



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

**Calibrage du capital de solvabilité requis
pour le risque de souscription non vie en
réassurance**

Préparé par : **M. Akram HASNAOUI**

Sous la direction de : **M. Fouad MARRI (INSEA)**
M. Anasse YOUSSEFI (SCR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Fouad MARRI (INSEA)**
- **M. Ahmed OUAZZA (INSEA)**
- **M. Anasse YOUSSEFI (SCR)**

Juin 2021 / PFE N° 17

Résumé

La nouvelle réforme "Solvabilité Basée sur les Risques" lancée par l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS), décrit un nouveau référentiel réglementaire pour évaluer la solvabilité des compagnies d'assurance et de réassurance. Elle a pour but, contrôler la capacité des différents assureurs et réassureurs à s'acquitter des différents engagements qu'ils ont envers leurs clients, assurer une bonne gestion et maîtrise des risques auxquels ils peuvent être exposés comme le risque de souscription, risque de marché, risque de contrepartie ...

Pour cette raison, l'ACAPS a préconisé dans le cadre de cette nouvelle réforme d'adopter plusieurs directives et modalités qui visent à constituer des provisions techniques suffisantes, assurer un bon investissement des actifs et garantir une répartition méthodique des fonds propres .

Dans ce contexte, ce mémoire s'articule autour de la gestion du risque de souscription non vie d'un portefeuille de l'Afrique du Nord . Pour ce faire, on va utiliser la formule standard du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie, fournie par la réglementation européenne Solvabilité 2 et la calibrer selon les données de ce portefeuille.

En premier lieu, on fera une analyse du secteur des assurances de l'Afrique du Nord, notamment l'Algérie et la Tunisie qui ont connu des croissances assez remarquables dans ce domaine, tout en essayant d'examiner l'évolution des primes acquises et des sinistres payés au cours du temps selon les différentes branches d'assurance, afin d'initier à la présentation du portefeuille sur lequel on va travailler dans le cadre des affaires étrangères dans lesquelles s'engage la Société Centrale de Réassurance.

En deuxième lieu, on va évaluer les provisions techniques selon plusieurs méthodes de provisionnement, puis on va construire la courbe des taux sans risque suivant une multitude de modèles, afin de l'utiliser pour des raisons d'actualisation. Finalement, on calculera ce qu'on appelle la meilleure estimation des engagements pour sinistres (Best Estimate) qui représente l'équivalente de ces provisions dans la nouvelle réforme SBR précisément au niveau du bilan économique et ceci selon deux approches, approche standard et approche interne.

En dernier lieu, on exploitera les Best Estimate qu'on va estimer afin de quantifier le risque de souscription non vie, associé au portefeuille étudié, en déterminant le capital de solvabilité requis (SCR) pour faire face à ce risque.

Mots clés :

Solvabilité Basée sur les Risques, best estimate, capital de solvabilité requis (SCR), provision, risque de prime, risque de réserve, risque de souscription non vie

Remerciements

Tout d'abord, je tiens vivement à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué au succès de ce travail, qui m'ont accompagné durant toute cette période afin d'améliorer mes compétences, me permettre de bien accomplir mes tâches dans les meilleures conditions possibles et par conséquent rendre ce stage une mission réussie et quasi totalement rentable.

Je tiens à remercier énormément M. Anasse YOUSSEFI, responsable de la direction Entreprise Risk Management (ERM) à la Société Centrale de Réassurance (SCR) ainsi que toute l'équipe ERM, notamment Monsieur Anass ASSALI et Monsieur Iliass MEJDOUBI pour m'avoir supervisé le long de cette expérience professionnelle avec toute patience et pédagogie.

Je saisis cette occasion pour adresser mes sincères remerciements et ma gratitude envers mon professeur et encadrant interne M. Fouad MARRI pour sa supervision permanente, pour ses directives précieuses et l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mon stage.

Mes vifs remerciements sont adressés à M. Ahmed OUAZZA pour m'avoir honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie également tout le corps professionnel et administratif de l'INSEA pour la qualité de formation dont nous avons bénéficié et qui nous a permis de réaliser ce travail, et aussi pour avoir attribué une place aussi importante aux stages afin de nous aider à tester nos compétences acquises durant ce parcours scolaire et avoir une chance de se débrouiller dans le marché du travail.

Dédicace

Je dédie ce travail modeste à :

-Mes chers parents, pour leurs efforts précieux, leur gigantesque support ainsi que leur sacrifice incommensurable.

-Mes frères Achraf, Soufiane et Ayman qui ne cessent pas de m'encourager et de me prêter main forte dans tous les moments.

-Tous les membres de ma famille.

-Tous mes amis avec lesquels j'ai passé de moments inoubliables.

Table des matières

Résumé	3
Remerciements	4
Liste des abréviations	9
Liste des figures	11
Liste des tableaux	12
Introduction	14
Partie 1 : Contexte général	16
Chapitre 1 : Présentation de l'organisme	17
1 - La Société Centrale de Réassurance(SCR)	17
2 - Organigramme de l'organisme	17
3 - Entreprise Risk Managment	18
Chapitre 2 : Généralités sur la réassurance	18
1 - Modes de réassurance	18
1.1 - La réassurance facultative	18
1.2 - La réassurance obligatoire	19
1.3 - La réassurance facultative-obligatoire	19
2 - Types de réassurance	19
2.1 - La réassurance proportionnelle	19
2.2 - La réassurance non proportionnelle	19
Chapitre 3 : Analyse du marché des assurances de la région "Afrique du Nord"	20
1 - La Tunisie	20
2 - L'Algérie	21
Partie 2 : Cadre réglementaire	23
1 - Solvabilité 1 et passage vers Solvabilité 2	24
1 - Solvabilité 1	24
2 - Solvabilité 2	25
2 - Le cadre réglementaire actuel vers la nouvelle réforme Solvabilité Basée sur les Risques (SBR)	27

Partie 3 : Evaluation des provisions techniques prudentielles	32
Chapitre 1 : Présentation des données et du cadre général de l'étude . . .	33
Chapitre 2 : Estimation des provisions techniques selon l'approche standard basée sur les méthodes classiques de provisionnement	34
1 - Les provisions techniques	34
2 - La meilleure estimation des engagements (Best Estimate)	34
3 - La marge de risque	35
4 - les méthodes de provisionnement	35
4.1 - Notations utilisées et définitions	36
4.2 - Les méthodes déterministes	37
4.2.1 - La méthode de Chain Ladder	37
4.2.2 - La méthode de De Vylder	38
4.2.3 - La méthode de Bornhuetter Ferguson	39
4.2.4 - La méthode de Benktander	40
4.3 - Les méthodes stochastiques	41
4.3.1 - La méthode de Mack	41
4.3.2 - La méthode de GLM	42
4.3.3 - La méthode du Bootstrap	44
Chapitre 3 : Estimation des provisions techniques selon l'approche interne utilisée dans la SCR	46
Chapitre 4 : Construction de la courbe des taux zéro-coupon	50
1 - L'interpolation linéaire (Méthode de Bootstrap)	51
1.1 - La transformation des taux	51
1.2 - Interpolation linéaire des taux actuariels	52
1.3 - Transformation des taux actuariels en taux zéro-coupon (Méthode Bootstrap)	52
2 - La modélisation de la courbe des taux	53
2.1 - Modèle de Vasicek	53
2.2 - Modèle de Smith-Wilson	54
Chapitre 5 : Cadre pratique de l'évaluation des provisions techniques par les deux approches étudiées	57
1 - Construction de la courbe des taux sans risque	57
2 - Calcul des provisions pour sinistres à payer (PSAP)	64
2.1 - Les méthodes déterministes	64
2.2 - Les méthodes stochastiques	74
3 - Estimation du Best Estimate selon les deux approches standard et interne	80
3.1 - La méthode standard	80
3.2 - L'approche interne utilisée par la SCR	82
 Partie 4 : Evaluation du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie	 88
Chapitre 1 : Le capital de solvabilité requis SCR (Solvency Capital Requirement)	89

Chapitre 2 : Le capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie	90
Chapitre 3 : Estimation de l'écart type du risque de primes en non vie .	93
1 - Première méthode : Estimation de l'écart-type du risque de primes en non vie avec la méthode des moindres carrés ordinaires	94
2 - Deuxième méthode : Estimation de l'écart-type du risque de primes non vie avec la méthode simplifiée du maximum de vraisemblance	95
Chapitre 4 : Estimation de l'écart type du risque de réserve en non vie .	97
Chapitre 5 : Cadre pratique de l'évaluation de l'exigence en capital pour le risque de souscription non vie	101
1 - Calibrage de l'écart type du risque de primes en non vie	101
2 - Calibrage de l'écart type du risque de réserves en non vie	105
3 - Calcul du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie	107
Conclusion	110
Bibliographie	111
Annexe	112
Annexe 1 : Vérification des hypothèses de Mack	112
Annexe 2 : Estimation des coefficients de De Vylder	116
Annexe 3 : Vérification des hypothèses de Bornhuetter Ferguson	116
Annexe 4 : Vérification des hypothèses de Merz Wüthrich	117
Annexe 5 : Résultats du test de log normalité des charges de sinistralité après un an	117
Annexe 6 : Estimation des paramètres β et μ de la méthode du maximum de vraisemblance	117

Liste des abréviations

SCR : la Société Centrale de Réassurance

ERM : Entreprise Risk Management

SBR : Solvabilité Basée sur les Risques

PSAP : Provisions Pour Sinistres à Payer

ACAPS : Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale

SCR(CSR en français) : Solvency Capital Requirement(Capital de Solvabilité Requis)

BE : Best Estimate

Lob : Line of Business

EPI : Estimated Premium Income

TMP : Taux Moyen Pondéré

EIOPA : L'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles

SAP : Sinistres à Payer

CDR : Claims Development Result

ODP : Overdispersed Poisson

Table des figures

1	Organigramme de la Société Centrale de Réassurance	17
2	Evolution du chiffre d'affaires par branche d'assurance entre 2014 et 2019 à la Tunisie	20
3	Evolution des sinistres payés par branche d'assurance entre 2014 et 2019 à la Tunisie	21
4	Evolution des primes acquises par branche d'assurance entre 2018 et 2019	21
5	Evolution des sinistres payés par branche d'assurances entre 2018 et 2019	22
6	Bilan comptable Solvabilité 1	24
7	Les trois piliers de Solvabilité 2	25
8	Bilan économique Solvabilité 2	26
9	Les trois pilliers de la SBR	28
10	Triangle des règlements (non cumulés)	36
11	Triangle des règlements cumulés	36
12	La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 selon la méthode de Bootstrap	60
13	Sorties R : Résultats de la régression linéaire entre r_t et r_{t-1}	61
14	La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 générée par le modèle de Vasicek	63
15	La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 générée par le modèle de Smith-Wilson	63
16	Triangle des règlements cumulés pour le segment "Maritime et Transport"	64
17	Triangle des coefficients de développement individuels des sinistres payés	64
18	Validation de la première hypothèse de Chain Ladder : L'indépendance entre les années de survenance	66
19	Validation de la deuxième hypothèse de Chain Ladder	67
20	Vérification de l'hypothèse de la méthode Bornhuetter Ferguson	71
21	Validation de la troisième hypothèse de la méthode de Mack	75
22	Estimation du modèle GLM avec loi poisson surdispersée	78
23	Le remplissage du triangle de sinistres payés cumulés par la méthode de Chain Ladder	80
24	Le décumul du triangle de sinistres payés cumulés après développement par la méthode de Chain Ladder	80

25	Les ratios S/P obtenus par année de survenance	83
26	Les ratios C/P obtenus par année de survenance	83
27	Développement du triangle des charges de sinistres	84
28	Développement du triangle des sinistres payés	84
29	La décomposition du SCR	89
30	La matrice de corrélation entre les risques en Solvabilité 2	90
31	Résultat de la régression linéaire de U_t par V_t	101
32	Vérification de l'hypothèse de la dispersion des résidus par rapport aux primes acquises	102
33	Résultat du test de normalité de Shapiro Wilk	104
34	Estimation des paramètres β et μ selon la méthode du maximum de vraisemblance	104
35	Matrice de corrélation de Pearson des segments traités	109

Liste des tableaux

- Tableau 1 : Triangle des primes cédées
- Tableau 2 : Triangle des charges de sinistres (cumulées)
- Tableau 3 : Triangle des sinistres payés (cumulés)
- Tableau 4 : Les taux moyens pondérés associés à la date 31/12/2020
- Tableau 5 : Les taux monétaires pris avant conversion en taux actuariels
- Tableau 6 : Les taux actuariels obtenus après conversion des taux monétaires de maturité inférieure à une année
- Tableau 7 : Les taux actuariels de maturité pleine obtenus suite à l'interpolation linéaire
- Tableau 8 : Les taux zéro coupon obtenus après transformation des taux actuariels
- Tableau 9 : Les taux moyens pondérés journaliers
- Tableau 10 : Les taux zéro coupon obtenus par le modèle de Vasicek
- Tableau 11 : Les coefficients de Chain Ladder
- Tableau 12 : Triangle des sinistres payés rempli
- Tableau 13 : Les sinistres ultimes et les réserves Chain Ladder par année de survenance
- Tableau 14 : Les réserves Chain Ladder obtenues pour les différents segments du portefeuille
- Tableau 15 : L'estimation des coefficients de De Vylder
- Tableau 16 : Les réserves générées par la méthode de De Vylder par année de survenance
- Tableau 17 : Les réserves De Vylder obtenues pour les différents segments du portefeuille
- Tableau 18 : Les ratios $\frac{PSAP_i}{C_{i,n+1-i}}$ par année de survenance
- Tableau 19 : Le triangle des primes associé au segment "Maritime et Transport"
- Tableau 20 : Triangle des primes rempli
- Tableau 21 : Les ratios S/P par année de survenance
- Tableau 22 : Les réserves générées par la méthode de Bornhuetter Ferguson par année de survenance
- Tableau 23 : Les réserves de Bornhuetter Ferguson obtenues pour les différents segments du portefeuille
- Tableau 24 : Les réserves obtenues par la méthode de Benktander par année de survenance
- Tableau 25 : Les réserves de Benktander obtenues pour les différents segments du portefeuille
- Tableau 26 : Le récapitulatif des provisions constituées par segment selon les différentes méthodes de provisionnement

Tableau 27 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack par année de survenance

Tableau 28 : Les réserves de Bootstrap obtenues pour les différents segments du portefeuille

Tableau 29 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap pour le segment "Maritime et Transport" par année de survenance

Tableau 30 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap pour tous les segments du portefeuille

Tableau 31 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM (ODP) pour le segment "Maritime et Transport" par année de survenance

Tableau 32 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM avec loi poisson surdispersée (ODP) pour tous les segments du portefeuille

Tableau 33 : Un récapitulatif des provisions et des erreurs de prédiction par segment obtenus par les différentes méthodes stochastiques

Tableau 34 : Les cashflows obtenus par la méthode Chain Ladder par année de projection

Tableau 35 : Les taux zéros-coupon extraits de la courbe des taux générée par le modèle de Smith Wilson

Tableau 36 : Les cashflows actualisés

Tableau 37 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille

Tableau 38 : Les soldes à liquider par année de survenance

Tableau 39 : Les nouveaux soldes à liquider obtenus par année de survenance après paramétrage

Tableau 40 : Les cadences de liquidation par année de survenance

Tableau 41 : Estimation des cashflows non actualisés

Tableau 42 : Actualisation des cashflows

Tableau 43 : Triangle des règlements incrémentaux

Tableau 44 : Triangle des best estimate des réserves

Tableau 45 : Les ratios de sinistralité attendus par segment

Tableau 46 : Les constantes de proportionnalité pour la variance des sinistres par lob

Tableau 47 : Les volumes de primes par branche

Tableau 48 : La volatilité du risque de primes par segment obtenue par la méthode des moindres carrés ordinaires

Tableau 49 : Les coefficients μ_s et β_s estimés par segment

Tableau 50 : La volatilité du risque de primes par segment obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance

Tableau 51 : Vérification de l'hypothèse de Merz Wüthrich

Tableau 52 : Les CDR(Claims Development Results) par année de survenance pour le segment "Maritime et Transport"

Tableau 53 : Les erreurs de prédiction par année de survenance

Tableau 54 : La volatilité du risque de réserves pour chaque segment

Tableau 55 : L'écart type du risque de primes et de réserves obtenu pour chaque segment

Introduction

Le caractère principal qui caractérise les sociétés d'assurance et de réassurance par rapport les autres sociétés commerciales ou industrielles,est l'inversion du cycle de production .C'est à dire,l'assureur connaît son chiffre d'affaire avant de connaître le montant des prestations qu'il devra rembourser. Ou autrement , il encaisse d'abord les primes et doit, sur la base de ce qu'il a reçu, être capable d'indemniser les assurés.

Et à partir de ce processus fondé sur un décalage entre la date d'encaissement des primes et la date du règlement des prestations, un nouveau terme a eu naissance,c'est la provision technique.

Les provisions techniques signifient tout simplement une réserve que l'assureur doit toujours garder à côté pour pouvoir rencontrer ses engagements futurs envers les assurés et faire face aux charges éventuelles de sinistralité.Elles représentent donc en quelques sortes la dette que l'assureur a envers ses assurés.Et vu qu'elles occupent la part la plus importante du passif du bilan d'une société d'assurance ou de réassurance(presque 80% du passif),l'assureur est donc amené à les évaluer d'une façon complètement scrupuleuse et prudente, tout en surestimant les prestations qu'il doit décaisser et en sous estimant les primes qu'il va recevoir.

En conséquence,l'assureur doit constituer correctement des provisions techniques suffisantes ,et essayer de les bien exploiter ou comme on le dit les placer en bon père de famille, en essayant par exemple de les investir dans un portefeuille diversifié d'actifs qui présentent des risques assez maîtrisables.

Dans la première partie, on va présenter brièvement l'organisme duquel il s'agit dans le stage,à savoir la Société Centrale de Réassurance puis on va faire une exposition abrégée de quelques généralités et définitions à propos de la réassurance,suivie par une petite analyse du marché des assurances de l'Afrique du Nord.

Dans la deuxième partie ,on va exposer le cadre réglementaire dans lequel se situe le sujet qu'on va traiter dans ce mémoire.Dans un premier temps,on parlera de la directive adoptée actuellement dans l'Union Européenne "Solvabilité 2 " tout en la comparant avec leur réglementation précédente "Solvabilité 1 ".Dans un deuxième temps,on explicitera la nouvelle réforme élaborée récemment par l'ACAPS pour une meilleure régularisation de l'activité des compagnies d'assurance et de réassurance au Maroc.

Dans la troisième partie, on se concentrera sur le provisionnement. En premier lieu, on essaiera d'appliquer les différentes méthodes classiques de provisionnement. Par exemple, Chain Ladder, De Vylder, Bornhuetter Ferguson... ; En second lieu, on explicitera avec tous les détails le processus interne employé par la SCR pour l'évaluation de ses provisions techniques. Et finalement, on fera la construction de la courbe des taux sans risque ainsi qu'une modélisation stochastique des taux zéro-coupon. Ces différents points vont jouer un rôle très important dans l'estimation du Best Estimate (Le meilleur estimateur des engagements pour sinistres) qui représente selon la directive SBR un élément fondamental de la provision technique devant être retenue.

Dans la quatrième partie, on va s'intéresser à l'évaluation du risque de souscription non vie à travers le calibrage de la formule standard de ce qu'on appelle Capital de Solvabilité Requis 'CSR' (Solvency Capital Requirement 'SCR' en anglais) dédié à ce risque.

Partie 1 : Contexte général

Dans cette première partie , on va se consacrer à une petite présentation de l'organisme où le stage a été mené ,à savoir la Société Centrale de Réassurance.Et vu qu'il s'agit d'une compagnie de réassurance,on étalera quelques définitions et généralités à propos de la réassurance.Ensuite on va exhiber une analyse brève du secteur des assurances de la région "Afrique du Nord" .

Chapitre 1 : Présentation de l'organisme

1 - La Société Centrale de Réassurance(SCR)

La Société Centrale de Réassurance (SCR), a été créée en 1960 par convention entre l'État Marocain et la Caisse de Dépôt et de Gestion, actionnaire majoritaire de la Société Centrale de Réassurance avec 94 % du capital.

Avec les notations « B++ Good par AM BEST » et la notation locale « AAA/stable par Fitch Rating », la SCR se considère comme le 1er Réassureur arabe et 3ème Réassureur africain, opérant dans plus de 50 marchés, et disposant de plus de 300 clients dans le Monde.

La SCR a , pour mission principale, protéger et couvrir les compagnies d'assurance en fournissant divers produits de réassurance dans les deux branches d'assurance vie et non vie.Elle joue plusieurs rôles stratégiques tels que :

- La régulation du marché.
- La sécurité face aux turbulences et incertitudes internationales .
- Le maintien des primes au niveau national et la mobilisation de l'épargne dans l'économie du pays.

Malgré les difficultés vécues au cours de l'année 2020 suite à la pandémie de la COVID 19 surtout avec le durcissement du marché, la SCR a considérablement amélioré ses rentabilités financières avec une augmentation de plus de 30 % de son chiffre d'affaire et plus de 14% de son résultat net.En effet ,la SCR a affiché au titre de l'année 2020 un chiffre d'affaire de 2633,48 MDH contre 2 017,28 MDH en 2019, et un résultat net de 318 MDH contre 277,91 MDH l'exercice précédent.

2 - Organigramme de l'organisme

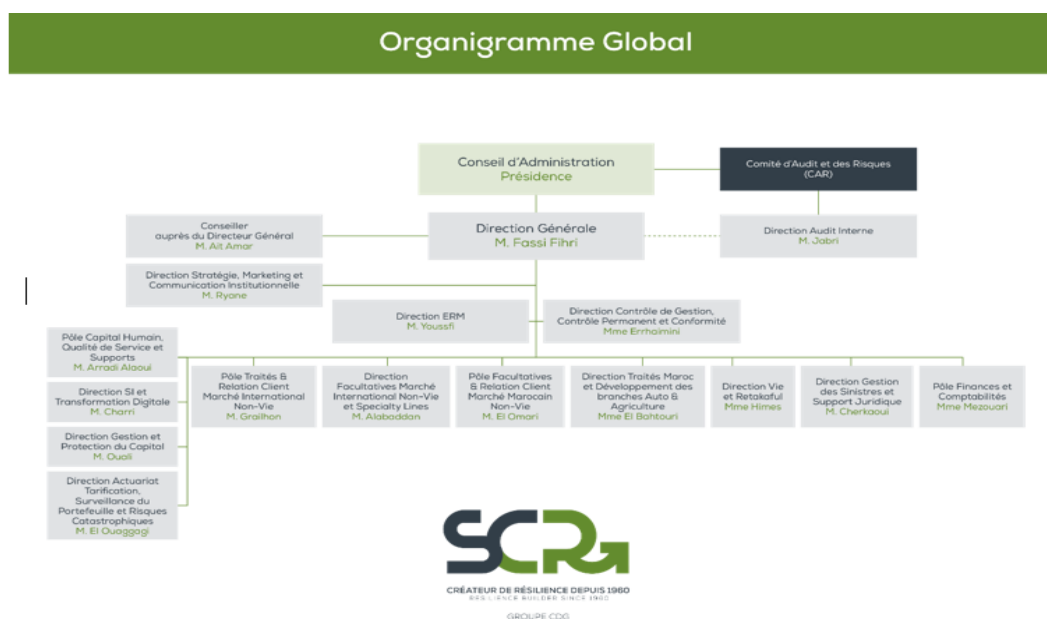


FIGURE 1 – Organigramme de la Société Centrale de Réassurance

3 - Enterprise Risk Management

L'Enterprise Risk Management est un processus, qui de façon systématique et complète, vise à identifier les risques critiques, quantifier leurs impacts et établir des stratégies intégrées afin de maximiser la valeur de l'entreprise ERM et donc une démarche qui identifie et évalue l'ensemble des risques de l'entreprise (risques d'assurance, financiers, opérationnels et stratégiques) et leurs interactions.

La compagnie d'assurance déploie et met en œuvre des stratégies pour éviter, couvrir ou voire exploiter les facteurs de risques.

L'ERM veille à instaurer les nouvelles normes de solvabilité qui soulignent l'importance de la gestion des risques dans la régulation du capital requis. Pour cette raison, la SCR a créé un pôle ERM qui va lui permettre de s'adapter aux nouvelles règles prudentielles qui s'approprient à rentrer en vigueur.

Chapitre 2 : Généralités sur la réassurance

La réassurance est souvent définie comme « l'assurance des assureurs ». Elle permet aux assureurs (cédantes) de céder tout, ou une partie du risque souscrit à un ou plusieurs réassureurs contre une prime de réassurance. L'assureur partage son risque et n'en est plus son seul détenteur. Il peut donc faire face à des sinistres exceptionnels (exemples : attentats du World Trade Center en 2001, Ouragans 2004/2005 aux Etats-Unis, ...) et dispose ainsi d'une plus grande capacité de souscription.

Le réassureur intervient généralement sur des risques extrêmes caractérisés par des montants importants et doit donc de ce fait lui-même se réassurer, c'est ce qu'on entend par la rétrocession.

La réassurance est un contrat par lequel l'une des parties (le réassureur), appelée le cessionnaire, s'engage à prendre en charge, dans des proportions et des conditions bien précises, les conséquences pécuniaires des engagements que l'autre partie (l'assureur), appelée cédante, a contracté vis-à-vis de ses assurés au travers des polices qu'il a émis.

1 - Modes de réassurance

Il y'a trois modes de réassurances :

1.1 - La réassurance facultative

C'est une forme de réassurance caractérisée par sa simplicité et une liberté de souscription que ce soit dans le côté du réassureur ou dans le côté de l'assureur . Elle a la particularité de laisser le choix à l'assureur de céder, ou non, du risque au réassureur, et à ce dernier, d'accepter ou non ce transfert de risque. Elle est

principalement utilisée pour couvrir de grands risques, dont les sommes assurées dépassent largement la capacité de souscription de la compagnie (ex : risques industriels) et/ou des risques exclus des traités de réassurance (ex : tremblements de terre).

1.2 - La réassurance obligatoire

Parmi tous les modes de réassurance, ce mode est le plus utilisé et ceci due à son caractère principal de double obligation. En effet, dans ce mode l'assureur appelé cédante, s'engage durant une période donnée, à céder les risques d'un portefeuille donné au réassureur par obligation. Dans l'autre côté, le réassureur ou société de réassurance est obligée de les accepter. Ces contrats de réassurance obligatoires, appelés aussi traités peuvent être proportionnels ou non proportionnels.

1.3 - La réassurance facultative-obligatoire

Souvent notée Facob, c'est une forme de réassurance plus rare, elle est facultative pour la cédante mais obligatoire pour le réassureur. Dans la réassurance facultative-obligatoire, la cédante choisit quels sont ses risques qui seront cédés au réassureur, ce dernier doit accepter de couvrir tous ces risques mais sous réserve que l'engagement ne dépasse pas un montant maximum fixé au départ.

2 - Types de réassurance

Il existe deux types de réassurance : réassurance proportionnelle et réassurance non proportionnelle.

2.1 - La réassurance proportionnelle

Dans ce type de réassurance, la proportion des primes cédées au réassureur est égale à la proportion des charges assumées par celui-ci. La gestion des contrats et des sinistres étant totalement effectuée par la cédante, le réassureur lui verse en contrepartie une commission de réassurance, en pourcentage des primes cédées.

a-traité en quote part (quota share)

C'est la forme la plus simple de réassurance. Le réassureur prend en charge une proportion des sinistres de la cédante et reçoit la même proportion des primes.

b-traité en excédent de plein

Dans ce type de traités, les primes et les sinistres sont partagés selon un taux de cession calculé police par police, sur la base de la somme assurée. L'assureur conserve, pour chaque risque, un montant appelé « plein de rétention ». Par conséquent, le réassureur n'intervient que si la somme à assurer dépasse ce montant et dans la limite de la capacité définie.

2.2 - La réassurance non proportionnelle

Pour ce type de réassurance, le réassureur n'intervient qu'à partir d'un certain montant appelé rétention ou franchise ou priorité et s'engagera à payer la partie du sinistre dépassant cette priorité dans la limite d'une capacité définie appelée

portée.

a-traité en excédent de sinistres

Ce traité protège la cédante en cas de survenance d'un sinistre dont le coût dépasse la priorité. La somme à régler par sinistre ne pourra cependant pas dépasser la portée du traité, qui est un montant fixé d'avance.

Ce type de contrats peut être réalisé par risque ou par évènement :

- En ce qui concerne le premier cas, le réassureur intervient à chaque fois qu'un sinistre supérieur à la priorité(franchise) survient, pour une police donnée.
- Pour le deuxième cas, le réassureur intervient lorsque un événement touchant plusieurs polices survient(des événements climatiques par exemple).

b-traité en excédent de pertes

L'excédent de pertes, ou Stop-Loss, intervient lorsque l'assureur cherche à se prémunir contre les mauvais résultats (c'est-à-dire, les ratios S/P élevés), non plus en s'attaquant aux montants des sinistres, mais aux résultats eux-mêmes. Le réassureur s'engage alors à protéger, à hauteur d'un certain montant, les résultats dépassant le ratio S/P cible au-delà duquel l'assureur est obligatoirement en perte.

Chapitre 3 : Analyse du marché des assurances de la région "Afrique du Nord"

On va s'intéresser dans cette partie à une analyse abrégée de quelques chiffres clés du marché des assurances dans la région "Afrique du Nord" dans le cadre des affaires étrangères qu'exerce la Société Centrale de Réassurance, précisément la Tunisie et l'Algérie.

1 - La Tunisie

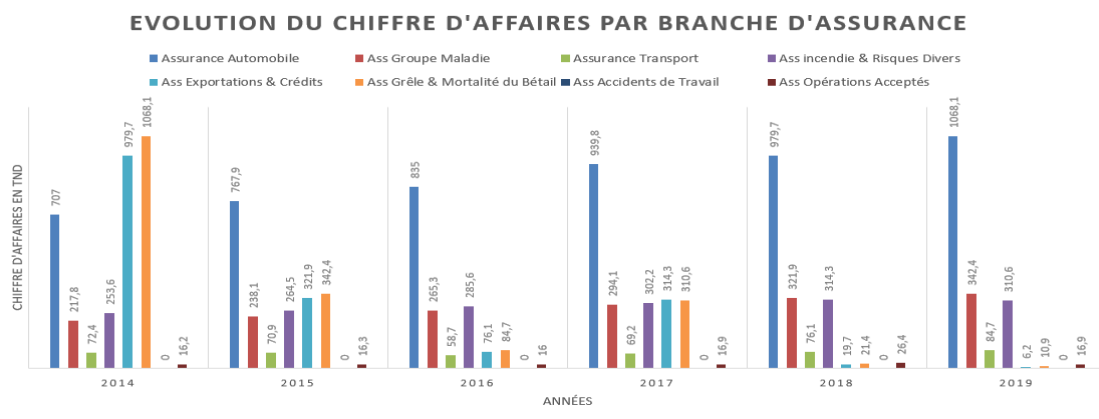


FIGURE 2 – Evolution du chiffre d'affaires par branche d'assurance entre 2014 et 2019 à la Tunisie

On constate d'après la représentation graphique que le chiffre d'affaires ou les primes acquises dans le secteur des assurances de la Tunisie ont connu au ni-

veau global une hausse assez remarquable stimulée surtout par la branche "Assurance Automobile". Pour les autres branches d'assurances, la plupart d'eux ont vécu aussi une hausse relative notamment la branche "Assurance Groupe Maladie" et la branche "Incendie et Risques Divers" contrairement aux branches "Assurances Exportations & Crédits" et "Assurances Grêle & Mortalité du Bétail" qui ont subi une baisse considérable au niveau des primes acquises.

