque poids à l'erreur totale. Ensuite, nous utilisons la règle de mise à jour, $W \mapsto W - \alpha \frac{\partial E_k}{\partial W}$, pour ajuster les poids. Ici, α est le taux d'apprentissage. Cependant, pour les réseaux RNN de grande profondeur (c'est-à-dire avec un grand nombre d'étapes de temps), le calcul du gradient peut poser problème. En remontant dans le temps, les contributions à l'erreur des poids associés aux premières étapes de temps deviennent très petites. Ceci est dû à la multiplication successive de termes inférieurs à 1 lors du calcul du produit

$$\frac{\partial E_k}{\partial W} = \frac{\partial E_k}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial C_k} \left(\prod_{t=2}^k \frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}} \right) \frac{\partial C_1}{\partial W}$$

Puisque $W = (W_c, W_x)$, C_t peut s'écrire comme :

$$C_t = \tanh(W_c C_{t-1} + W_x X_t)$$

Alors :

$$\frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}} = \tanh'(W_c C_{t-1} + W_x X_t) \cdot \frac{d}{dC_{t-1}} (W_c C_{t-1} + W_x X_t) = \tanh'(W_c C_{t-1} + W_x X_t) W_c \quad (2)$$

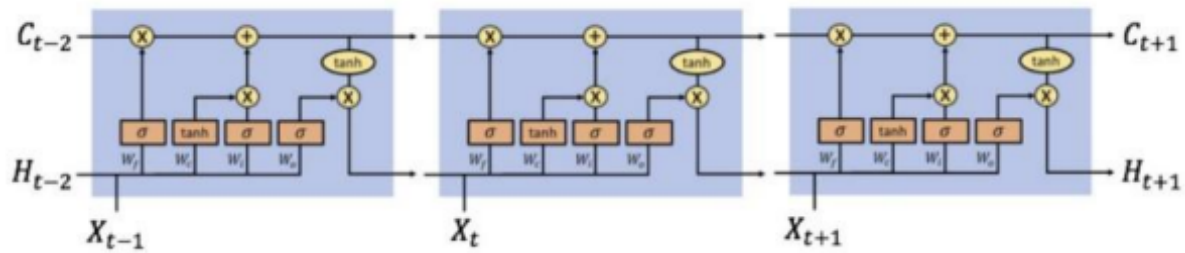
Remplacer (2) dans (1) permet d'obtenir :

$$\frac{\partial E_k}{\partial W} = \frac{\partial E_k}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial C_k} \frac{\partial C_k}{\partial C_{k-1}} \cdots \frac{\partial C_2}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial W} = \frac{\partial E_k}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial C_k} \left(\prod_{t=2}^k \tanh'(W_c C_{t-1} + W_x X_t) W_c \right) \frac{\partial C_1}{\partial W}$$

La dernière expression a tendance à disparaître lorsque k est grand, ceci est dû à la dérivée de la fonction d'activation \tanh qui est inférieure ou égale à 1, alors : $\frac{\partial E_k}{\partial W} \rightarrow 0$. La mise à jour des poids du réseau sera donc : $W \rightarrow W - \alpha \frac{\partial E_k}{\partial W} \approx W$. Cela montre qu'aucun apprentissage significatif ne sera fait.

Pour résoudre ce problème, nous utilisons une variante de RNN appelée Long Short-Term Memory (LSTM). Un LSTM a une structure plus complexe qu'un RNN standard et maintient un "état de cellule" C_t à chaque pas de temps. Cela permet au réseau de conserver les informations pertinentes sur une longue séquence de pas de temps, malgré le

problème de disparition du gradient.



Cellules du réseau LSTM aux pas de temps t-1, t, t+1

Les réseaux LSTM utilisent trois "portes" spéciales pour contrôler et mettre à jour l'état de la cellule à chaque pas de temps :

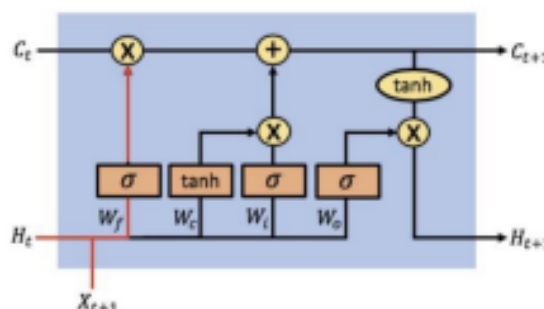
- la porte d'oubli (forget gate)
- la porte d'entrée (input gate)
- la porte de sortie (output gate)

Ces portes sont des transformations non linéaires qui utilisent des fonctions d'activation spécifiques, comme la tangente hyperbolique \tanh et la fonction sigmoïde σ .

La porte d'oubli détermine la proportion de l'état de la cellule précédente qui sera conservée, en se basant sur l'entrée actuelle et l'état caché précédent. Sa sortie est calculée par

$$f_{t+1} = \sigma(W_f \cdot (H_t, X_{t+1}))$$

où f_{t+1} est la sortie de la porte d'oubli à l'étape $t + 1$, σ est la fonction sigmoïde, W_f est la matrice de poids de la porte d'oubli, H_t est le vecteur de sortie du réseau à l'étape t , et X_{t+1} est le vecteur d'entrée à l'étape $t + 1$.



La porte d'entrée contrôle les nouvelles informations qui seront ajoutées à l'état de la cellule, en fonction de l'entrée actuelle et de l'état caché précédent. Cette porte a deux composants : un vecteur d'informations candidat, noté \tilde{C}_{t+1} , qui représente les modifications potentielles à apporter à l'état de la cellule, et un vecteur d'activation, noté i_{t+1} , qui détermine combien de chaque modification potentielle doit être effectuée.

Ces deux composants sont calculés comme suit :

$$\tilde{C}_{t+1} = \tanh(W_c \cdot (H_t, X_{t+1}))$$

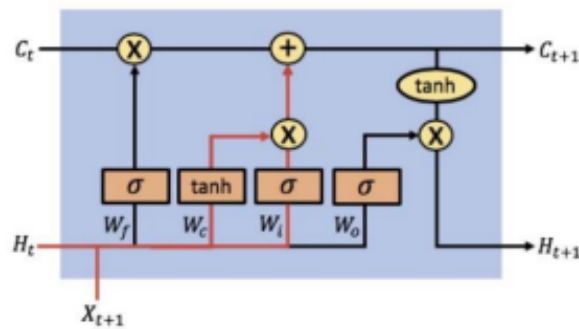
$$i_{t+1} = \sigma(W_i \cdot (H_t, X_{t+1}))$$

où \tanh est la fonction de tangente hyperbolique, W_c et W_i sont les matrices de poids correspondantes.

L'état de la cellule à l'étape de temps $t + 1$ est alors mis à jour par :

$$C_{t+1} = f_{t+1} \circ C_t + i_{t+1} \circ \tilde{C}_{t+1}$$

⁴ C_t est l'état de la cellule à l'étape de temps t .

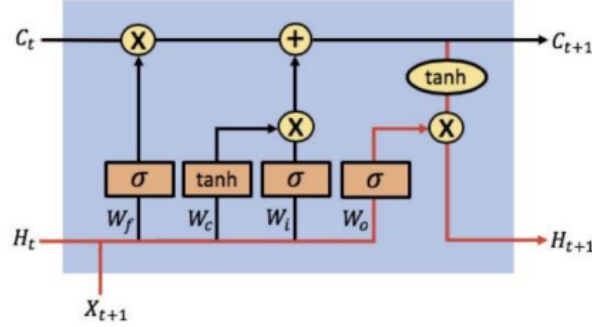


La porte de sortie contrôle la quantité d'information de l'état de la cellule qui sera transmise au réseau lors de l'étape suivante. Elle est responsable de la création du vecteur de sortie H_{t+1} . C'est essentiellement un filtre qui détermine quels aspects de l'état de la cellule le réseau devrait prendre en compte pour l'étape suivante.

4. où \circ représente le produit élément par élément (ou Hadamard) des vecteurs

La sortie de cette porte est donnée par $o_t = \sigma(W_o \circ (H_t, X_{t+1}))$, où W_o est la matrice de poids de la porte de sortie.

Le vecteur de sortie H_{t+1} est ensuite calculé en prenant le produit élément par élément du vecteur de sortie de la porte o_t et de la tangente hyperbolique de l'état de la cellule à l'instant $t + 1$, c'est-à-dire $H_{t+1} = o_t \circ \tanh(C_{t+1})$.



Backpropagation dans le temps dans les réseaux LSTM

Dans notre modèle de Réseau de Neurones Récurrents Longs à Court Terme (Long Short-Term Memory, LSTM), on suppose qu'à la fin d'une séquence de k pas de temps, le réseau génère un vecteur de prédiction unique, noté H_k . Les vecteurs d'état, notés C_t , capturent les dépendances à long terme dans les données séquentielles. Lorsqu'on travaille avec de longues séquences de données, un Réseau de Neurones Récurrents (RNN) de base peut avoir du mal à apprendre efficacement.

Dans un LSTM, le vecteur d'état C_t est défini par la relation suivante :

$$C_t = f_t \cdot C_{t-1} \cdot i_t \cdot \tilde{C}_t$$

où $f_t = \sigma(W_f \cdot [H_{t-1}, X_t])$ est la porte d'oubli, $i_t = \sigma(W_i \cdot [H_{t-1}, X_t])$ est la porte d'entrée, et $\tilde{C}_t = \tanh(W_c \cdot [H_{t-1}, X_t])$ est l'état de la cellule candidat.

Pour mettre à jour les paramètres du réseau sur k pas de temps, nous calculons le gradient $\frac{\partial E_k}{\partial W}$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial E_k}{\partial W} = \frac{\partial E_k}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial C_k} \left(\prod_{t=2}^k f_t \right) \frac{\partial C_1}{\partial W} \quad (2.1)$$

Nous approximations la dérivée de C_t par rapport à C_{t-1} en utilisant la porte d'oubli f_t :

$$\frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}} \approx f_t$$

Ceci démontre que le comportement du gradient est aligné avec celui de la porte d'oubli. Ainsi, si la porte d'oubli choisit de retenir une information, le gradient correspondant ne tendra pas vers zéro.

En somme, les LSTM résolvent le problème de la disparition du gradient en créant un lien entre les activations de la porte d'oubli et le calcul des gradients. Ce lien permet à l'information pertinente de passer par la porte d'oubli, ce qui assure que le LSTM retient les informations nécessaires.

3 Convolutional Neural Network (CNN)

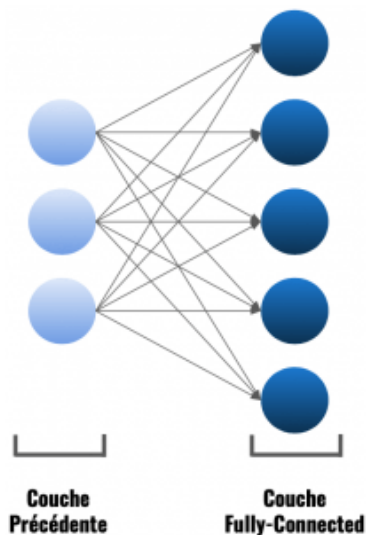
Un réseau de neurones convolutifs (CNN) est un type de modèle d'apprentissage profond principalement utilisé pour le traitement des images, mais qui peut également être appliqué à d'autres types de données comme les données de séries temporelles.