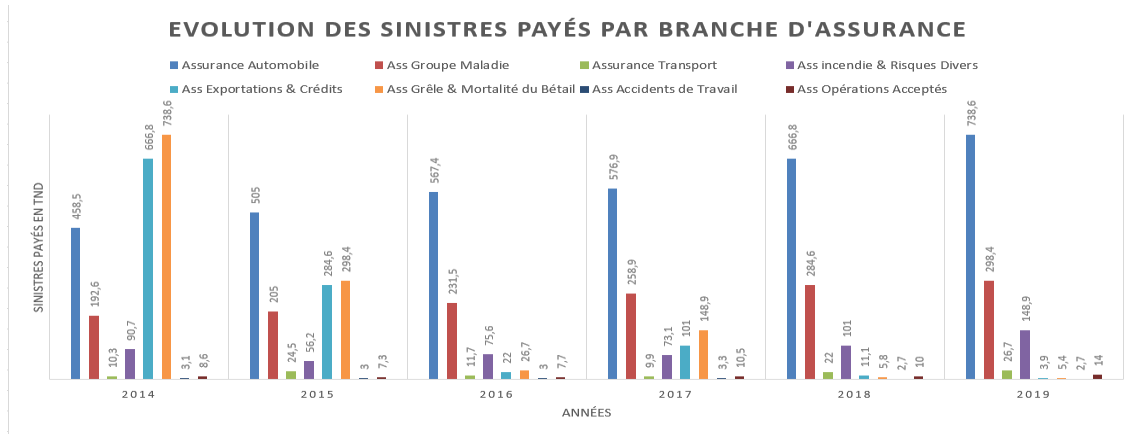


FIGURE 3 – Evolution des sinistres payés par branche d'assurance entre 2014 et 2019 à la Tunisie

Parallèlement aux primes acquises, les sinistres payés ont subi aussi une croissance surtout au niveau des branches "Assurance Automobile", "Assurance Groupe Maladie" et "Incendie et Risques Divers". Alors que des branches comme "Assurances Exportations & Crédits" et "Assurances Grêle & Mortalité du Bétail" ont baissé énormément au niveau des sinistres payés.

2 - L'Algérie

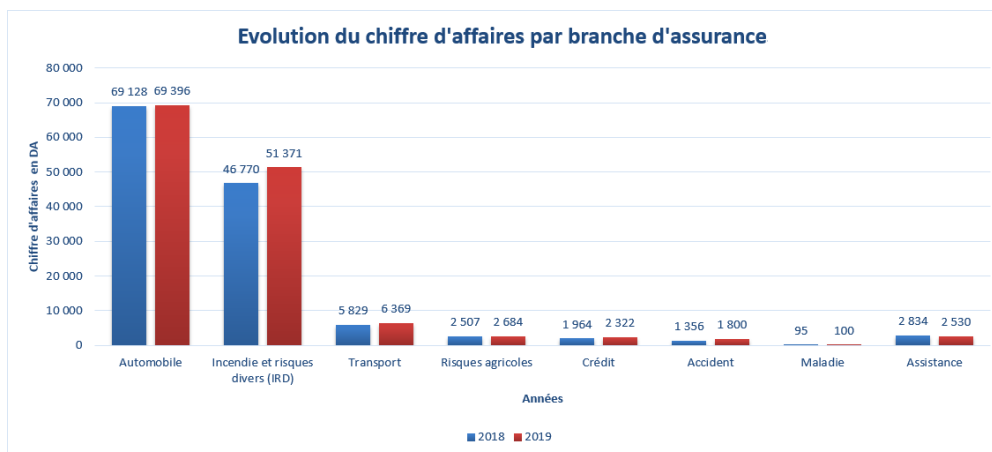


FIGURE 4 – Evolution des primes acquises par branche d'assurance entre 2018 et 2019

On stipule d'après ce graphe, que la plupart des branches d'assurance ont subi une croissance légère entre 2018 et 2019.

On remarque aussi que les branches qui se caractérisent par le plus grand chiffre d'affaires sont "Automobile" et "Incendie et risques divers". Alors que les autres branches, présidées par la branche "Transport", sont complètement négligeables devant ces deux branches.

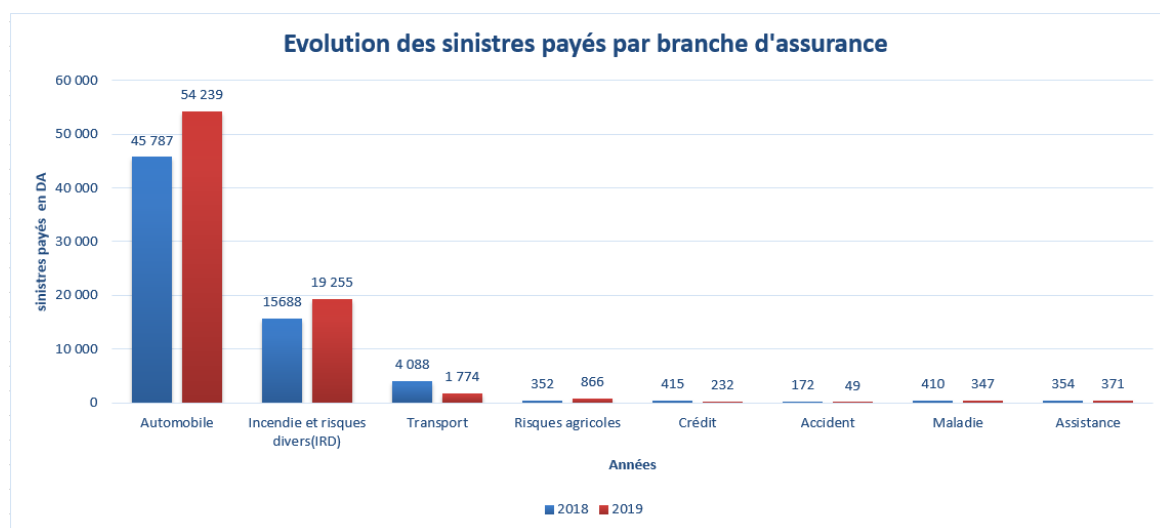


FIGURE 5 – Evolution des sinistres payés par branche d'assurances entre 2018 et 2019

Identiquement pour les sinistres payés, on peut constater qu'ils sont très concentrés dans les branches d'assurance "Assurance Automobile" et "Incendie et risques divers" au détriment des autres branches qui connaissent des sinistralités très faibles.

Pour la Mauritanie, la Libye et l'Égypte comme étant parties de notre portefeuille représentatif de la région "Afrique du Nord" dans le cadre des affaires étrangères auxquelles participe la Société Centrale de Réassurance, on n'a pas trouvé suffisamment de statistiques et d'informations à propos de l'évolution de leur marché des assurances. Donc on va se contenter juste des deux pays dont on vient de décrire la dynamique du secteur des assurances.

D'après l'évolution de ces deux pays, on peut identifier un trait commun entre eux, c'est que la plupart des sinistres payés et primes acquises sont concentrés et centralisés dans les branches "Assurance Automobile", "Assurance Groupe Maladie" et "Incendie et risques divers".

A ce propos, on va traiter dans les parties prochaines un portefeuille représentatif de la région "Afrique du Nord", composé de trois lignes d'activités (Lob) ou segments dont deux sont issus de ces trois branches, à savoir les segments "Engineering" et "Incendie". Et pour le troisième, il s'agit du segment "Maritime et transport".

Partie 2 : Cadre réglementaire

La solvabilité est la capacité d'une société d'assurance ou de réassurance à rencontrer ses engagements, autrement dit générer suffisamment d'activités afin d'indemniser les assurés d'une part et de rembourser ses dettes envers les créanciers ou actionnaires d'autre part.

C'est à dire que le risque financier majeur auquel une compagnie d'assurance ou de réassurance peut être exposé est l'insolvabilité, ou autrement son incapacité et inaptitude à honorer ses engagements envers les assurés. D'où l'importance d'établir une réglementation ou réforme qui va permettre une régularisation de l'activité des assureurs et des réassureurs, et donc la protection des assurés contre le risque de défaut de ces derniers.

Dans cette partie, on abordera le cadre réglementaire suivant lequel on mènera notre étude. En premier lieu, on va expliciter la directive utilisée dans l'Union Européenne, à savoir Solvabilité 2 tout en la comparant avec Solvabilité 1, l'ancienne réglementation qui était utilisée précédemment en Europe, et dont est inspiré le cadre réglementaire actuel au Maroc. En deuxième lieu, on explicitera la nouvelle réforme élaborée au Maroc par l'ACAPS, appelée "Solvabilité Basée sur les Risques", pour combler les failles du cadre réglementaire actuel.

1 - Solvabilité 1 et passage vers Solvabilité 2

1 - Solvabilité 1

Avant, chaque pays établit ses propres textes réglementaires dans le secteur des assurances afin d'assurer le respect d'un ensemble d'exigences financières quantitatives par les différentes sociétés d'assurance ou de réassurance. Mais, pour opérer dans un autre État Membre sans être soumise à des contraintes locales supplémentaires, l'entreprise doit être soumise à des règles prudentielles équivalentes, afin de s'assurer que les intérêts des assurés sont aussi bien protégés.

Une première tentative d'harmonisation a été effectuée dans les années 1970 en Europe à travers deux directives en assurance non-vie (1973) et en assurance vie (1979). Au début des années 2000, une quinzaine de directives constitue alors le cadre « Solvabilité 1 », qui consacre le principe du passeport européen en assurance : une entreprise peut exercer à travers toute l'Europe avec un seul agrément.

Solvabilité 1 tourne autour de trois règles principales :

- * Les provisions techniques doivent être évaluées correctement .
- * En représentation des engagements réglementés, la compagnie d'assurance doit détenir des actifs sûrs, liquides et rentables.
- * La valeur des actifs doit toujours être supérieure aux engagements.

Actif	Passif
Actifs en valeur comptable	Excédent de marge
	Exigence de marge de solvabilité
	Provisions techniques

FIGURE 6 – Bilan comptable Solvabilité 1

Selon la réglementation Solvabilité 1, une compagnie d'assurance ou de réassurance doit avoir à sa disposition en plus des provisions techniques constituées, un niveau minimum de fonds propres , appelé " Exigence de Marge de Solvabilité " qui reflète sa solvabilité.

Cependant au fil du temps, cette approche a révélé plusieurs faiblesses et insuffisances parmi lesquelles on peut citer :

- * Trop simpliste : Pas de prise en compte de la diversité des risques et de leurs spécificités.
- * Arbitrage réglementaire entre secteurs financiers.
- * Risques associés aux placements mal appréhendés.
- * Absence de normes en matière de gouvernance.

- * Prise en compte très partielle de la réalité des groupes d'assurance.
- * Pratiques hétérogènes d'une autorité à l'autre.

2 - Solvabilité 2

Afin de répondre aux différentes insuffisances révélées et mises en évidence par Solvabilité 1, une réforme devient nécessaire, d'où la naissance de la nouvelle directive Solvabilité 2.

Cette nouvelle réglementation adaptée en Europe vise à réaliser les objectifs suivants :

- * Renforcer la solvabilité des compagnies d'assurance.
- * Garantir une bonne gouvernance et une meilleure gestion des risques.
- * Renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance.
- * Renforcer la protection des assurés et bénéficiaires de contrats d'assurance.
- * Favoriser la compétitivité des assureurs et réassureurs européens.
- * Assurer une meilleure adaptation des exigences de capital et des pratiques de contrôle au profil de risque.

Cette réforme s'appuie sur trois piliers fondamentaux :

- Pilier 1 : Exigences quantitatives.
- Pilier 2 : Supervision prudentielle et exigences qualitatives.
- Pilier 3 : Reporting prudentiel et information du public.

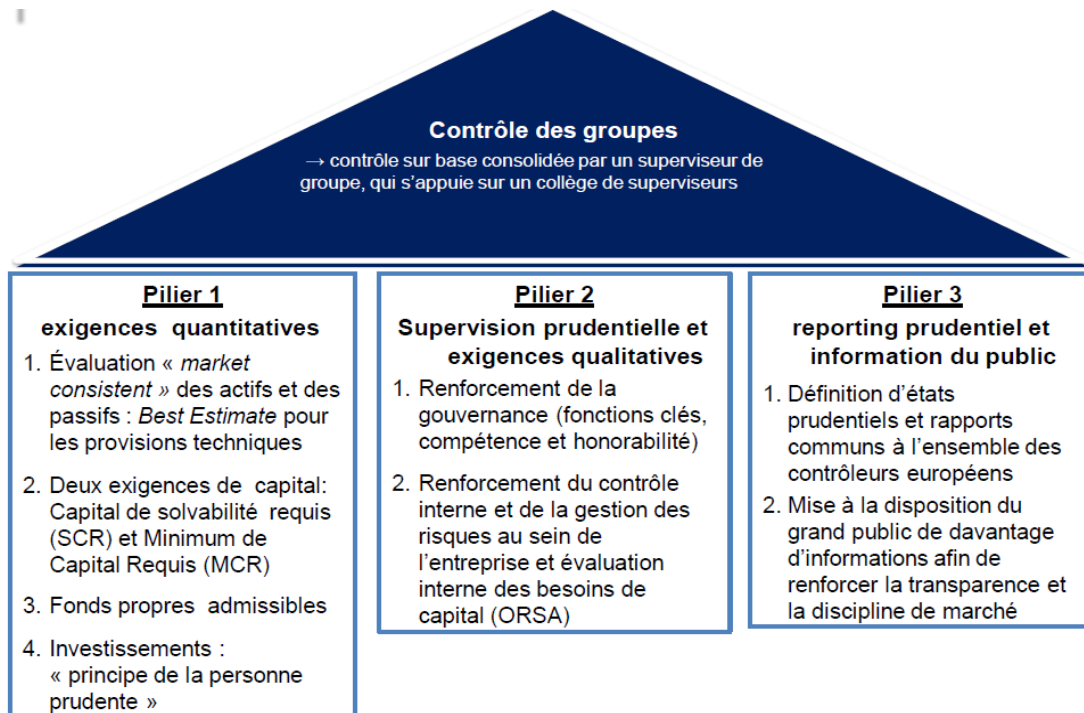


FIGURE 7 – Les trois piliers de Solvabilité 2

Pilier 1 : Exigences quantitatives

Ce pilier définit une multitude de normes quantitatives pour le calcul des provisions techniques et des exigences en fonds propres. Ces exigences reposent sur une vision économique du bilan. En effet, pour être en adéquation avec la réalité économique, les actifs et passifs doivent être évalués à la valeur de marché (ce qu'on appelle " fair value " ou " juste valeur ").

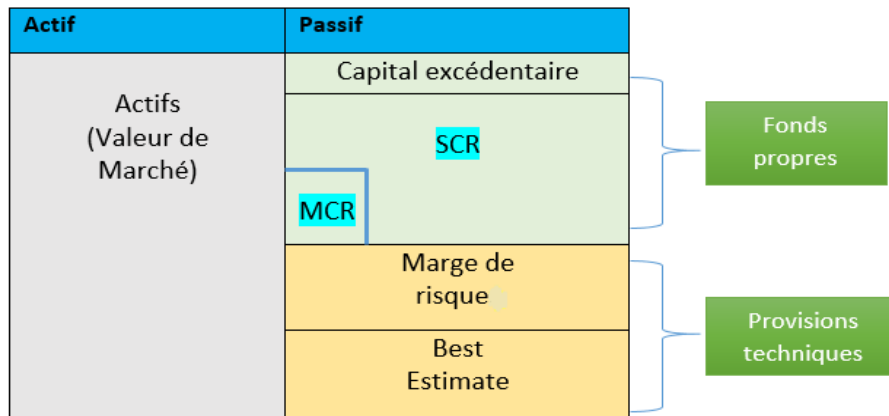


FIGURE 8 – Bilan économique Solvabilité 2

En ce qui concerne les provisions techniques , ils vont être estimés selon une approche économique comme étant la somme de deux éléments (à décortiquer prochainement) :

- * La marge de risque (Risk Margin).
- * Le meilleur estimateur ou la meilleure estimation (Best Estimate).

Pour les fonds propres, Solvabilité 2 a fixé deux niveaux minimums :

- * Le MCR (Minimum Capital Requirement) : Le niveau de fonds propre en dessous duquel l'assureur risque de ne pas pouvoir rencontrer ses engagements vis à vis les assurés. Lorsque les fonds propres d'une compagnie d'assurance deviennent inférieurs au MCR, l'autorité de contrôle intervient systématiquement pour rétablir la santé de l'établissement concerné (ou pour le liquider).
- * Le SCR (Solvency Capital Requirement) : Il représente le capital cible nécessaire pour absorber des chocs inattendus (engendrés par exemple par des événements extrêmes et imprévisibles – catastrophes naturelles, chute brutale des marchés, attentats terroristes, etc.).

Pilier 2 : Exigences qualitatives

Le deuxième pilier a pour but, définir des normes qualitatives de contrôle continu des risques à travers la mise en place d'un dispositif interne qui va permettre le suivi et la maîtrise des différents risques auxquels un assureur peut faire face. Ces normes visent donc à corroborer la gouvernance ainsi que la gestion des risques internes afin de garantir une gestion prudente des activités de l'assureur.

Pilier 3 : Reporting prudentiel et communication de l'information

Ce pilier souligne la nécessité de communiquer des informations détaillées auxquelles le public aura droit d'accès ainsi que des reportings prudentiels, reflétant la solvabilité et la performance financière de l'entreprise, destinés aux autorités de contrôle afin de juger son profil de risque et sa solidité financière.

On s'est pas trop étendu sur les points de ce cadre réglementaire puisque la plupart d'eux vont être revus d'une manière plus détaillée dans l'axe suivant qui tourne autour de la nouvelle réforme marocaine "Solvabilité Basée sur les Risques" vu que cette dernière est énormément inspirée de Solvabilité 2.

2 - Le cadre réglementaire actuel vers la nouvelle réforme Solvabilité Basée sur les Risques (SBR)

Le cadre réglementaire actuel régissant le secteur des assurances au Maroc a pour principal objectif assurer la solvabilité et la solidité financière des compagnies d'assurance et de réassurance et protéger les assurés contre tout risque de défaut de la part des assureurs.

Inspiré par Solvabilité 1, Le cadre réglementaire actuel s'articule autour de quatre axes fondamentaux :

- L'évaluation prudente des provisions techniques et les placements .
- La nécessité de détenir des actifs de bonne qualité en représentation de ces engagements .
- Le calcul d'une marge de solvabilité considérée comme un matelas de sécurité permettant aux assureurs de pouvoir se confronter à des situations de sinistralité imprévues ou exceptionnelles.
- La détermination des éléments constitutifs de la marge de solvabilité ou autrement les ressources permettant de la couvrir .

Cependant, le cadre prudentiel actuel a dévoilé plusieurs faiblesses ou limites :

- Basé sur des éléments comptables et non économiques.
- Trop simpliste : pas de prise en compte de la diversité des risques et de leurs spécificités .
- La marge de solvabilité ne reflète pas les risques supportés par l'assureur.
- Règlementation non cohérente avec la réglementation bancaire (Bâle III).
- Risques associés aux placements (risques de marché) mal appréhendés.
- Quasi absence de normes en matière de gouvernance.
- Non prise en compte de la réalité des groupes d'assurance.

La réforme réglementaire Solvabilité Basée sur les Risques (SBR), inspirée de la directive européenne Solvabilité II qui a été mise en œuvre en Europe afin de remédier aux différents problèmes posés par Solvabilité 1, a entré en vigueur le 1er janvier 2016, afin de combler les lacunes du régime prudentiel actuel et le modifier

en profondeur, et afin d'harmoniser la mise en œuvre des exigences internationales et de mieux appréhender les profils de risque des entreprises d'assurance.

En effet, l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) a élaboré en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) » qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour l'évaluation de la solvabilité avec l'objectif de s'aligner avec les principes de base de l'assurance émis par l'association internationale des contrôleurs d'assurance « IAIS » et de prendre en compte l'ensemble des risques auxquels les organismes peuvent être soumis. Le thème essentiel de SBR porte ainsi sur la mesure et le contrôle des risques, tout en gardant le même objectif principal que l'ancienne réglementation : la protection des assurés.

La SBR se base sur les principes suivants :

- * **Proportionnalité & simplicité** : Les exigences du nouveau cadre prudentiel doivent tenir compte de la nature, de la taille et de la complexité du secteur des assurances et des différents acteurs du marché.
- * **Dialogue** : Il est crucial pour l'Autorité d'être dans une démarche de concertation et de dialogue avec les parties prenantes : à l'écoute des suggestions et des préoccupations des acteurs.
- * **Progressivité** : L'Autorité doit tenir compte de la réalité du marché actuelle notamment en termes d'allocation d'actifs . La convergence vers le nouveau dispositif doit ainsi pouvoir se faire progressivement.

La SBR s'articule autour de trois piliers :

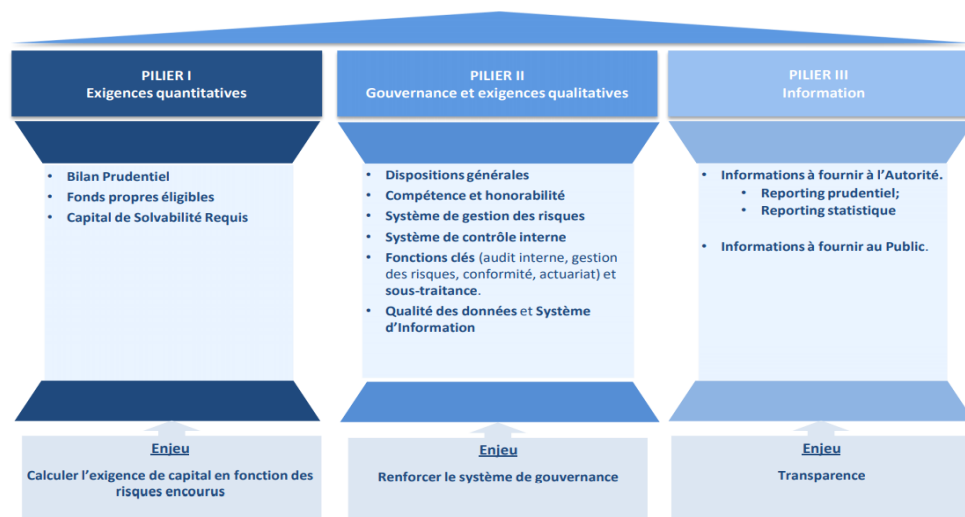


FIGURE 9 – Les trois piliers de la SBR

Pilier I : Exigences quantitatives

Le pilier 1 a pour idée générale, l'adoption d'un ensemble d'exigences quantitatives qui portent sur les éléments suivants :

1) Bilan Prudentiel

Le nouveau cadre réglementaire SBR(Solvabilité Basée sur les Risques) exige les organismes soumis au contrôle de l'ACAPS d'établir le bilan en vision économique. Le bilan en vision économique, appelé « Bilan Prudentiel » n'est pas élaboré afin de se substituer au bilan comptable. Effectivement, Les entreprises vont continuer de produire leur bilan comptable selon les normes du plan comptable des assurances. Le bilan prudentiel comprend, outre les rubriques « impôt différé actif », « impôt différé passif » et « Réserve de réconciliation », les mêmes rubriques de l'actif et du passif constituant le bilan comptable. Cependant, les rubriques « provisions techniques brutes » et « part des cessionnaires dans les provisions techniques » vont être remplacées respectivement par « provisions techniques prudentielles » et « part des cessionnaires dans les provisions techniques prudentielles ».

Contrairement à la réglementation actuelle qui s'appuie sur la valorisation de l'actif et du passif en valeur historique, le projet SBR met en avant une vision économique du bilan des compagnies d'assurance et de réassurance. Ainsi la valorisation doit se faire selon la valeur de marché suivant les règles fixées par l'autorité.

2) Capital de Solvabilité Requis

Solvency Capital Requirement (En anglais ou brièvement SCR) : il représente le capital cible nécessaire pour absorber des pertes inattendues (entraînées par exemple par des événements extrêmes et imprévisibles – catastrophes naturelles, chute brutale des marchés, attentats terroristes, etc.).

En ce qui concerne les modalités du calcul du SCR , on a deux choix :

- L'estimation à partir d'une formule standard exhibée par la réglementation.
- L'estimation à partir d'une formule standard mais calibrée et adaptée selon les paramètres de l'entreprise. C'est ce qu'on appelle USP(Undertaken Specific Parameters). Et c'est exactement l'approche qu'on va appliquer dans la dernière partie liée à l'estimation du SCR du risque de souscription non vie.
- L'estimation à partir d'un modèle interne (partiel ou total) qui doit être bien sûr approuvé par l'ACAPS.

Le SCR englobe un ensemble de risques importants auxquels une société d'assurance ou de réassurance peut être exposée tels le risque de souscription, le risque de marché, le risque de contrepartie, le risque opérationnel et le risque de concentration.

* Risque de souscription : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière, issu d'une sous tarification des contrats d'assurance ou un mauvais provisionnement .

* Risque de marché : le risque de perte ou d'un changement désavantageux de la situation financière provenant des fluctuations au niveau de la valeur du marché des actions, immobiliers ou des taux d'intérêt.

* Risque de contrepartie : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière issu d'un défaut de paiement d'une contrepartie ou d'une détérioration de sa qualité de crédit.

* Risque opérationnel : le risque de perte ou de changement défavorable de la situa-

tion financière liée aux processus internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieurs.

* Risque de concentration : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière issu d'un manque de diversification de son portefeuille d'actifs ou une exposition considérable au risque de défaut d'un seul émetteur

3) Exigences de Capital Supplémentaire

L'Autorité peut exiger un capital supplémentaire au capital de solvabilité lorsqu'elle constate que les hypothèses de détermination du capital de solvabilité ne reflètent par parfaitement le profil de risque de la compagnie d'assurance et de réassurance ou lorsque son système de gouvernance ne satisfait pas les exigences soulignées dans le circulaire.

4) Les fonds propres

Dans le cadre réglementaire prudentiel, les entreprises d'assurance et de réassurance ont été exigées de former une marge de solvabilité. Dans la SBR (Solvabilité Basée sur les Risques) cette notion a été substituée par les fonds propres. Autrement, les fonds propres représentent l'équivalent de la marge de solvabilité dans le nouveau cadre réglementaire SBR. Les éléments de ces fonds propres vont constituer les éléments éligibles à la couverture du capital de solvabilité requis et de l'exigence de capital supplémentaire.

Pilier 2 : Exigences de gouvernance

Parmi les nouveautés importantes ajoutées par la nouvelle réforme, c'est cet aspect de gouvernance et d'exigences qualitatives.

Le deuxième pilier de cette réforme vise à établir un dispositif de gouvernance et de contrôle interne de tous les types de risques auxquels un assureur ou réassureur peut être confronté afin de garantir une gestion interne qui est assez prudente et efficace.

Dans ce cadre, la directive impose d'établir les quatre fonctions clés qui contribuent à la mise en œuvre du système de gouvernance au sein de chaque organisme d'assurance :

- La fonction de gestion des risques : assiste et conseille la direction générale à la mise en œuvre du système de gestion des risques, identifie les risques émergents, coordonne le calcul du capital de solvabilité requis (CSR) ainsi que l'exercice d'évaluation interne des risques et de la solvabilité.
- La fonction actuarielle : coordonne le calcul des provisions techniques, garantit le caractère approprié des méthodes et émet un avis sur la politique globale de souscription. Elle établit un rapport actuariel qu'elle soumet au conseil d'administration.
- La fonction de vérification de la conformité : garantit la conformité à la réglementation et aux politiques fixées par le conseil ou la direction générale. Elle conseille cette dernière et informe le conseil d'administration de tout manquement important.

- La fonction d'audit interne : complètement indépendante et non influençable par la direction générale, elle met en œuvre le plan d'audit interne approuvé par le conseil d'administration et contenant les actions de contrôle effectuées et les insuffisances relevées ainsi que les mesures correctrices y afférentes.

Les entreprises sont incitées à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à les gérer. Elles doivent pouvoir contrôler en interne le suivi de leurs risques via un processus d'évaluation des risques, l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). L'ORSA est un processus complet qui permet de suivre en continu le besoin en capital d'une entreprise en fonction de sa stratégie commerciale notamment. C'est un outil qui vise une gestion continue des risques et qui représente une source d'information pour les autorités de contrôle. L'ORSA cherche à pousser les entreprises d'assurance ou de réassurance à ne pas restreindre leurs activités seulement aux calculs réglementaires, mais qu'elles se consacrent aussi au suivi et contrôle des risques qui peuvent obstruer et ralentir leur fonctionnement.

Pilier 3 : reporting & information du public

Le pilier 3 met la lumière sur la nécessité de communiquer un ensemble d'informations détaillées auxquelles le grand public aura accès et un reporting prudentiel et statistique auquel seule l'Autorité de contrôle (ACAPS) aura accès. Le but est de garantir une certaine transparence envers les assurés et l'ACAPS.

Par conséquent, les sociétés d'assurance sont appelées à publier annuellement un rapport sur leur solvabilité et leur situation financière.

Partie 3 : Evaluation des provisions techniques prudentielles

Le premier objectif de ce mémoire , c'est de déterminer la provision technique pour le portefeuille non vie représentant l'Afrique Du Nord avec trois branches principales (Maritime et transport, Engineering, Incendie) selon deux démarches ou approches :

- L'approche standard fondée sur les méthodes classiques de provisionnement.
- L'approche ou méthode interne qui représente une variante de la méthode Bornhuetter Ferguson.

Premièrement,on va présenter le cadre général de l'étude ainsi que l'ensemble des données dont on aura besoin pour le provisionnement.

Deuxièmement,on va étaler l'ensemble des méthodes classiques de provisionnement d'une part .D'autre part,on va expliquer la procédure de calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistres (Best Estimate) selon la nouvelle réforme SBR .

Troisièmement,on va déployer le processus interne employé par la SCR pour le calcul du Best Estimate.

Quatrièmement,on se consacrera à la construction ainsi que la modélisation de la courbe des taux selon plusieurs modèles.

Finalement,on va mettre en pratique toutes ces notions pour déterminer la "meilleure estimation des engagements pour sinistres"(Best Estimate) pour chaque segment de notre portefeuille.

Remarque

Les données sur lesquelles on va travailler dans le cadre pratique du provisionnement sont des données didactiques qui ont un ordre de grandeur assez proche des données réelles et ceci pour des raisons de confidentialité.

Chapitre 1 : Présentation des données et du cadre général de l'étude

Comme est bien clarifié dans la partie "Généralités sur la réassurance", la SCR (Société Centrale de Réassurance) qui est le premier et le plus important réassureur au Maroc, s'occupe de la réassurance ou autrement de la couverture de l'ensemble des assureurs au Maroc à travers les différents modes (Facultative, Obligatoire, Facultative Obligatoire) et types (Proportionnel, Non proportionnel) de contrats de réassurance qu'elle offre. En surcroît, la SCR ne se limite pas seulement aux affaires marocaines, mais aussi aux affaires étrangères où elle est positionnée également en tant qu'acteur de référence. Et d'ailleurs, elle est considérée par CFI (Capital Finance International) comme la meilleure compagnie de réassurance en Afrique et au Moyen Orient à capitaux arabes, les régions où se concentre une grande partie des activités de la SCR dans le cadre de sa participation aux affaires étrangères.

A ce propos, notre étude en premier lieu consistera à estimer les provisions techniques ou les Best Estimate de la région Afrique du Nord qui est considérée parmi les clients les plus importants de la SCR et ceci selon deux approches ou méthodes :

- La méthode standard préconisée par l'ACAPS, basée sur les méthodes classiques de provisionnement (comme Chain Ladder, De Vylder, Bornhuetter Ferguson, ...).
- La méthode interne utilisée par la SCR.

En deuxième lieu, on va s'intéresser à l'évaluation du risque de souscription non vie en tant que risque majeur parmi les risques auxquels peut être exposée une société d'assurance ou de réassurance et ceci à travers l'estimation de l'exigence en capital nécessaire pour faire face à un tel risque. Cette estimation va être réalisée en calibrant la formule standard du capital de solvabilité requis pour ce risque selon les données du portefeuille (approche USP).