Voici un aperçu du fonctionnement d'un CNN :

- **Couche convolutive** : Le CNN utilise des filtres pour analyser les données et rechercher des motifs spécifiques. Par exemple, dans une série temporelle, un filtre peut rechercher des tendances ou des motifs récurrents. Au fur et à mesure de l'apprentissage, il ajuste ces filtres pour mieux reconnaître les caractéristiques pertinentes. En combinant plusieurs couches, il peut alors comprendre des motifs plus complexes et abstraits dans les données.
- **Fonction d'activation** : La sortie de la convolution est ensuite passée à travers une fonction d'activation non linéaire, comme une ReLU (Rectified Linear Unit). Cela introduit une non-linéarité dans le modèle, lui permettant d'apprendre des motifs plus complexes.
- **Couche de pooling** : Après la fonction d'activation, la sortie est passée à travers une couche de pooling. Cela réduit la dimensionnalité des données et extrait les caractéristiques les plus importantes. Plus précisément, le pooling permet de réduire

la taille spatiale des données en conservant les informations les plus significatives.

- **Couche entièrement connectée** : Après plusieurs tours de convolution et de pooling, la sortie est aplatie et passée à travers une ou plusieurs couches entièrement connectées. Ces couches effectuent un raisonnement de haut niveau⁵ sur les caractéristiques extraites par les couches convolutives.



La couche Fully-connected

- **Couche de sortie** : La couche de sortie du CNN est responsable de produire les prédictions finales du modèle. Elle est conçue pour prendre les caractéristiques extraites par les couches précédentes et les utiliser pour effectuer une prédiction sur la tâche spécifique que le modèle est entraîné à résoudre.

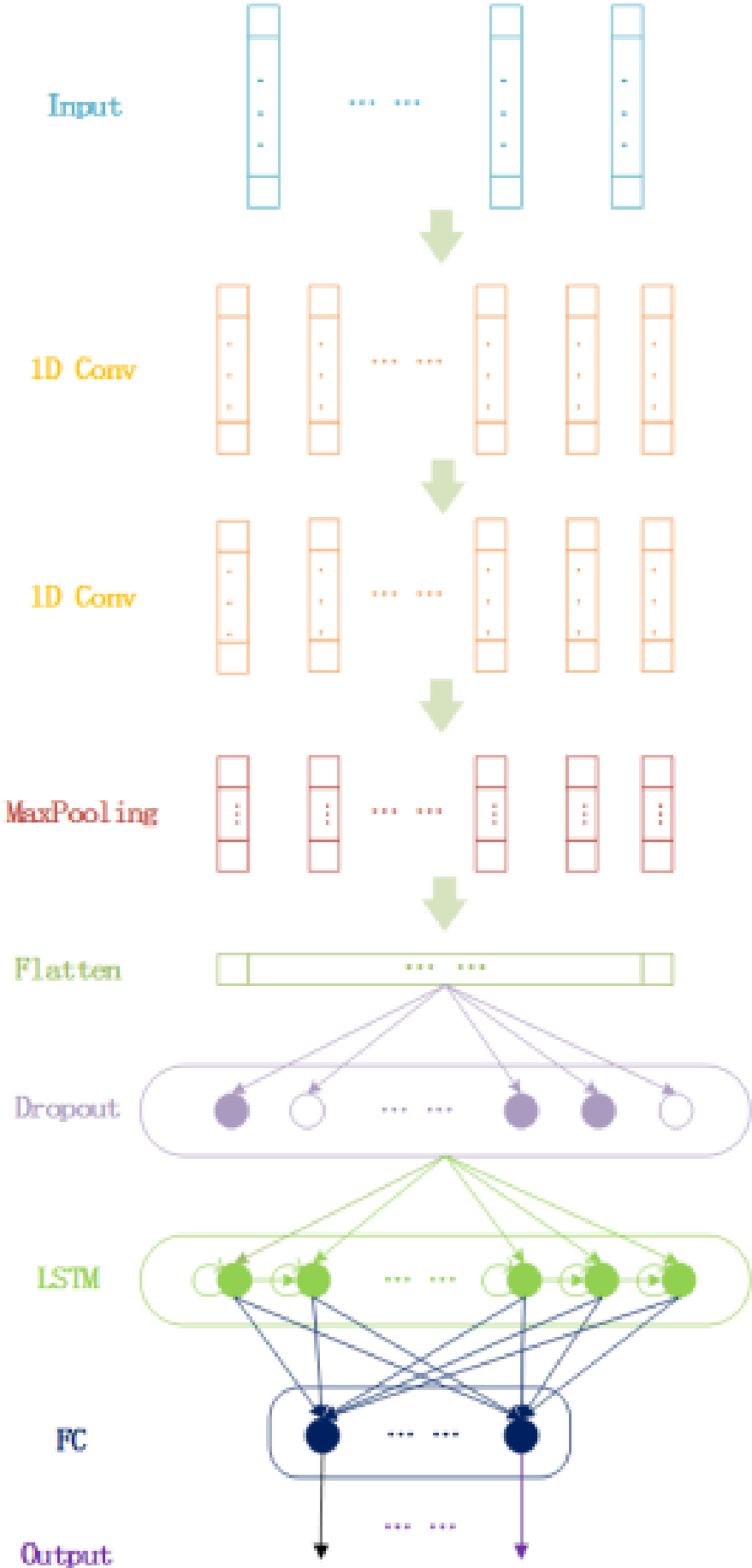
4 Multihead CNN-LSTM

La combinaison des deux modèles précédents nous donne ce qu'on appelle un modèle *MultiHead CNN-LSTM*. Le terme "*MultiHead*" fait référence à l'utilisation de plusieurs CNN parallèles pour extraire des caractéristiques à partir des données d'entrée. Chaque "*tête*" peut être conçue pour détecter des types spécifiques de caractéristiques dans les données. Après l'extraction des caractéristiques, les caractéristiques sont passées à un LSTM.

5. Il fait référence à la capacité du modèle à extraire des caractéristiques complexes à partir des données.

L'utilisation de ce modèle d'apprentissage pour la prédiction des taux d'intérêt peut être intéressant pour plusieurs raisons :

- **Capacité à détecter des motifs complexes** : Les CNN peuvent détecter des motifs spatiaux complexes dans les données(ils peuvent détecter des motifs de volatilité dans la courbe des taux...), tandis que les LSTM peuvent détecter des motifs temporels(des tendances à la hausse ou à la baisse dans la courbe des taux). Ensemble, ils peuvent apprendre à reconnaître des motifs qui seraient difficiles à détecter avec d'autres types de modèles.
- **Gestion des dépendances à long terme** : Les LSTM sont spécialement conçus pour gérer les dépendances à long terme dans les données. Cela peut être très utile pour la prédiction des taux d'intérêt, où les tendances passées peuvent avoir un impact sur les taux futurs.
- **Flexibilité** : Le modèle peut être ajusté pour se concentrer sur différents types de caractéristiques en modifiant l'architecture des CNN et des LSTM. Par exemple, si certaines caractéristiques sont plus importantes pour la prédiction des taux d'intérêt, on peut concevoir le modèle pour se concentrer davantage sur ces caractéristiques.
- **Capacité à gérer des données non structurées** : Les CNN sont très bons pour gérer des données non structurées, comme les images ou le texte. Si les taux d'intérêt sont influencés par des données non structurées (par exemple, des nouvelles économiques), un modèle *MultiHead CNN-LSTM* pourrait être capable de prendre en compte ces informations pour améliorer les prédictions.



Architecture du modèle ⁸³hybride CNN-LSTM

4.1 Architecture CNN-LSTM

Voici quelques détails sur l'architecture utilisée :

- **Nombre d'unités LSTM** : La couche LSTM a 10 unités, qui correspond au nombre de caractéristiques dans chaque pas de temps. Cela permet à la couche LSTM de capturer les dépendances et les motifs temporels dans les données.
- **Couche de Dropout** : La couche Dropout est appliquée après la couche LSTM avec un taux de dropout de 0,1. Cela signifie qu'au cours de l'entraînement, 10% des unités d'entrée seront aléatoirement mises à zéro à chaque mise à jour, ce qui contribue à prévenir le sur-ajustement.
- **Couche Dense(Fully-connected)** : La couche Dense a $n=9$ unités, où 'n' est le nombre de caractéristiques dans chaque pas de temps. Elle utilise la fonction d'activation **ReLU**, ce qui introduit de la non-linéarité dans la sortie de la couche.
- **Nombre de couches** : Dans cette architecture, il y a un total de quatre types de couches : la couche d'entrée, les couches Conv1D (deux pour chaque caractéristique d'entrée), la couche LSTM et la couche Dense.
- **Compilation du modèle** : Le modèle est compilé avec la fonction de perte de l'erreur quadratique moyenne (MSE), qui est couramment utilisée pour les tâches de régression. L'optimiseur **Adam**⁶ est utilisé pour l'entraînement du modèle.
- **Paramètres d'entraînement** : epoch=1000 ; un nombre déterminant combien de fois tout l'échantillon passera par le modèle. Le nombre optimal d'époques nécessaire à la formation du modèle dépend de la vitesse de convergence vers le résultat. Il dépend également de la puissance du calcul.
- **Batch Size=32** : Cela signifie que pendant l'entraînement, le modèle utilise 32 échantillons à la fois pour effectuer une propagation avant et calculer les gradients pour mettre à jour les poids.

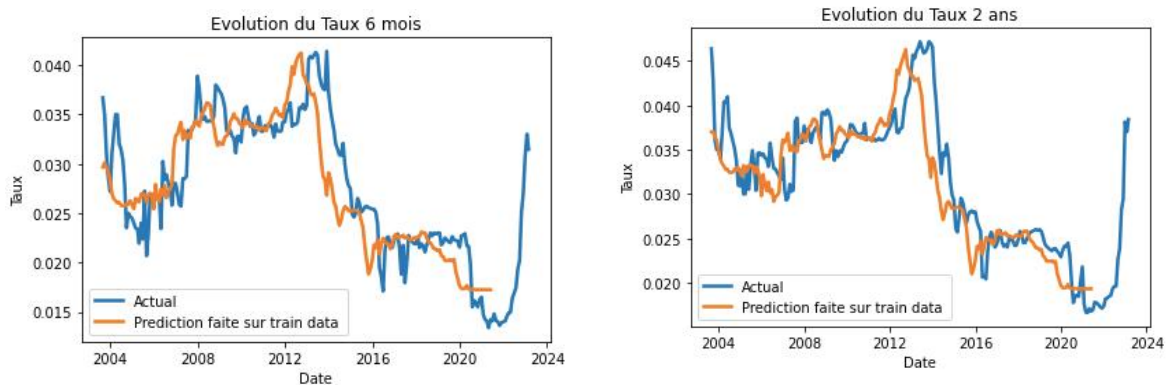
6. L'optimiseur Adam(Adaptive Moment Estimation) est connu pour sa robustesse et sa capacité à converger rapidement vers des minima locaux lors de l'entraînement de modèles profonds.