On va tout d'abord présenter les différentes données dont on aura besoin pour réaliser cette tâche.

Notre base de données se constitue de trois types de triangles de liquidation (ou de développement) :

- Triangle des primes : Un triangle qui contient les primes cédées par les compagnies d'assurance de l'Afrique du Nord à la SCR.
- Triangle des charges des sinistres : Un triangle qui comporte les charges des sinistres déclarés par les compagnies d'assurance de la région Afrique du Nord.
- Triangle des sinistres payés : Un triangle qui affiche les règlements payés, ou autrement la part des charges des sinistres payée par la SCR.

Tous ces triangles vont être segmentés selon les branches d'assurance ou lignes d'activité ou ce qu'on appelle lob (Line of Business) auxquelles appartiennent les sinistres encourus. Autrement dit pour chaque segment couvert, on aura trois triangles de liquidation (Celui des primes, celui des charges des sinistres et celui des sinistres payés). Et bien sûr chaque lob est identifiant d'une branche au sein des pays de notre région qui est l'Afrique du Nord, à savoir l'Algérie, la Tunisie, l'Égypte, la Libye et la Mauritanie.

Pour l'approche interne, on va faire usage de tous les trois triangles pour calculer le Best Estimate. Alors que pour la méthode standard, on va utiliser un seul triangle, c'est le triangle des sinistres payés puisque c'est lui qui représente les règlements effectués par la SCR.

Chapitre 2 : Estimation des provisions techniques selon l'approche standard basée sur les méthodes classiques de provisionnement

1 - Les provisions techniques

Les provisions techniques désignent le montant que l'assureur doit mettre à côté pour faire face aux charges éventuelles de la sinistralité. Elles servent également à envisager les prestations que l'assureur doit verser aux bénéficiaires suivant les termes du contrat.

L'évaluation des provisions techniques se fait à travers le calcul du Best Estimate (meilleure estimation des provisions) auquel on ajoute ce qu'on appelle la marge de risque (risk margin). De plus, les compagnies d'assurance devront veiller à la suffisance de leurs fonds propres vis-à-vis les risques auxquels elles font face. Les fonds propres constituent un matelas de sécurité dans lequel elles pourront puiser si les provisions ne suffisent pas à couvrir leurs engagements.

2 - La meilleure estimation des engagements (Best Estimate)

La meilleure estimation des engagements comprend la meilleure estimation des engagements pour sinistres ($BE_{sinistres}$) et la meilleure estimation des engagements pour primes (BE_{primes}).

La meilleure estimation des engagements pour sinistres

La meilleure estimation des engagements pour sinistres correspond à la somme actualisée des flux de règlements futurs nets de recours relatifs aux sinistres survenus.

$$BE_{sinistres} = \sum \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

avec :

- CF_t : les flux de règlements futurs (Cash flows) probabilisés net de recours de l'année comptable t.
- r_t : le taux sans risque de maturité t obtenu grâce à la courbe des taux sans risque à la date d'évaluation.

La meilleure estimation des engagements pour primes

La meilleure estimation des engagements pour primes : correspond aux engage-

ments relatifs aux sinistres non encore survenus. Elle se calcule par la différence entre :

- La somme actualisée des flux de règlements de sinistres futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres non encore survenus.
- Le montant des primes futures probabilisé et actualisé à la date d'inventaire, net des frais d'acquisition relatifs aux contrats à tacite reconduction non résiliés à la date d'inventaire.

3 - La marge de risque

La marge de risque correspond au coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligible égal au CSR nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance sur toute la durée de vie de ceux-ci.

Dans notre sujet, on ne va pas aborder ni la meilleure estimation des engagements pour primes ni la marge de risque. On va se focaliser uniquement sur la meilleure estimation des engagements pour sinistres ($BE_{sinistres}$).

Donc, après avoir disséqué les éléments fondamentaux qui constituent la provision technique, à savoir le meilleur estimateur des engagements et la marge de risque, on va aborder deux parties nécessaires qui figurent dans le calcul de la provision. Il s'agit des :

- Flux de règlements annuels futurs (Cashflows futurs) qui reposent sur le triangle des règlements effectués. Donc il est nécessaire de voir comment on peut les estimer en remplissant les triangles de liquidation. Ces cashflows futurs correspondent aux diagonales du triangle de liquidation (décumulé) inférieur (Triangle estimé).

- Taux zéro-coupon qu'on va obtenir à travers la courbe des taux sans risque. C'est à dire, on va devoir construire la courbe des taux sans risque selon plusieurs modèles ou bien méthodes.

4 - les méthodes de provisionnement

L'objectif de cette partie est de décortiquer l'ensemble des méthodes qui vont nous permettre d'une part de calculer les provisions pour sinistres à payer (PSAP) et d'autre part de déterminer les provisions dans la perspective de la nouvelle réforme "Solvabilité Basée sur les Risques", à savoir la meilleure estimation des engagements pour sinistres ou Best Estimate (sans tenir compte de la marge de risque et de la meilleure estimation des engagements pour primes comme on a mentionné avant) pour les appliquer plus tard sur notre portefeuille non vie qui englobe trois segments (Maritime et Transport, Engineering, Incendie) de la région Afrique du Nord.

Ces méthodes sont scindées en deux grandes catégories :

- Méthodes déterministes
- Méthodes stochastiques

4.1 - Notations utilisées et définitions

Avant de s'embarquer dans l'explication des méthodes de provisionnement, on va d'abord définir les différentes notations et définitions desquelles on aura besoin.

Pour une bonne évaluation du montant des provisions, on illustre souvent les données sous forme de triangles (triangles cumulés ou non cumulés) qu'on appelle triangles de développement ou liquidation (Run-off triangles), vu qu'elles reflètent la dynamique des sinistres et permettent d'avoir une vision agrégée des sinistres.

Années de survenance	Années de développement						
	1	2	...	k	...	n-1	n
1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$...	$Y_{1,k}$...	$Y_{1,n-1}$	$Y_{1,n}$
2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$...	$Y_{2,k}$...	$Y_{2,n-1}$	
...		
...		
n+1-k	$Y_{n+1-k,1}$	$Y_{n+1-k,2}$...	$Y_{n+1-k,k}$			
...				
...				
n-1	$Y_{n-1,1}$	$Y_{n-1,2}$					
n	$Y_{n,1}$						

FIGURE 10 – Triangle des règlements (non cumulés)

Années de survenance	Années de développement						
	1	2	...	k	...	n-1	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,k}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,k}$...	$C_{2,n-1}$	
...		
...		
n+1-k	$C_{n+1-k,1}$	$C_{n+1-k,2}$...	$C_{n+1-k,k}$			
...				
...				
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$					
n	$C_{n,1}$						

FIGURE 11 – Triangle des règlements cumulés

Les notations qu'on va utiliser par suite sont les suivantes :

- i correspond à l'année de survenance $i=1, \dots, n$.
- j correspond à l'année de développement $j=1, \dots, n$.
- $Y_{i,j}$ correspond au montant des sinistres survenus l'année i et payés l'année $i+j-1$ (c'est à dire après j années de développement), on parle aussi d'incréments ou paiements non cumulés.
- $C_{i,j}$ correspond aux paiements agrégés des sinistres survenus l'année i , en j années de développement :

$$C_{i,j} = Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,j} = \sum_{k=1}^j Y_{i,k}$$

L'objectif est donc de remplir le triangle inférieur en déterminant les $\hat{Y}_{i,j}$ et $\hat{C}_{i,j}$ pour $i+j \geq n+2$ (les valeurs sous la diagonale).

Les provisions pour l'année de survenance i (avec $i=2, \dots, n$) sont alors données par :

$$\hat{R}_i = \hat{Y}_{i,n+2-i} + \hat{Y}_{i,n+3-i} + \dots + \hat{Y}_{i,n} = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

La réserve totale est déduit donc comme suit :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i = \sum_{i=2}^n (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}) = \sum_{i=2}^n (\hat{Y}_{i,n+2-i} + \dots + \hat{Y}_{i,n})$$

On appelle charge ultime de l'année de survenance i le montant des règlements cumulés au bout d'un certain nombre d'années de développement jugé suffisant pour la clôture du sinistre.

La provision pour l'année de survenance i correspond à la différence entre ce que l'on s'attend à payer au total pour cette année de survenance, à savoir la charge ultime estimée, et ce que l'on a déjà réglé, c'est à dire le montant cumulé figuré dans la dernière diagonale connue $C_{i,n+1-i}$.

On passe maintenant à l'explicitation des méthodes de provisionnement.

4.2 - Les méthodes déterministes

1) La méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder est certainement la plus connue et la plus employée des méthodes de provisionnement utilisant le développement d'un triangle. Elle est caractérisée par sa simplicité au niveau de l'aspect pratique. Ce qui justifie son succès et son grand usage vis-à-vis les autres méthodes.

Elle peut être appliquée sur différents types de données (paiements cumulés, charges des sinistres ou encore le nombre de sinistres déclarés ou survenus et même les primes).

Cette méthode consiste à considérer que l'évolution des charges cumulées $C_{i,j}$ est gouvernée par des facteurs de développement ou de passage (link ratios λ_j) qui ne dépendent pas des années de survenance.

$$C_{i,j+1} = \lambda_j \cdot C_{i,j}$$

où $C_{i,j}$ désigne le montant cumulé des sinistres survenus l'année i pour j années de développement.

Avec cette méthode, on peut prévoir les montants futurs à payer. Autrement, elle nous permet de remplir le triangle inférieur qui représente les paiements futurs.

La méthode de Chain Ladder repose sur 2 hypothèses nécessaires :

H1 : $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendantes pour $i \neq k$ ou autrement pour tout $j = 1, \dots, n-1$ les facteurs de développement individuels $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ sont indépendants de l'année de survenance (l'évolution des $f_{i,j}$ est quasi stable en fonction des années de survenance).

H2 : Il existe λ_j tel que $E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$.

Sous ces hypothèses, on estime les facteurs de développement comme suivant :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$$

On déduit donc le triangle inférieur en utilisant ces facteurs estimés grâce à la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,j+1} = \hat{\lambda}_j \cdot C_{i,j}$$

La charge ultime de chaque année de survenance i est donnée par :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n+1-i} \cdot \prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k$$

La provision de l'année de survenance i est obtenue comme suit :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

En agrégeant les provisions par année de survenance, on trouve la provision totale

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

2) La méthode de De Vylder

La méthode des moindres carrés de Vylder se fonde sur une modélisation des montants des paiements non cumulés. Elle fait partie de la modélisation factorielle qui permet de décomposer les montants incrémentaux sous forme d'un produit de trois facteurs :

a_i : facteur ligne relatif à l'année de survenance i .

b_j : facteur colonne relatif à l'année de développement j .

c_{i+j} : facteur représentant l'inflation par année calendaire.

Cette méthode est formulée comme suit :

$$Y_{i,j} = a_i \cdot b_j \cdot c_{i+j}$$

où $Y_{i,j}$ représente le montant (non cumulé) des paiements relatifs à l'année de survenance i effectué au bout de j années de développement.

Les hypothèses :

Il est nécessaire d'introduire des contraintes pour que le modèle soit identifiable.

Le modèle des moindres carrés de Vylter consiste à ne pas tenir compte d'un effet éventuel de l'inflation, c'est-à-dire de poser $c_{i+j} = 1$.

Le modèle devient donc :

$$Y_{i,j} = a_i \cdot b_j \quad \text{où } i, j = 1, \dots, n.$$

Les paramètres a_i et b_j sont estimés avec la méthode des moindres carrés ordinaires. C'est à dire en minimisant $\sum_{i+j \leq n+1} (Y_{i,j} - a_i \cdot b_j)^2$.

En prenant en compte la condition $\sum_{j=1}^n b_j = 1$. On obtient les estimateurs suivants :

$$\hat{a}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{b}_j \cdot Y_{i,j}}{\sum_{j=1}^n \hat{b}_j^2}$$

et
$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{a}_i \cdot Y_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \hat{a}_i^2}$$

On remarque que l'estimation directe ou analytique est très difficile puisque chaque paramètre figure dans l'expression de l'autre. L'approche utilisée pour une bonne estimation de ces paramètres est l'approche itérative qu'on va décortiquer dans la partie pratique.

Dans certaines situations, on dispose suffisamment d'informations supplémentaires liées au triangle de liquidation et qu'on désire prendre en compte durant l'estimation de la provision pour l'obtention du résultat le plus adéquat possible.

Il y'a plusieurs méthodes qui permettent d'exploiter ces informations ou en d'autres termes intégrer un indicateur d'exposition au risque (montant de primes, nombre de sinistres, nombre de contrats, ...).

Parmi ces méthodes, on va traiter :

- La méthode de Bornhuetter Ferguson
- La méthode de Benktander

3) La méthode de Bornhuetter Ferguson

Comme a été clarifié au dessus, cette méthode consiste à estimer la charge ultime et les provisions en prenant en considération une information exogène au triangle de paiements. En effet, les provisions sous Bornhuetter-Ferguson se déterminent à partir d'une estimation des ultimes appelés ultimes a priori qu'on notera \hat{U}_i .

Afin d'estimer l'ultime de Bornhuetter Ferguson, on utilisera la formule suivante :

$$\forall i \in (1, \dots, n), \quad \hat{C}_i^{BF} = C_{i,n+1-i} + (1 - \hat{z}_i) \hat{U}_i$$

avec,

$$\forall i \in (1, \dots, n), \quad \hat{z}_i = \frac{1}{\prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k} = \frac{C_{i,n+1-i}}{C_{i,n+1-i} \prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k} = \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{C}_{i,n}}$$

U_i est un estimateur à priori de la charge ultime de l'année de survenance i .

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer l'ultime à priori. Mais on va se

contenter juste de la méthode Chain Ladder standard.

On estime les montants des charges ultimes à priori \hat{U}_i comme suit :

$$\hat{U}_i = (S/P)_{retenu} \cdot P_i$$

avec $(S/P)_{retenu}$ le ratio sinistres sur primes (ou loss ratio) espéré.

Parmi les difficultés associées à cette méthode est qu'elle nécessite un jugement d'expert afin de déterminer le loss ratio convenable correspondant au quotient entre le coût des sinistres et les primes perçues par l'assureur. Pour des raisons simplificatrices, on va prendre la moyenne des S/P par année de survenance.

Ensuite , on déduit l'estimateur \hat{R}_i^{BF} de la provision à constituer par année de survenance :

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{z}_i) \hat{U}_i$$

Donc la provision totale est :

$$\hat{R}^{BF} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{BF}$$

Validation de l'hypothèse fondamentale :

L'hypothèse fondamentale de cette méthode repose sur l'indépendance entre la provision à constituer et le dernier montant connu des règlements. Pour valider cette hypothèse, il suffit de vérifier si le rapport $\frac{PSAP_i}{C_{i,n+1-i}}$ est assez stable par année de survenance.

4) La méthode Benktander

Benktander suggère un ajustement de la méthode Bornhuetter-Ferguson afin de mieux exploiter les données du triangle de liquidation. Cette méthode est considérée comme une extension de la méthode Bornhuetter Ferguson et il s'agit là encore d'utiliser des estimateurs à priori.

La charge ultime par année de survenance estimée par cette méthode \hat{C}_i^B se base sur la charge ultime par année de survenance estimée par la méthode Bornhuetter-Ferguson :

$$\hat{C}_i^B = C_{i,n+1-i} + (1 - \hat{z}_i) \hat{C}_i^{BF}$$

La provision selon cette méthode est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{R}_i^B &= \hat{C}_i^B - C_{i,n+1-i} \\ &= (1 - \hat{z}_i) \hat{C}_i^{BF} \\ &= (1 - \hat{z}_i) (C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i^{BF}) \\ &= \frac{\hat{z}_i(1-\hat{z}_i)C_{i,n+1-i}}{\hat{z}_i} + (1 - \hat{z}_i) \hat{R}_i^{BF} \end{aligned}$$

$$= \hat{z}_i \hat{R}_i^{CL} + (1 - \hat{z}_i) \hat{R}_i^{BF}$$

Avec \hat{R}_i^{CL} la provision Chain Ladder et \hat{R}_i^{BF} la provision Bornhuetter Ferguson.

C'est à dire que la provision Benktander est une combinaison linéaire entre les estimations des provisions des méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson. La méthode Benktander est simple à appliquer et donne une estimation plus précise que ces deux méthodes très utilisées en pratique.

4.3 - Les méthodes stochastiques

Les méthodes déterministes se caractérisent par un trait commun est qu'elles ne permettent pas d'estimer l'erreur de prédiction. D'où l'importance de procéder à des méthodes stochastiques vu qu'elles permettent de quantifier le risque d'estimation des provisions à l'ultime ainsi que mesurer leur incertitude.

Un modèle stochastique suppose que la variable à modéliser possède un élément aléatoire. Dans cet axe, nous présenterons trois autres modèles usuels à savoir : Le modèle de Mack, les modèles GLM et le modèle Bootstrap qui permettent non seulement l'obtention des provisions mais aussi de déterminer le degré d'incertitude correspondant à la réserve. Ce qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie.

1) La méthode de Mack

Le modèle de Mack (1993) est un des premiers modèles stochastiques qui a reproduit les estimations de Chain ladder. Elle en représente la version stochastique

Il repose sur trois hypothèses :

H1 : $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendantes pour $i \neq k$.

H2 : Il existe λ_j tel que $E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

H3 : Il existe σ_j tel que $Var(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Sous les hypothèses (H1) et (H2), le modèle de Mack fournit les mêmes estimations des facteurs de développement que la méthode de Chain Ladder. Quant à l'hypothèse (H3), elle a été introduite par Mack afin de mesurer l'erreur de prédiction.

Dans ce modèle, les facteurs (λ_j) sont estimés par les facteurs de développement de Chain Ladder ($\hat{\lambda}_j$) qui sont sans biais et non corrélés.

Les σ_j^2 sont estimés par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 \quad 1 \leq j \leq n-2$$

$$\sigma_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right)$$

qui sont des estimateurs sans biais.

Nous nous intéressons à la distance moyenne entre l'estimateur et la vraie valeur. L'erreur carrée moyenne $mse(\hat{C}_{i,n})$ de l'estimateur $\hat{C}_{i,n}$ de $C_{i,n}$ se définit par : $mse(\hat{C}_{i,n}) = E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2/D)$.

Nous calculons l'erreur quadratique moyenne (MSEP-Mean Square of Error of prediction) en conditionnant par rapport aux données passées :

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2/C_{i,j}, i + j \leq n + 1)$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

$$\hat{R}_i - R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n}$$

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{i,n})$$

Mack propose d'estimer l'erreur quadratique moyenne du montant des provisions par :

$$\hat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\lambda_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right)$$

Dans certains articles nous trouvons le terme "d'erreur type" ou "standard error" noté $\hat{se}(\hat{R}_i) = \sqrt{\hat{mse}(\hat{R}_i)}$

2) La méthode de GLM

Cette méthode se base sur des modèles qui sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien.

- La composante aléatoire :

On cherche à expliquer des variables aléatoires réelles ($Z_{i,j}$) indépendantes et dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe donc dans le cadre suivant :

(H1) : Les paiements annuels non cumulés ($Z_{i,j}$) sont indépendants.

(H2) : Les paiements annuels non cumulés ($Z_{i,j}$) appartiennent à la famille exponentielle (Binomiale, Poisson, Gamma, Gauss inverse, etc.), de densité :

$$f(Y_{i,j}; \theta_{i,j}; \phi) = \exp\left(\frac{Y_{i,j}\theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{\phi} + c(Y_{i,j}; \phi)\right)$$

Où :

* $\theta_{i,j}$ est un paramètre réel, appelé paramètre canonique ou paramètre de la moyenne.

* ϕ est un paramètre de dispersion strictement positif.

* $W_{i,j}$ est une pondération (=1 par la suite).

* b et C sont des fonctions spécifiques de la distribution.

b étant deux fois dérivable à valeurs dans \mathbb{R} et c à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Les lois les plus utilisées sont : Poisson, Gamma, normal (qui donne des règlements estimés négatifs et donc non appropriés à notre cas), log normal (qui ne fait pas partie de la famille exponentielle mais simulable tout en prenant le log

(règlements) suivant la normale, Inverse gaussien.

La fonction moyenne et la fonction variance de la distribution peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$E(Y_{i,j}) = b'(\theta_{i,j})$$

$$Var(Y_{i,j}) = b''(\theta_{i,j}) \frac{\phi}{W_{i,j}}$$

- La composante systématique :

C'est une composante déterministe du modèle et elle s'écrit de la manière suivante :

$$\eta_{i,j} = \mu + \beta_{i,j} + \alpha_{i,j}$$

avec :

α_i le paramètre lié à l'année de survenance i .

β_j le paramètre lié à l'année de développement j .

- La fonction lien :

La fonction lien g est la fonction qui fait le lien entre la composante systématique et la composante aléatoire. Elle est supposée monotone et dérivable.

$$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \text{ pour } i,j=1,\dots,n$$

Parmi les familles de distribution possibles telles que Poisson surdispersée, lognormal, Gamma etc, on s'intéressera d'expliquer la première car la théorie prouve qu'un GLM avec cette famille reproduit exactement les mêmes prédictions que la méthode de Chain Ladder déterministe mais avec des erreurs de prédiction différentes de celles générées par la méthode de Mack.

Avant d'entrer dans les détails, nous rappelons la notion d'une loi de Poisson surdispersée.

Loi de Poisson surdispersée

Soient μ , ϕ deux réels strictement positifs. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson surdispersée de paramètre (μ, ϕ) si et seulement si $\frac{X}{\phi}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\mu}{\phi}$. Dans ce cas, nous notons $X \stackrel{d}{=} ODP(\mu, \phi)$.

Le modèle GLM avec loi de Poisson surdispersée conduit alors dans notre cas aux hypothèses suivantes :

- Les incréments $X_{i,j}$ sont indépendants et de loi de Poisson surdispersée de paramètres $(\mu_{i,j}, \phi)$ avec $\phi > 0$.

- Il existe des paramètres réels $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $\mu_{i,j} = \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)$ avec les conditions d'identifiabilité $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Dans ce cas les paramètres du modèle sont estimés par maximisation de la quasi vraisemblance (on peut utiliser par exemple soit `glm(.,family=quasipoisson)` ou `glmReserve(., var.power = 2)` dans R) .

On a par suite les estimations des provision futures :

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{E}(Y_{i,j}) = e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j} \text{ et } \hat{R} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=n-i+2}^n \hat{Y}_{i,j}$$

ainsi que l'estimation des variances :

$$\hat{V}(Y_{i,j}) = \hat{\phi} \cdot e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j} \text{ et } \hat{V}(R) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=n-i+2}^n \hat{V}(Y_{i,j})$$

Comme toutes les méthodes stochastiques, on doit mesurer l'erreur de prédiction liée à ce modèle .

L'erreur de prédiction se mesure tout comme la méthode de Mack par la MSEP :

$$MSEP(\hat{R}) = E[(\hat{R} - R)^2 | D]$$

où $D = \{C_{i,j}, i + j \leq n + 1\}$.

On peut décomposer ce terme en deux par approximation .

$$MSEP(\hat{R}) \approx E[(\hat{R} - E[R])^2 | D] + E[(R - E[R])^2 | D]$$

où le premier terme est l'erreur d'estimation car \hat{R} a été estimé à partir du triangle supérieur et le second terme est la variance classique de la variable R, appelée *process variance* .

On peut approcher l'erreur d'estimation par la variance de \hat{R} ,d'où la formule :

$$MSEP(\hat{R}) \approx V(\hat{R}) + V(R) .$$

3) Méthode du Bootstrap

La méthode du Bootstrap est une méthode relativement récente qui consiste à fabriquer de l'information et à fournir des réponses là où les autres méthodes ne sont pas applicables (manque d'informations, calculs impossibles...).

Cette méthode se base sur la simulation tout comme la méthode Monte Carlo, la simulation historique . Autrement, elle suit un principe de rééchantillonnage des données avec un tirage aléatoire avec remise, afin d'estimer les caractéristiques d'un échantillon (moyenne, variance ou écart type...) surtout lorsqu'il s'agit des échantillons de petite taille dont on ne dispose pas suffisamment de données.

Son efficacité a été prouvée dans de nombreux domaines et s'avère être un outil puissant en assurance pour estimer la variabilité des prédictions des estimateurs des paiements futurs ou la distribution empirique des cadences. Il peut être associé à différentes méthodes d'estimation stochastique des provisions.

L'hypothèse fondamentale sur laquelle se base l'estimation de Bootstrap est que les éléments de l'échantillon doivent être indépendants et identiquement distribués (iid) . Et vu que, souvent les règlements cumulés $C_{i,j}$ ne sont pas identiquement distribués , on essaye de l'appliquer sur les résidus du modèle , notamment les résidus de Pearson puisqu'ils sont faciles à déterminer.

Étapes de la méthode Bootstrap :

- On calcule les résidus de Pearson du modèle (Chain Ladder dans notre cas) :

$$r_{i,j}^p = \frac{\lambda_{i,j} - E(\lambda_{i,j})}{\sqrt{\lambda_{i,j}}}$$

- En prenant en compte les hypothèses (H2),(H3) de Mack et de l'égalité $\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$, on trouve que :

$$E(\lambda_{i,j}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j$$

$$Var(\lambda_{i,j}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

- On obtient les résidus de Pearson propres au modèle de Mack :

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

- On ajuste les résidus pour réduire le biais de l'estimation puis on les centre :

$$r_{i,j}^{ajusté} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \frac{\sqrt{C_{i,j}}(\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

Généralement , ces ajustements n'ont pas d'effet significatif sur la moyenne des résidus. Seulement leur variance qui est la plus affectée.

$$r_m = \frac{\sum r_{i,j}^{ajusté}}{n}$$

$$r_{i,j}' = r_{i,j}^{ajusté} - r_m$$

- On passe ensuite à l'étape de simulation, où on va faire un rééchantillonnage des résidus retenus à travers un tirage aléatoire avec remise.

$$r_{i,j}^B = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(\lambda_{i,j}^B - \lambda_j)}{\sigma_j}$$

- Ensuite on calcule les nouveaux facteurs de développement par inversion de la formule des résidus :

$$f_{i,j}^B = r_{i,j}^B \frac{\sigma_j}{\sqrt{C_{i,j}}} + \lambda_j$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j} \lambda_{i,j}^B}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}$$

- Puis on remplit le triangle inférieur des paiements cumulés selon la méthode Chain Ladder en utilisant la formule usuelle avec les nouveaux coefficients simulés

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \tilde{\lambda}_j \cdot C_{i,j}$$

- On obtient ainsi une provision associée à ce triangle rempli à partir de cette simulation. On va répéter le même processus D fois (par exemple D=10000,20000,...). Et pour chaque fois on calcule la provision .

Finalement, on calcule la moyenne de toutes ces provisions obtenues pour chaque simulation pour déterminer finalement la provision finale.

$$R^B = \frac{\sum_{i=1}^B R_i}{B}$$

Chapitre 3 : Estimation des provisions techniques selon l'approche interne utilisée dans la SCR

Puisque tous les segments traités dans notre sujet se caractérisent par un historique allant de 2010 jusqu'à 2020, on va illustrer les trois triangles comme suivant :

Le triangle des primes cédées(cumulées)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	$P_{2010,1}$	$P_{2010,2}$	$P_{2010,3}$	$P_{2010,4}$	$P_{2010,5}$	$P_{2010,6}$	$P_{2010,7}$	$P_{2010,8}$	$P_{2010,9}$	$P_{2010,10}$	$P_{2010,11}$
2011	$P_{2011,1}$	$P_{2011,2}$	$P_{2011,3}$	$P_{2011,4}$	$P_{2011,5}$	$P_{2011,6}$	$P_{2011,7}$	$P_{2011,8}$	$P_{2011,9}$	$P_{2011,10}$	
2012	$P_{2012,1}$	$P_{2012,2}$	$P_{2012,3}$	$P_{2012,4}$	$P_{2012,5}$	$P_{2012,6}$	$P_{2012,7}$	$P_{2012,8}$	$P_{2012,9}$		
2013	$P_{2013,1}$	$P_{2013,2}$	$P_{2013,3}$	$P_{2013,4}$	$P_{2013,5}$	$P_{2013,6}$	$P_{2013,7}$	$P_{2013,8}$			
2014	$P_{2014,1}$	$P_{2014,2}$	$P_{2014,3}$	$P_{2014,4}$	$P_{2014,5}$	$P_{2014,6}$	$P_{2014,7}$				
2015	$P_{2015,1}$	$P_{2015,2}$	$P_{2015,3}$	$P_{2015,4}$	$P_{2015,5}$	$P_{2015,6}$					
2016	$P_{2016,1}$	$P_{2016,2}$	$P_{2016,3}$	$P_{2016,4}$	$P_{2016,5}$						
2017	$P_{2017,1}$	$P_{2017,2}$	$P_{2017,3}$	$P_{2017,4}$							
2018	$P_{2018,1}$	$P_{2018,2}$	$P_{2018,3}$								
2019	$P_{2019,1}$	$P_{2019,2}$									
2020	$P_{2020,1}$										

Tableau 1 : Triangle des primes cédées (cumulées)

Le triangle des charges des sinistres(cumulées)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	$C_{2010,1}$	$C_{2010,2}$	$C_{2010,3}$	$C_{2010,4}$	$C_{2010,5}$	$C_{2010,6}$	$C_{2010,7}$	$C_{2010,8}$	$C_{2010,9}$	$C_{2010,10}$	$C_{2010,11}$
2011	$C_{2011,1}$	$C_{2011,2}$	$C_{2011,3}$	$C_{2011,4}$	$C_{2011,5}$	$C_{2011,6}$	$C_{2011,7}$	$C_{2011,8}$	$C_{2011,9}$	$C_{2011,10}$	
2012	$C_{2012,1}$	$C_{2012,2}$	$C_{2012,3}$	$C_{2012,4}$	$C_{2012,5}$	$C_{2012,6}$	$C_{2012,7}$	$C_{2012,8}$	$C_{2012,9}$		
2013	$C_{2013,1}$	$C_{2013,2}$	$C_{2013,3}$	$C_{2013,4}$	$C_{2013,5}$	$C_{2013,6}$	$C_{2013,7}$	$C_{2013,8}$			
2014	$C_{2014,1}$	$C_{2014,2}$	$C_{2014,3}$	$C_{2014,4}$	$C_{2014,5}$	$C_{2014,6}$	$C_{2014,7}$				
2015	$C_{2015,1}$	$C_{2015,2}$	$C_{2015,3}$	$C_{2015,4}$	$C_{2015,5}$	$C_{2015,6}$					
2016	$C_{2016,1}$	$C_{2016,2}$	$C_{2016,3}$	$C_{2016,4}$	$C_{2016,5}$						
2017	$C_{2017,1}$	$C_{2017,2}$	$C_{2017,3}$	$C_{2017,4}$							
2018	$C_{2018,1}$	$C_{2018,2}$	$C_{2018,3}$								
2019	$C_{2019,1}$	$C_{2019,2}$									
2020	$C_{2020,1}$										

Tableau 2 : Triangle des charges de sinistres (cumulées)

Le triangle des sinistres payés(cumulés)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	$S_{2010,1}$	$S_{2010,2}$	$S_{2010,3}$	$S_{2010,4}$	$S_{2010,5}$	$S_{2010,6}$	$S_{2010,7}$	$S_{2010,8}$	$S_{2010,9}$	$S_{2010,10}$	$S_{2010,11}$
2011	$S_{2011,1}$	$S_{2011,2}$	$S_{2011,3}$	$S_{2011,4}$	$S_{2011,5}$	$S_{2011,6}$	$S_{2011,7}$	$S_{2011,8}$	$S_{2011,9}$	$S_{2011,10}$	
2012	$S_{2012,1}$	$S_{2012,2}$	$S_{2012,3}$	$S_{2012,4}$	$S_{2012,5}$	$S_{2012,6}$	$S_{2012,7}$	$S_{2012,8}$	$S_{2012,9}$		
2013	$S_{2013,1}$	$S_{2013,2}$	$S_{2013,3}$	$S_{2013,4}$	$S_{2013,5}$	$S_{2013,6}$	$S_{2013,7}$	$S_{2013,8}$			
2014	$S_{2014,1}$	$S_{2014,2}$	$S_{2014,3}$	$S_{2014,4}$	$S_{2014,5}$	$S_{2014,6}$	$S_{2014,7}$				
2015	$S_{2015,1}$	$S_{2015,2}$	$S_{2015,3}$	$S_{2015,4}$	$S_{2015,5}$	$S_{2015,6}$					
2016	$S_{2016,1}$	$S_{2016,2}$	$S_{2016,3}$	$S_{2016,4}$	$S_{2016,5}$						
2017	$S_{2017,1}$	$S_{2017,2}$	$S_{2017,3}$	$S_{2017,4}$							
2018	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$S_{2018,3}$								
2019	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$									
2020	$S_{2020,1}$										

Tableau 3 : Triangle des sinistres payés (cumulés)

On va expliciter dans cette partie les différentes étapes du provisionnement selon l'approche ou méthode interne.

Premièrement, on va exclure les diagonales des deux triangles, celui des charges des sinistres et celui des sinistres payés pour les réestimer prochainement. Ensuite on va calculer les nouveaux coefficients de développement en utilisant la méthode de Chain Ladder (ajustée) pour les deux triangles, celui des charges de sinistres et celui des sinistres payés. On les représentera comme suivant :

* $\lambda_{cs,1}, \dots, \lambda_{cs,10}$: les coefficients de développement obtenus par la méthode de Chain Ladder dans le triangle des charges de sinistres. Ils sont déterminés en excluant, comme on a clarifié au début de cette partie, les valeurs diagonales ou autrement celles qui correspondent à $C_{i,11-(i-2010)}$ pour les charges des sinistres. C'est à dire $C_{2010,11}, C_{2011,10}, C_{2012,9}, \dots, C_{2020,1}$. En d'autres termes, leur calcul va reposer juste sur le sous triangle allant de 2010 à 2019 au niveau des années de survenance, et de 1 à 10 au niveau des années de développement.

* $\lambda_{sp,1}, \dots, \lambda_{sp,10}$: les coefficients de développement obtenus par la méthode de Chain Ladder dans le triangle des sinistres payés. Ils sont déterminés de la même façon que ceux des charges des sinistres, en excluant les valeurs diagonales, c'est à dire celles qui correspondent à $S_{i,11-(i-2010)}$ pour les sinistres payés. à savoir $S_{2010,11}, S_{2011,10}, S_{2012,9}, \dots, S_{2020,1}$. Autrement dit leur calcul va reposer de lui même sur le sous triangle allant de 2010 à 2019 au niveau des années de survenance, et de 1 à 10 au niveau des années de développement.

Après on commence à réestimer la valeur (Charge de sinistres et sinistres payés) correspondant à la dernière année de survenance (2020) et à la première année de développement comme suivant :

Pour la charge des sinistres de 2020 :

$$C_{2020,1} = \left(\frac{C}{P}\right)_{retenu} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{10} \lambda_{cs,i}}$$

Pour les sinistres payés de 2020 :

$$S_{2020,1} = \left(\frac{S}{P}\right)_{retenu} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{10} \lambda_{sp,i}}$$

où

* EPI (Estimated Premium Income) est la prime estimée de l'année 2020. Puisque les réassureurs, contrairement aux assureurs qui connaissent exactement le montant de la prime à la date d'évaluation, ils doivent estimer la prime qu'ils vont acquérir

durant la date d'évaluation (2020 dans notre cas). On ne va pas s'intéresser à la méthode utilisée pour l'estimer. On va donc se contenter juste de la valeur fournie par la SCR afin de l'employer dans l'estimation de la charge des sinistres et les sinistres payés de l'année de survenance 2020.

* $(\frac{C}{P})_{retenu}$ est le ratio charge des sinistres/primes retenu pour la conversion de l'EPI et donc l'estimation de la charge des sinistres de l'année de survenance 2020. Il y'a plusieurs méthodes pour le calculer. Mais celle qu'on va choisir est tout simplement la moyenne des $\frac{C}{P}$ de toutes les années comme suit.

$$(\frac{C}{P})_{retenu} = \frac{\sum_{i=2010}^{2019} (\frac{C}{P})_i}{10}$$

* $(\frac{S}{P})_{retenu}$ est le ratio sinistres payés/primes retenu pour la conversion de l'EPI et donc l'estimation de la sinistralité payée de l'année de survenance 2020. On procédera pour le calculer de la même démarche qu'on a fait pour le ratio précédent.

$$(\frac{S}{P})_{retenu} = \frac{\sum_{i=2010}^{2019} (\frac{S}{P})_i}{10}$$

Par la suite, on va compléter le triangle inférieur (les valeurs sous la diagonale) pour les charges des sinistres et pour les sinistres payés en utilisant toutes ces données, à savoir les coefficients de développement qu'on a calculé ainsi que les montants (charges des sinistres et sinistres payés) associés à l'année de survenance 2020 et à la première année de développement. Le développement s'effectue facilement en utilisant la relation de Chain Ladder ($C_{i,j+1} = \lambda_{cs,j} \cdot C_{i,j}$ pour les charges de sinistres et $S_{i,j+1} = \lambda_{sp,j} \cdot S_{i,j}$ pour les sinistres payés) tout comme la méthode classique sauf que cette fois, les diagonales vont être réestimées puisqu'elles n'ont été pas pris en considération dans le calcul des coefficients de développement.

Donc après avoir développé les deux triangles, celui des charges des sinistres et celui des sinistres payés, on passera au développement de celui des primes. Pour ce dernier, la démarche est totalement aisée par rapport aux deux autres triangles, puisque le développement s'effectue de la même manière que la méthode classique (Chain Ladder). C'est à dire, on ne passera pas par toutes ces réestimations et toutes ces étapes qu'on vient d'expliquer.

- Calcul des soldes à liquider

Le solde à liquider d'une année de survenance est la partie résiduelle au niveau des charges des sinistres de la provision dédiée à cette année après le dernier règlement cumulé payé par la SCR. Autrement dit, il correspond à la différence entre la charge des sinistres ultime de cette année et le dernier règlement cumulé (diagonale des sinistres payés) de cette même année.

Il est estimé pour chaque année de survenance i avec la formule suivante :

$$SL_i = \hat{C}_{i,11} - \hat{S}_{i,11-(i-2010)}$$

- Calcul des cadences de liquidation

Pour chaque année de survenance i , on calcule la cadence de liquidation en suivant les étapes suivantes :

Coefficients de Chain ladder	$\lambda_{sp,1}$	$\lambda_{sp,2}$	$\lambda_{sp,3}$	$\lambda_{sp,4}$	$\lambda_{sp,5}$	$\lambda_{sp,6}$	$\lambda_{sp,7}$	$\lambda_{sp,8}$	$\lambda_{sp,9}$	$\lambda_{sp,10}$
Produit cumulé des CL	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Inverse du produit	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
Décumul de l'inverse	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}

où

$$a_j = \prod_{k=j}^{10} \lambda_{sp,k} \text{ (par exemple : } a_1 = \lambda_{sp,1} * \lambda_{sp,2} * \dots * \lambda_{sp,10} ; a_2 = \lambda_{sp,2} * \dots * \lambda_{sp,10} \text{)}$$

$$b_j = \frac{1}{a_j}$$

$$d_1 = b_1 \text{ et } \forall j \geq 2, d_j = b_j - b_{j-1}$$

Ensuite on estime la matrice des cadences de liquidation à laquelle on joint les soldes à liquider qu'on a calculé précédemment.

Années de survenance	Soldes à liquider	Les cadences de liquidation									
2010	SL_{2010}										
2011	SL_{2011}	$\frac{d_{10}}{t_{10}}$									
2012	SL_{2012}	$\frac{d_9}{t_9}$	$\frac{d_{10}}{t_9}$								
2013	SL_{2013}	$\frac{d_8}{t_8}$	$\frac{d_9}{t_8}$	$\frac{d_{10}}{t_8}$							
2014	SL_{2014}	$\frac{d_7}{t_7}$	$\frac{d_8}{t_7}$	$\frac{d_9}{t_7}$	$\frac{d_{10}}{t_7}$						
2015	SL_{2015}	$\frac{d_6}{t_6}$	$\frac{d_7}{t_6}$	$\frac{d_8}{t_6}$	$\frac{d_9}{t_6}$	$\frac{d_{10}}{t_6}$					
2016	SL_{2016}	$\frac{d_5}{t_5}$	$\frac{d_6}{t_5}$	$\frac{d_7}{t_5}$	$\frac{d_8}{t_5}$	$\frac{d_9}{t_5}$	$\frac{d_{10}}{t_5}$				
2017	SL_{2017}	$\frac{d_4}{t_4}$	$\frac{d_5}{t_4}$	$\frac{d_6}{t_4}$	$\frac{d_7}{t_4}$	$\frac{d_8}{t_4}$	$\frac{d_9}{t_4}$	$\frac{d_{10}}{t_4}$			
2018	SL_{2018}	$\frac{d_3}{t_3}$	$\frac{d_4}{t_3}$	$\frac{d_5}{t_3}$	$\frac{d_6}{t_3}$	$\frac{d_7}{t_3}$	$\frac{d_8}{t_3}$	$\frac{d_9}{t_3}$	$\frac{d_{10}}{t_3}$		
2019	SL_{2019}	$\frac{d_2}{t_2}$	$\frac{d_3}{t_2}$	$\frac{d_4}{t_2}$	$\frac{d_5}{t_2}$	$\frac{d_6}{t_2}$	$\frac{d_7}{t_2}$	$\frac{d_8}{t_2}$	$\frac{d_9}{t_2}$	$\frac{d_{10}}{t_2}$	
2020	SL_{2020}	$\frac{d_1}{t_1}$	$\frac{d_2}{t_1}$	$\frac{d_3}{t_1}$	$\frac{d_4}{t_1}$	$\frac{d_5}{t_1}$	$\frac{d_6}{t_1}$	$\frac{d_7}{t_1}$	$\frac{d_8}{t_1}$	$\frac{d_9}{t_1}$	$\frac{d_{10}}{t_1}$

$$\text{où } t_i = \sum_{k=i}^{10} d_k$$

- Calcul des Cashflows non actualisés

Les cashflows non actualisés se calculent en multipliant les soldes à liquider par les cadences de liquidation, comme suivant :

Années de survenance	Années de projection									
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
2010										
2011	$SL_{2011} \cdot \frac{d_{10}}{t_{10}}$									
2012	$SL_{2012} \cdot \frac{d_9}{t_9}$	$SL_{2012} \cdot \frac{d_{10}}{t_9}$								
2013	$SL_{2013} \cdot \frac{d_8}{t_8}$	$SL_{2013} \cdot \frac{d_9}{t_8}$	$SL_{2013} \cdot \frac{d_{10}}{t_8}$							
2014	$SL_{2014} \cdot \frac{d_7}{t_7}$	$SL_{2014} \cdot \frac{d_8}{t_7}$	$SL_{2014} \cdot \frac{d_9}{t_7}$	$SL_{2014} \cdot \frac{d_{10}}{t_7}$						
2015	$SL_{2015} \cdot \frac{d_6}{t_6}$	$SL_{2015} \cdot \frac{d_7}{t_6}$	$SL_{2015} \cdot \frac{d_8}{t_6}$	$SL_{2015} \cdot \frac{d_9}{t_6}$	$SL_{2015} \cdot \frac{d_{10}}{t_6}$					
2016	$SL_{2016} \cdot \frac{d_5}{t_5}$	$SL_{2016} \cdot \frac{d_6}{t_5}$	$SL_{2016} \cdot \frac{d_7}{t_5}$	$SL_{2016} \cdot \frac{d_8}{t_5}$	$SL_{2016} \cdot \frac{d_9}{t_5}$	$SL_{2016} \cdot \frac{d_{10}}{t_5}$				
2017	$SL_{2017} \cdot \frac{d_4}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_5}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_6}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_7}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_8}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_9}{t_4}$	$SL_{2017} \cdot \frac{d_{10}}{t_4}$			
2018	$SL_{2018} \cdot \frac{d_3}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_4}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_5}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_6}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_7}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_8}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_9}{t_3}$	$SL_{2018} \cdot \frac{d_{10}}{t_3}$		
2019	$SL_{2019} \cdot \frac{d_2}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_3}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_4}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_5}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_6}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_7}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_8}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_9}{t_2}$	$SL_{2019} \cdot \frac{d_{10}}{t_2}$	
2020	$SL_{2020} \cdot \frac{d_1}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_2}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_3}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_4}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_5}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_6}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_7}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_8}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_9}{t_1}$	$SL_{2020} \cdot \frac{d_{10}}{t_1}$

On les représentera de façon simple :

Années de survénance	Années de projection									
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
2010										
2011	$CNA_{2011,2021}$									
2012	$CNA_{2012,2021}$	$CNA_{2012,2022}$								
2013	$CNA_{2013,2021}$	$CNA_{2013,2022}$	$CNA_{2013,2023}$							
2014	$CNA_{2014,2021}$	$CNA_{2014,2022}$	$CNA_{2014,2023}$	$CNA_{2014,2024}$						
2015	$CNA_{2015,2021}$	$CNA_{2015,2022}$	$CNA_{2015,2023}$	$CNA_{2015,2024}$	$CNA_{2015,2025}$					
2016	$CNA_{2016,2021}$	$CNA_{2016,2022}$	$CNA_{2016,2023}$	$CNA_{2016,2024}$	$CNA_{2016,2025}$	$CNA_{2016,2026}$				
2017	$CNA_{2017,2021}$	$CNA_{2017,2022}$	$CNA_{2017,2023}$	$CNA_{2017,2024}$	$CNA_{2017,2025}$	$CNA_{2017,2026}$	$CNA_{2017,2027}$			
2018	$CNA_{2018,2021}$	$CNA_{2018,2022}$	$CNA_{2018,2023}$	$CNA_{2018,2024}$	$CNA_{2018,2025}$	$CNA_{2018,2026}$	$CNA_{2018,2027}$	$CNA_{2018,2028}$		
2019	$CNA_{2019,2021}$	$CNA_{2019,2022}$	$CNA_{2019,2023}$	$CNA_{2019,2024}$	$CNA_{2019,2025}$	$CNA_{2019,2026}$	$CNA_{2019,2027}$	$CNA_{2019,2028}$	$CNA_{2019,2029}$	
2020	$CNA_{2020,2021}$	$CNA_{2020,2022}$	$CNA_{2020,2023}$	$CNA_{2020,2024}$	$CNA_{2020,2025}$	$CNA_{2020,2026}$	$CNA_{2020,2027}$	$CNA_{2020,2028}$	$CNA_{2020,2029}$	$CNA_{2020,2030}$

où CNA est une abréviation pour Cashflows Non Actualisés.

- Calcul des cashflows actualisés

Après avoir calculé les cashflows non actualisés, on les actualise en utilisant la courbe des taux publiée par l'EIOPA (ou CEIOPS en français). Elle se base sur le modèle de Smith-Wilson qu'on va décortiquer prochainement dans la partie dédiée à la construction de la courbe des taux.

On obtient les cashflows actualisés $CA_{i,j}$ comme suit :

Années de survénance	Années de projection									
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
2010										
2011	$\frac{CNA_{2011,2021}}{1+r_1}$									
2012	$\frac{CNA_{2012,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2012,2022}}{(1+r_2)^2}$								
2013	$\frac{CNA_{2013,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2013,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2013,2023}}{(1+r_3)^3}$							
2014	$\frac{CNA_{2014,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2014,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2014,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2014,2024}}{(1+r_4)^4}$						
2015	$\frac{CNA_{2015,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2015,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2015,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2015,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2015,2025}}{(1+r_5)^5}$					
2016	$\frac{CNA_{2016,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2016,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2016,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2016,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2016,2025}}{(1+r_5)^5}$	$\frac{CNA_{2016,2026}}{(1+r_6)^6}$				
2017	$\frac{CNA_{2017,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2017,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2017,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2017,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2017,2025}}{(1+r_5)^5}$	$\frac{CNA_{2017,2026}}{(1+r_6)^6}$	$\frac{CNA_{2017,2027}}{(1+r_7)^7}$			
2018	$\frac{CNA_{2018,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2018,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2018,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2018,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2018,2025}}{(1+r_5)^5}$	$\frac{CNA_{2018,2026}}{(1+r_6)^6}$	$\frac{CNA_{2018,2027}}{(1+r_7)^7}$	$\frac{CNA_{2018,2028}}{(1+r_8)^8}$		
2019	$\frac{CNA_{2019,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2019,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2019,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2019,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2019,2025}}{(1+r_5)^5}$	$\frac{CNA_{2019,2026}}{(1+r_6)^6}$	$\frac{CNA_{2019,2027}}{(1+r_7)^7}$	$\frac{CNA_{2019,2028}}{(1+r_8)^8}$	$\frac{CNA_{2019,2029}}{(1+r_9)^9}$	
2020	$\frac{CNA_{2020,2021}}{1+r_1}$	$\frac{CNA_{2020,2022}}{(1+r_2)^2}$	$\frac{CNA_{2020,2023}}{(1+r_3)^3}$	$\frac{CNA_{2020,2024}}{(1+r_4)^4}$	$\frac{CNA_{2020,2025}}{(1+r_5)^5}$	$\frac{CNA_{2020,2026}}{(1+r_6)^6}$	$\frac{CNA_{2020,2027}}{(1+r_7)^7}$	$\frac{CNA_{2020,2028}}{(1+r_8)^8}$	$\frac{CNA_{2020,2029}}{(1+r_9)^9}$	$\frac{CNA_{2020,2030}}{(1+r_{10})^{10}}$

- Estimation du Best Estimate

Après le calcul des cashflows actualisés, on passe finalement à la dernière étape. C'est le calcul du best estimate.

Le best estimate est facilement obtenu en sommant tous les cashflows actualisés.

Chapitre 4 : Construction de la courbe des taux zéro-coupon

La courbe zéro-coupon permet de déterminer les taux zéro-coupon qui vont nous servir afin d'actualiser les cashflows futurs figurant dans la formule du Best Estimate.

En effet le meilleur moyen pour une estimation prudente des provisions est l'ac-

tualisation à travers la courbe zéro coupon.

Cette courbe, reflète le niveau des taux d'emprunt de l'Etat, qui est considéré généralement comme un acteur sans risque. Les taux de référence du marché secondaire des bons de trésor de l'Etat sont calculés quotidiennement par Bank Al-Maghrib à partir d'une moyenne pondérée des taux de prêts échangés entre les banques d'un panel préalablement choisi.

En effet, au Maroc Bank Al Maghrib publie régulièrement une courbe des taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés primaire et secondaire les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les prix. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an. Cependant, ces taux ne sont pas en lecture directe, il est impératif de passer par certaines étapes.

1 - L'interpolation linéaire (Méthode de Bootstrap)

Avant de décortiquer la partie associée à la modélisation de la dynamique des taux zéro coupons, on va d'abord essayer de construire la courbe des taux en utilisant la méthode de Bootstrap. Et vu que les taux d'intérêts publiés par Bank Al Maghrib ne correspondent pas à des taux actuariels aux maturités pleines mais plutôt à des taux de rendement aux maturités résiduelles caractérisés par une date de valeur et une date d'échéance. On va :

- Transformer les taux monétaires en taux actuariels.
- Faire une interpolation linéaire pour des maturités pleines.
- Transformer les taux équivalents en taux zéro-coupon.
- Faire une extrapolation au dernier point liquide afin de fournir les taux zéro-coupon pour les maturités non observées.

1.1 - La transformation des taux

On doit d'abord s'assurer que tous les points de la courbe des taux précédente ont la même base d'intérêt pour pouvoir interpoler entre eux, c'est pourquoi il faut essayer premièrement de transformer les taux monétaires en taux actuariels pour trouver les taux supérieurs à 1 an.

Pour faire la conversion des taux monétaires en taux actuariels, on utilise la formule suivante :

$$t_a = \left(1 + \frac{n \cdot t_m}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

où :

- t_a le taux actuariel
- t_m le taux monétaire
- n le nombre de jours de placement

1.2 - Interpolation linéaire des taux actuariels

Pour pouvoir déterminer le taux de rendement d'une obligation, autrement son taux d'actualisation correspondant à sa maturité pleine, on procède à une interpolation linéaire de deux valeurs de taux voisines.

On cherche à interpoler le taux $R(0, t_p)$ de maturité t_p qui correspond à une date pleine, à partir du taux $R(0, t_i)$ de maturité t_i et le taux $R(0, t_j)$ de maturité t_j avec $t_p \in [t_i; t_j]$.

On déduit $R(0, t_p)$ à partir de la relation :

$$R(0, t_p) = \frac{(t_j - t_p)R(0, t_i) + (t_p - t_i)R(0, t_j)}{t_j - t_i}$$

1.3 - Transformation des taux actuariels en taux zéro-coupon (Méthode Bootstrap)

La méthode de Bootstrap est une procédure permettant de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est-à-dire de proche en proche selon les maturités des obligations étant à disposition. Elle est basée sur l'hypothèse, que le prix théorique d'une obligation soit la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux.

*Pour les obligations de maturité $n < 1$ an :

Les paiements sont généralement de type zéro-coupon. En effet, pour le moins d'un an, il n'y a pas de flux intermédiaires, le nominal et les intérêts sont versés à l'échéance. Le taux zéro-coupon et le taux actuariel sont donc égaux .

*Pour les obligations de maturité $n > 1$ an :

Il intervient des versements d'intérêts intermédiaires, des coupons, généralement annuels. Il faudra alors reconstituer la courbe zéro-coupon pas à pas, soit segment pas segment de maturité. C'est le principe du Bootstrap.

Supposons par exemple que nous voulons calculer le taux zéro coupon de maturité 2 ans ZC_2 , à partir du taux actuariel 2 ans r_2 et le taux zéro coupon 1 an ZC_1 .

On recourt à l'équation suivante afin de déterminer le taux zéro coupon de maturité 2 ans ZC_2 :

$$\frac{1}{(1+r_2)} + \frac{1}{(1+r_2)^2} = \frac{1}{(1+ZC_1)} + \frac{1}{(1+ZC_2)^2}$$

On trouve donc le taux zéro coupon 2 ans :

$$ZC_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{1+r_2} + \frac{1}{1+r_2^2} - \frac{1}{1+ZC_1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

On continue progressivement jusqu'à le calculer pour une certaine maturité n

La formule générale pour calculer le taux zéro coupon pour une maturité n est la suivante :

$$ZC_n = \left(\frac{1}{\sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{1}{(1+r_n)^i} - \frac{1}{(1+ZC_i)^i} \right) + \frac{1}{(1+r_n)^n}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

2 - La modélisation de la courbe des taux

Depuis longtemps, les chercheurs ont essayé de décrire le comportement de la structure par terme et modéliser la dynamique des taux d'intérêt à travers la mise en place d'une multitude de modèles.

Dans cette partie, on va expliciter deux modèles qui sont très utilisés pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt courts. Il s'agit de :

- Modèle de Vasicek
- Modèle de Smith-Wilson

2.1 - Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek représente un des premiers modèles stochastiques élaborés afin de décrire la dynamique des taux. Il suit le processus Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants.

Autrement, le modèle de Vasicek consiste à supposer que r_t satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \text{ où}$$

- * a, b et σ sont des constantes
- * b représente la moyenne à long terme du taux court.
- * a représente la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme b.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêts. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Lorsque $r(t)$ est éloigné de b, l'espérance de variation instantanée de $r(t)$, égale à $a(b-r(t))$ est positive si $r(t) < b$. Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur long terme d'autant plus intensément qu'il s'en est écarté et que le paramètre a est grand. A l'inverse, si $r(t) > b$, l'espérance de variation instantanée de $r(t)$ est négative et $r(t)$ diminue dans le temps pour se rapprocher de b.

La solution de cette équation est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Les variables aléatoires r_t ont une loi normale de paramètres :

$$E(r_t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \quad \text{et} \quad Var(r_t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2at})}{2a}$$

La mise en œuvre pratique des processus stochastiques, tels que le modèle de Vasicek nécessite de les discrétiser, que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour la simulation des trajectoires.

En effet les données disponibles étant discrètes, l'estimation des paramètres des modèles en temps continu n'est pas immédiate.

Discrétisation du modèle de Vasicek

La solution du modèle de Vasicek pour r démarrant à l'instant t est donnée par

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)} + b(1 - e^{-a(s-t)}) + \sigma e^{-as} \int_t^s e^{au} dW_u$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte pour $s=t+1 \Rightarrow s-t=1$

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2a}}{2a}} \epsilon$$

où

ϵ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

L'estimation des paramètres du modèle de Vasicek peut s'effectuer en recourant à la méthode des moindres carrés ordinaires. Le point de départ de cette méthode consiste à régresser la série des taux courts à l'aide de la formule suivante.

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a} r_{t-1} + \epsilon_t$$

avec

$$\epsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})) \text{ et correspond au résidu de la régression.}$$

2.2 - Modèle de Smith-Wilson

Cette méthode participe d'une approche macroéconomique : une courbe de taux zéro-coupon est ajustée selon les prix observés d'instruments financiers, avec le taux forward à long terme ultime en guise de paramètre d'entrée. L'objectif est d'estimer la fonction de prix $P(t)$ pour toutes les maturités $t > 0$. C'est la méthode utilisée par la CEIOPS (ou EIOPA). La raison pour laquelle elle fait l'objet d'une étude dans ce mémoire est parce que la SCR travaille aussi avec la courbe des taux affichée par l'EIOPA.

Cette méthode normalement peut être généralisée sur un large panel des différents types d'instruments de taux. Mais vu qu'on est concerné juste par les taux zéro-coupons, on va se limiter juste aux prix des obligations zéro-coupon. Ça va faciliter par conséquent les formules associées à cette méthode surtout au niveau de l'implémentation.

Tout instrument est spécifié via :

- Son prix de marché à la date de valeur.
- Les dates de paiement de cash jusqu'à la maturité.
- Le montant de ces flux de cash à ces dernières dates peut être un argument d'entrée pour la méthode de Smith et Wilson.

La fonction de prix doit satisfaire les propriétés suivantes :

- * P est une fonction positive.
- * P est une fonction strictement décroissante du temps.
- * $P(t=0)=1$
- * P passe par tous les points observés.
- * P est lisse jusqu'à un certain degré.
- * $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$

La fonction de prix proposée par Smith et Wilson s'exprime comme suivant :

$$P(t) = e^{-UFR.t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(t, u_j), t \geq 0$$

avec :

- * Le terme UFR correspond au « Taux Forward Ultime », il correspond à une estimation du taux zéro-coupon des obligations à long terme.
- * $e^{-UFR.t}$ représente le comportement asymptotique à long terme du facteur d'actualisation.
- * Une combinaison linéaire de N fonctions noyau $K(i), i = 1, \dots, N$ (Le nombre N correspondant au nombre de maturités de zéro-coupon disponibles avant extrapolation). Chacune des fonctions noyau prend en compte des données de marché ainsi que deux autres arguments :
 - Le taux forward ultime (UFR)
 - La vitesse de convergence de la courbe des taux forward vers la valeur UFR : α

Les fonctions symétriques $W(t, u_j)$ sont définies pour tout $j=1, \dots, N$ comme suit :

pour tout $j=1, \dots, N$:

$$W(t, u_j) = e^{-UFR.(t+u_j)} (\alpha \cdot \min(t, u_j) - 0.5e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \cdot (e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)}))$$

Par ailleurs, on peut remarquer que ces fonctions dépendent seulement des paramètres en entrée ainsi que des données issues des titres zéro-coupon. Pour chacun de ces titres, une fonction noyau particulière est calculée à partir de sa définition. Le principe sous-jacent de la méthode de Smith et Wilson est de considérer la fonction P(t) comme une combinaison linéaire de toutes les fonctions noyau.

Les fonction noyau $K_i(t)$ sont définies selon la formule ci-dessous :

$$K_j(t) = W(t, u_j) \quad \forall j \in 1, \dots, N, \forall t > 0$$

Les paramètres inconnus requis pour calculer la fonction P(t), $(\zeta_i)_{i \in 1, \dots, N}$ sont les solutions du système des équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = P(u_1) = P(t) = e^{-UFR.u_1} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_1, u_j) \\ \cdot \\ \cdot \\ m_i = P(u_i) = P(t) = e^{-UFR.u_i} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_i, u_j) \\ \cdot \\ \cdot \\ m_N = P(u_N) = P(t) = e^{-UFR.u_N} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(u_N, u_j) \end{array} \right.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme suivant :

$$m = p = \mu + W\zeta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = (m_1, \dots, m_N)^T \\ p = (P(u_1), \dots, P(u_j))^T \\ \mu = (e^{-UFR.u_1}, \dots, e^{-UFR.u_N})^T \\ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)^T \\ W = (W(u_i, u_j))_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N} \end{array} \right.$$

Après avoir vérifié que la matrice W est inversible, on déduit que

$$\zeta = W^{-1}(p - \mu) = W^{-1}(m - \mu)$$

On remplace donc les valeurs estimées dans la fonction de prix pour déterminer la valeur du prix du titre zéro coupon à toutes les maturités t pour lesquelles il n'existe aucune donnée observée :

$$P(t) = e^{-UFR.t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \cdot W(t, u_j), t > 0$$

On obtient donc les taux zéro coupon ($R_t, t > N$) en utilisant la relation suivante :

$$R_t = \left(\frac{1}{P(t)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Les paramètres UFR et α sont calibrés de la façon suivante :

* Le Taux Forward Ultime (UFR) correspond à la somme des éléments suivants :

- La moyenne des taux réels 1 an (correspondant aux taux zéro coupon 1 an au 31/12 ajustés de l'inflation annuelle) sur l'historique disponible.
- Le taux d'inflation cible fixé calibré sur l'historique d'inflation disponible et selon une moyenne géométrique pondérée de la façon suivante :

$$\text{taux d'inflation cible} = \exp\left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot \ln(1 + \text{taux inflation}_i)}{\sum_{i=0}^n w_i}\right) - 1$$

où :

- » n est le nombre d'années d'historique d'inflation disponible.
- » w_i est le poids associé à l'i ème taux d'inflation.

* La vitesse de convergence α est calibrée de façon à ce que la différence entre les taux forward 1 an projetés et le UFR converge vers zéro à horizon 60 ans à un seuil de 0.00001 .

Chapitre 5 : Cadre pratique de l'évaluation des provisions techniques par les deux approches étudiées

1 - Construction de la courbe des taux sans risque

Dans cette partie, on a pour objectif la mise en place de la courbe des taux zéro-coupon dont on va se servir après pour actualiser les cashflows afin d'estimer le best estimate selon les différentes méthodes qu'on a mentionné dans la partie théorique.

1) La méthode de Bootstrap

On va parcourir toutes les étapes qui vont permettre la détermination des taux zéro-coupon.

Première étape : Extraction de la base de données des taux moyens pondérés

Puisque la date d'évaluation des provisions techniques correspond à la date d'exercice de l'année 2020, autrement à 31/12/2020. Donc on va extraire la base de données des TMP (taux moyens pondérés) associée à cette date à partir du site officiel de Bank Al Maghrib.

Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur
08/02/2021	173,09	1,46%	31/12/2020
15/03/2021	1392,82	1,46%	31/12/2020
17/05/2021	118,14	1,48%	31/12/2020
14/06/2021	39,08	1,47%	31/12/2020
13/09/2021	120,80	1,47%	31/12/2020
17/01/2022	230,74	1,62%	31/12/2020
18/04/2022	39,71	1,67%	31/12/2020
18/07/2022	117,61	1,72%	31/12/2020
15/08/2022	47,47	1,74%	31/12/2020
20/03/2023	190,87	1,90%	31/12/2020
02/06/2025	48,15	2,01%	31/12/2020
15/06/2026	124,53	2,14%	31/12/2020
16/04/2029	57,47	2,27%	31/12/2020
05/08/2030	48,32	2,35%	31/12/2020
18/07/2031	280,31	2,41%	31/12/2020
18/07/2033	68,4	2,54%	31/12/2020
16/07/2035	94,8	2,67%	31/12/2020
19/02/2046	34,57	3,20%	31/12/2020
14/02/2050	25,74	3,40%	31/12/2020
20/02/2051	507,05	3,37%	04/01/2021

Tableau 4 : Les taux moyens pondérés associés à la date 31/12/2020

Deuxième étape : La transformation des taux monétaires en taux actuariels

On va d'abord essayer de préciser pour chaque taux moyen pondéré la valeur de la maturité (en jours et en années) pour distinguer entre :

- Les TMP de maturité supérieure à une année, qui vont être pris telles qu'ils sont
- Les TMP de maturité inférieure à une année, qui vont être converti par conséquence en taux actuariels

* Avant transformation en taux actuariels :

Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur	Maturité(en jours)	Maturité (en années)
08/02/2021	173,09	1,46%	31/12/2020	39	0,11
15/03/2021	1392,82	1,46%	31/12/2020	74	0,20
17/05/2021	118,14	1,48%	31/12/2020	137	0,38
14/06/2021	39,08	1,47%	31/12/2020	165	0,45
13/09/2021	120,80	1,47%	31/12/2020	256	0,70
17/01/2022	230,74	1,62%	31/12/2020	382	1,05
18/04/2022	39,71	1,67%	31/12/2020	473	1,30
18/07/2022	117,61	1,72%	31/12/2020	564	1,55
15/08/2022	47,47	1,74%	31/12/2020	592	1,62
20/03/2023	190,87	1,90%	31/12/2020	809	2,22
02/06/2025	48,15	2,01%	31/12/2020	1614	4,42
15/06/2026	124,53	2,14%	31/12/2020	1992	5,46
16/04/2029	57,47	2,27%	31/12/2020	3028	8,30
05/08/2030	48,32	2,35%	31/12/2020	3504	9,60
18/07/2031	280,31	2,41%	31/12/2020	3851	10,55
18/07/2033	68,4	2,54%	31/12/2020	4582	12,55
16/07/2035	94,8	2,67%	31/12/2020	5310	14,55
19/02/2046	34,57	3,20%	31/12/2020	9181	25,15
14/02/2050	25,74	3,40%	31/12/2020	10637	29,14
20/02/2051	507,05	3,37%	04/01/2021	11004	30,15

Tableau 5 : Les taux monétaires pris avant conversion en taux actuariels

* Après conversion des taux monétaires de maturité inférieure à une année :

Maturité (en années)	Taux actuariel
0,11	1,49%
0,20	1,49%
0,38	1,51%
0,45	1,50%
0,70	1,49%
1,05	1,62%
1,30	1,67%
1,55	1,72%
1,62	1,74%
2,22	1,90%
4,42	2,01%
5,46	2,14%
8,30	2,27%
9,60	2,35%
10,55	2,41%
12,55	2,54%
14,55	2,67%
25,15	3,20%
29,14	3,40%
30,15	3,37%

Tableau 6 : Les taux actuariels obtenus après conversion des taux monétaires de maturité inférieure à une année

Troisième étape : L'interpolation linéaire des taux actuariels

Comme on peut le remarquer, selon le dernier tableau affiché, presque tous les taux actuariels dont on dispose ont des maturités qui ne sont pas pleines (maturité

qui n'est pas entière). Donc on doit les interpoler pour obtenir les taux actuariels associés à des maturités pleines comme on a vu dans la partie théorique .

Le tableau suivant affiche les taux obtenus suite à l'interpolation linéaire

Maturité (en années)	Taux actuariel
1	1,60%
2	1,84%
3	1,93%
4	1,98%
5	2,08%
6	2,16%
7	2,21%
8	2,26%
9	2,32%
10	2,38%
11	2,44%
12	2,51%
13	2,57%
14	2,63%
15	2,69%
16	2,74%
17	2,79%
18	2,84%
19	2,89%
20	2,94%
21	2,99%
22	3,04%
23	3,09%
24	3,14%
25	3,19%
30	3,38%

Tableau 7 : Les taux actuariels de maturité pleine obtenus suite à l'interpolation linéaire

Quatrième étape : Transformation des actuariels en taux zéro coupon

Comme on a vu dans la partie théorique. Il est nécessaire de convertir encore une fois les taux actuariels de maturité supérieur à un an en des taux zéro-coupon en utilisant la méthode de Bootstrap.

On obtient le tableau suivant :

Maturité (en années)	Taux zéro-coupon
1	1,60%
2	2,08%
3	2,09%
4	2,09%
5	2,33%
6	2,43%
7	2,39%
8	2,47%
9	2,61%
10	2,73%
11	2,84%
12	2,94%
13	3,06%
14	3,18%
15	3,22%
16	3,23%
17	3,32%
18	3,42%
19	3,51%
20	3,61%
21	3,71%
22	3,81%
23	3,92%
24	4,03%
25	4,14%
30	13,08%

Tableau 8 : Les taux zéro-coupon obtenus après transformation des taux actuariels

Finalement, après avoir déterminé les taux zéro-coupon par la méthode Bootstrap, on peut donc tracer la courbe des taux obtenue par cette méthode

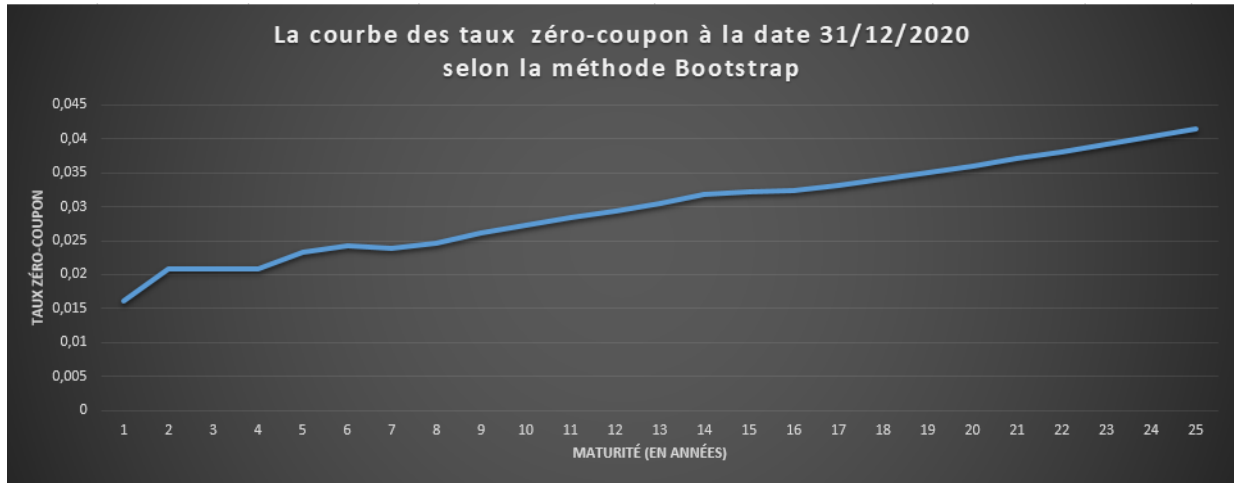


FIGURE 12 – La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 selon la méthode de Bootstrap

2) Le modèle de Vasicek

On doit d'abord essayer de calibrer le modèle de Vasicek en essayant d'estimer ses différents paramètres.

Pour ceci on va faire usage du modèle de Vasicek discrétisé :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \epsilon$$

où ϵ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

On va essayer de calibrer le modèle à travers une régression linéaire de la forme :

$$r_t = \beta + \alpha \cdot r_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\text{avec } \epsilon_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})\right)$$

En estimant ces paramètres intermédiaires, on peut déduire les paramètres du modèle comme suit :

$$a = -\ln(\alpha)$$

$$b = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{var}(\epsilon)}{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}}$$

Avant de s'embarquer dans les calculs, il y'a une remarque très importante à mentionner, c'est que contrairement à la méthode de Bootstrap qu'on vient d'aborder, la base de données qu'on va utiliser cette fois ne contient pas des taux moyens pondérés définis caractérisés par une date de valeur et une date d'échéance, mais plutôt des taux moyens pondérés journaliers (TMP), c'est à dire au jour le jour du marché monétaire marocain.

On se basera donc afin de modéliser la courbe des taux selon ce modèle sur une

base de données contenant des TMP quotidiens allant de 14/09/2018 à 08/06/2021.

On exhibera un morceau de notre base de données.

Date	Taux Moyen Pondéré
08/06/2021	1,50%
07/06/2021	1,50%
06/06/2021	1,50%
05/06/2021	1,50%
04/06/2021	1,50%
03/06/2021	1,50%
02/06/2021	1,50%
01/06/2021	1,50%
31/05/2021	1,50%
30/05/2021	1,50%
29/05/2021	1,50%
28/05/2021	1,50%
27/05/2021	1,50%
26/05/2021	1,50%
25/05/2021	1,50%
24/05/2021	1,50%