4.2 Application et Résultats

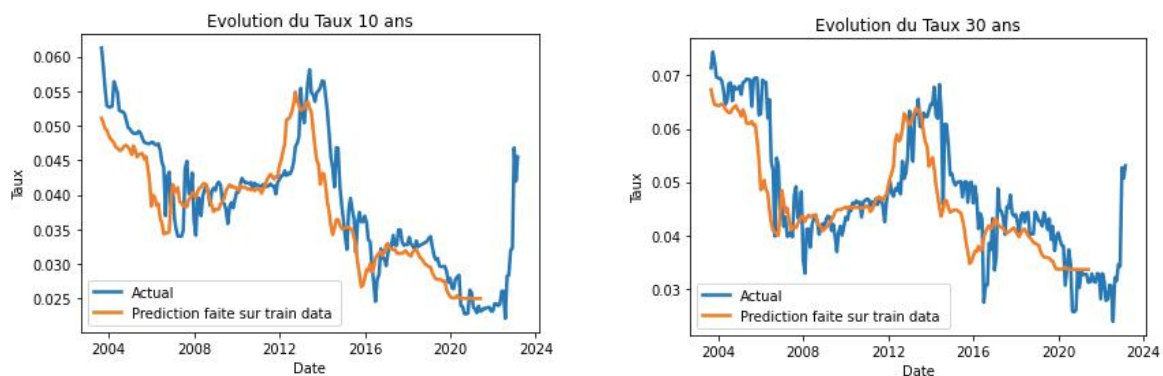
Dans cette partie, nous présenterons les résultats obtenus à l'aide du modèle CNN-LSTM pour la prédiction des taux futurs. La base de données utilisée contient des informations sur les taux et les maturités des obligations sur une période de 20 ans, allant de 2003 à 2023 (Site BAM).

En utilisant le modèle CNN-LSTM, nous avons entraîné le modèle sur les données historiques des taux et des maturités afin de prédire les taux futurs.

Dans cette première tentative, nous constatons que les taux prédits par le modèle présentent une certaine proximité avec les taux réels. Cependant, il est également évident que des améliorations peuvent être apportées pour obtenir des prédictions plus précises. Les figures ci dessous témoignent de cela :



Évolution des taux pour les maturités 6 mois et 2 ans



Évolution du taux pour les maturités 10 ans et 30 ans

Avec comme erreur :

échantillon	erreur
Train error	2.73E-05
Test error	6.0928E-05

En effet, dans notre base de données couvrant la période de 2003 à 2023, nous avons constaté la présence de plusieurs crises financières. Pour faire face à ces défis, nous avons envisagé deux approches :

- La première consistait à inclure des variables macro-économiques telles que la volatilité, l'indice d'incertitude financière, l'inflation, la croissance du PIB, etc. Ces variables auraient pu fournir des informations supplémentaires pour améliorer la précision des prédictions. Cependant, nous avons rencontré des difficultés en raison du manque de données précises et fiables pour ces variables, ce qui a rendu cette option non réalisable.
- La deuxième approche que nous avons envisagée était d'intégrer une métrique appelée Z-score pour détecter les périodes anormales ou les anomalies dans les données. Cette dernière est une mesure statistique qui permet de quantifier la différence entre une valeur observée et la moyenne de référence, exprimée en termes d'écart-type. Dans notre cas, le Z-score pourrait être utilisé pour détecter les périodes de chocs de taux ou de volatilité excessive.

Sa formule est la suivante :

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Où :

- Z est le Z-score utilisé pour quantifier la différence entre une valeur observée (x) et la moyenne de référence (μ), normalisée par l'écart-type de référence (σ).

Ensuite, en utilisant cette métrique comme une variable supplémentaire dans le modèle, il serait possible d'ajuster les prédictions en fonction de la déviation par rapport à la moyenne de référence, ce qui pourrait contribuer à réduire l'erreur de prédiction.

Détection des anomalies avec le Z-score

Dans cette partie, nous avons utilisé le Z-score comme une métrique pour détecter les périodes où des anomalies qui se produisent dans les données. Nous avons intégré cette métrique dans notre modèle afin de réduire l'erreur de prédiction et d'améliorer les performances.

Le tableau ci-dessous récapitule les périodes où des anomalies ont été détectées à l'aide du Z-score :

Période	Z_Score	Événements
2003 - 2004	> 1.7	Ancienne politique monétaire avec des taux élevés
2006 - 2008	> 1.7	Déséquilibre Offre/Demande de crédits + crise financière mondiale
2020 - 2022	> 1.7	Covid-19 et conséquences

Voici un extrait de la sortie du code qui affecte la valeur "not normal" aux données détectées par le Z-score :

```
Donn es d tect es par le Z-score :
Value: 2003-05-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2003-06-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2003-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2003-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2003-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2003-10-31 00:00:00 - Status: Not Normal
...
Value: 2004-03-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-04-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-05-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-06-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-10-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-11-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2004-12-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2005-01-31 00:00:00 - Status: Normal
```

```
Value: 2005-02-28 00:00:00 - Status: Normal
...
Value: 2006-01-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-02-28 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-03-31 00:00:00 - Status: Not Normal
...
Value: 2006-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-10-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2006-11-30 00:00:00 - Status: Not Normal
...
Value: 2019-11-30 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2019-12-31 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-01-31 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-02-29 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-03-31 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-04-30 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-05-31 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2020-06-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2020-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2020-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2020-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2020-10-31 00:00:00 - Status: Not Normal
...
Value: 2021-04-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2021-05-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2021-06-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2021-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2021-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2021-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
...
Value: 2022-05-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2022-06-30 00:00:00 - Status: Not Normal
```

```
Value: 2022-07-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2022-08-31 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2022-09-30 00:00:00 - Status: Not Normal
Value: 2022-10-31 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2022-11-30 00:00:00 - Status: Normal
...
Value: 2023-04-30 00:00:00 - Status: Normal
Value: 2023-05-31 00:00:00 - Status: Normal
```

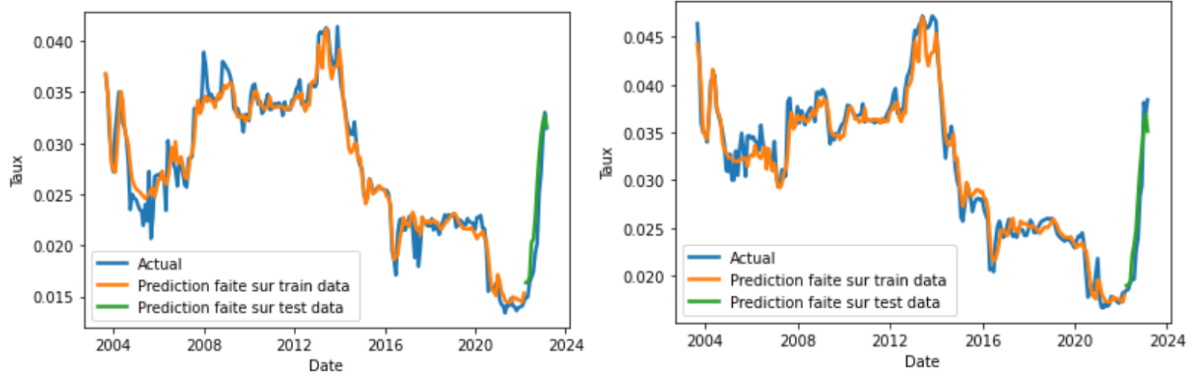
Ces résultats montrent que le Z-score a réussi à détecter les périodes avec des anomalies, correspondant aux mêmes périodes identifiées dans le tableau précédent. Les données marquées comme "not normal" nécessitent une attention particulière lors de l'analyse et de la prédiction des taux.

L'intégration de cette métrique dans notre modèle permettra de prendre en compte ces périodes d'anomalies et d'ajuster la prédiction en conséquence, ce qui améliorera la précision et la fiabilité des résultats.

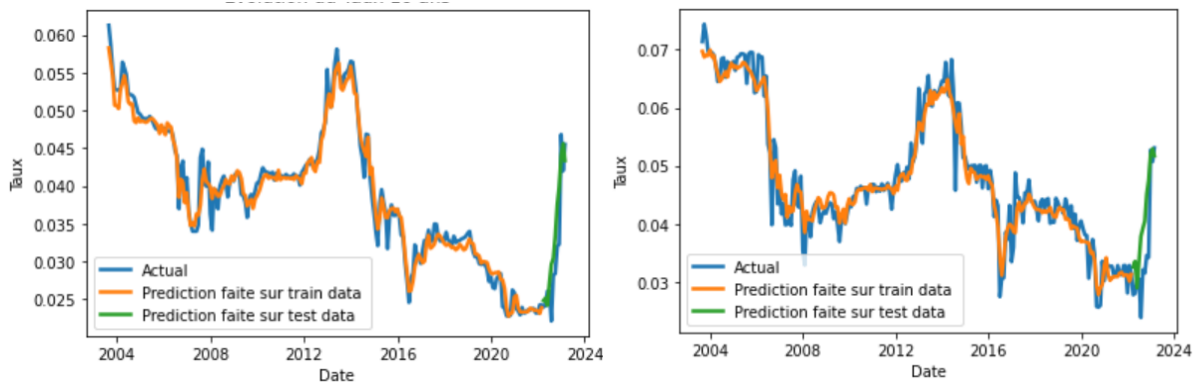
Résultats de la prédiction par CNN-LSTM

On a opté pour une répartition 90/10 pour les données modélisation et test et il est important de préciser que l'apprentissage du modèle a été arrêté en mai 2022. Ainsi, les prédictions qui seront présentées concernent la période postérieure à cette date (jusqu'à mai 2023).

Dans notre étude, nous avons réalisé des prédictions des taux d'intérêt pour différentes échéances, notamment les maturités de 6 mois, 2 ans, 10 ans et 30 ans. L'objectif est de démontrer la capacité de notre modèle après implémentation du z-score (voir annexe) à s'adapter à des horizons temporels variés. Nous affichons les prédictions à la fois sur l'échantillon d'apprentissage et sur l'échantillon de test, ainsi que la courbe réelle du taux comme suit :



Évolution du taux 6 mois(à gauche) et 2 ans(à droite)



Évolution du taux 10 ans(à gauche) et 30 ans(à droite)

Dans nos graphiques, nous pouvons observer l'évolution des taux sur différentes maturités, notamment le taux à 6 mois, 2 ans, 10 ans et 30 ans. Les courbes de prédictions du modèle CNN-LSTM montrent une correspondance étroite avec les courbes réelles des taux, de plus, le modèle a pu anticiper une hausse des taux, ce qui démontre sa capacité à saisir les tendances et les variations du marché.