Tableau 9 : Les taux moyens pondérés journaliers

On présente les résultats affichés par la régression linéaire :

```
> summary(model)

Call:
lm(formula = a ~ b, data = vasd)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0040354 -0.0001806 -0.0000030  0.0000884  0.0218642

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0007058  0.0001301   5.427 7.2e-08 ***
b           0.9649827  0.0064801 148.915 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.0007563 on 997 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.957,    Adjusted R-squared:  0.9569
F-statistic: 2.218e+04 on 1 and 997 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

FIGURE 13 – Sorties R : Résultats de la régression linéaire entre r_t et r_{t-1}

D'après les sorties , on a :

$$\alpha = 0,9649827$$

$$\beta = 0,0007058$$

On conclut donc que :

$$a = 0,035645105$$

$$b = 0,020155752$$

$$\sigma = 0,000308781$$

Après l'estimation, on passe au calcul du prix zéro-coupon en utilisant les paramètres estimés :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

où :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{1-a(T-t)}}{a}$$

et

$$A(t, T) = \exp\left[\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t, T)\right]$$

Les taux peuvent être calculés facilement pour toutes les maturités en utilisant le prix des obligations zéro-coupon correspondantes, comme suit :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t))}{T}$$

En remplaçant $P(t)$ par sa valeur, on obtient la formule explicite de $R(t, T)$:

$$R(t, T) = R_\infty + (r_t - R_\infty) \frac{1 - e^{a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

$$\text{où : } R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

En fixant t à la date pour laquelle on veut construire la courbe des taux, à savoir dans notre cas 31/12/2020, on peut facilement grâce à cette formule obtenir les taux zéro-coupon pour toute maturité et donc représenter la courbe des taux à cette date.

Maturité	Taux Zéro-Coupon
1	0,01509
2	0,01518
3	0,01527
4	0,01535
5	0,01543
6	0,01551
7	0,01559
8	0,01567
9	0,01575
10	0,01582
11	0,01589
12	0,01596
13	0,01603
14	0,01610
15	0,01616
16	0,01623
17	0,01629
18	0,01635
19	0,01641
20	0,01647
21	0,01653
22	0,01658

Tableau 10 : Les taux zéro coupon obtenus par le modèle de Vasicek

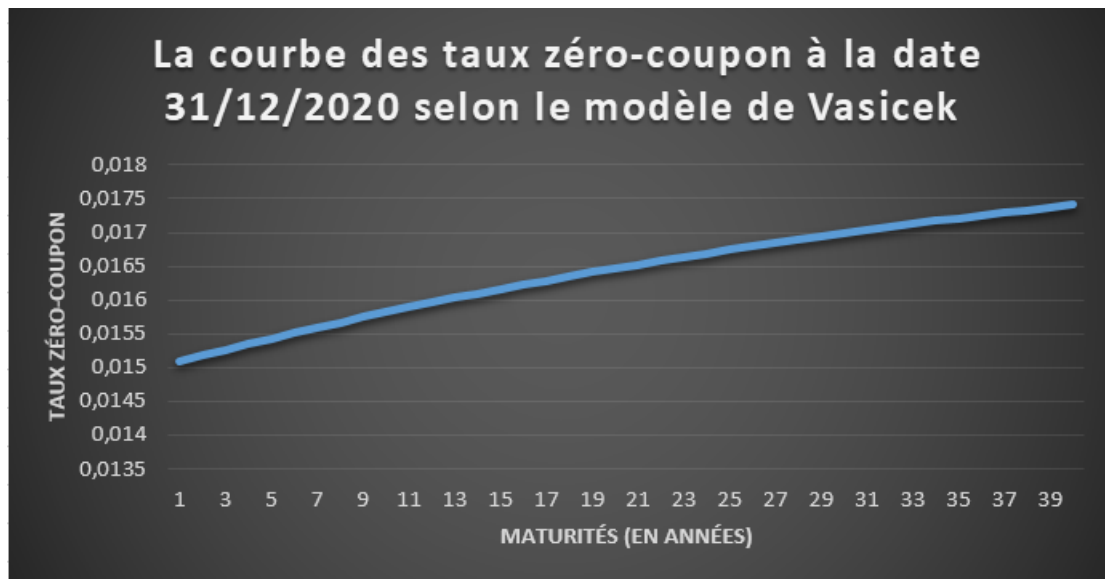


FIGURE 14 – La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 générée par le modèle de Vasicek

3) Le modèle de Smith-Wilson

On a vu dans la partie théorique que c'est la méthode utilisée par l'EIOPA (L'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles), et qu'elle nécessite plusieurs calculs qui sont très délicates. Donc on va se contenter d'afficher directement la courbe des taux zéro-coupon générée par cette méthode :

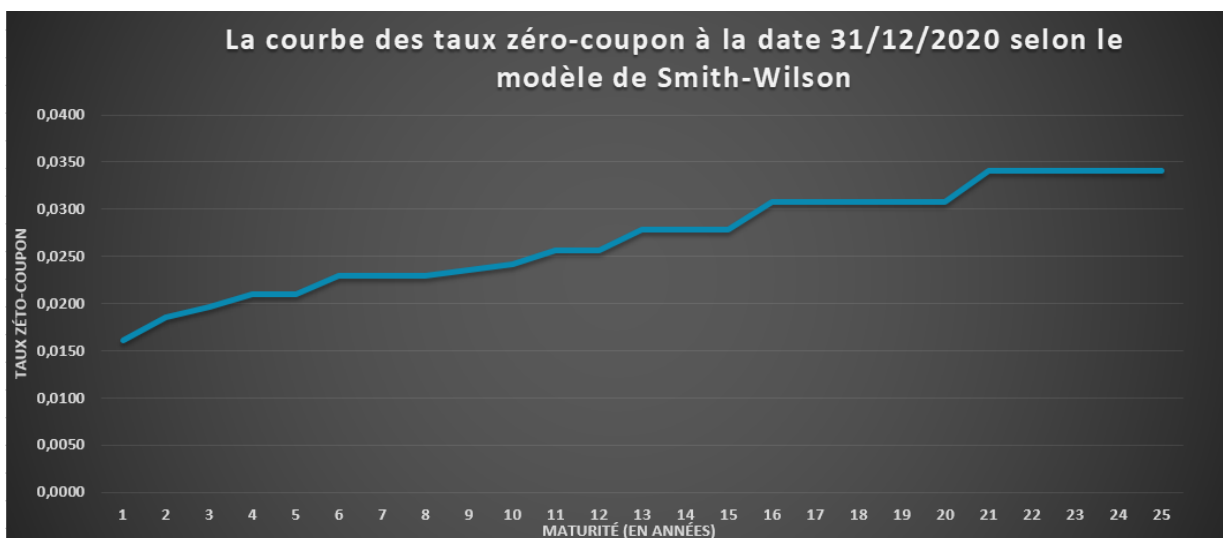


FIGURE 15 – La courbe des taux zéro-coupon à la date 31/12/2020 générée par le modèle de Smith-Wilson

Tous ces modèles ou méthodes qu'on vient d'aborder sont assez robustes. Mais vu que la SCR travaille avec la courbe de l'EIOPA. On va retenir donc la méthode de Smith-Wilson pour l'utiliser dans ce qui suit.

2 - Calcul des provisions pour sinistres à payer (PSAP)

Puisqu'on va travailler sur plusieurs segments, on va essayer d'explicitier tout le processus parcouru pratiquement pour l'estimation de la provision finale à retenir selon les différentes méthodes qu'on a abordé pour un seul segment. Pour les autres segments, on se contentera juste de l'affichage des résultats finaux.

Le segment sur lequel on va travailler est celui du "MT : Maritime et Transport". On présente le triangle des règlements cumulés associé à ce segment :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 268 221	3 101 694	3 985 640	4 529 819	5 110 178	5 358 204	5 368 921	5 379 658	5 379 658	5 379 658	5 390 418
2011	1 150 971	4 644 163	4 653 452	11 001 244	11 167 167	11 383 493	11 418 360	11 501 117	11 501 475	11 574 610	
2012	1 070 425	3 758 240	4 591 189	4 727 663	4 743 401	4 746 306	4 746 914	4 748 235	4 775 348		
2013	359 169	902 454	1 311 331	1 349 318	1 378 846	1 379 439	1 379 439	1 392 132			
2014	485 585	1 942 738	2 424 510	2 429 359	2 431 789	2 433 603	2 476 295				
2015	343 489	787 049	801 224	839 442	839 442	875 641					
2016	302 577	346 510	347 578	347 585	377 541						
2017	183 725	231 888	238 467	253 248							
2018	124 355	191 954	241 260								
2019	39 709	109 363									
2020	343 618										

FIGURE 16 – Triangle des règlements cumulés pour le segment "Maritime et Transport"

2.1 - Les méthodes déterministes

1) Chain Ladder

Avant le calcul des coefficients Chain Ladder, on va d'abord vérifier les hypothèses de cette méthode.

- **Vérification des hypothèses**

« Première hypothèse »

La première hypothèse consiste à vérifier si les années de survenance sont indépendantes entre elles au niveau de l'évolution des sinistres payés pour deux années de développement successives. Autrement dit, elle cherche à tester si l'évolution des sinistres payés cumulés entre deux années de développement successives est quasiment stable pour toutes les années de survenance.

Pour pouvoir traduire cet aspect en pratique. On va exhiber premièrement la matrice des coefficients de développement individuels $(f_{i,j})_{i=2011,\dots,2019; j=1,\dots,10}$ où $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	2,446	1,285	1,137	1,128	1,049	1,002	1,002	1,000	1,000	1,002	
2011	4,035	1,002	2,364	1,015	1,019	1,003	1,007	1,000	1,006		
2012	3,511	1,222	1,030	1,003	1,001	1,000	1,000	1,006			
2013	2,513	1,453	1,029	1,022	1,000	1,000	1,009				
2014	4,001	1,248	1,002	1,001	1,001	1,018					
2015	2,291	1,018	1,048	1,000	1,043						
2016	1,145	1,003	1,000	1,086							
2017	1,262	1,028	1,062								
2018	1,544	1,257									
2019	2,754										
2020											

FIGURE 17 – Triangle des coefficients de développement individuels des sinistres payés

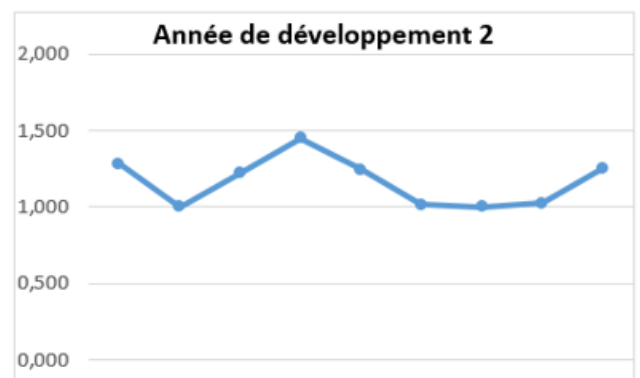
A ce point là ,on peut analyser cette hypothèse en utilisant l'une des deux approches suivantes :

- Dans la matrice des coefficients de développement individuels,on remarque pour chaque colonne , s'il y'a des anomalies ou des points assez aberrants par rapport aux autres.Par instance des valeurs assez gigantesques ou même des valeurs qui sont inférieures à 1 .Au cas où on les trouve,on doit les ajuster par une méthode d'ajustement.Apparemment,il y'a plusieurs moyens pour ajuster les valeurs irrégulières .Les deux qui sont les plus utilisés sont :

* La méthode qui consiste à les remplacer tout simplement par la moyenne des coefficients de développement de cette colonne(année de développement) sans tenir compte de ce point (ou ces points) atypique.

* Utiliser une matrice d'ajustement contenant des 1 et 0 qui est destinée à éliminer les valeurs atypiques tout en leur affectant des zéros pour qu'elles ne soient pas prises en considération dans le calcul des coefficients de développement.

- On va tracer des graphes qui représentent l'évolution des coefficients de développement individuels en fonction des années de survenance et ceci pour chaque année de développement et essayer de détecter à partir du graphe s'il y'a une fluctuation ou une instabilité assez flagrante au niveau des coefficients représentés.



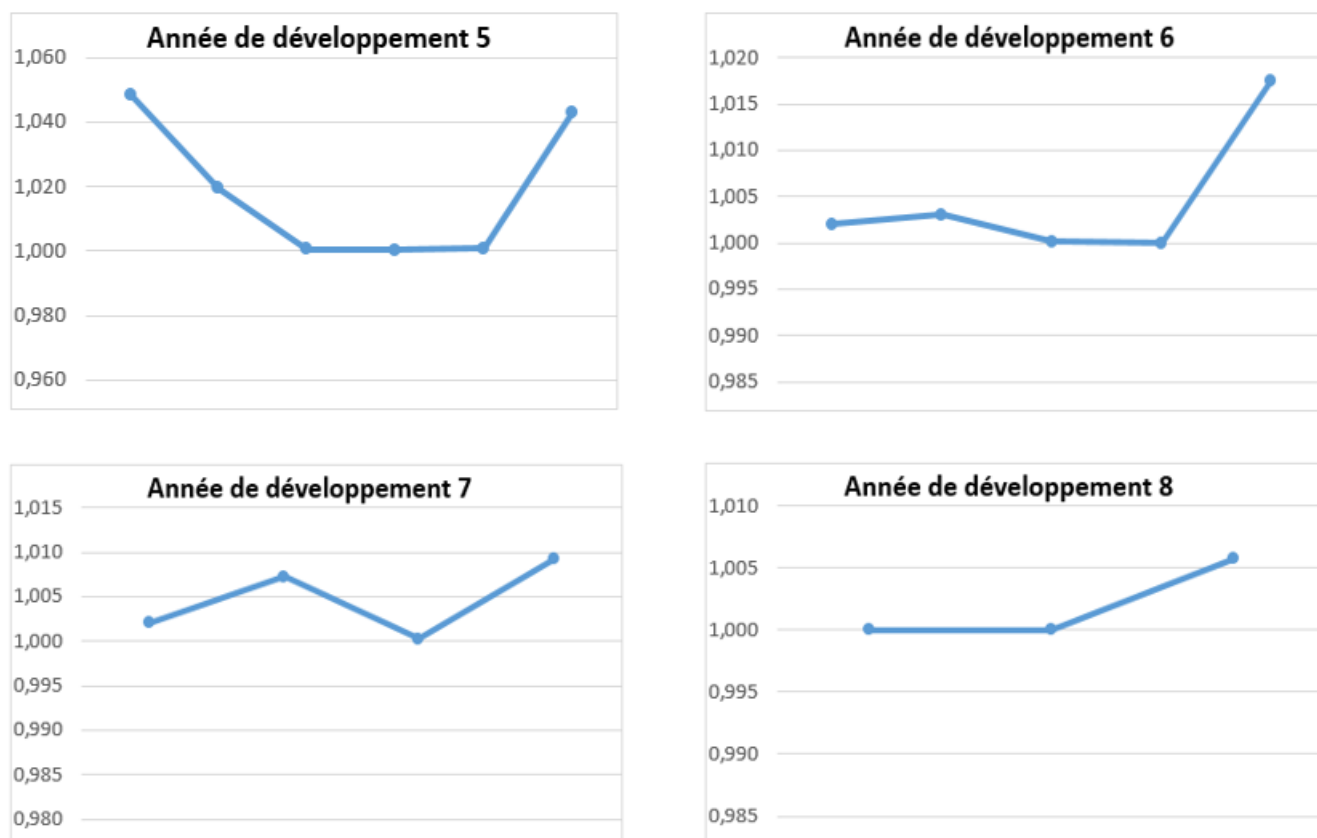


FIGURE 18 – Validation de la première hypothèse de Chain Ladder : L'indépendance entre les années de survenance

Pour les années de développement 2,4,5,6,7 et 8. On remarque que l'évolution des coefficients est assez stable. Et que la fluctuation se fait dans le plus pire des cas entre 1 et 1,5 dans l'année de développement 2 et ne dépasse même pas 1.15 pour les autres années de développement.

Pour l'année de développement 3, on remarque qu'il y a un seul point qui est assez atypique, c'est le deuxième coefficient de développement individuel. De même pour la première année de développement où il y a plusieurs points atypiques. Dans ce cas on fait un petit ajustement comme on a mentionné dans la première approche.

« Deuxième hypothèse »

La deuxième hypothèse vise à effectuer une régression linéaire entre les sinistres payés cumulés associés à deux années de développement consécutives. La valeur expliquée dans ce cas est la sinistralité cumulée de l'année de développement $j+1$ alors que la valeur explicative est le règlement cumulé de l'année de développement j

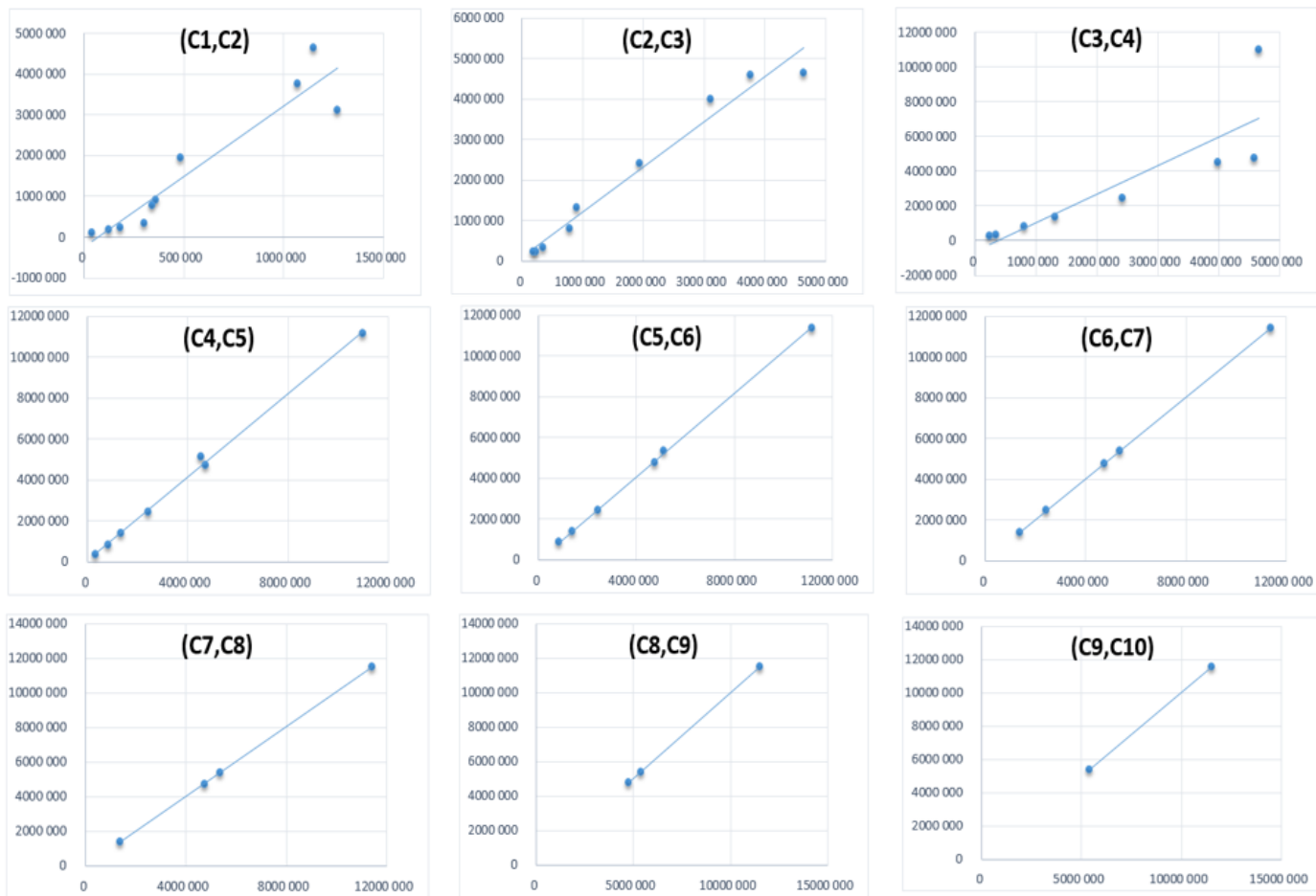


FIGURE 19 – Validation de la deuxième hypothèse de Chain Ladder

D’après les graphes générés par le test de cette hypothèse, on remarque que pour tout couple d’années de développement, les points sont bien concentrés autour de la droite de la régression linéaire passant par l’origine. On peut donc accepter que la deuxième hypothèse est vérifiée.

- **Calcul des coefficients Chain Ladder**

Après avoir validé les deux hypothèses, on passe au calcul des coefficients de Chain Ladder

Années de développement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coefficients Chain Ladder	3.005888	1.168983	1.388173	1.032664	1.019706	1.003513	1.004692	1.001270	1.004332	1.002000

Tableau 11 : Les coefficients de Chain Ladder

- **Développement du triangle des sinistres payés cumulés**

On utilise par suite ces coefficients pour le remplissage du triangle inférieur

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 268 221	3 101 694	3 985 640	4 529 819	5 110 178	5 358 204	5 368 921	5 379 658	5 379 658	5 379 658	5 390 418
2011	1 150 971	4 644 163	4 653 452	11 001 244	11 167 167	11 383 493	11 418 360	11 501 117	11 501 475	11 574 610	11 597 760
2012	1 070 425	3 758 240	4 591 189	4 727 663	4 743 401	4 746 306	4 746 914	4 748 235	4 775 348	4 796 037	4 805 629
2013	359 169	902 454	1 311 331	1 349 318	1 378 846	1 379 439	1 379 439	1 392 132	1 393 900	1 399 939	1 402 739
2014	485 585	1 942 738	2 424 510	2 429 359	2 431 789	2 433 603	2 476 295	2 487 914	2 491 074	2 501 866	2 506 870
2015	343 489	787 049	801 224	839 442	839 442	875 641	878 717	882 840	883 962	887 791	889 567
2016	302 577	346 510	347 578	347 585	377 541	384 981	386 334	388 146	388 639	390 323	391 104
2017	183 725	231 888	238 467	253 248	261 520	266 673	267 610	268 866	269 207	270 373	270 914
2018	124 355	191 954	241 260	334 910	345 850	352 665	353 904	355 565	356 016	357 559	358 274
2019	39 709	109 363	127 844	177 469	183 266	186 877	187 534	188 414	188 653	189 470	189 849
2020	343 618	1 032 878	1 207 417	1 676 103	1 730 851	1 764 959	1 771 159	1 779 470	1 781 730	1 789 449	1 793 028

Tableau 12 : Triangle des sinistres payés rempli

On calcule donc les réserves IBNR ou PSAP pour chaque année de survenance i :

$$R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-(i-2010)}$$

Années de survenance	Sinistre Ultime CL	Réserve Chain Ladder
2010	5 390 418	0
2011	11 597 760	23 149
2012	4 805 629	30 281
2013	1 402 739	10 607
2014	2 506 870	30 575
2015	889 567	13 926
2016	391 104	13 562
2017	270 914	17 667
2018	358 274	117 014
2019	189 849	80 486
2020	1 793 028	1 449 409

Tableau 13 : Les sinistres ultimes et les réserves Chain Ladder par année de survenance

Donc, la réserve du segment "Maritime et Transport" selon la méthode de Chain Ladder est : 1 786 675 DHS .

On appliquera la même procédure pour les autres segments. On affichera directement les résultats obtenus :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 786 675	7 121 512	4 081 998

Tableau 14 : Les réserves Chain Ladder obtenues pour les différents segments du portefeuille

2) La méthode de De Vylder

On a mentionné dans la partie théorique que cette méthode se base sur la calibration de la formule $Y_{i,j} = a_i \cdot b_j$ pour le triangle des règlements décumulés.

Donc l'objectif de cette méthode est d'estimer les paramètres a_i et b_j pour tout $i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, n$ avec $n=11$ dans notre cas .

Vu que les paramètres a_i et b_j sont interdépendants .Les estimer directement est clairement inextricable. D'où la raison pour laquelle on procède à une estimation

itérative .

On initialise les paramètres :

$$b_j^{(0)} = \frac{1}{n} \text{ pour tout } j=1,\dots,n$$

et $a_i^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{i,k} b_k^{(0)}}{\sum_{k=1}^n (b_k^{(0)})^2}$ pour tout $i=1,\dots,n$

Les paramètres sont estimés à la p ème itération avec la formule suivante :

$$b_j^{(p)} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{k,j} a_k^{(p-1)}}{\sum_{k=1}^n (a_k^{(p-1)})^2}$$

et $a_i^{(p)} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{i,k} \cdot b_k^{(p)}}{\sum_{k=1}^n (b_k^{(p)})^2}$

On s'arrête à l'itération où on peut remarquer que les paramètres estimés convergent. C'est à dire lorsque l'on peut constater que la somme des carrés des différences des paramètres estimés de deux itérations consécutives est inférieur à une valeur qui est très faible (l'ordre de 10^{-8} par exemple).

Après avoir appliqué ce processus en le programmant sur VBA, on s'est arrêté à la 12 ème itération puisqu'elle était le point à partir duquel les paramètres estimés convergent :

On trouve les résultats suivants :

\hat{a}_i	3 860 853	14 930 242	4 086 389	943 715	2 065 620	761 865	195 624	168 106	365 761	260 198	3 173 981
\hat{b}_j	0,1083	0,2846	0,0321	0,3746	0,0185	0,0163	0,0025	0,0051	0,0005	0,0046	0,0028

Tableau 15 : L'estimation des coefficients de De Vylder

Années de survenance	Réserve De Vylder
2010	0
2011	41 607
2012	30 150
2013	7 394
2014	26 652
2015	11 745
2016	6 196
2017	8 438
2018	155 365
2019	118 883
2020	2 353 387

Tableau 16 : Les réserves générées par la méthode de De Vylder par année de survenance

Donc la PSAP totale du segment "Maritime et Transport" selon cette méthode est 2 759 816 DHS.

En parcourant les mêmes étapes décrites au dessus, on retiendra les résultats suivants pour les autres segments.

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	2 759 816	8 038 124	3 833 456

Tableau 17 : Les réserves De Vylder obtenues pour les différents segments du portefeuille

3) Bornhuetter Ferguson

Comme on a vu dans la partie théorique de cette méthode, la sinistralité ultime cumulée de chaque année de survenance i s'écrit :

$$\hat{C}_i^{BF} = C_{i,n+1-i} + (1 - \hat{z}_i) \cdot \hat{U}_i$$

avec

$$\hat{z}_i = \frac{1}{\prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k} = \frac{C_{i,n+1-i}}{C_{i,n+1-i} \prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k} = \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{C}_{i,n}}$$

et $\hat{U}_i = (S/P)_{retenu} \cdot \hat{P}_i$

Avant d'entamer le calcul, on doit d'abord vérifier l'hypothèse de la méthode Bornhuetter Ferguson .

L'hypothèse fondamentale de cette méthode repose sur l'indépendance entre la provision à constituer et le dernier montant connu des règlements. Pour valider cette hypothèse, il suffit de vérifier si le rapport $\frac{PSAP_i}{C_{i,n+1-i}}$ reste assez stable par année de survenance.

Année de survenance	Dernier règlement cumulé C (i, n+1-i)	Charge Ultime	PSAP _i	PSAP _i /C(i,n+1-i)
2010	5 390 417,695	5 390 417,695	0,000	0,000
2011	11 574 610,275	11 597 759,500	23 149,225	0,002
2012	4 775 348,135	4 805 628,700	30 280,565	0,006
2013	1 392 132,207	1 402 739,100	10 606,893	0,008
2014	2 476 295,183	2 506 869,700	30 574,517	0,012
2015	875 641,269	889 566,800	13 925,531	0,016
2016	377 541,481	391 103,700	13 562,219	0,036
2017	253 247,575	270 914,100	17 666,525	0,070
2018	241 259,806	358 273,600	117 013,794	0,485
2019	109 362,969	189 849,000	80 486,031	0,736
2020	343 618,135	1 793 027,600	1 449 409,465	4,218

Tableau 18 : Les ratios $\frac{PSAP_i}{C_{i,n+1-i}}$ par année de survenance

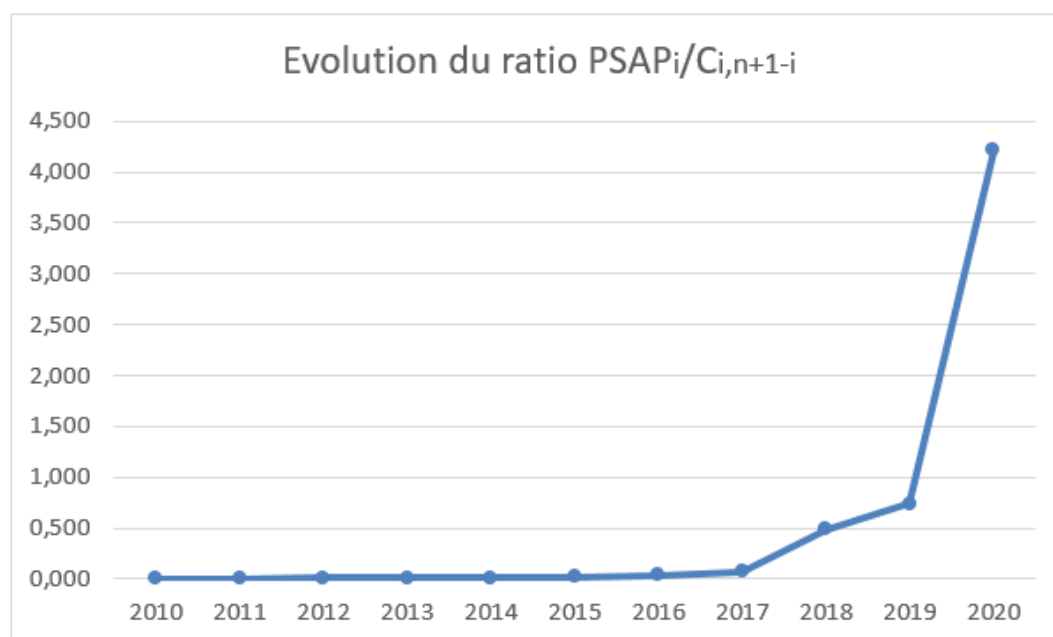


FIGURE 20 – Vérification de l'hypothèse de la méthode Bornhuetter Ferguson

On peut remarquer que le ratio $\frac{PSAP_i}{C_{i,n+1-i}}$ est presque stable sauf pour la dernière année de survenance. Donc on peut supposer que l'hypothèse de validation de la méthode Bornhuetter Ferguson est vérifiée.

Première étape : développement du triangle des primes et estimation du $(S/P)_{retenu}$

On présente le triangle des primes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	14 434 951	16 645 226	16 661 871	16 695 195	16 696 086	16 713 617	16 731 509	16 731 509	16 731 509	16 731 509	16 731 509
2011	14 005 345	15 389 038	15 395 194	15 528 628	15 572 690	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972
2012	15 308 536	17 831 906	18 725 440	18 737 245	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394
2013	6 088 387	7 678 647	7 680 648	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329
2014	7 402 077	8 453 017	8 610 379	8 610 379	8 610 379	8 610 379	8 612 982				
2015	6 801 916	8 098 944	8 123 241	8 126 490	8 126 490	8 127 015					
2016	4 874 186	4 886 741	4 892 606	4 892 606	4 895 844						
2017	3 514 160	3 608 992	3 621 658	3 632 523							
2018	3 777 185	3 840 519	3 880 712								
2019	1 208 904	1 371 128									
2020	5 619 156										

Tableau 19 : Le triangle des primes associé au segment "Maritime et Transport"

Après avoir validé les hypothèses de Chain Ladder, on calcule les coefficients de développement puis on remplit le triangle inférieur pour extraire les primes ultimes qu'on va utiliser pour l'estimation du S/P.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	14 434 951	16 645 226	16 661 871	16 695 195	16 696 086	16 713 617	16 731 509	16 731 509	16 731 509	16 731 509	16 731 509
2011	14 005 345	15 389 038	15 395 194	15 528 628	15 572 690	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972	15 578 972
2012	15 308 536	17 831 906	18 725 440	18 737 245	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394	18 742 394
2013	6 088 387	7 678 647	7 680 648	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329	7 689 329
2014	7 402 077	8 453 017	8 610 379	8 610 379	8 610 379	8 610 379	8 612 982	8 612 982	8 612 982	8 612 982	8 612 982
2015	6 801 916	8 098 944	8 123 241	8 126 490	8 126 490	8 127 015	8 129 488	8 129 488	8 129 488	8 129 488	8 129 488
2016	4 874 186	4 886 741	4 892 606	4 892 606	4 895 844	4 897 423	4 898 914	4 898 914	4 898 914	4 898 914	4 898 914
2017	3 514 160	3 608 992	3 621 658	3 632 523	3 634 936	3 636 109	3 637 216	3 637 216	3 637 216	3 637 216	3 637 216
2018	3 777 185	3 840 519	3 880 712	3 890 046	3 892 631	3 893 887	3 895 072	3 895 072	3 895 072	3 895 072	3 895 072
2019	1 208 904	1 371 128	1 389 510	1 392 852	1 393 777	1 394 227	1 394 651	1 394 651	1 394 651	1 394 651	1 394 651
2020	5 619 156	6 373 198	6 458 637	6 474 173	6 478 475	6 480 565	6 482 537	6 482 537	6 482 537	6 482 537	6 482 537

Tableau 20 : Triangle des primes rempli

Années de survenance	Primes ultimes	Sinistres ultimes	Ratio S/P
2010	16 731 509	5 390 418	32,22%
2011	15 578 972	11 597 760	74,44%
2012	18 742 394	4 805 629	25,64%
2013	7 689 329	1 402 739	18,24%
2014	8 612 982	2 506 870	29,11%
2015	8 129 488	889 567	10,94%
2016	4 898 914	391 104	7,98%
2017	3 637 216	270 914	7,45%
2018	3 895 072	358 274	9,20%
2019	1 394 651	189 849	13,61%
2020	6 482 537	1 793 028	27,66%

Tableau 21 : Les ratios S/P par année de survenance

On va prendre la moyenne des S/P calculés .On déduit donc que :

$$(S/P)_{retenu} = 23,32\%$$

On obtient finalement la sinistralité ultime par année de survenance ainsi que la réserve à constituer selon la méthode de Bornhuetter Ferguson :

$$\hat{C}_i^{BF} = C_{i,n+1-i} + (1 - \hat{z}_i) \cdot \hat{U}_i = C_{i,n+1-i} + (1 - \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{C}_{i,n}}) \cdot (S/P)_{retenu} \cdot P_i$$

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{C}_i^{BF} - C_{i,n+1-i} = (1 - \hat{z}_i) \hat{U}_i$$

Années de survenance	Sinistre Ultime BF	Réserve BF
2010	5 390 418	0
2011	11 581 861	7 251
2012	4 802 886	27 538
2013	1 405 690	13 558
2014	2 500 790	24 494
2015	905 316	29 674
2016	417 153	39 612
2017	308 554	55 306
2018	537 896	296 637
2019	247 231	137 868
2020	1 565 519	1 221 901

Tableau 22 : Les réserves générées par la méthode de Bornhuetter Ferguson par année de survenance.

Donc la provision totale de la branche "Maritime et Transport" obtenue par la méthode de Bornhuetter Ferguson est : 1 853 839 DHS .

En poursuivant le même processus, on calculera la provision totale pour les autres segments .Ci dessous, on présente les résultats obtenus.

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 853 839	6 424 278	3 379 497

Tableau 23 : Les réserves de Bornhuetter Ferguson obtenues pour les différents segments du portefeuille

4) la méthode Benktander

D'après ce qu'on a explicité dans la partie théorique, la réserve selon la méthode Bornhuetter Ferguson est une combinaison linéaire des deux PSAP obtenues par les deux méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson.

$$\hat{R}_i^B = \hat{z}_i \cdot \hat{R}_i^{CL} + (1 - \hat{z}_i) \cdot \hat{R}_i^{BF}$$

$$\hat{R}_i^B = \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{C}_{i,n}} \cdot \hat{R}_i^{CL} + (1 - \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{C}_{i,n}}) \cdot \hat{R}_i^{BF}$$

On déduit donc facilement la PSAP selon la méthode de Benktander pour chaque année de survenance :

Années de survenance	Réserve CL	Réserve BF	Réserve Benktander
2010	0	0	0
2011	23 149	7 251	23 117
2012	30 281	27 538	30 263
2013	10 607	13 558	10 629
2014	30 575	24 494	30 500
2015	13 926	29 674	14 172
2016	13 562	39 612	14 466
2017	17 667	55 306	20 121
2018	117 014	296 637	175 679
2019	80 486	137 868	104 813
2020	1 449 409	1 221 901	1 265 501

Tableau 24 : Les réserves obtenues par la méthode de Benktander par année de survenance

Donc la réserve totale à constituer selon la méthode Benktander est 1 689 263

En appliquant la même méthodologie sur les autres segments, on trouve les résultats suivants :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 689 263	6 164 779	3 447 346

Tableau 25 : Les réserves de Benktander obtenues pour les différents segments du portefeuille

On présentera ci dessous un récapitulatif de la provision pour sinistres à payer (PSAP)(ou IBNR) obtenue par toutes les méthodes déterministes qu'on vient d'appliquer et ceci pour chaque segment.

Branche d'assurance		Maritime et Transport	Engineering	Incendie
Méthode de provisionnement	Chain Ladder	1 786 675	7 121 512	4 081 998
	De Vylder	2 759 816	8 038 124	3 833 456
	Bornhuetter Fergusson	1 853 839	6 424 278	3 379 497
	Benktander	1 689 263	6 164 779	3 447 346

Tableau 26 : Le récapitulatif des provisions constituées par segment selon les différentes méthodes de provisionnement

En général ,les résultats générés par les méthodes déterministes sont très proches sauf pour De Vylder qui diverge un peu d'eux surtout au niveau du segment "Maritime et Transport".

On peut remarquer aussi que la méthode Benktander affiche dans la plupart des segments la plus petite provision.

En général,les méthodes déterministes permettent seulement le développement du triangle de liquidation et l'estimation de la provision .Par contre,elles ne permettent pas de quantifier les erreurs de prédiction,ce qui peut mener l'actuaire à se confronter parfois à des problèmes de surestimation exagérée de la provision à constituer,puisque'il ne faut pas toujours opter vers la méthode qui fournit la provision la plus grande comme raison de précaution.

D'où l'importance de recourir à des méthodes stochastiques qui permettent d'évaluer les erreurs de prédiction des provisions estimées.

2.2 - Les méthodes stochastiques

1) La méthode de Mack

Comme a été mentionné précédemment,la méthode de Mack représente la version stochastique de la méthode Chain Ladder.C'est à dire,elle permet de générer la même estimation de la PSAP que la méthode Chain Ladder.Mais ce qui la caractérise le plus,c'est qu'elle permet d'estimer l'erreur de prédiction des provisions à l'ultime.

Validation des hypothèses

Pour les deux premières hypothèses (H1) et (H2),elles sont déjà validées dans la

partie pratique dédiée à la méthode Chain Ladder.

En ce qui concerne la troisième hypothèse (H3), à titre de rappel :

H3 : Il existe σ_j tel que $Var(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$.

Afin de la vérifier, on va faire usage de ce qu'on appelle les résidus normalisés ou bien résidus de Pearson $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$ avec $j=1, \dots, n-1$ et $i=1, \dots, n+1-j$. On va représenter par suite le nuage de points $(C_{i,j}, r_{i,j})$ pour chaque année de développement et constater si la représentation graphique obtenue ne révèle aucune structure ou tendance particulière.

On présentera ci-dessous les graphes générés

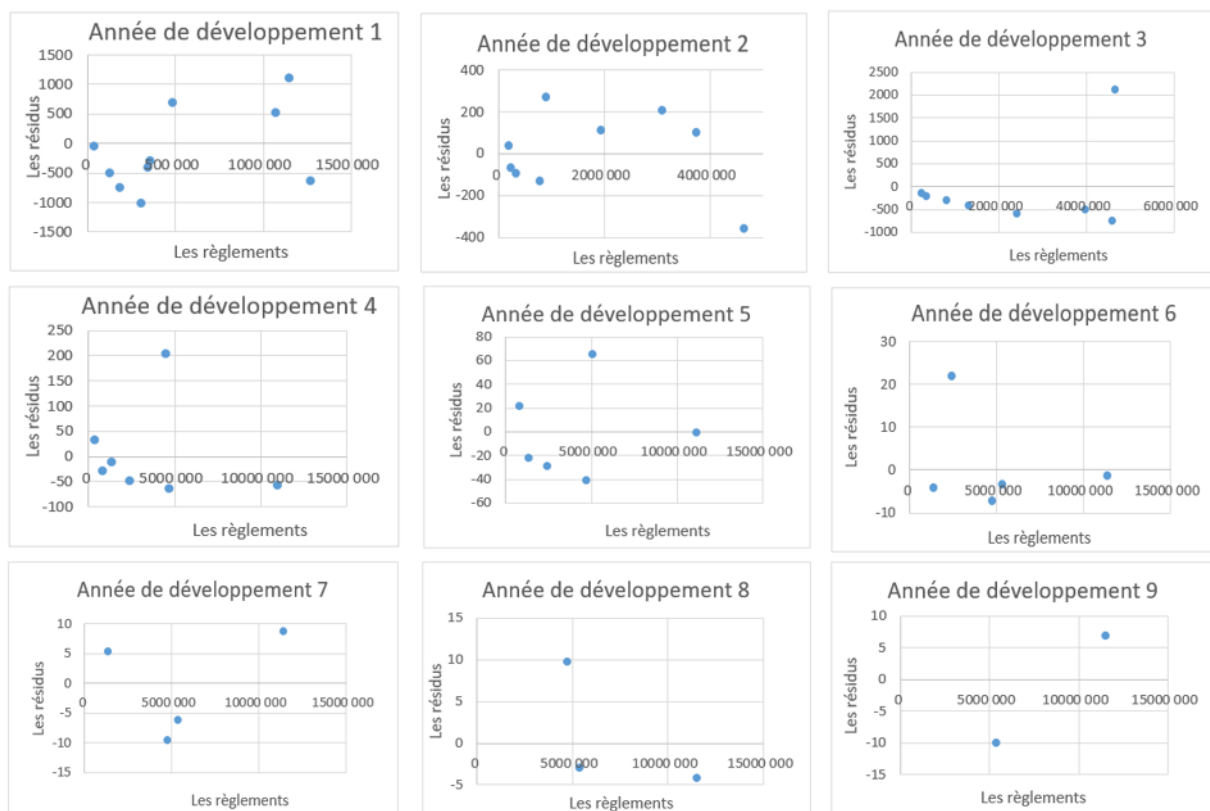


FIGURE 21 – Validation de la troisième hypothèse de la méthode de Mack

Comme on peut le remarquer, tous ces nuages de points ne manifestent aucune structure ou tendance spécifique. Par conséquent, on peut stipuler que la troisième hypothèse est vérifiée.

Résultats

Puisque la méthode de Mack repose sur la méthode déterministe Chain Ladder, on obtient les mêmes provisions et coefficients de développement générés par Chain Ladder. En l'occurrence, elle nous permet d'estimer les erreurs quadratiques moyennes MSEP. Et vu que ces dernières nécessitent l'estimation des écarts type ou volatilités du triangle de règlements σ , on va premièrement présenter les écarts type estimés.

Coefficients σ^2	500 900,03	37 519,42	853 685,94	8 871,27	1 564,93	141,25	78,00	59,97	148,20	6,08
-------------------------	------------	-----------	------------	----------	----------	--------	-------	-------	--------	------

On déduit finalement les erreurs quadratiques moyennes MSEP, les erreurs standard de prédiction SEP et les erreurs quadratiques relatives SER des estimations des provisions et ceci pour chaque année de survenance.

$$S\hat{E}P(\hat{R}_i) = \sqrt{M\hat{S}EP(\hat{R}_i)};$$

$$S\hat{E}R(\hat{R}_i) = \frac{S\hat{E}P(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}$$

On présente les résultats dans le tableau suivant :

Années de survenance	Réserve Mack (Chain Ladder)	MSEP	SEP	SER
2010	0	0	0	0
2011	23 149	221 652 544	14 888	0,6431
2012	30 281	966 650 281	31 091	1,0267
2013	10 607	325 225 156	18 034	1,7002
2014	30 575	833 419 161	28 869	0,9442
2015	13 926	403 889 409	20 097	1,4431
2016	13 562	792 141 025	28 145	2,0753
2017	17 667	2 981 269 201	54 601	3,0906
2018	117 014	2,43E+11	492 698	4,2106
2019	80 486	1,37E+11	370 081	4,5981
2020	1 449 409	1,92E+12	1 386 065	0,9563

Tableau 27 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack par année de survenance

La PSAP totale est 1 786 675 DHS

La SEP totale est 1 537 069 DHS

La SER totale est 0.8603

En suivant toutes ces phases qu'on vient d'éclaircir pour le segment "Maritime et Transport", on déterminera les PSAP et les SEP totales ainsi que les SER totales des autres segments :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 786 675	7 121 512	4 081 998
SEP	1 537 069	4 060 695	3 160 283
SER	0,8603	0,5702	0.77

Tableau 28 : Les réserves de Mack obtenues pour les différents segments du portefeuille

2) La méthode du Bootstrap

On a vu dans la partie théorique liée à cette méthode qu'elle nécessite énormément de calculs qui vont être simulés D fois (D=10 000, 20 000, ...)

Pour notre cas, on a choisi D=10 000 simulations. En implémentant cette méthode sur R on obtient les résultats suivants :

Années de survenance	Sinistre Ultime Bootstrap	Réserve Bootstrap	MSEP	SEP	SER
2010	5 390 418	0	0	0	0
2011	11 602 671	28 061	4,57E+10	213 819	7,620
2012	4 808 230	32 881	2,81E+10	167 500	5,094
2013	1 402 841	10 708	8,40E+09	91 665	8,560
2014	2 509 534	33 239	2,16E+10	147 099	4,425
2015	891 781	16 140	1,00E+10	100 030	6,198
2016	390 650	13 109	7,08E+09	84 139	6,418
2017	273 566	20 318	9,92E+09	99 604	4,902
2018	367 253	125 993	7,11E+10	266 621	2,116
2019	192 322	82 959	5,94E+10	243 715	2,938
2020	1 899 234	1 555 616	5,94E+10	1 770 908	1,138

Tableau 29 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap pour le segment "Maritime et Transport" par année de survenance

La réserve totale du segment "Maritime et Transport" selon la méthode de Bootstrap est 1 919 025 DHS

L'erreur standard de prédiction est 1 861 611 DHS

L'erreur quadratique relative est 0,9701

L'application de cette méthode sur les autres segments aboutit aux résultats suivants :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 919 025	8 415 386	4 173 567
SEP	1 861 611	15 515 248	1 990 727
SER	0,9701	1,8437	2,0965

Tableau 30 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap pour tous les segments du portefeuille

3) La méthode de GLM (Modèles Linéaires Généralisés)

Contrairement aux méthodes précédentes, la méthode de GLM tout comme la méthode déterministe De Vylder se base sur le triangle de liquidation décumulé et non pas celui qui est cumulé. Elle suppose que la variable à expliquer, qui est dans ce cas les règlements payés $Y_{i,j}$, appartient à la famille des lois exponentielles (par exemple, log normal, gamma, poisson surdispersé ...) et que les variables explicatives sont l'année de survenance i et l'année de développement j .

On va se contenter juste du cas où les incréments (règlement payés) $Y_{i,j}$ suivent une loi de poisson surdispersé.

Une caractéristique commune entre cette méthode et celle de Mack est qu'elle fournit aussi les mêmes provisions et coefficients de développement que la méthode de Chain Ladder.

D'abord, on procède à l'estimation du modèle GLM de loi poisson surdispersée :

```

call:
glm(formula = y ~ as.factor(lig) + as.factor(col), family = quasipoisson,
     data = base2)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1466.35  -257.32   -44.94   165.96  1658.28

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   13.8480    0.3240  42.742 < 2e-16 ***
as.factor(lig)2    0.6961    0.2955   2.356  0.02290 *
as.factor(lig)3   -0.6774    0.4170  -1.624  0.11128
as.factor(lig)4    0.3104    0.3197   0.971  0.33675
as.factor(lig)5   -1.8368    0.6600  -2.783  0.00784 **
as.factor(lig)6   -2.3100    0.8201  -2.817  0.00718 **
as.factor(lig)7   -4.0149    1.8847  -2.130  0.03865 *
as.factor(lig)8   -3.7220    1.7171  -2.168  0.03551 *
as.factor(lig)9   -5.0241    3.3708  -1.490  0.14308
as.factor(lig)10  -3.7958    2.0762  -1.828  0.07414 .
as.factor(lig)11  -4.5645    5.3814  -0.848  0.40082
as.factor(col)2    0.7662    0.2907   2.635  0.01149 *
as.factor(col)3   -0.1148    0.3504  -0.328  0.74466
as.factor(col)4   -1.3462    0.5299  -2.540  0.01459 *
as.factor(col)5   -0.7656    0.4281  -1.788  0.08043 .
as.factor(col)6   -1.8016    0.6422  -2.805  0.00740 **
as.factor(col)7   -2.6234    0.9383  -2.796  0.00758 **
as.factor(col)8   -2.9906    1.1333  -2.639  0.01139 *
as.factor(col)9   -2.7111    1.1619  -2.333  0.02416 *
as.factor(col)10  -3.3461    1.7044  -1.963  0.05581 .
as.factor(col)11  -1.1007    1.0042  -1.096  0.27887
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 310454.7)