Cette similarité entre les prédictions du modèle et les données réelles démontre l'efficacité de notre modèle dans la prédiction des taux sur différentes périodes de maturité. Il est capable de saisir les tendances et les fluctuations du marché, ce qui permet d'obtenir des prédictions fiables pour des échéances allant de 6 mois à 30 ans.

Le tableau suivant montre qu'effectivement l'erreur est devenue plus petite :

échantillon	erreur
Train error	5.53E-06
Test error	2.06E-05

Ces résultats renforcent la confiance dans la capacité de notre modèle CNN-LSTM à

fournir des prédictions précises et utiles pour la gestion de portefeuille et la prise de décision dans le domaine financier.

Dans cette même perspective le tableau suivant nous donne les résultats du modèle CNN-LSTM :

Date de la courbe	Ecart type moyen	MSE
1 mois	0.003234	0.000008
2 mois	0.003887	0.000010
3 mois	0.002895	0.000009
4 mois	0.003259	0.000016
5 mois	0.006690	0.000028
6 mois	0.005279	0.000021
7 mois	0.004078	0.000018
8 mois	0.005979	0.000021
9 mois	0.007263	0.000028
10 mois	0.007317	0.000029
11 mois	0.005901	0.000021
12 mois	0.006024	0.000022

TABLE II.2.1 – Résultats de prédiction du modèle CNN-LSTM

On remarque que :

L'écart type moyen, indicateur important de la fiabilité des prédictions, montre des écarts types moyens relativement faibles, ce qui suggère une cohérence et une stabilité des prédictions du modèle pour toutes les dates de courbe.

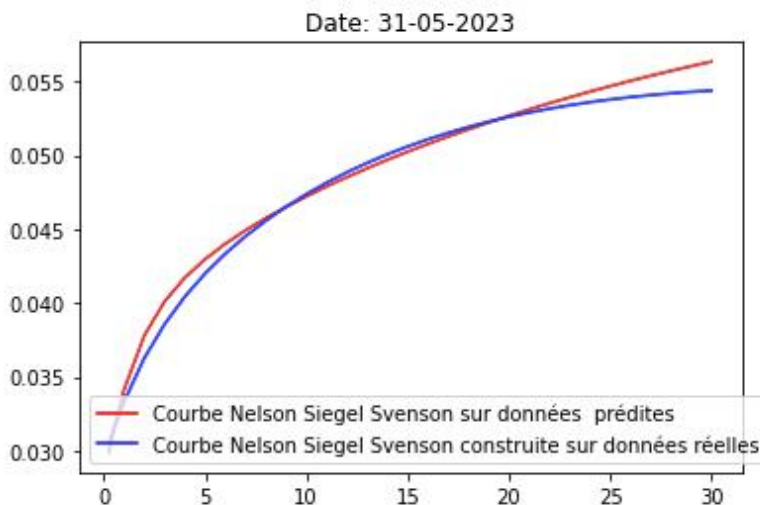
En ce qui concerne l'erreur quadratique moyenne (MSE), Les valeurs obtenues pour toutes les dates de courbe sont très faibles, ce qui indique que les prédictions du modèle sont en très bonne correspondance avec les valeurs réelles.

À titre d'exemple ,nous pouvons dire que pour une période de 6 mois l'écart type moyen de 0,005279 suggère une cohérence des prédictions. Enfin, l'erreur quadratique moyenne (MSE) de 0,000021 confirme que le modèle parvient à capturer avec précision les variations du taux sur cette période.

Construction de la courbe des taux

Ensuite, nous avons intégré les taux prédits par le modèle CNN-LSTM dans le modèle NSS optimisé. Cette approche nous permet de générer une courbe de taux résultante basée

sur les prédictions du CNN-LSTM et les caractéristiques du modèle NSS comme suit :



Courbe prédite par NSS et CNN-LSTM au 31-05-2023

Dans le graphique obtenu, nous pouvons clairement observer que la courbe résultante du modèle NSS suit la tendance de la courbe réelle de manière satisfaisante. On remarque aussi que pour les maturités de moins de 20 ans l'écart est très petit et on remarque une petite divergence⁷ pour les plus grandes maturités. Cette similitude entre la courbe résultante et la courbe réelle témoigne de l'efficacité de notre approche combinant le modèle CNN-LSTM et le modèle NSS. Cette intégration des prédictions du modèle CNN-LSTM dans le modèle NSS optimisé permet d'obtenir une courbe de taux qui capture les variations et les caractéristiques du marché de manière précise.

Contexte de l'évolution des taux au Maroc

Pour expliquer ces fluctuations des taux rencontrés dans notre base de données (2003-2023) et pour bien interpréter la forme des courbes trouvées, il est nécessaire de voir que s'est passé dans ces périodes de crises :

- L'ancienne politique monétaire au Maroc jusqu'à 2003-2004 consistait en des taux élevés pour maîtriser l'inflation et stabiliser l'économie, ce qui a entraîné une hausse des rendements sur les obligations et les emprunts à long terme.

7. Dans des situations, les mouvements et les variations à court terme peuvent être bien capturés par le modèle NSS, mais il peut avoir du mal à saisir les évolutions de plus longue durée.

- Pendant la crise financière mondiale de 2006 à 2008, il y a eu une contraction de l'offre de crédits au Maroc, ce qui a entraîné une augmentation des taux d'intérêt. La crise a également incité les investisseurs à se tourner vers les obligations d'État considérées comme des actifs plus sûrs, entraînant une baisse des taux obligataires.
- La pandémie de Covid-19 a eu des répercussions économiques majeures entre 2020 et 2022 au Maroc. Les mesures de confinement et les restrictions ont entraîné une baisse de l'activité économique et une augmentation de l'incertitude. Les taux obligataires ont tendance à baisser en raison de la politique monétaire expansionniste mise en place pour stimuler l'économie et soutenir les entreprises et les ménages pendant la crise. Les changements de politique monétaire ont également engendré des chocs de taux, qui peuvent avoir un impact significatif sur les modèles de prédiction des taux d'intérêt.

Conclusion

En conclusion, l'intégration du Z-score dans notre modèle CNN-LSTM a amélioré de manière significative les résultats de prédiction de la courbe des taux. En normalisant les données et en traitant les valeurs aberrantes, le Z-score a permis d'obtenir des prédictions plus précises et cohérentes. L'utilisation de l'approche NSS en combinaison avec le modèle CNN-LSTM a également contribué à capturer de manière précise les variations asymétriques de la courbe des taux.

Chapitre 3

Application à la valorisation d'un portefeuille obligataire

Dans ce chapitre final, nous abordons l'application pratique des résultats obtenus précédemment pour la valorisation d'un portefeuille obligataire.

Pour mener à bien cette évaluation, nous valorisons un portefeuille obligataire en utilisant les taux prédits par le modèle CNN-LSTM pour une date spécifique, à savoir le 31-05-2023. Ces taux prédits sont ensuite injectés dans le modèle NSS optimisé, qui prend en compte les paramètres ajustés et les caractéristiques pertinentes pour calculer les prix des obligations correspondantes. En agrégeant les prix des obligations, nous obtenons ainsi une estimation de la valeur du portefeuille obligataire.

En analysant les résultats obtenus, nous serons en mesure de tirer des conclusions quant à la viabilité de la combinaison des modèles CNN-LSTM et NSS optimisé pour la prédiction des taux et la valorisation d'un portefeuille obligataire. Si les résultats se révèlent satisfaisants et que les différences entre les valeurs prédites et réelles sont minimales, cela indiquera que cette approche peut être utilisée dans la pratique. Dans le cas contraire, nous pourrions explorer des pistes d'amélioration des modèles existants ou envisager d'autres approches pour obtenir des prédictions plus précises.

1 Formules d'actualisation pour les titres de créances émis par l'Etat

Il faut cependant ne pas oublier que la valeur calculée ainsi n'est qu'un simple chiffre. Le prix réel des obligations s'établit sur le marché.

Le prix théorique de l'obligation se calcule de la relation suivante :

$$Prix = \sum_{i=1}^n \frac{Fi}{(1 + TRA)^i}$$

Ainsi que la valeur d'une ligne obligataire est déterminée par les formules suivantes qui sont imposées par le CIRCULAIRE N° 02/04 de l'AMMC relatif aux conditions d'évaluation des valeurs apportées à un organisme de placement collectif en valeurs mobilières ou détenues.

1.1 Évaluation des titres de créances de maturité initiale inférieure à 1 an

Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est inférieure ou égale à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = N \times \frac{1 + \frac{tf \times Mi}{360}}{1 + \frac{tr \times Mr}{360}}$$

Avec :

- P : le prix du titre, en MAD ;
- N : le nominal, en MAD ;
- Mi : la maturité initiale, en jours ;
- Mr : la maturité résiduelle, en jours ;
- tf : le taux facial ;

- tr : le taux de rendement, simple (il devient constant pour toute maturité résiduelle inférieure ou égale à 8 semaines, avec une condition de continuité du taux à la maturité précitée).

1.2 Évaluation des titres de créances de maturité initiale supérieure à 1 an

Titres de créances de maturités résiduelles inférieure à 1 an : Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est supérieure à 1 an et dont la maturité résiduelle est inférieure ou égale à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = N \times \frac{1 + tf}{1 + \frac{tr \times Mr}{360}}$$

Sauf dans le cas des lignes postérieures ou atypiques à un seul flux où la formule s'écrit :

$$P = N \times \frac{1 + \frac{Mi \times tf}{A}}{1 + \frac{tr \times Mr}{360}}$$

Où P , N , Mr , Mi , tf et tr : sont tels que définis précédemment ; et A : égale à 366 jours si l'année en cours est bissextile et 365 sinon.

Titres de créances de maturités résiduelles supérieure à 1 an : Le prix des titres de créances à taux fixe dont les maturités initiales et résiduelles sont supérieures à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = \frac{1}{(1 + tr)^{\frac{nj}{A}}} \sum_{i=1}^n \frac{Fi}{(1 + tr)^{i-1}}$$

Avec :

- P : le prix du titre, en MAD ;
- tr : le taux de rendement au moment de l'évaluation, tel que défini par l'article 6 de la présente circulaire ;
- Fi : flux monétaire à la date i (coupon ou coupon plus nominal) ;

- n : nombre de coupons à venir ;
- nj : nombre de jours restant à courir jusqu'à la date du prochain coupon ;
- A : égale à 366 jours si l'année en cours est bissextile ou 365 sinon.

Plus précisément, cette dernière formule s'écrit différemment suivant que la ligne à évaluer est normale ou postérieure :

Cas d'une ligne normale :

$$P = \frac{1}{(1 + tr)^{\frac{nj}{A}}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{tf}{(1 + tr)^{i-1}} + \frac{1}{(1 + tr)^{n-1}} \right]$$

Cas d'une ligne postérieure à un seul flux :

$$P = N \times \frac{1 + \frac{tf \times Mi}{A}}{(1 + tr)^{\frac{nj}{A}}}$$

Où l'on considère les mêmes notations citées avant.

Cas d'une ligne postérieure à un plusieurs flux : Si la date d'évaluation de la ligne précède la date de détachement du premier coupon :

$$P = \frac{N}{(1 + tr)^{\frac{nj}{A}}} \left[tf \left(\frac{D1c - DE m}{A} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{tf}{(1 + tr)^{i-1}} + \frac{1}{(1 + tr)^{n-1}} \right]$$

Avec : $D1c$: Date de détachement du premier coupon ; $DE m$: Date d'émission ;

Sinon : la formule est la même que pour une ligne normale.

2 Résultats et interprétations

Afin de démontrer la pertinence de nos résultats, nous allons évaluer la valeur d'un portefeuille au 31/5/2023 . Ensuite, nous comparerons cette valorisation avec celle obtenue en utilisant la courbe réelle, et calculerons l'erreur de prévision.

La valorisation est effectuée à l'aide d'un pricer sur python, qui exploite les caractéristiques de chaque obligation dans le portefeuille ainsi que la courbe des taux prédite et réelle du marché. Notre portefeuille(image ci-dessous) se composant de 57 BDT sera valorisé le 31-05-2023 à laide de la courbe réelle et la courbe prédite par le réseau de neurone et le modèle NSS.

Code ISIN	Libellé	Maturité initiale	Date émission	Date jouissance	Date échéance	Nominal	Tauxfacial	Spread	Code ML
200709	BDT du 05/04/2004	7305	2004-04-05 00:00:00	2004-04-05 00:00:00	2024-04-05 00:00:00	100000	0.061	0,00%	MA000200709
200751	BDT du 28/02/2005	7305	2005-02-28 00:00:00	2005-02-28 00:00:00	2025-02-28 00:00:00	100000	0.06	0,00%	MA000200751
200764	BDT du 03/10/2005	7305	2005-10-03 00:00:00	2005-10-03 00:00:00	2025-10-03 00:00:00	100000	0.0595	0,00%	MA000200764
200774	BDT du 02/01/2006	7305	2006-01-02 00:00:00	2006-01-02 00:00:00	2026-01-02 00:00:00	100000	0.0595	0,00%	MA000200774
200792	BDT du 05/06/2006	7305	2006-06-05 00:00:00	2006-06-05 00:00:00	2026-06-05 00:00:00	100000	0.0515	0,00%	MA000200792
200802	BDT du 04/12/2006	10958	2006-12-04 00:00:00	2006-12-04 00:00:00	2036-12-04 00:00:00	100000	0.045	0,00%	MA000200802
200993	BDT du 01/03/2010	5479	2010-03-01 00:00:00	2010-03-01 00:00:00	2025-03-01 00:00:00	100000	0.042	0,00%	MA000200993
200999	BDT du 03/05/2010	7305	2010-05-03 00:00:00	2010-05-03 00:00:00	2030-05-03 00:00:00	100000	0.044	0,00%	MA000200999
201093	BDT du 19/04/2012	5586	2012-01-02 00:00:00	2012-04-19 00:00:00	2027-04-19 00:00:00	100000	0.044	0,00%	MA000201093
201236	BDT du 14/08/2013	5479	2013-08-14 00:00:00	2013-08-14 00:00:00	2028-08-14 00:00:00	100000	0.0525	0,00%	MA000201236

Extrait du portefeuille

En suivant le circulaire de la AMMC pour la valorisation des obligations on parvient à avoir les résultats suivants :

Code ISIN	Date valorisation	Prix Exact	Prix Predit	Erreur Obs/Pred
200709	2023-05-31 00 :00 :00	96017.75048	95947.20966	70.54081707
200751	2023-05-31 00 :00 :00	104077.7472	103624.3911	453.3560949
200764	2023-05-31 00 :00 :00	105094.607	104372.1931	722.4138824
200774	2023-05-31 00 :00 :00	105536.7109	104721.2966	815.4143331
200792	2023-05-31 00 :00 :00	103949.2702	102991.6576	957.6125494
200802	2023-05-31 00 :00 :00	95825.70438	95566.17214	259.5322409
200993	2023-05-31 00 :00 :00	101136.2755	100691.4287	444.8467633
200999	2023-05-31 00 :00 :00	100553.0821	99349.91224	1203.16989
201093	2023-05-31 00 :00 :00	101943.2538	100785.5222	1157.731605

TABLE II.3.1 – Extrait du portefeuille valorisé au 31-05-2023

Après la valorisation de notre portefeuille en utilisant les taux réels ainsi que les taux prédits par les modèles CNN-LSTM et NSS. Les résultats obtenus lors de la comparaison

des deux portefeuilles ont révélé une erreur globale de seulement 0,629%. Cette faible marge d'erreur démontre l'efficacité de ces modèles dans la prédiction des tendances et des fluctuations du marché financier.

Les résultats obtenus sont prometteurs et indiquent que les modèles CNN-LSTM et NSS ont une bonne précision dans l'estimation des valeurs des portefeuilles. Cela suggère que ces modèles ont réussi à capturer efficacement les schémas sous-jacents des données financières utilisées.

Il est important de noter que notre modèle a réalisé de bonnes prédictions, notamment pour les taux de maturité inférieure à 20 ans. Étant donné que notre portefeuille est composé à hauteur de 80% d'obligations de maturités inférieures à 20 ans, il est logique que nous ayons obtenu ce résultat attractif.

Conclusion

En conclusion, ce chapitre souligne l'utilité des modèles CNN-LSTM et du modèle NSS pour la prédiction de la courbe des taux et pour l'approximation de la valeur d'un portefeuille. Les résultats obtenus ont démontré leur capacité à capturer les tendances du marché avec une erreur globale de seulement 0,629%. Ces modèles offrent des estimations fiables et précises, facilitant la prise de décision et la gestion des actifs financiers. Des recherches futures pourraient explorer d'autres types d'actifs financiers et intégrer des informations supplémentaires pour améliorer davantage la précision des prévisions et la valorisation des portefeuilles.

Conclusion générale

Notre projet a constitué une exploration approfondie de l'intersection de la finance traditionnelle et de l'intelligence artificielle, et de l'optimisation de la valorisation du portefeuille qu'une telle combinaison peut engendrer. En réponse à notre question de recherche initiale, nous avons trouvé que la combinaison de l'apprentissage profond via un modèle CNN-LSTM, avec des techniques financières paramétriques comme les modèles Nelson-Siegel et Nelson-Siegel-Svensson, a le potentiel de transformer la manière dont les courbes de taux sont construites et utilisées.

Les techniques d'interpolation et de bootstrapping, ainsi que les modèles Nelson-Siegel et Nelson-Siegel-Svensson, se sont avérés être des outils précieux pour modéliser les courbes de taux. Cependant, la véritable innovation est venue de l'intégration du modèle CNN-LSTM, qui a non seulement permis de prédire les rendements de différentes maturités, mais aussi d'optimiser la construction de la courbe des taux.

L'ajustement apporté au modèle CNN-LSTM a été un facteur clé pour améliorer les prédictions. En effet, nous avons obtenu de bonnes prédictions avec de faibles erreurs, illustrant l'efficacité de l'intersection entre l'apprentissage profond et les modèles financiers traditionnels.

En ce qui concerne l'application pratique de notre recherche, la valorisation du portefeuille a été nettement améliorée grâce à l'utilisation de notre courbe des taux optimisée. En fait, lors de la prédiction de la valeur du portefeuille, l'erreur de précision était de seulement 0.629%. Cela démontre l'énorme potentiel qu'offre l'intégration de l'intelligence artificielle dans la modélisation financière traditionnelle.

En somme, notre projet a ouvert de nouvelles perspectives pour l'optimisation de la valorisation du portefeuille dans le secteur bancaire d'investissement. Cette fusion de

l'apprentissage automatique et des techniques financières traditionnelles a le potentiel de transformer radicalement les pratiques actuelles de gestion de portefeuille, et promet de nouvelles avancées dans l'avenir.

Bibliographie

- [1] Hagan, P. S., & West, G. (1996). Methods for constructing a yield curve.
- [2] Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). *Parsimonious modeling of yield curves*. The Journal of Business, 60(4), 473-489.
- [3] Svensson, L. E. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992-1994*. International Monetary Fund, IMF Working Paper No. 94/114.
- [4] Choi, Y.-A., Park, S.-J., Jun, J.-A., Pyo, C.-S., Cho, K.-H., Lee, H.-S., Yu, J.-H. (2021). Deep Learning-Based Stroke Disease Prediction System Using Real-Time Bio Signals.
- [5] GBONGUE, Florent, PLANCHET, Frédéric. *Analyse comparative des modèles de construction d'une courbe des taux sans risque dans la zone CIPRES*. Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 / ISFA.
- [6] LI, Taoying, HUA, Miao, & WU, Xu. *A Hybrid CNN-LSTM Model for Forecasting Particulate Matter (PM2.5)*. School of Shipping Economics and Management, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China.
- [7] Zhao, J., Mao, X., & Chen, L. (2019). Speech emotion recognition using deep 1D & 2D CNN LSTM networks. Biomedical Signal Processing and Control, 47, 312-323.
- [8] Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. Neural Computation, 9(8), 1735-1780.
- [9] Autorité Marocaine du Marché des Capitaux (AMMC), *Circulaire N° 02/04 relative aux conditions d'évaluation des valeurs apportées à un organisme de placement collectif en valeurs mobilières ou détenues par lui*, 02 juillet 2004.

- [10] La Finance Pour Tous. *Courbe des taux*. Disponible sur : <https://www.lafinancepourtous.com/decryptages/finance-perso/banque-et-credit/taux-d-interet/courbe-des-taux/>.
- [11] Autorité Marocaine du Marché des Capitaux (AMMC). *Définition*. Disponible sur : <https://www.ammc.ma/espace-epargnants/definition>.