Null deviance: 72448926 on 65 degrees of freedom
Residual deviance: 15065462 on 45 degrees of freedom
(55 observations deleted due to missingness)

```

FIGURE 22 – Estimation du modèle GLM avec loi poisson surdispersée

En utilisant ces paramètres qu'on vient d'estimer, on déduit les provisions.

On exhibe les résultats obtenus :

Années de survénance	Réserve ODP	MSEP	SEP	SER
2010	0	0	0	0
2011	23 149	2,27E+10	150 648	6,508
2012	30 281	1,40E+10	118 121	3,901
2013	10 607	3,74E+09	61 128	5,763
2014	30 575	1,13E+10	106 507	3,484
2015	13 926	4,64E+09	68 150	4,894
2016	13 562	4,45E+09	66 680	4,917
2017	17 667	5,94E+09	77 048	4,361
2018	117 014	5,47E+10	233 826	1,998
2019	80 486	4,37E+10	209 004	2,597
2020	1 449 409	2,50E+12	1 581 240	1,091

Tableau 31 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM (ODP) pour le segment "Maritime et Transport" par année de survénance

- * La réserve totale du segment "Maritime et Transport" est : 1 786 675 DHS
- * L'erreur standard de prédiction est : 1 655 531 DHS
- * L'erreur quadratique relative est : 0,9266

En réappliquant la méthode sur les autres segments, on fournit les résultats générés :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
PSAP	1 786 675	7 121 512	4 081 998
SEP	1 655 531	3 244 911	1 884 531
SER	0,9266	0.8639	0.4617

Tableau 32 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM avec loi poisson surdispersée (ODP) pour tous les segments du portefeuille

On présente tout comme on a fait pour les méthodes déterministes un récapitulatif de la provision obtenue par toutes les méthodes stochastiques qu'on vient d'effectuer ainsi que les erreurs quadratiques relatives qui leur sont associées, et ceci pour chaque segment.

Méthode utilisée \ Segment	Mack		GLM(Poisson surdispersé)		Bootstrap(Chain Ladder)	
	Provision	SER	Provision	SER	Provision	SER
Maritime et Transport	1 786 675	0,8603	1 786 675	0,9266	1 919 025	0,9701
Engineering	7 121 512	0,5702	7 121 512	0.8639	8 415 386	1,8437
Incendie	4 081 998	0.77	4 081 998	0.4617	4 173 567	2,0965

Tableau 33 : Un récapitulatif des provisions et des erreurs de prédiction par segment obtenues par les différentes méthodes stochastiques

Les observations qu'on peut tirer de ce récapitulatif sont les suivantes :

* La méthode Bootstrap (Chain Ladder) génère des résultats différents de Mack, caractérisés par des erreurs quadratiques relatives assez grandes par rapport aux deux autres méthodes. Ce qui était en quelques sortes prévu puisque parmi les raisons principales derrière la mise en place de la méthode de Bootstrap est le manque des informations, à la disposition de l'actuaire, illustré par des bases de données assez petites ou autrement des historiques de sinistralité très courts. Ça justifie en quelques parts pourquoi les deux autres méthodes ont affiché des erreurs moins élevées par rapport à la méthode Bootstrap puisqu'on dispose d'un historique de sinistres payés assez significatif.

* La méthode GLM (Poisson surdispersé) se caractérise par la particularité de générer des résultats identiques à ceux donnés par Mack, sauf que la chose qui les différencie est l'erreur quadratique relative SER (autrement l'erreur quadratique de prédiction SEP). Pour les deux segments "Maritime et Transport" et "Engineering", la méthode de Mack s'est avérée plus mieux que la méthode de poisson surdispersé puisqu'elle affiche des erreurs quadratiques relatives moins élevées. Alors que pour le segment "Incendie", la méthode optimale à choisir, c'est la méthode GLM (poisson surdispersé).

On a pu donc retenir que les méthodes les plus adaptées à notre portefeuille sont

la méthode de Mack et la méthode de poisson surdispersé .Et l'aspect commun entre ces deux méthodes est qu'elles permettent d'obtenir les mêmes provisions que la méthode déterministe Chain Ladder.Pour cette raison et surtout que le projet de circulaire de l'ACAPS préconise de l'utiliser,on va l'adopter dans l'axe suivant qui consiste à estimer le Best Estimate de notre portefeuille comme vision économique de la provision technique dans la nouvelle réforme SBR

3 - Estimation du Best Estimate selon les deux approches standard et interne

3.1 - La méthode standard

On prend le triangle de sinistres payés rempli par la méthode de Chain Ladder

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 268 221	3 101 694	3 985 640	4 529 819	5 110 178	5 358 204	5 368 921	5 379 658	5 379 658	5 379 658	5 390 418
2011	1 150 971	4 644 163	4 653 452	11 001 244	11 167 167	11 383 493	11 418 360	11 501 117	11 501 475	11 574 610	11 597 760
2012	1 070 425	3 758 240	4 591 189	4 727 663	4 743 401	4 746 306	4 746 914	4 748 235	4 775 348	4 796 037	4 805 629
2013	359 169	902 454	1 311 331	1 349 318	1 378 846	1 379 439	1 379 439	1 392 132	1 393 900	1 399 939	1 402 739
2014	485 585	1 942 738	2 424 510	2 429 359	2 431 789	2 433 603	2 476 295	2 487 914	2 491 074	2 501 866	2 506 870
2015	343 489	787 049	801 224	839 442	839 442	875 641	878 717	882 840	883 962	887 791	889 567
2016	302 577	346 510	347 578	347 585	377 541	384 981	386 334	388 146	388 639	390 323	391 104
2017	183 725	231 888	238 467	253 248	261 520	266 673	267 610	268 866	269 207	270 373	270 914
2018	124 355	191 954	241 260	334 910	345 850	352 665	353 904	355 565	356 016	357 559	358 274
2019	39 709	109 363	127 844	177 469	183 266	186 877	187 534	188 414	188 653	189 470	189 849
2020	343 618	1 032 878	1 207 417	1 676 103	1 730 851	1 764 959	1 771 159	1 779 470	1 781 730	1 789 449	1 793 028

FIGURE 23 – Le remplissage du triangle de sinistres payés cumulés par la méthode de Chain Ladder

Puis,on le décumule

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 268 221	1 833 472	883 946	544 179	580 359	248 026	10 716	10 738	0	0	10 759
2011	1 150 971	3 493 193	9 288	6 347 793	165 923	216 325	34 868	82 757	358	73 135	23 149
2012	1 070 425	2 687 815	832 949	136 474	15 738	2 905	608	1 321	27 113	20 688	9 592
2013	359 169	543 285	408 877	37 987	29 528	593	0	12 693	1 768	6 039	2 800
2014	485 585	1 457 153	481 772	4 849	2 429	1 815	42 692	11 619	3 160	10 792	5 004
2015	343 489	443 560	14 175	38 218	0	36 200	3 076	4 123	1 121	3 830	1 776
2016	302 577	43 933	1 068	7	29 957	7 440	1 353	1 813	493	1 684	781
2017	183 725	48 163	6 579	14 780	8 272	5 153	937	1 256	342	1 166	541
2018	124 355	67 600	49 305	93 650	10 940	6 815	1 239	1 661	452	1 542	715
2019	39 709	69 654	18 481	49 625	5 797	3 611	657	880	239	817	379
2020	343 618	689 260	174 539	468 686	54 748	34 108	6 200	8 310	2 260	7 719	3 579

FIGURE 24 – Le décumul du triangle de sinistres payés cumulés après développement par la méthode de Chain Ladder

Ensuite,on va essayer d'actualiser les cashflows futurs obtenus en utilisant la courbe des taux qu'on a déterminé précédemment (la courbe de Smith Wilson).

Les cashflows correspondent tout simplement à la somme des diagonales du triangle inférieur.

En effet,les cashflows de la première année de projection (qui est pour notre cas 2021) correspondent à la somme des valeurs de la première diagonale du triangle inférieur qu'on vient de remplir.Les cashflows de la deuxième année de projection

(2022) correspond à la deuxième diagonale et ainsi de suite jusqu'à la dernière année de projection qui est 2030.

Années de projection	Cashflows
2021	863 846
2022	264 523
2023	498 761
2024	70 181
2025	40 226
2026	9 479
2027	10 633
2028	3 793
2029	8 098
2030	3 579

Tableau 34 : Les cashflows obtenus par la méthode Chain Ladder par année de projection

On présente aussi les taux zéro-coupon générés par le modèle de Smith Wilson, dont on aura besoin pour actualiser les cashflows calculés.

Maturité	Taux zéro coupon
1	1,61%
2	1,85%
3	1,97%
4	2,10%
5	2,10%
6	2,30%
7	2,30%
8	2,30%
9	2,36%
10	2,42%

Tableau 35 : Les taux zéros-coupon extraits de la courbe des taux générée par le modèle de Smith Wilson

On obtient donc les cashflows actualisés :

Années de projection	Cashflows actualisés
2021	850 190
2022	254 982
2023	470 423
2024	64 594
2025	36 263
2026	8 272
2027	9 071
2028	3 163
2029	6 567
2030	2 817

Tableau 36 : Les cashflows actualisés

Finalement on déduit le best estimate en sommant les cashflows actualisés :
 $BE = 1\,706\,342$ DHS

On reprend la même procédure pour les autres segments.

Les Best Estimate obtenus pour chaque segment sont comme suit :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
Le best estimate	1 706 342	6 646 527	4 081 998

Tableau 37 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille

3.2 - L'approche interne utilisée par la SCR

Contrairement aux méthodes classiques qu'on vient de détailler, dont la plupart utilisent un seul triangle qui est le triangle des sinistres payés (seulement Bornhuetter Ferguson et Benktander qui utilisent deux triangles, celui des sinistres payés et celui des primes), l'approche interne possède la spécificité d'utiliser trois triangles pour estimer la provision technique ou bien le meilleur estimateur selon la nouvelle réglementation SBR :

- Le triangle des primes
- Le triangle des sinistres payés
- Le triangle des charges des sinistres

Rappel

L'application de cette approche va être exécutée sur des données didactiques, fictives qui ont un ordre de grandeur assez proche des données réelles et ceci pour des raisons de confidentialité. Mais le plus important qui est la procédure parcourue pour l'estimation du BE, elle va être explicitée en détails.

- **Vérification des hypothèses Chain Ladder**

On vérifie les hypothèses de la méthode de Chain Ladder pour les trois triangles.

- L'indépendance des années de survenance.
- L'existence des facteurs de développement λ_j de telle sorte que :
 $M_{i,j+1} = \lambda_j M_{i,j}$ avec M montant de la prime ou des sinistres payés ou des charges des sinistres.

Elles se vérifient de la même façon qu'on a vu dans la partie pratique associée à la méthode de Chain Ladder.

- **Calcul des coefficients de Chain Ladder**

On rappelle que les coefficients de développement pour les triangles des sinistres payés et des charges des sinistres se calculent en considérant juste le sous triangle allant de l'année de survenance 2010 à 2019 et de l'année de développement 1 à 10, c'est à dire sans prendre en compte la diagonale. Alors que pour le triangle des primes, ils se calculent de la manière classique de Chain Ladder, c'est à dire en

se basant sur tout le triangle sans réestimation de la diagonale.

On calcule les coefficients de développement pour les trois triangles :

-Triangle des primes

Coefficients de Developpement	1,134	1,014	1,002	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

-Triangle des charges des sinistres

Coefficients de Developpement	2,215	1,397	1,245	0,925	0,987	1,000	1,001	1,000	1,000	1,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

-Triangle des sinistres payés

Coefficients de Developpement	3,008	1,168	1,392	1,032	1,019	1,002	1,004	1,000	1,000	1,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

• Développement des triangles

On réestime les diagonales du triangle des sinistres payés et du triangle des charges des sinistres par la formule usuelle de Chain Ladder :

$$C_{i,j+1} = \lambda_{cs,j} C_{i,j} \text{ pour les charges des sinistres}$$

$$S_{i,j+1} = \lambda_{sp,j} S_{i,j} \text{ pour les sinistres payés}$$

On calcule les primes ultimes, sinistres ultimes et les charges ultimes pour déduire les S/P et les C/P.

	Sinistres Payés Ultimes	Primes Ultimes	S/P
31/12/2010	5 390 418	16 731 509	32,22%
31/12/2011	11 574 610	15 578 972	74,30%
31/12/2012	4 775 348	18 742 394	25,48%
31/12/2013	1 392 162	7 689 329	18,11%
31/12/2014	2 487 251	8 612 982	28,88%
31/12/2015	881 292	8 129 491	10,84%
31/12/2016	387 165	4 899 068	7,90%
31/12/2017	267 991	3 637 331	7,37%
31/12/2018	355 505	3 895 091	9,13%
31/12/2019	188 209	1 394 846	13,49%

FIGURE 25 – Les ratios S/P obtenus par année de survenance

	Charges de Sinistres Ultimes	Primes Ultimes	C/P
31/12/2010	6 019 440	16 731 509	35,98%
31/12/2011	14 774 208	15 578 972	94,83%
31/12/2012	7 595 665	18 742 394	40,53%
31/12/2013	1 876 506	7 689 329	24,40%
31/12/2014	2 471 942	8 612 982	28,70%
31/12/2015	833 446	8 129 491	10,25%
31/12/2016	317 465	4 899 068	6,48%
31/12/2017	271 219	3 637 331	7,46%
31/12/2018	305 093	3 895 091	7,83%
31/12/2019	139 787	1 394 846	10,02%

FIGURE 26 – Les ratios C/P obtenus par année de survenance

On déduit le $(\frac{S}{P})_{retenu}$ et le $(\frac{C}{P})_{retenu}$ en moyennant les $\frac{S}{P}$ et les $\frac{C}{P}$ qu'on vient de déterminer au dessus .

On obtient :

$$\begin{aligned} (\frac{S}{P})_{retenu} &= 23\% \\ (\frac{C}{P})_{retenu} &= 27\% \end{aligned}$$

On rappelle que selon la méthode interne de la SCR, les sinistres payés ainsi que les charges de sinistres correspondant à l'année de survenance 2020 et à la première année de développement sont réestimés selon la formule suivante :

Pour les charges de sinistres :

$$C_{2020,1} = (\frac{C}{P})_{retenu} \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{10} \lambda_{cs,i}}$$

Pour les sinistres payés :

$$S_{2020,1} = (\frac{S}{P})_{retenu} \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{10} \lambda_{sp,i}}$$

Donc puisqu'on a déjà calculé le $(\frac{S}{P})_{retenu}$ et le $(\frac{C}{P})_{retenu}$.On déduit facilement que :

$$C_{2020,1} = 454\,440$$

$$S_{2020,1} = 343\,618$$

Par conséquent, on peut finalement achever le développement des triangles des sinistres payés et des charges des sinistres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 633 187	3 872 486	5 298 715	5 751 696	6 322 375	6 362 696	6 156 898	6 031 571	6 020 151	6 019 440	6 019 440
2011	3 068 240	6 145 045	11 501 888	17 688 698	14 595 196	14 468 489	14 619 798	14 770 171	14 775 953	14 774 208	14 774 208
2012	3 093 344	6 961 273	7 521 696	8 188 773	7 895 690	7 542 143	7 594 133	7 598 622	7 596 563	7 595 665	7 595 665
2013	528 863	1 128 122	1 831 780	1 822 167	1 864 328	1 874 567	1 875 284	1 877 236	1 876 727	1 876 506	1 876 506
2014	507 552	2 014 946	2 489 031	2 461 162	2 468 496	2 470 478	2 470 333	2 472 904	2 472 234	2 471 942	2 471 942
2015	348 550	792 034	805 661	843 860	843 841	832 952	832 903	833 770	833 544	833 446	833 446
2016	302 577	346 510	347 578	347 585	321 424	317 277	317 258	317 588	317 502	317 465	317 465
2017	183 725	231 888	238 467	296 952	274 602	271 059	271 043	271 325	271 251	271 219	271 219
2018	124 355	191 954	268 250	334 039	308 898	304 912	304 894	305 211	305 129	305 093	305 093
2019	39 709	87 950	122 907	153 050	141 531	139 704	139 696	139 841	139 804	139 787	139 787
2020	454 440	1 006 517	1 406 576	1 751 541	1 619 713	1 598 812	1 598 718	1 600 382	1 599 949	1 599 760	1 599 760

FIGURE 27 – Développement du triangle des charges de sinistres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2010	1 268 221	3 101 694	3 985 640	4 529 819	5 110 178	5 358 204	5 368 921	5 379 658	5 379 658	5 379 658	5 390 418
2011	1 150 971	4 644 163	4 653 452	11 001 244	11 167 167	11 383 493	11 418 360	11 501 117	11 501 475	11 574 610	11 574 610
2012	1 070 425	3 758 240	4 591 189	4 727 663	4 743 401	4 746 306	4 746 914	4 748 235	4 775 348	4 775 348	4 775 348
2013	359 169	902 454	1 311 331	1 349 318	1 378 846	1 379 439	1 379 439	1 392 132	1 392 162	1 392 162	1 392 162
2014	485 585	1 942 738	2 424 510	2 429 359	2 431 789	2 433 603	2 476 295	2 487 198	2 487 251	2 487 251	2 487 251
2015	343 489	787 049	801 224	839 442	839 442	875 641	877 410	881 273	881 292	881 292	881 292
2016	302 577	346 510	347 578	347 585	377 541	384 682	385 459	387 157	387 165	387 165	387 165
2017	183 725	231 888	238 467	253 248	261 330	266 273	266 811	267 986	267 991	267 991	267 991
2018	124 355	191 954	241 260	335 946	346 668	353 225	353 939	355 497	355 505	355 505	355 505
2019	39 709	109 363	127 726	177 854	183 531	187 002	187 380	188 205	188 209	188 209	188 209
2020	343 618	1 033 527	1 207 067	1 680 800	1 734 445	1 767 251	1 770 820	1 778 617	1 778 655	1 778 655	1 778 655

FIGURE 28 – Développement du triangle des sinistres payés

• Calcul des soldes à liquider

On rappelle que le solde à liquider pour une année de survenance se calcule en utilisant la formule suivante :

$$SL_i = \hat{C}_{i,11} - \hat{S}_{i,11-(i-2010)}$$

Il correspond à la différence entre la charge de sinistres ultime de cette année et le dernier règlement cumulé de cette même année de survenance.

	Les soldes à liquider
2011	3 199 598
2012	2 820 317
2013	484 373
2014	-4 353
2015	-42 196
2016	-60 077
2017	17 972
2018	63 833
2019	30 424
2020	1 256 142

Tableau 38 : Les soldes à liquider par année de survenance

On remarque que certains soldes à liquider sont négatifs (ceux associés aux années de survenance 2014, 2015 et 2016). Ce qui n'est pas logique puisque les sinistres payés doivent toujours être inférieurs aux charges des sinistres.

D'où l'importance de recourir à un paramétrage basé sur la méthode de Chain Ladder ajustée appliquée sur les deux triangles, celui des sinistres payés et celui des charges des sinistres, en utilisant une matrice d'ajustement qui va permettre d'exclure les points atypiques qui nuisent à l'estimation des coefficients de développement et donc des soldes à liquider tout en veillant à qu'ils prennent des valeurs positifs.

La procédure est un peu longue. On exhibera par conséquent juste les résultats affichés après le paramétrage :

Les nouveaux coefficients de développement :

Pour le triangle des charges des sinistres :

Coefficients de Développement	1,912	1,175	1,042	1,057	1,005	1,009	1,001	1,000	1,000	1,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour le triangle des sinistres payés

Coefficients de Développement	1,262	1,164	1,032	1,011	1,001	1,001	1,007	1,000	1,000	1,000
-------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Les nouveaux soldes à liquider

	Les soldes à liquider
2011	3 272 733
2012	2 852 238
2013	487 469
2014	90 405
2015	16 022
2016	21 391
2017	20 424
2018	28 548
2019	49 529
2020	1 071 634

Tableau 39 : Les nouveaux soldes à liquider obtenus par année de survenance après paramétrage

- **Calcul des cadences de liquidation**

On calcule les cadences de liquidation avec la formule explicitée dans la partie théorique :

	Soldes à Liquider	Cadences de Liquidation												
2011	3 272 733	100,00%												
2012	2 852 238	100,00%	0,00%											
2013	487 469	100,00%	0,00%	0,00%										
2014	90 405	99,34%	0,66%	0,00%	0,00%									
2015	16 022	12,97%	86,46%	0,57%	0,00%	0,00%								
2016	21 391	6,88%	12,08%	80,51%	0,53%	0,00%	0,00%							
2017	20 424	53,95%	3,17%	5,56%	37,08%	0,24%	0,00%	0,00%						
2018	28 548	60,84%	21,12%	1,24%	2,18%	14,52%	0,10%	0,00%	0,00%					
2019	49 529	72,96%	16,45%	5,71%	0,34%	0,59%	3,93%	0,03%	0,00%	0,00%				
2020	1 071 634	48,02%	37,92%	8,55%	2,97%	0,17%	0,31%	2,04%	0,01%	0,00%	0,00%			

Tableau 40 : Les cadences de liquidation par année de survenance

- **Calcul des cashflows**

On calcule les cashflows non actualisés en multipliant les cadences de liquidation par les soldes à liquider.

Années de souscription	Années de projection										
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	
2011	3 272 733										
2012	2 852 238	0									
2013	487 469	0	0								
2014	89 812	593	0	0							
2015	2 078	13 853	92	0	0						
2016	1 472	2 584	17 221	114	0	0					
2017	11 018	647	1 136	7 573	50	0	0				
2018	17 369	6 031	354	622	4 145	27	0	0			
2019	36 134	8 149	2 830	166	292	1 945	13	0	0		
2020	514 624	406 374	91 650	31 821	1 869	3 281	21 870	144	0	0	

Tableau 41 : Estimation des cashflows non actualisés

Puis on les actualise

Années de souscription	Années de projection										
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	
2011	3 220 997										
2012	2 807 149	0									
2013	479 763	0	0								
2014	88 392	572	0	0							
2015	2 045	13 353	86	0	0						
2016	1 449	2 490	16 243	105	0	0					
2017	10 844	624	1 071	6 970	45	0	0				
2018	17 094	5 813	334	572	3 736	24	0	0			
2019	35 563	7 855	2 669	153	263	1 697	11	0	0		
2020	506 489	391 716	86 443	29 288	1 685	2 863	18 658	120	0	0	

Tableau 42 : Actualisation des cashflows

- **Calcul du Best Estimate**

En sommant tous les cashflows actualisés, on obtient finalement le Best Estimate :

Best Estimate	7 765 246 DHS
---------------	---------------

- **Le calage du Best Estimate obtenu par rapport au bilan comptable**

L'étape finale est le calage du Best Estimate avec le bilan comptable .Il s'agit :

- de faire une comparaison entre le BE obtenu et le SAP (Sinistres à Payer) total obtenu par les méthodes réglementaires (Comme la méthode Dossier par Dossier,méthode du coût moyen,méthode de la cadences des règlements ou autres méthodes internes) et vérifier si les deux montants sont assez proches.
- de vérifier si les différences entre les valeurs diagonales du triangle des charges de sinistres et celles du triangle des sinistres payés sont assez proches de la SAP par année de survenance.

Pour ce segment on a déjà traité ce problème le moment où on a remarqué des soldes à liquider négatifs,puisqu'on a essayé de remédier à ces deux problèmes en même temps (problème des soldes à liquider négatifs et problème du calage avec le bilan comptable).

Par conséquent,le Best Estimate qu'on va retenir est le même qu'on vient d'exhiber,à savoir 7 765 246 DHS.

On refait les mêmes étapes explicitées au dessus pour déterminer le Best Estimate final pour les autres segments selon la méthode interne.

On trouve les résultats suivants :

Branche d'assurance	Maritime et Transport	Engineering	Incendie
Best Estimate	7 765 246	4 812 918	4 580 663

En général,on remarque qu'il y'a une certaine différence entre les best estimate obtenus par l'approche standard et ceux calculés par l'approche interne et qui devient assez flagrante pour le segment "Maritime et Transport" .Chose qui est normale,puisque la deuxième méthode emploie trois triangles (celui des primes, celui des sinistres payés et celui des charges des sinistres) tandis que la première fait usage d'un seul triangle de liquidation qui est le triangle des sinistres payés.En effet,contrairement à l'assurance qui se base dans le provisionnement seulement sur l'évolution des règlements effectués,la réassurance doit tenir compte de la charge entière des sinistres assumé par la cédante (charges des sinistres) et de la part de cette charge qui va leur être cédée (sinistres payés) et qui est estimée en fonction du type de contrat de réassurance (quote part,excédent de plein,excédent de sinistres,...).D'où la puissance de l'approche interne vis-à-vis la méthode standard.

Avec cette explication de la méthode interne du provisionnement utilisée par la SCR qu'on vient d'éclaircir,on a terminé la partie du provisionnement en calculant le best estimate final qui va être retenu pour tous les trois segments du portefeuille .

La partie suivante va porter sur l'utilisation de ces outputs afin de réaliser l'objectif final de ce mémoire qui est le calibrage et l'évaluation du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie.

Partie 4 : Evaluation du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie

Après la réalisation du premier objectif du stage, à savoir l'estimation du Best Estimate selon l'approche standard et interne. On va passer maintenant à l'objectif final de notre étude, c'est le calibrage du risque de souscription non vie pour notre portefeuille, représentatif de l'Afrique du Nord. Ce calibrage va reposer sûrement sur le meilleur estimateur des engagements pour sinistres (Best Estimate) qu'on a déterminé dans la partie précédente, et précisément celui qu'on a calculé par la méthode standard.

En premier lieu, on définira ce qu'on appelle le capital de solvabilité requis (SCR) comme étant l'exigence en fonds propres dédiée à la confrontation des différents risques auxquels un assureur ou réassureur peut faire face, et précisément le SCR consacré au module de risque de souscription non vie.

En second lieu, on cherchera à calibrer d'une part la volatilité du risque de primes selon deux méthodes, d'autre part la volatilité du risque de réserves en utilisant le modèle de Merz & Wüthrich, pour déduire finalement l'écart type du risque de souscription non vie.

En dernier lieu, on calculera le capital de solvabilité requis pour le risque de souscription en non vie.

Chapitre 1 : Le capital de solvabilité requis SCR (Solvency Capital Requirement)

Le SCR (Solvency Capital Requirement) représente le niveau de capital cible (fonds propres) pour lequel entreprise d'assurance ou de réassurance est suffisamment capitalisée et peut absorber des pertes imprévues. En dessous de ce seuil, le superviseur local intervient et enjoint entreprise de mettre en œuvre un plan d'action afin de reconstituer le SCR.

Le SCR est décomposé en plusieurs modules et sous modules comme suivant :

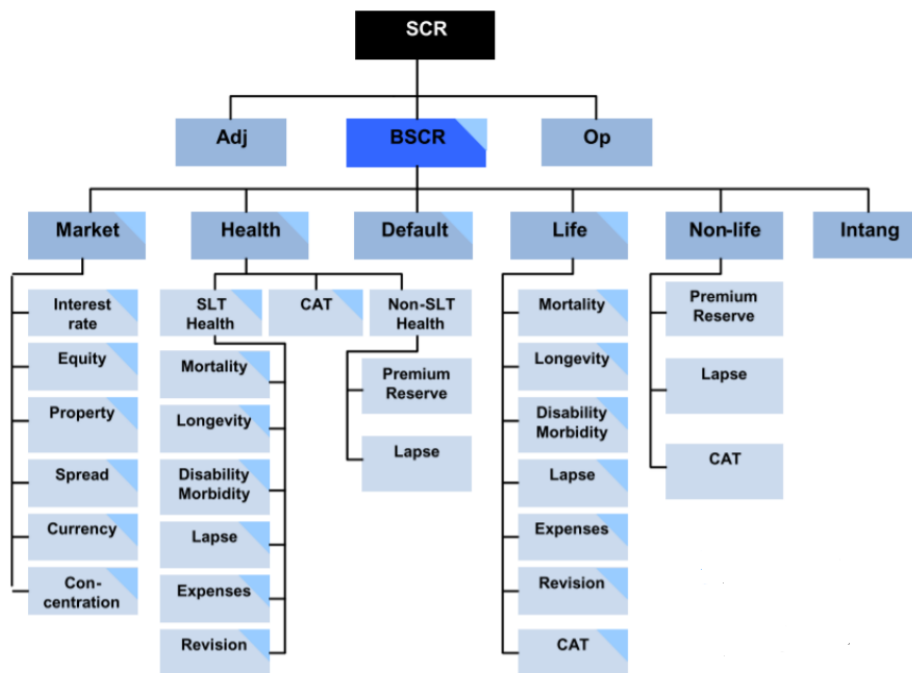


FIGURE 29 – La décomposition du SCR

D'après cette figure, le SCR peut être déterminé comme suivant :

$$SCR = BSCR + SCR_{operational} - Adj$$

Le capital de solvabilité requis de base ou BSCR est estimé sur la base de la formule suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

où : * $Corr_{i,j}$: Le coefficient de corrélation entre les modules de risque i et j

* SCR_i et SCR_j : les capitaux de solvabilité requis pour les modules de risque i et j respectivement.

* $SCR_{intangibles}$: représente l'exigence de capital pour les risques liés aux immobilisations incorporelles.

Donc on remarque comme il est éclairci dans la formule , qu'il est nécessaire de prendre en compte les corrélations pouvant exister entre les différents modules de risque.

La matrice de corrélation entre les différents modules de risque est :

	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Défaut	0.25	1	0.25	0.25	0.5
Vie	0.25	0.25	1	0.25	0
Santé	0.25	0.25	0.25	1	0
Non-vie	0.25	0.5	0	0	1

FIGURE 30 – La matrice de corrélation entre les risques en Solvabilité 2

Vu que le SCR couvre plusieurs modules qui sont également assez vastes et formés de plusieurs sous modules, on va se charger de l'estimation du module le plus important parmi tous les composants du SCR global, à savoir le SCR pour le risque de souscription non vie.

Chapitre 2 : Le capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie

Le risque de souscription est le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement.

Le SCR de souscription en non vie se compose de trois sous modules importants :

- Risque de prime (premium risk en anglais) : risque que le coût des sinistres futurs soit supérieur aux primes perçues (Sous-tarification des contrats).
- Risque de réserve (reserve risk en anglais) : risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation (sous-provisionnement) .
- Risque catastrophe (CAT risk en anglais) : risque résultant d'événements extrêmes ou irréguliers non capturés par les risques de tarification et de provisionnement.

$$SCR_{nonvie} = SCR_{primes} + SCR_{provisions} + SCR_{catastrophe}$$

Parmi ces composantes, on va traiter seulement le risque de primes et celui des provisions(ou réserves).

L'exigence en capital nécessaire pour l'absorption du risque de primes et de réserves est calculée comme suivant :

$$SCR_{nl\,prem\,res} = \rho(\sigma_{nl}) \cdot V_{nl}$$

où :

- V_{nl} : la mesure de volume pour le risque de prime et de réserve en non-vie.
- σ_{nl} : l'écart-type du risque de primes et de réserves.

- $\rho(\sigma_{nl})$: la fonction de l'écart type combiné .Elle est déterminée en se basant sur l'hypothèse que le risque sous-jacent suit une loi log normale comme suivant :

$$\rho(\sigma_{nl}) = \frac{\exp(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\sigma_{nl}^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma_{nl}^2 + 1}} - 1$$

On donne une approximation de $\rho(\sigma_{nl})$ comme suit :

$$SCR_{nl\text{ prem res}} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl}$$

où :

V_{nl} correspond à la somme des volumes de primes et provisions des différentes branches notées « s » :

$$V_{nl} = \sum_s V_s$$

Pour chaque branche s, le volume pour le risque de primes et réserves non vie est déterminé en sommant celui de primes et celui de provisions tout en prenant en compte un facteur de diversification géographique comme suit :

$$V_s = (V_{prems,s} + V_{res,s}) \cdot (0.75 + 0.25 \cdot DIV_s)$$

avec :

- $V_{prems,s}$ représente la mesure de volume pour le risque de primes du segment s ;
- $V_{res,s}$ représente la mesure de volume pour le risque de réserves du segment s . Il est égal à la meilleure estimation des provisions pour sinistres à payer, après déduction des montants recouvrables au titre des contrats de réassurance ou rétrocession et des véhicules de titrisation.
- DIV_s le facteur de diversification géographique du segment s. Et puisque notre portefeuille porte sur une seule région qui est dans notre cas l'Afrique du Nord, on s'enfoncera pas dans l'estimation de ce coefficient, et par conséquence pour des raisons simplificatrices , on considérera qu'il est égal à 1.

Donc l'expression de V_s le volume de risque pour primes et réserves non vie devient :

$$V_s = V_{prems,s} + V_{res,s}$$

Pour $V_{prems,s}$, il est déterminé par la formule suivante :

$$V_{prems,s} = \max(P_s, P_{last,s}) + FP_{existing,s} + FP_{future,s}$$

où

- P_s est l'estimation du montant des primes à acquérir par l'entreprise d'assurance ou de réassurance dans le segment s au cours des 12 mois prochains.

- $P_{last,s}$ représente les primes acquises nettes de l'entreprise d'assurance ou de réassurance durant les 12 derniers mois.
- $FP_{existing,s}$ est la valeur actuelle attendue des primes à acquérir dans le segment s après les 12 mois à venir pour les contrats existants.
- $FP_{future,s}$ représente la valeur actuelle attendue des primes à acquérir par l'entreprise d'assurance ou de réassurance dans le segment s pour les contrats dont la date de comptabilisation initiale survient dans les 12 mois à venir, mais à l'exclusion des primes à acquérir au cours des 12 mois qui suivent cette date initiale.

L'écart type pour le risque de primes et de réserves non vie est estimé comme suivant :

$$\sigma_{nl} = \frac{1}{V_{nl}} \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}$$

avec :

- * s, t sont des indices représentant les segments dont il s'agit dans notre expression.
- * $CorrS_{s,t}$ est le coefficient de corrélation entre les deux segments s et t au niveau du risque de primes et de provisions.
- * V_s et V_t sont les volumes de risque pour primes et provisions associés aux segments s et t.
- * σ_s et σ_t sont les écarts types du risque de primes et de réserves en non-vie des segments s et t respectivement.

L'écart type pour le risque de primes et de réserves non vie pour un segment s est défini par :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{prem,s}^2 V_{prem,s}^2 + \sigma_{prem,s} \cdot V_{prem,s} \cdot \sigma_{res,s} \cdot V_{res,s} + \sigma_{res,s}^2 \cdot V_{res,s}^2}}{V_{prem,s} + V_{res,s}}$$

Avec :

- $\sigma_{prem,s}$: l'écart type du risque de primes non-vie du segment s
- $\sigma_{res,s}$: l'écart type du risque de réserves non-vie du segment s

Donc pour pouvoir estimer le SCR du risque de souscription en non vie, on a besoin de déterminer deux données nécessaires :

- L'écart type du risque de primes
- L'écart type du risque de réserves

Chapitre 3 : Estimation de l'écart type du risque de primes en non vie

Pour estimer l'écart type du risque de primes en non vie, l'EIOPA a établi plusieurs méthodes parmi lesquelles on va décortiquer juste deux méthodes puisque les autres sont un peu fastidieuses et nécessitent beaucoup d'informations.

Avant de s'embarquer dans les méthodes, on va d'abord présenter l'ensemble des notations et données qu'on va exploiter pour le calibrage de la volatilité du risque de primes en non vie.

- N_s : La profondeur de la branche s ou autrement le nombre des années d'historique de la branche s .
- t : Indexation utilisée pour l'année de survenance t .
- μ_s : Le ratio de sinistralité attendu par segment s .
- $V_{t,s}$: Les primes acquises par année de survenance t et par segment s .
- β_s : Constante de proportionnalité pour la variance des sinistres par branche s .
- $\epsilon_{t,s}$: Variable aléatoire suivant une distribution de moyenne nulle et de variance 1
- $U_{t,s}$: Charge ultime après un an par année de survenance t et par branche s .

On fixe un segment s afin de simplifier les notations tout en leur enlevant l'indice s

La variable aléatoire U_t représente la charge de sinistralité après la première année de développement par année de survenance t . Elle est calculée comme suivant :

$$U_t = Y_{t,1} + PCO_{t,1}$$

où

- $PCO_{t,j}$: le best estimate des réserves pour l'année de survenance t et vues à la fin de l'année de développement j .
- $Y_{t,j}$: les règlements incrémentaux pour l'année de survenance t et l'année de développement j .

On exhibera un exemple simple pour un historique allant de 2017 à 2020 :

i/j	1	2	3	4
2017	$Y_{2017,1}$	$Y_{2017,2}$	$Y_{2017,3}$	$Y_{2017,4}$
2018	$Y_{2018,1}$	$Y_{2018,2}$	$Y_{2018,3}$	
2019	$Y_{2019,1}$	$Y_{2019,2}$		
2020	$Y_{2020,1}$			

Tableau 43 : Triangle des règlements incrémentaux

i/j	1	2	3	4
2017	$PCO_{2017,1}$	$PCO_{2017,2}$	$PCO_{2017,3}$	$PCO_{2017,4}$
2018	$PCO_{2018,1}$	$PCO_{2018,2}$	$PCO_{2018,3}$	
2019	$PCO_{2019,1}$	$PCO_{2019,2}$		
2020	$PCO_{2020,1}$			

Tableau 44 : Triangle des best estimate des réserves

Les variables U_t sont déterminées selon la définition donnée au dessus comme suit :

$$U_{2017} = Y_{2017,1} + PCO_{2017,1} \quad ; \quad U_{2018} = Y_{2018,1} + PCO_{2018,1}$$

$$U_{2019} = Y_{2019,1} + PCO_{2019,1} \quad ; \quad U_{2020} = Y_{2020,1} + PCO_{2020,1}$$

Pratiquement, $PCO_{i,1}$ correspond au best estimate de l'année de survenance i calculé en utilisant le sous triangle de liquidation allant de 2017 à i .

Maintenant, après avoir mis la lumière sur les différentes notations qu'on va exploiter, on passe directement à l'estimation de l'écart-type du risque de primes en non vie.

Première méthode : Estimation de l'écart-type du risque de primes en non vie avec la méthode des moindres carrés ordinaires

Cette première méthode élaborée par l'EIOPA consiste à analyser l'erreur de tarification (ou estimation des primes) en spécifiant un modèle paramétrique pour la distribution des sinistres et à estimer les paramètres à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires.

Il s'agit donc d'une méthode essentiellement rétrospective. Elle se fonde sur les hypothèses suivantes :

- La charge de sinistralité après un an est proportionnelle au montant des primes acquises : $E(U) = \mu.V$ ou autrement le ratio de sinistralité attendu μ est constant.
- La variance des charges de sinistralité après un an est proportionnelle à la prime acquise $Var(U) = \beta^2.V$

On va considérer que le montant ultime U_t des sinistres pour l'année de survenance t pour chaque branche s , suit la distribution suivante :

$$U_{t,s} \sim \mu_s V_{t,s} + \sqrt{V_{t,s}} \cdot \beta_s \cdot \epsilon_{t,s}$$

Par conséquent, on va considérer pour chaque année de survenance t une multitude d'observations indépendantes et identiquement distribuées.

$$\beta_s \cdot \epsilon_{t,s} = \frac{U_{t,s} - \mu_s \cdot V_{t,s}}{\sqrt{V_{t,s}}}$$

Cette reformulation permet d'obtenir une série d'observations indépendantes et identiquement distribuées. Il est alors possible d'estimer la constante de proportionnalité β_s grâce à la méthode des moindres carrés qui permet de trouver l'estimateur de β_s suivant :

$$\beta_s^2 = \frac{1}{N_s - 1} \sum_t \frac{(U_{t,s} - \mu_s \cdot V_{t,s})^2}{V_{t,s}}$$

avec :

- N_s : la profondeur de l'historique de la branche s , ou autrement le nombres des années historiques disponibles pour cette branche.

En minimisant cet estimateur , on obtient le ratio de sinistralité (S/P) attendu suivant :

$\hat{\mu}_s = \frac{\sum_t U_{t,s}}{\sum_t V_{t,s}}$ qui représente la totalité de la sinistralité observée pour notre branche s

On trouve donc une estimation de β_s^2 en remplaçant μ_s par son estimation comme suivant :

$$\hat{\beta}_s = \sqrt{\frac{1}{N_s - 1} \sum_t \frac{(U_{t,s} - V_{t,s} \frac{\sum_t U_{t,s}}{\sum_t V_{t,s}})^2}{V_{t,s}}}$$

On déduit finalement l'écart type du risque de prime associé au segment s ($\sigma_{prem,s}$)

$$\sigma_{prem,s} = \frac{\hat{\beta}_s}{\sqrt{V_{prem,s}}}$$

$$\sigma_{prem,s} = \frac{1}{\sqrt{V_{prem,s}}} \sqrt{\frac{1}{N_s - 1} \sum_t \frac{(U_{t,s} - V_{t,s} \frac{\sum_t U_{t,s}}{\sum_t V_{t,s}})^2}{V_{t,s}}}$$

où $V_{prem,s}$ la mesure de volume pour le risque de primes du segment s.

On en déduit donc l'écart-type sur le risque de prime à venir à partir des observations passées, c'est-à-dire l'écart de la sinistralité passée avec la moyenne de la sinistralité sur la période d'observation, en considérant notamment que la sinistralité est proportionnelle à la prime acquise.

Deuxième méthode : Estimation de l'écart-type du risque de primes non vie avec la méthode simplifiée du maximum de vraisemblance

La 2^{ème} méthode pour l'estimation de $\sigma_{prem,s}$ est similaire à la précédente mais elle suppose de plus que la distribution de la sinistralité est log-normale. On utilise

la méthode du maximum de vraisemblance plutôt que la méthode des moindres carrés ordinaires pour estimer l'écart-type.

On a alors une distribution log-normale des sinistres :

$$U_{t,s} \sim \mu_s V_{t,s} + \sqrt{V_{t,s}} \beta_s \epsilon_{t,s}$$

Les hypothèses liées à la méthode simplifiée du maximum de vraisemblance sont les suivantes :

* Les pertes attendues après un an de développement U sont proportionnelles aux primes acquises V , c'est à dire :

$$E(U) = \mu \cdot V$$

* La variance des pertes U est proportionnelle aux primes V , c'est-à-dire :

$$Var(U) = \beta^2 \cdot V$$

* Les pertes $U_{t,s}$ suivent une loi log normale de paramètres : $M_{t,s}$ et $S_{t,s}^2$, ainsi on a :

$$E(U_{t,s}) = e^{M_{t,s} + \frac{1}{2} S_{t,s}^2}$$

$$Var(U_{t,s}) = (e^{S_{t,s}^2} - 1) e^{2M_{t,s} + S_{t,s}^2}$$

Grâce à ces hypothèses qu'on vient d'expliciter , on obtient facilement les égalités ci-dessous :

$$M_{t,s} = \ln(\mu_s V_{t,s}) - \frac{1}{2} \cdot S_{t,s}^2$$

$$S_{t,s} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\beta_s^2}{\mu_s \cdot V_{t,s}}\right)}$$

En utilisant la définition de la fonction de vraisemblance d'une loi log-normale, les paramètres $\hat{\beta}_s$ et $\hat{\mu}_s$ sont déterminés de telle manière à maximiser la fonction de log-vraisemblance suivante :

$$\log L = \sum_t \left(-\ln(S_{t,s}) - \frac{(\ln(U_{t,s}) - M_{t,s})^2}{2 \cdot S_{t,s}^2} \right)$$

Après avoir estimé $\hat{\beta}_s$, on déduit facilement l'écart type du risque de primes associé au segment s :

$$\sigma_{prem,s} = \frac{\hat{\beta}_s}{\sqrt{V_{prem,s}}}$$

Cette deuxième méthode est moins directe car elle nécessite l'utilisation d'un solveur (Par exemple le solveur d'excel ou la commande optim de R).

Chapitre 4 : Estimation de l'écart type du risque de réserve en non vie

Afin d'évaluer le risque de provisionnement à un an, Merz et Wüthrich proposent une méthode basée sur la méthode de Mack. Ils supposent donc que les hypothèses sur lesquelles repose le modèle de Mack sont vérifiées.

A titre de rappel, on va reprendre brièvement les hypothèses de Mack :

H1 : $\{C_{i,0}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,0}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendantes pour $i \neq k$

H2 : Il existe f_j tel que $E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$

H3 : Il existe σ_j tel que $Var(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$

Le risque de provisionnement à un an est un risque portant sur la ré-estimation Best Estimate de la charge ultime de la compagnie d'assurance entre les années n et $n+1$. Pour l'estimer, nous nous intéresserons à ce qu'on appelle Claims Development Result (noté CDR), qui est la différence entre l'estimation Best Estimate des réserves évaluées en deux années successives n et $n+1$.

On pose :

- $D_n = \{C_{i,j}; i+j \leq n+1\}$: L'information disponible à l'instant $t=n$ (le triangle de développement connu à cet instant ou autrement les paiements disponibles jusqu'à cet instant).

- $D_{n+1} = \{C_{i,j}; i+j \leq n+2\}$: L'information disponible à l'instant $t=n+1$.

On définit le CDR observé à la période $[n, n+1]$ pour chaque année de survenance i comme suit :

$$CDR_i(n+1) = E(R_i^n | D_n) - (Y_{i,n+1-i} + E(R_i^{n+1} | D_{n+1}))$$

où $Y_{i,n+1-i}$ signifie les paiements effectués au cours de l'année $[n, n+1]$, pour les sinistres survenus lors de l'année i et tels que $Y_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i} - C_{i,n-i}$ pour tout $i=1, \dots, n$.

Sachant que :

$$\begin{aligned} E(R_i^n | D_n) &= E(C_{i,n} - C_{i,n-i} | D_n) \\ &= E(C_{i,n} | D_n) - C_{i,n-i} \end{aligned}$$

et que :

$$\begin{aligned} E(R_i^{n+1}|D_{n+1}) &= E(C_{i,n} - C_{i,n+1-i}|D_{n+1}) \\ &= E(C_{i,n}|D_{n+1}) - C_{i,n+1-i} \end{aligned}$$

On peut déduire que :

$$CDR_i^{n+1} = E(C_{i,n}|D_n) - E(C_{i,n}|D_{n+1})$$

où

$$E(C_{i,n}|D_n) = C_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} f_j^n$$

$$\text{et } E(C_{i,n}|D_{n+1}) = C_{i,n+1-i} \prod_{j=n+1-i}^{n-1} f_j^{n+1}$$

En ce qui concerne les facteurs de développement f_j , ils doivent être aussi mis à jours avec l'information disponible à chaque date .

A la date n, ils sont estimés comme suivant :

$$f_j^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^n} \quad \text{avec } S_j^n = \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}$$

S_j^n : représente la somme des paiements cumulés par année de survenance strictement antérieure à l'année calendaire n.

A l'année calendaire suivante n+1, on utilisera la nouvelle information disponible au courant de l'année [n,n+1] à savoir $C_{n-j,j+1}$.

Ainsi les facteurs de développement de Chain Ladder sont estimés par :

$$f_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{S_j^{n+1}}$$

avec :

$$\begin{aligned} S_j^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j} \\ &= S_j^n + C_{n-j,j} \end{aligned}$$

On estime donc le CDR observable à la date n+1 pour l'année de survenance i :

$$\begin{aligned} C\hat{D}R_i(n+1) &= \hat{R}_i^n - (Y_{i,n+1-i} + \hat{R}_i^{n+1}) \\ &= \hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1} \end{aligned}$$

Merz et Wüthrich proposent deux visions :

- Vision rétrospective :

Cette vision cherche à quantifier l'incertitude autour de la distance entre le CDR réel et le CDR observable à l'année calendaire suivante $C\hat{D}R(n+1)$ du fait qu'on prédit le CDR réel par le CDR observable.

$$MSEP_{CDR_i(n+1)}(C\hat{D}R_i(n+1)) = E[(CDR_i(n+1) - C\hat{D}R_i(n+1))^2|D_n]$$

- Vision prospective :

On prédit en général à la date n le CDR observable à la date $n+1$, pour l'année comptable $[n, n+1]$, noté $C\hat{D}R_i(n+1)$ par 0 . En effet, les provisions sont estimées de façon best estimate à chaque date. Donc si l'on suppose les estimations du montant des provisions sans biais, on a : $E(C\hat{D}R_i(n+1)|D_n) = 0$. On cherche ici à mesurer l'incertitude autour de 0 de notre prédiction des CDR observables à la fin de l'année calendaire $n+1$.

$$MSE P_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) = E[(C\hat{D}R_i(n+1) - 0)^2 | D_n]$$

Pour simplifier l'expression des MSE P par année de survenance, Merz et Wüthrich ont défini les variables suivantes :

$$\begin{aligned} S_j^n &= \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \text{ et } S_j^{n+1} = \sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j} \\ \hat{\Delta}_{i,n}^n &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{S_j^n} \\ \hat{\phi}_{i,n}^n &= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{C_{n-j,j}} \\ \hat{\Psi}^n &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{C_{i,n-i}} \\ \hat{\Gamma}_{i,n}^n &= \hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\Psi}_i^n \end{aligned}$$

A partir de ces simplifications, on peut estimer les erreurs de prédiction entre le CDR réel et le CDR observable pour chaque année de survenance i comme suivant :

$$M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(C\hat{D}R_i(n+1)) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 (\hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n)$$

En utilisant cette expression de l'erreur de prédiction entre le CDR réel et observable, on peut déduire l'expression de l'erreur de prédiction entre le CDR observable et 0 pour chaque année de survenance i comme suit :

$$\begin{aligned} M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) &= (\hat{C}_{i,n}^n)^2 (\hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n + \hat{\Psi}_i^n) \\ &= (\hat{C}_{i,n}^n)^2 (\hat{\Gamma}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n) \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation $\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \ll 1$, l'expression devient :

$$M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{C_{i,n-i}} + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{S_j^n} \right]$$

Pour le CDR total :

$$C\hat{D}R(n+1) = \sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)$$

La MSEP qui lui est associée peut être déduite sur la base des MSEP de chaque année de survenance en tenant compte des termes de corrélation comme suivant :

$$M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)) = \\ \sum_{i=1}^n M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(C\hat{D}R_i(n+1)) + 2 \cdot \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n (\hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\Lambda}_{i,n}^n)$$

A partir de cette formule , on déduit l'expression de l'erreur de prédiction entre le CDR total observable et 0 ($M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0)$) qui représente pour nous la mesure du risque de réserve à horizon un an.

$$M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) = \\ = \sum_{i=1}^n M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) + 2 \cdot \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,n} (\hat{\Upsilon}_{i,n}^n + \hat{\Lambda}_{i,n}^n)$$

Avec :

$$\hat{\Lambda}_{i,n}^n = \frac{C_{i,n-i}}{S_{n-i}^{n+1}} \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{S_j^n}$$

et

$$\hat{\Upsilon}_{i,n}^n = \hat{\phi}_{i,n}^n + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^{n+1}}$$

Avec l'approximation qu'on a cité au dessus , $M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0)$ devient :

$$M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) = \\ \sum_{i=1}^n M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,n} \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^n)^2}{S_j^n} \right)$$

Après l'estimation de l'erreur quadratique moyen de prédiction entre le CDR total observé et 0 $M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0)$, on déduit facilement la volatilité du risque de provisionnement à horizon un an pour chaque segment s.

$$\sigma_{res,s} = \sqrt{\frac{M\hat{S}EP_{\sum_{i=1}^n C\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0)}{BE(s)}}$$

où $BE(s)$ est le Best Estimate des provisions pour sinistres à payer pour le segment s.

Donc après avoir déterminé la méthodologie entière qui va permettre d'estimer les volatilités liées au risque de primes et de réserves, on peut donc déduire le SCR du risque de souscription non vie .

Chapitre 5 : Cadre pratique de l'évaluation de l'exigence en capital pour le risque de souscription non vie

1 - Calibrage de l'écart type du risque de primes en non vie

On va déterminer la volatilité du risque de primes selon les deux méthodes qu'on a exposé dans la partie théorique .

Comme d'habitude , on va exhiber la procédure suivie pour un seul segment qui va être dans notre cas celui du "Maritime et Transport".

1) La méthode des moindres carrés ordinaires

Avant de s'engager dans l'application de cette méthode,on va devoir vérifier ses hypothèses .

- **La première hypothèse H1** : La charge de sinistralité après un an est proportionnelle au montant des primes acquises : $E(U) = \mu.V$

Pour tester cette hypothèse, on va faire une régression linéaire entre d'une part les charges de sinistralité après un an par année de survenance U_t en tant que variable expliquée et d'autre part les primes acquises par année de survenance V_t en tant que régresseur ou variable explicative :

$$U_t = \mu.V_t + \gamma + \epsilon_t$$

Premièrement,on doit tester si la régression est globalement significative pour s'assurer qu'il y'a vraiment une relation linéaire entre les deux variables U_t et V_t .

Deuxièmement,on doit tester la nullité(ou significativité) du paramètre γ pour vérifier si la droite de la régression linéaire passe vraiment par l'origine et que les variables sont proportionnelles.

On présente les sorties générées après avoir régressé U_t par V_t :