Annexe

1 Annexe A (construction de la courbe zéro-coupons)

Dans cette annexe nous allons présenter les codes essentiels dans la partie de la construction de la courbe ZC.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import CubicSpline
from scipy.interpolate import interp1d
```

Listing 1 – Importation des bibliothèques nécessaires

```
data = pd.read_csv('Taux cereference des bons du tresor.csv',
                  encoding='UTF-8')
data
```

Listing 2 – Chargement des données

```
# X représente l'axe des abscisses (Maturité (en années))
X = np.array(data['Maturite(annee)'])
# Y va représenter l'axe des ordonnées (Les taux)
Y = np.array(data['Taux actuariel'])
```

Listing 3 – Préparation des données pour l'interpolation

```
# Interpolation linéaire grâce à la fonction interp1d de scipy,
# l'extrapolation est permise
LinearInterpolation = interp1d(X, Y, bounds_error=False,
                               fill_value='extrapolate')

# Calcul des taux correspondant à chaque maturité par la méthode
# d'interpolation linéaire
Taux_maturite_Lin = LinearInterpolation(maturite_year)
```

```

plt.figure()
plt.plot(maturite_year, Taux_maturite_Lin, '-')
plt.title("Courbe des taux actuariel r sultant de l'interpolation
lin aire")
plt.show()

```

Listing 4 – Interpolation linéaire et affichage de la courbe des taux actuariel

```

#Interpolation spline cubique naturelle gr ce la fonction
CubicSpline de scipy
CubicNaturalSpline = CubicSpline(X, Y, bc_type = 'natural')

#Calcul des taux correspondant chaque maturit par la m thode
d'interp spline cubique naturelle
Taux_maturite_Cub = CubicNaturalSpline(maturite_year)

plt.figure()
plt.plot(maturite_year, Taux_maturite_Cub, '-')
plt.title("Courbe des taux actuariel r sultant de l'interpolation
cubique naturelle")
plt.show()

```

Listing 5 – Interpolation par spline cubique naturelle et affichage de la courbe des taux actuariel

```

#Bootstrapping pour les maturit s > 1ans
taux_ans = Taux_maturite_Cub[2:]
taux_ans

#Algorithme de bootstrapping qui prend en entr e les taux
acuariel et retourne les taux ZC correspondant
def bootstrapping(taux_ans):
    taux_zero_coupons = [round(taux_ans[0],4)]
    for n in range(1, len(taux_ans)):
        somme = 0

```

```

    for i in range(0, n):
        somme += taux_ans[n] / (1 + taux_zero_coupons[i]) ** (
            i+1)
    value = ((1 + taux_ans[n]) / (1 - somme)) ** (1 / (n+1)) -
        1
    taux_zero_coupons.append(round(value, 4))
    return taux_zero_coupons

#Affichage des taux r sultant pour notre cas
taux_zeros_coupons_ans = bootstrapping(taux_ans)
print(taux_zeros_coupons_ans)

#Concat nation (taux dont la maturit <1ans) + (taux dont
    maturit > 1ans apr s avoir effectu le bootstrapping)
taux_zero = list(Taux_maturite_Cub[:2]) + taux_zeros_coupons_ans

plt.figure()
plt.plot(maturite_year, taux_zero, '-')
plt.title("Courbe des Taux ZC par bootstrapping")

```

Listing 6 – Bootstrapping et affichage des taux

2 Annexe B(Modèles NSS et NS)

Dans cette annexe nous allons présenter les codes essentiels pour l'estimation des paramètres de NS et NSS et son optimisation.

```
from nelson_siegel_svensson.calibrate import calibrate_ns_ols,
    calibrate_nss_ols

#Maturit choisi = [3 mois, 6mois, 1ans , 2ans , 5ans, 10ans , 20
    ans, 30ans]
mat = np.array([0.25, 0.50, 1, 2, 5, 10, 20, 30])
#Taux ZC correspondant    chaque maturit
tmp = boostrapped_data.loc[boostrapped_data['Maturit (ann es)']
    ].isin(mat), 'Taux zero coupon']
tmp = tmp.apply(convert_to_float)

#Modele de Nelson Siegel appliqu pour les maturit s et les taux
    ZC correspondant
curve_ns, status = calibrate_ns_ols(mat, tmp)
```

Listing 7 – Application du modèle de NS pour les maturités et les taux ZC correspondants

```
#Calcul du taux ZC correspondant    toutes la maturit s
    souhait es
ns_curve = []
for maturite in maturite_year:
    ns_curve.append(curve_ns(maturite))

#Calcul des l'erreur moyenne quadratique Nelson Siegel
residu_ns = tmp - curve_ns(mat)
MSE_ns = np.mean(residu_ns**2)
RMSE_ns= np.sqrt(MSE_ns)

plt.figure()
plt.plot(maturite_year, ns_curve, '-')
```

```

plt.title("Courbe des Taux ZC par Nelson Siegel")
plt.show()

print("Les facteurs du modèle de Nelson Siegel sont:")
print(f"beta0: {curve_ns.beta0}")
print(f"beta1: {curve_ns.beta1}")
print(f"beta2: {curve_ns.beta2}")
print(f"tau: {curve_ns.tau}")
print(f"Erreur quadratique moyenne: {MSE_ns}")
print(f"Racine de l'erreur quadratique moyenne: {RMSE_ns}")

```

Listing 8 – Calcul du taux ZC correspondant à toutes les maturités souhaitées et affichage de la courbe des taux ZC par NS

```

#Modèle de Nelson Siegel Svenson appliqué pour les maturités et
    les taux ZC correspondant
curve_nss, status = calibrate_nss_ols(mat, tmp)

```

Listing 9 – Application du modèle de NSS pour les maturités et les taux ZC correspondants

```

#Calcul du taux ZC correspondant à toutes les maturités
    souhaitées (modèle NSS)
nss_curve = []
for maturite in maturite_year:
    nss_curve.append(curve_nss(maturite))

#Calcul de l'erreur moyenne quadratique Nelson Siegel Svenson
residu_nss = tmp - curve_nss(mat)
MSE_nss = np.mean(residu_nss**2)
RMSE_nss = np.sqrt(MSE_nss)

plt.figure()
plt.plot(maturite_year, nss_curve, '-')
plt.title("Courbe des Taux ZC par Nelson Siegel Svenson")
plt.show()

```

```

print("Les facteurs du modèle de Nelson Siegel Svenson sont:")
print(f"beta0: {curve_nss.beta0}")
print(f"beta1: {curve_nss.beta1}")
print(f"beta2: {curve_nss.beta2}")
print(f"beta3: {curve_nss.beta3}")
print(f"tau1: {curve_nss.tau1}")
print(f"tau2: {curve_nss.tau2}")
print(f"Erreur quadratique moyenne: {MSE_nss}")
print(f"Racine de l'erreur quadratique moyenne: {RMSE_nss}")

```

Listing 10 – Calcul du taux ZC correspondant à toutes les maturités souhaitées (modèle NSS) et affichage de la courbe des taux ZC

Une première estimation des six paramètres de Nelson-Siegel-Svensson est donnée ([0, 0, 0, 0, 1, 10] pour notre cas). Le code ci dessous utilise ensuite une méthode appelée algorithme de Nelder-Mead pour essayer différentes combinaisons de ces paramètres et trouver celle qui donne le total le plus faible dans notre fonction de perte, ce qui signifie la meilleure adéquation aux données réelles. L'algorithme de Nelder-Mead est une méthode couramment utilisée pour les problèmes d'optimisation comme celui-ci, où nous essayons de trouver le minimum ou le maximum d'une fonction de la courbe des taux. Voici une brève explication du fonctionnement de l'algorithme :

1 - Initialisation : L'algorithme commence par initialiser un simplexe, qui est un polytope de $N+1$ sommets dans N dimensions. Par exemple, en deux dimensions, un simplexe est un triangle, et en trois dimensions, c'est un tétraèdre.

2 - Réflexion : L'algorithme identifie le plus mauvais point (le point ayant la valeur de fonction la plus élevée) dans le simplexe et le réfléchit à travers le centroïde des points restants pour créer un nouveau point. Si le nouveau point est meilleur (a une valeur de fonction plus faible) que le pire point mais pas meilleur que les autres points, l'algorithme remplace le pire point par le nouveau point et retourne à l'étape de réflexion.

3 - Expansion : Si le nouveau point est meilleur que tous les autres, l'algorithme étend le simplexe dans la direction du nouveau point. Si le point étendu est également meilleur, il remplace le plus mauvais point et retourne à l'étape de réflexion.

4 - Contraction : Si le nouveau point n'est pas meilleur que le plus mauvais, l'algorithme contracte le simplexe dans la direction du nouveau point. Si le point contracté est meilleur, il remplace le plus mauvais point et retourne à l'étape de réflexion.

5 - Rétrécissement : si le point contracté n'est toujours pas meilleur, l'algorithme rétrécit le simplexe en direction du meilleur point.

6 - Terminaison : L'algorithme répète ces étapes jusqu'à ce qu'il remplisse un critère de terminaison, tel que l'atteinte d'un nombre maximal d'itérations, ou que le changement de la valeur de la fonction ou la taille du simplexe soit inférieur à un certain seuil.

```
def loss_function(params, t, y):
    curve = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params)
    y_pred = curve(t)
    residuals = y - y_pred
    return np.sum(residuals**2)

# Initiliasiation des param tres
params_init = [0, 0, 0, 0, 1, 10] # beta0, beta1, beta2, beta3,
    tau1, tau2
# Optimization
result = minimize(loss_function, params_init, args=(mat, tmp_exact
    ), method='Nelder-Mead')
#Parametre de la courbe exacte
params_opt = result.x
#Parametre de la courbe pr dite
result1 = minimize(loss_function, params_init, args=(mat, tmp_pred
    ), method='Nelder-Mead')
params_opt1 = result1.x
```

Listing 11 – Fonction qui calcule les parametres betas + tau1 + tau2 optimaux de NSS

3 Annexe C (Implémentation du Z-score)

Dans cette annexe nous allons présenter les codes essentiels qui montrent l'implémentation du Z-score dans notre modèle profond.

```
d['Mean'] = d.mean(axis=1)
standard_variation = np.std(d['Mean'])
from scipy import stats
z_scores = stats.zscore(d['Mean'])
threshold = 1.8
is_normal = ['Normal' if np.abs(z) <= threshold else 'Not Normal'
             for z in z_scores]
for (value, index), status in zip(d['Mean'].items(), is_normal):
    print("Value:", value, "- Status:", status)
d['Z_Score'] = abs(z_scores)
d.drop(columns=['Mean'], inplace = True)
```

Listing 12 – Calcul des scores z et détection des valeurs anormales

	0.25	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	15.0	20.0	30.0	Z_Score
Date/Maturites										
2003-05-31	0.031	0.0328	0.0358	0.0404	0.0492	0.059	0.0648	0.068915	0.074715	1.799065
2003-06-30	0.0336	0.0342	0.039	0.0427	0.0505	0.0596	0.064923	0.0687	0.074023	1.942926
2003-07-31	0.0351	0.038	0.0435	0.049	0.056271	0.061771	0.064988	0.067271	0.070488	2.202316
2003-08-31	0.0348	0.0367	0.04	0.046399	0.054858	0.061257	0.065	0.067656	0.071399	2.089580
2003-09-30	0.0339	0.035	0.0382	0.0428	0.0498	0.0587	0.0645	0.068615	0.074415	1.925092
...
2023-01-31	0.03173	0.03301	0.03518	0.03703	0.03896	0.042	0.045217	0.0475	0.050717	0.507815
2023-02-28	0.02844	0.03148	0.03452	0.03842	0.04072	0.0455	0.048296	0.05028	0.053076	0.635030
2023-03-31	0.02526	0.02966	0.03406	0.03846	0.043576	0.047446	0.04971	0.05169	0.05592	0.703463
2023-04-30	0.0303	0.0318	0.03497	0.03963	0.04251	0.044689	0.045963	0.046867	0.048142	0.555598
2023-05-31	0.03	0.0316	0.03394	0.03855	0.04187	0.04647	0.0503	0.05305	0.056926	0.797289

implémentation du Z-score

4 Annexe D (CNN-LSTM)

Dans cette annexe nous allons présenter les codes essentiels qui montrent le code python utilisé pour calibrer le modèle profond et le traçage des différentes courbes.

```
import keras
from keras.models import Sequential
from keras.layers import LSTM, Dense
from keras.layers import Dropout
from keras.layers import *
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler
from sklearn.metrics import mean_squared_error
from sklearn.model_selection import train_test_split
from tensorflow.keras.layers import LSTM, Dense, Dropout,
    TimeDistributed, Conv1D, MaxPooling1D, Flatten, Bidirectional,
    Input,

    Flatten, Activation, Reshape, RepeatVector, Concatenate
from tensorflow.keras.models import Model
from keras.callbacks import EarlyStopping
```

Listing 13 – Importation des bibliothèques pour le modèle LSTM

```
def build_data_set(sequence, lag):
X, y = [], []
    for i in range(len(sequence)):
        end = i + lag
        if end > len(sequence) - 1:
            break
        else:
            X.append(sequence[i:end])
            y.append(sequence[end])
    return np.array(X), np.array(y)
#Selection de modele et division des donn es en train, test.
def train_test(sequence):
```

```

sequence = sequence.reshape(-1, 1)
    train_size = int(len(sequence) * 0.94)
    test_size = len(sequence) - train_size
    train, test = sequence[0:train_size,:], sequence[train_size:
        len(sequence),:]
    return train, test

#Fonction qui fournit directement un jeu de donn e utilisable par
    le modele LSTM qui prend en param tre:
# la table de donn e , l'indexe de maturit , le lag, et le scaler
.
def data_load(dataframe, seq, lag):
train, test = train_test(seq)
    X_train, y_train = build_data_set(train, lag)
    X_test, y_test = build_data_set(test, lag)
    return X_train, y_train, X_test, y_test

    Data = pd.DataFrame({'X_train': [], 'y_train': [], 'X_test':
        [], 'y_test': [] })
lag = 3 #Nombre de mois en arri re consid rer
all_X_train = []
all_y_train = []
all_X_test = []
all_y_test = []
for col in d.columns:
    X_train, y_train, X_test, y_test = data_load(d , np.array(d[
        col]), lag)
    all_X_train.append(X_train)
    all_y_train.append(y_train)
    all_X_test.append(X_test)
    all_y_test.append(y_test)
    #Cr ation d'X train
x_tr = np.empty(all_X_train[0].shape)
for x in all_X_train:
    x_tr = np.concatenate((x_tr, x), axis = 2)

```

```

x_tr = x_tr[:, :, 1:]
#Cr ation d'X test
x_tt = np.empty(all_X_test[0].shape)
for x in all_X_test:
    x_tt = np.concatenate((x_tt, x), axis = 2)
x_tt = x_tt[:, :, 1:]
#Cr ation y train
y_tr = np.empty(all_y_train[0].shape)
for y in all_y_train:
    y_tr = np.concatenate((y_tr, y), axis = 1)
y_tr = y_tr[:, 1:]
#Cr ation y test
y_tt = np.empty(all_y_test[0].shape)
for y in all_y_test:
    y_tt = np.concatenate((y_tt, y), axis = 1)
y_tt = y_tt[:, 1:]
n = x_tt.shape[2]
n
#Conversion de la donn e en float
x_tr = np.asarray(x_tr).astype(np.float32)
x_tt = np.asarray(x_tt).astype(np.float32)
y_tr = np.asarray(y_tr).astype(np.float32)
y_tt = np.asarray(y_tt).astype(np.float32)

# Initialisation de la couche d'entr e avec une forme sp cifi e
    (lag, 10)
input_layer = Input(shape=(lag, n))
# Initialisation d'une liste vide pour contenir les diff rentes "
    t tes" du r seau
head_list = []
# Pour chaque dimension dans l'entr e...
for i in range(0, n):
    # ... on ajoute une couche de convolution 1D avec 50 filtres,
        une taille de noyau de 3 et une activation ReLU

```

```

conv_layer_head = Conv1D(filters=50, kernel_size=3, activation
    ="relu")(input_layer)
# Ensuite, on ajoute une autre couche de convolution 1D sur le
    dessus, cette fois avec 10 filtres et une taille de noyau
    de 1
conv_layer_head_2 = Conv1D(filters=10, kernel_size=1,
    activation="relu")(conv_layer_head)
# On aplatit la sortie de la dernière couche de convolution
conv_layer_flatten = Flatten()(conv_layer_head_2)
# On ajoute cette liste aplatie à notre liste de couches
head_list.append(conv_layer_flatten)

# On concatène toutes nos couches dans une seule couche
concat_cnn = Concatenate(axis=1)(head_list)
# On reforme la couche concaténée pour correspondre à la forme
    de la première couche, avec la dimension 'n' comme troisième
    dimension
reshape = Reshape((head_list[0].shape[1], n))(concat_cnn)
# On ajoute une couche LSTM avec '10' unités et une activation
    ReLU
lstm = LSTM(n, activation="relu")(reshape)
# On ajoute une couche de suppression pour éviter le
    surapprentissage
dropout = Dropout(0.1)(lstm)
# On ajoute une couche dense finale avec '9' unités et une
    activation ReLU
dense = Dense(n-1, activation="relu")(dropout)
# Enfin, on définit notre modèle avec notre couche d'entrée et
    notre couche dense finale comme sortie
multi_head_cnn_lstm_model = Model(inputs=input_layer, outputs=
    dense)
# On compile le modèle avec une fonction de perte d'erreur
    quadratique moyenne (MSE) et l'optimiseur Adam
multi_head_cnn_lstm_model.compile(loss="mse", optimizer="adam")

```

```

# On initialise un callback pour arrêter l'entraînement s'il n'y
  a pas d'amélioration du coût d'entraînement (la perte)
#après 500 époques consécutives.
# L'option "restore_best_weights" permet de restaurer les
  meilleurs poids du modèle à la fin de l'entraînement (ceux
  qui ont donné la plus faible perte).
early_stopping = EarlyStopping(monitor='loss', patience=500,
  restore_best_weights=True)

```

Listing 14 – Construction du modèle CNN-LSTM

```

# Plot de l'évolution du taux 6 mois de 2003 - 2023
# Plot des prédictions (bleu: train data/ vert: test data)
y = test_predict[:, 1]
y_entr = train_predict[:, 1]
dates = d.index[3:238]
actual_values = d[0.5][3:238]
predicted_values = np.concatenate((y_entr, y), axis=0).reshape(-1,
  1)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(dates, actual_values, label='Actual', linewidth=2.5)
ax.plot(dates[:223], y_entr, label='Prédiction faite sur train
  data', linewidth=2.5)
ax.plot(dates[223:], y, label='Prédiction faite sur test data',
  linewidth=2.5)
ax.set_title('Évolution du Taux 6 mois')
ax.set_xlabel('Date')
ax.set_ylabel('Taux')
ax.legend()
plt.show()

```

Listing 15 – Plot de l'évolution du taux 6 mois

```

from scipy.optimize import minimize
from nelson_siegel_svensson import NelsonSiegelSvenssonCurve

```

```

curve_opt = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params_opt)
curve_exact = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params_opt1)
opt_curve = []
opt_exact = []
#Utilisation des courbes obtenus pour avoir les taux correspondant
    diff rentes maturit s allons de 0.25    30 ans
#avec un pas = 1 an
for maturite in maturite_year:
    opt_curve.append(curve_opt(maturite))
    opt_exact.append(curve_exact(maturite))
#Plot des r sultats
plt.figure()
plt.plot(maturite_year, opt_curve, label = "Courbe Nelson Siegel
    Svensson sur donn es pr dites", color = "red")
plt.plot(maturite_year, opt_exact, label = "Courbe Nelson Siegel
    Svensson construite sur donn es r elles",color = "blue")
plt.title("Date: 31-05-2023")

```

Listing 16 – Tracage de la courbe comparative

5 Annexe E (Pricer)

Dans cette annexe nous allons présenter le code du pricer utilisé pour valoriser notre portefeuille.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")
bdt = pd.read_excel("reel.xlsx")
bdt.drop(columns = ["Prix"], inplace=True)
from scipy.optimize import minimize
from nelson_siegel_svensson import NelsonSiegelSvenssonCurve
from nelson_siegel_svensson.calibrate import calibrate_nss_ols
def loss_function(params, t, y):
    curve = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params)
    y_pred = curve(t)
    residuals = y - y_pred
    return np.sum(residuals**2)

# Initial guess for the parameters
params_init = [0, 0, 0, 0, 1, 10] # beta0, beta1, beta2, beta3,
    tau1, tau2
# Optimization des parametres du modele NSS
result = minimize(loss_function, params_init, args=(mat, tmp_exact
    ), method='Nelder-Mead')
params_opt = result.x
result1 = minimize(loss_function, params_init, args=(mat, tmp_pred
    ), method='Nelder-Mead')
params_opt1 = result1.x
from scipy.optimize import minimize
from nelson_siegel_svensson import NelsonSiegelSvenssonCurve
import matplotlib.pyplot as plt
#Construction des courbes pr dite et observ es
```

```

curve_opt = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params_opt)
curve_exact = NelsonSiegelSvenssonCurve(*params_opt1)
#Associer chaque maturit r siduelle le taux correspondant
selon la courbe pr dite
taux_valoris_pred = bdt["Maturit r siduelle ans"].apply(lambda
x: curve_opt(x))
#Associer chaque maturit r siduelle le taux correspondant
selon la courbe observ e
taux_valoris = bdt["Maturit r siduelle ans"].apply(lambda x:
curve_exact(x))
a1=bdt['Date chance '] .dt.year
a2=bdt['Prochain coupon'].dt.year
a=a1-a2+1
for i in range (0,len(bdt)):
    if a[i]==0:
        a[i]=1
bdt['Flux_restants']=a
new = bdt["Libell "].str.split(" ", expand = True)
new['intr']=new[5].map(str)+''+new[6].map(str)
bdt['Dur e']=new['intr']
bdt['Date chance '] = pd.to_datetime(bdt['Date chance '],
format='%d-%m-%Y')
bdt['Prochain coupon'] = pd.to_datetime(bdt['Prochain coupon'],
format='%d-%m-%Y')
bdt['Date jouissance'] = pd.to_datetime(bdt['Date jouissance'],
format='%d-%m-%Y')
bdt['Date mission '] = pd.to_datetime(bdt['Date mission '],
format='%d-%m-%Y')
a3=bdt['Date jouissance'].dt.year
nci=a1-a3
for i in range (0,len(bdt)):
    if nci[i]==0:
        nci[i]=1

```

```

bdt['Nombre coupon initial']=nci
a1=bdt['Date chance '].dt.year
a2=bdt['Prochain coupon'].dt.year
a=a1-a2+1
for i in range (0,len(btd)):
    if a[i]==0:
        a[i]=1

bdt['nombre coupon']=a
bdt['Datejouissance1']=bdt['Date jouissance'].dt.strftime('%d-%m/%
Y')
ann=bdt.Datejouissance1.str.split(pat='/',expand=True)
ann[1]=pd.to_numeric(ann[1])
ann[1]=ann[1]-1
ann[2]=2022
ann[3]=2021
ann['Date1']=ann[0].map(str)+'-'+ann[1].map(str)
ann['Date2']=ann[0].map(str)+'-'+ann[2].map(str)
ann['Date3']=ann[0].map(str)+'-'+ann[3].map(str)
ann[4]=ann[1]+1
ann['Date4']=ann[0].map(str)+'-'+ann[4].map(str)
bdt['datee']=ann['Date4']
from datetime import datetime
date_string = "2023-05-31"
a = datetime.strptime(date_string, "%Y-%m-%d")
bdt['Date valorisation']=a
bdt['Date valorisation'] = pd.to_datetime(bdt['Date valorisation'
], format='%Y-%m-%d')
bdt["taux valoris"] = taux_valoris
bdt
bdt['Ligne post rieure']=1
for i in range (0,len(bdt)):
    if bdt.loc[i, 'Date mission ']== bdt.loc[i, 'Date
jouissance']:

```

```

        bdt.loc[i, 'Ligne post rieuse'] = 0
    bdt['Datejouissance1']=bdt['Date jouissance'].dt.strftime('%d-%m/%
        Y')
    ann=bdt.Datejouissance1.str.split(pat='/',expand=True)
    ann[1]=pd.to_numeric(ann[1])
    ann[1]=ann[1]+1
    ann['Date']=ann[0].map(str)+'-'+ann[1].map(str)
    bdt['D1c']=ann['Date']
    bdt['D1c']=pd.to_datetime(bdt['D1c'],format=('%d-%m-%Y'))
    del bdt['Datejouissance1']
    bdt['nj']=(bdt['Prochain coupon']-bdt['Date valorisation']).dt.
        days
    bdt['Prix'] = 0

for i in range(0, len(bdt)):
    if bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] <= 365:
        bdt.loc[i, 'Prix'] = bdt.loc[i, 'Nominal'] * ((1 + bdt.loc
            [i, 'Tauxfacial'] * bdt.loc[i, 'Maturit initiale']) /
            360) / ((1 + bdt.loc[i, 'taux valoris'] * bdt.loc[i, '
            Maturit r siduelle jrs']) / 360)
    elif bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt.loc[i, '
        Maturit r siduelle jrs'] <= 365 and bdt.loc[i, 'Ligne
        post rieuse'] == 0:
        bdt.loc[i, 'Prix'] = bdt.loc[i, 'Nominal'] * ((1 + bdt.loc
            [i, 'Tauxfacial']) / (1 + bdt.loc[i, 'taux valoris'] *
            (bdt.loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] / 360)))
    elif bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt.loc[i, '
        Maturit r siduelle jrs'] < 365 and bdt.loc[i, 'Ligne
        post rieuse'] == 1:
        bdt.loc[i, 'Prix'] = bdt.loc[i, 'Nominal'] * ((1 + bdt.loc
            [i, 'Tauxfacial'] * (bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] /
            365)) / (1 + bdt.loc[i, 'taux valoris'] * (bdt.loc[i,
            'Maturit r siduelle jrs'] / 360)))
    elif bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt.loc[i, '

```

```

Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt.loc[i, 'Ligne
post rieure'] == 0:
    S = 0
    n = bdt.loc[i, 'Flux_restants']
    for j in range(1, n +1):
        S = S + (bdt.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 + bdt.loc[i, '
            taux valoris'])**(j-1)))
    bdt.loc[i, 'Prix'] = (bdt.loc[i, 'Nominal'] / ((1 + bdt.
        loc[i, 'taux valoris'])**(bdt.loc[i, 'nj'] / 365)))*(S
        + (1 / ((1 + bdt.loc[i, 'taux valoris'])**(bdt.loc[i, '
            Flux_restants'] - 1))))
elif bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt.loc[i, '
Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt.loc[i, 'Ligne
post rieure'] == 1 and bdt.loc[i, 'Flux_restants'] == 1:
    bdt.loc[i, 'Prix'] = bdt.loc[i, 'Nominal'] * ((1 + bdt.loc
        [i, 'Tauxfacial'] * (bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] /
        365)) / (1 + bdt.loc[i, 'taux valoris'])**(bdt.loc[i,
            'nj'] / 365))
elif bdt.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt.loc[i, '
Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt.loc[i, 'Ligne
post rieure'] == 1 and bdt.loc[i, 'Flux_restants'] > 1:
    if bdt.loc[i, 'Date valorisation'] < bdt.loc[i, 'D1c']:
        S1 = 0
        n = bdt.loc[i, 'Flux_restants']
        for j in range(2, n + 1):
            S1 = S1 + (bdt.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 + bdt.
                loc[i, 'taux valoris'])**(j-1)))
        S2 = bdt.loc[i, 'Tauxfacial'] * ((bdt.loc[i, 'D1c'] -
            bdt.loc[i, 'Date mission']).days/ 365)
        S3 = 1/(1+bdt.loc[i, 'taux valoris']**(n-1))
        fact = bdt.loc[i, 'Nominal'] / (1 + bdt.loc[i, 'taux
            valoris']**(bdt.loc[i, 'nj'] / 365))
        bdt.loc[i, 'Prix'] = fact * (S1 + S2 + S3)
    else:

```

```

S = 0
n = bdt.loc[i, 'Flux_restants']
for j in range(1, n + 1):
    S = S + (bdt.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 + bdt.loc[
        i, 'taux valoris'])**(j-1)))
    bdt.loc[i, 'Prix'] = (bdt.loc[i, 'Nominal'] / ((1 +
        bdt.loc[i, 'taux valoris'])**(bdt.loc[i, 'nj'] /
        365)))*(S + (1 / ((1 + bdt.loc[i, 'taux valoris']
        ** (bdt.loc[i, 'Flux_restants'] - 1))))

bdt_pred = bdt.copy()
bdt_pred.drop(columns=["Prix"])
bdt_pred["taux valoris"] = taux_valoris_pred
bdt_pred['Prix'] = 0

for i in range(0, len(bdt_pred)):
    if bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] <= 365:
        bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] * ((1
            + bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] * bdt_pred.loc[i, '
            Maturit initiale']) / 360) / ((1 + bdt_pred.loc[i, '
            taux valoris'] * bdt_pred.loc[i, 'Maturit r siduelle
            jrs']) / 360)
    elif bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt_pred.
        loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] <= 365 and bdt_pred.loc
        [i, 'Ligne post rieure'] == 0:
        bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] * ((1
            + bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial']) / (1 + bdt_pred.loc[i,
            'taux valoris'] * (bdt_pred.loc[i, 'Maturit
            r siduelle jrs'] / 360)))
    elif bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt_pred.
        loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] < 365 and bdt_pred.loc[
        i, 'Ligne post rieure'] == 1:
        bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] * ((1
            + bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] * (bdt_pred.loc[i, '
            Maturit initiale'] / 365)) / (1 + bdt_pred.loc[i, '

```

```

        taux valoris'] * (bdt_pred.loc[i, 'Maturit
        r siduelle jrs'] / 360)))
elif bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt_pred.
loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt_pred.loc[
i, 'Ligne post rieure'] == 0:
    S = 0
    n = bdt_pred.loc[i, 'Flux_restants']
    for j in range(1, n + 1):
        S = S + (bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 +
            bdt_pred.loc[i, 'taux valoris'])**(j-1)))
    bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = (bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] /
        ((1 + bdt_pred.loc[i, 'taux valoris'])**(bdt_pred.loc[i
        , 'nj'] / 365)))*(S + (1 / ((1 + bdt_pred.loc[i, 'taux
        valoris'])**(bdt_pred.loc[i, 'Flux_restants'] - 1))))
elif bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt_pred.
loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt_pred.loc[
i, 'Ligne post rieure'] == 1 and bdt_pred.loc[i, '
Flux_restants'] == 1:
    bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] * ((1
        + bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] * (bdt_pred.loc[i, '
        Maturit initiale'] / 365)) / (1 + bdt_pred.loc[i, '
        taux valoris'])**(bdt_pred.loc[i, 'nj'] / 365))
elif bdt_pred.loc[i, 'Maturit initiale'] > 365 and bdt_pred.
loc[i, 'Maturit r siduelle jrs'] > 365 and bdt_pred.loc[
i, 'Ligne post rieure'] == 1 and bdt_pred.loc[i, '
Flux_restants'] > 1:
    if bdt_pred.loc[i, 'Date valorisation'] < bdt_pred.loc[i,
        'D1c']:
        S1 = 0
        n = bdt_pred.loc[i, 'Flux_restants']
        for j in range(2, n + 1):
            S1 = S1 + (bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 +
                bdt_pred.loc[i, 'taux valoris'])**(j-1)))
        S2 = bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] * ((bdt_pred.loc[i,

```

```

        'D1c'] - bdt_pred.loc[i, 'Date mission ']).days/
        365)
    S3 = 1/(1+bdt_pred.loc[i, 'taux valoris']**(n-1))
    fact = bdt_pred.loc[i, 'Nominal'] / (1 + bdt_pred.loc[
        i, 'taux valoris']**(bdt_pred.loc[i, 'nj'] / 365))
    bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = fact * (S1 + S2 + S3)
else:
    S = 0
    n = bdt_pred.loc[i, 'Flux_restants']
    for j in range(1, n +1):
        S = S + (bdt_pred.loc[i, 'Tauxfacial'] / ((1 +
            bdt_pred.loc[i, 'taux valoris']**(j-1)))
    bdt_pred.loc[i, 'Prix'] = (bdt_pred.loc[i, 'Nominal']
        / ((1 + bdt_pred.loc[i, 'taux valoris']**(bdt_pred
        .loc[i, 'nj'] / 365))))*(S + (1 / ((1 + bdt_pred.loc
        [i, 'taux valoris']**(bdt_pred.loc[i, '
        Flux_restants'] - 1))))
bdt["Prix"] = bdt["Prix"] - bdt["Coupon couru"]
bdt_pred["Prix"] = bdt_pred["Prix"] - bdt_pred["Coupon couru"]
bdt["Prix Exact"] = bdt["Prix"]
bdt["Prix Predit"] = bdt_pred["Prix"]
bdt.drop(columns=["Prix"], inplace = True)
somme_exact = bdt["Prix Exact"].sum()
somme_pred = bdt["Prix Predit"].sum()
diff = np.abs(somme_exact - somme_pred)
relative_diff = diff/somme_exact
print("La diff rence relative pr dite est", relative_diff)
La diff rence relative pr dite est 0.006291683351699366
bdt["Erreur Obs/Pred"] = bdt["Prix Exact"] - bdt["Prix Predit"]
bdt.drop(columns=["Dur e", "Flux_restants", "Ligne post rieuse",
    "D1c", "nj" ], inplace=True)
bdt.to_excel("portfolio_resultat.xlsx")

```

Listing 17 – Pricer python pour valoriser le portefeuille