```
> model=lm(U~V,vasd)
> summary(model)

Call:
lm(formula = U ~ V, data = vasd)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-905152 -403484 -128714  288797 1425890

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 4.324e+05  3.637e+05   1.189  0.26493
V           1.355e-01  3.527e-02   3.840  0.00396 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 646100 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.921,    Adjusted R-squared:  0.9789
F-statistic: 69.91 on 1 and 9 DF,  p-value: 0.003964
```

FIGURE 31 – Résultat de la régression linéaire de U_t par V_t

En premier lieu ,on voit que le coefficient de détermination $R^2 = 0.921$ avec une p-value = $0.003964 < 0.05$,donc on peut dire que la régression est globalement significative.

En second lieu,on remarque que la p-value associée à la constante γ est > 0.05 ,donc on accepte l'hypothèse H_0 du test de student(test de nullité des paramètres de la régression linéaire),à savoir $H_0 : \gamma = 0$.

On conclut donc que $\hat{U}_t = 0.1355 * V_t$ et donc l'existence d'une proportionnalité entre les charges de sinistralité après un an et les primes acquises.

• **La deuxième hypothèse H2** : La variance des charges de sinistralité est proportionnelle au montant des primes acquises.

Pour vérifier cette hypothèse ,on va utiliser les résidus normalisés de Pearson : $r_t = \frac{U_t - \hat{\mu} \cdot V_t}{\sqrt{V_t}}$ pour vérifier si le nuage de points (V_t, r_t) reflète une certaine tendance ou dynamique spécifique.

On affiche le graphe obtenu :

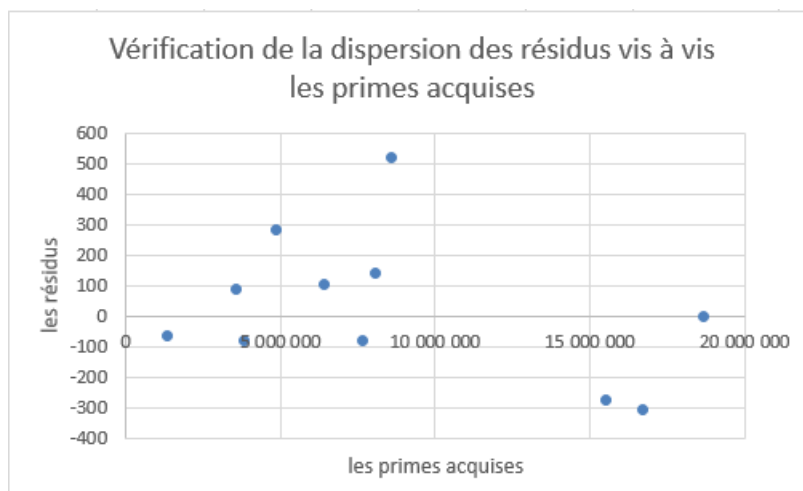


FIGURE 32 – Vérification de l'hypothèse de la dispersion des résidus par rapport aux primes acquises

On peut donc arguer que le nuage des points (V_t, r_t) est dispersé et qu'il ne révèle aucune structure typique .On peut donc accepter cette hypothèse et considérer par conséquence que la variance des charges de sinistralité après un an est proportionnelle aux primes acquises.

Enfin,après avoir accompli l'étape de la vérification des hypothèses,on passe maintenant au calibrage de l'écart type du risque de primes par la méthode des moindres carrés ordinaires.

On estime d'abord les ratios de sinistralité attendus $\hat{\mu}_s$ en utilisant la formule :

$$\hat{\mu}_s = \frac{\sum_t U_{t,s}}{\sum_t V_{t,s}}$$

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\hat{\mu}_s$	0,176	0,255	0,4833

Tableau 45 : Les ratios de sinistralité attendus par segment

Ensuite, on estime les constantes de proportionnalité pour la variance des sinistres par branche $\hat{\beta}_s$ en utilisant les ratios de sinistralité attendus $\hat{\mu}_s$ qu'on vient d'estimer et ceci par le biais de la relation suivante :

$$\hat{\beta}_s = \sqrt{\frac{1}{N_s-1} \sum_t \frac{(U_{t,s} - \hat{\mu}_s \cdot V_{t,s})^2}{\sqrt{V_{t,s}}}}$$

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\hat{\beta}_s$	239,479	631,0252	1854,2088

Tableau 46 : Les constantes de proportionnalité pour la variance des sinistres par lob (line of business)

Finalement, on détermine l'écart type pour le risque de primes comme suit :

$$\sigma_{prem,s} = \frac{\hat{\beta}_s}{\sqrt{V_{prem,s}}}$$

où $V_{prem,s} = \max(P_s, P_{last,s}) + FP_{existing,s} + FP_{future,s}$

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$V_{prem,s}$	7 673 192	9 464 767	18 044 365

Tableau 47 : Les volumes de primes par branche

On trouve :

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\sigma_{prem,s}$	0,0865	0,2051	0,4365

Tableau 48 : La volatilité du risque de primes par segment obtenue par la méthode des moindres carrés ordinaires

2) La méthode simplifiée du maximum de vraisemblance

Avant d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance (appelée aussi méthode de Log-Normale simplifiée), on doit d'abord valider ses hypothèses.

Les deux premières hypothèses à savoir :

- La proportionnalité entre les charges de sinistralité après un et les primes acquises.

• La proportionnalité entre la variance des charges de sinistralité après un an et les primes acquises ont été déjà validées dans la première méthode .

Il reste donc une seule hypothèse à vérifier,c'est la log normalité des charges de sinistralité après un an U_t .

Pour ce faire , on va recourir à un test de normalité qui va être appliqué sur les $\log(U_t)$.

On a opté donc au test de Shapiro Wilk .On présente ci-dessous le résultat généré.

```
> shapiro.test(log(x))

      shapiro-wilk normality test

data:  log(x)
W = 0.88386, p-value = 0.1164
```

FIGURE 33 – Résultat du test de normalité de Shapiro Wilk

Puisqu'on a une pvalue supérieur à 0.05,on acceptera donc l'hypothèse nulle qui stipule que la distribution des charges de sinistralité après un an U_t suit effectivement une distribution log normale.Avec ceci on a vérifié la troisième hypothèse.On peut donc passer à l'étape de l'estimation.

Comme on a mentionné dans la partie théorique, on va déterminer les paramètres $\hat{\beta}_s$ et $\hat{\mu}_s$ en se basant sur la fonction de vraisemblance d'une loi log normale,c'est à dire les paramètres qui vont permettre de maximiser la fonction de log vraisemblance suivante :

$$\log L = \sum_t \left(-\ln(S_{t,s}) - \frac{(\ln(U_{t,s}) - M_{t,s})^2}{2.S_{t,s}^2} \right)$$

On a donc procédé à l'optimisation de cette fonction en utilisant l'instruction `optim()` de R.On présente ci-dessous les résultats générés.

```
<
> lognormal.lik2<-function(theta,y){
+   beta<-theta[1]
+   mu<-theta[2]
+   n<-nrow(y)
+   logl<- -sum(log(sqrt(log(1+((beta^2)/(mu^2*y[2]))))))-(log(y[1])-log(mu*y[2]))+
+   0.5*log(1+((beta^2)/(mu^2*y[2])))^2/(2*log(1+((beta^2)/(mu^2*y[2]))))
+   return(logl)
+ }
> optim(c(10,0.1),lognormal.lik2,y=vasd,method="BFGS")
$par
[1] 300.9649315  0.1319112

$value
[1] 8.288724
```

FIGURE 34 – Estimation des paramètres β et μ selon la méthode du maximum de vraisemblance

On trouve donc :

$$\hat{\beta}_{MT} = 300.965$$

$$\hat{\mu}_{MT} = 0.132$$

Pour les autres segments, on se contentera juste des résultats affichés.

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\hat{\mu}_s$	0,132	0,3241	0,4217
$\hat{\beta}_s$	300,965	682,4123	1901,2311

Tableau 49 : Les coefficients μ_s et β_s estimés par segment

On déduit donc les écarts type du risque de primes pour chaque segment s comme suit :

$$\sigma_{prem,s} = \frac{\hat{\beta}_s}{\sqrt{V_{prem,s}}}$$

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\sigma_{prem,s}$	0,1086	0,2218	0,4476

Tableau 50 : La volatilité du risque de primes par segment obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance

Comme on peut le remarquer, les deux méthodes fournissent des estimations assez proches pour la volatilité du risque de primes. Mais, dans la suite on va utiliser les résultats générés par une seule méthode. On a opté pour la méthode des moindres carrés ordinaires. Ça ne veut pas dire qu'elle est plus performante que la deuxième (log-normal simplifiée), mais on l'a pris juste parce qu'elle est plus simple et n'exige pas de log normalité au niveau de la distribution des "charges de sinistralité après un an U_t " qui dans d'autres situations peut ne pas être vérifiée).

2 - Calibrage de l'écart type du risque de réserves en non vie

On expliquera le déroulement du processus de l'estimation de la volatilité du risque de réserve en non vie pour un seul segment ou branche d'assurance à savoir "Maritime et Transport". Pour les autres segments, on affichera directement les résultats finaux.

D'après ce qu'on a abordé dans la partie théorique, pour estimer la volatilité du risque de réserve en non vie, on a besoin premièrement de calculer les CDR (Claims Development Result) qui représentent la différence entre les charges ultimes d'une même année de survenance (ou Provisions pour sinistres à payer de cette année) mais estimées en deux années successives et ceci en utilisant le modèle de Merz Wüthrich.

Donc avant d'ébaucher les calculs, il est judicieux de vérifier nécessairement l'hypothèse simplificatrice de Merz Wüthrich, à savoir :

les coefficients $a_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}^n)^2}{C_{n-j,j}}$ doivent être $\ll 1$ et ceci pour tout j de 1 à $n-1$ ($n=11$ dans notre cas).

On présente les résultats établis après vérification :

Année de développement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	$1,028.10^{-2}$	$2,372.10^{-3}$	$9,277.10^{-2}$	$5,976.10^{-3}$	$6,078.10^{-4}$	$1,602.10^{-4}$	$2,047.10^{-4}$	$2,362.10^{-4}$	$6,090.10^{-4}$	$5,534.10^{-5}$

Tableau 51 : Vérification de l'hypothèse de Merz Wüthrich

Donc on peut juger que l'hypothèse de l'approximation utilisée par le modèle Merz Wüthrich est bien vérifiée.

On exhibe le tableau englobant les CDR calculés par année de survenance avec le total :

Année de survenance	CDR
2010	0.00
2011	46 770.73
2012	32 963.45
2013	10 424.85
2014	16 675.04
2015	11 791.98
2016	24 905.70
2017	49 355.34
2018	488 669.69
2019	95 512.90
2020	743 791.11
Total	921 582.63

Tableau 52 : Les CDR(Claims Development Results) par année de survenance pour le segment "Maritime et Transport"

Après, on calcule les erreurs quadratiques moyens de prédiction par année de survenance

Année de survenance	SEP	MSEP
2010	0,00	0,00
2011	46 770,73	2,19E+09
2012	38151,74	1,46E+09
2013	20501,56	4,20E+08
2014	32 108,27	1,03E+09
2015	21 439,37	4,60E+08
2016	28 542,68	8,15E+08
2017	54 740,58	3,00E+09
2018	492 719,16	2,43E+11
2019	370 095,30	1,37E+11
2020	1 386 111,51	1,92E+12
Total	1 539 392,07	2,37E+12

Tableau 53 : Les erreurs de prédiction par année de survenance

On peut donc déduire la volatilité du risque de réserve pour notre segment grâce à la formule qu'on a explicité dans la partie théorique :

$$\begin{aligned}\sigma_{res,MT} &= \frac{\sqrt{M\hat{S}EP \sum_{i=1}^n C\hat{D}R_{i(n+1)|D_n}(0)}}{BE(MT)} \\ &= \frac{S\hat{E}P \sum_{i=1}^n C\hat{D}R_{i(n+1)|D_n}(0)}{BE(MT)}\end{aligned}$$

avec BE(MT) : Le best estimate des engagements pour sinistres de la branche Maritime et Transport. Il correspond bien sûr à celui qu'on a estimé par la méthode Chain Ladder .

$$\begin{aligned}\sigma_{res,MT} &= \frac{1\,539\,392,07}{1\,706\,342} \\ &= 0,9022\end{aligned}$$

On fait la même chose avec les deux autres segments. On présente les résultats obtenus.

Pour le segment "Engineering" :

$$\sigma_{res,Eng} = \frac{4\,060\,694,85}{6\,646\,527} = 0,6109$$

Pour le segment "Incendie" :

$$\sigma_{res,Inc} = \frac{3\,160\,282,87}{4\,081\,998} = 0,7742$$

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$\sigma_{res,s}$	0,9022	0,6109	0,7742

Tableau 54 : La volatilité du risque de réserves pour chaque segment

3 - Calcul du capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non vie

Maintenant qu'on a calculé les volatilités du risque de primes et les volatilités du risque de réserves pour tous les segments, on peut donc déduire l'écart type pour les deux risques (risque de primes et de réserves non vie) pour chaque segment s comme suit :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{prem,s}^2 V_{prem,s}^2 + \sigma_{prem,s} \cdot V_{prem,s} \cdot \sigma_{res,s} \cdot V_{res,s} + \sigma_{res,s}^2 \cdot V_{res,s}^2}}{V_{prem,s} + V_{res,s}}$$

avec

- $\sigma_{prem,s}$ ($\sigma_{res,s}$) la volatilité du risque de primes (de réserves) qu'on vient de calculer précédemment.

- $V_{prem,s}$: la mesure de volume pour le risque de primes du segment s. On l'a déjà exhibé dans la partie dédiée au calibrage de l'écart type pour le risque de primes.

- $V_{res,s}$: la mesure de volume pour le risque de réserves du segment s. Elle correspond tout simplement à la meilleure estimation (Best Estimate) des provisions pour sinistres à payer (On néglige les déductions des montants recouvrables au titre des contrats de rétrocession).

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
$V_{prem,s}$	7 673 192	9 464 767	18 044 365
$V_{res,s}$	1 706 342	6 646 527	4 081 998
$\sigma_{prem,s}$	0,0865	0,2051	0,4365
$\sigma_{res,s}$	0,9022	0,6109	0,7742

On présente les volatilités obtenues après calcul :

Branche d'assurance	Maritime et Transport "MT"	Engineering "Eng"	Incendie "Inc"
σ_s	0,2087	0,3292	0,4449

Tableau 55 : L'écart type du risque de primes et de réserves obtenu pour chaque segment

On peut donc percevoir que le segment qui est le plus sensible vis à vis le risque de souscription non vie est "Incendie" suivi par "Engineering" et finalement celui du "Maritime et Transport". D'où l'importance d'accorder plus d'importance à la branche de l'Incendie durant le provisionnement par rapport aux deux autres segments afin d'éviter tout risque d'insolvabilité et d'incapacité de remboursement vis à vis les clients.

Finalement, on va calculer la volatilité globale (pour les trois segments de notre portefeuille) du risque de primes et de réserves non vie :

$$\sigma_{nl} = \frac{1}{V_{nl}} \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}$$

$$\sigma_{nl} =$$

$$\frac{1}{V_{nl}} \sqrt{\sigma_{MT}^2 V_{MT}^2 + 2 \cdot CorrS_{MT,Eng} \cdot \sigma_{MT} \cdot \sigma_{Eng} V_{MT} V_{Eng} + \sigma_{Eng}^2 V_{Eng}^2 + \sigma_{Inc}^2 V_{Inc}^2 + 2 \cdot CorrS_{MT,Inc} \cdot \sigma_{MT} \cdot \sigma_{Inc} V_{MT} V_{Inc} + 2 \cdot CorrS_{Inc,Eng} \cdot \sigma_{Inc} \cdot \sigma_{Eng} V_{Inc} V_{Eng}}$$

où :

- $V_s = V_{res,s} + V_{prem,s}$: Le volume pour le risque de primes et réserves non vie du segment s.
- $CorrS_{s,t}$: Le coefficient de corrélation entre les deux segments s et t.
- $V_{nl} = V_{MT} + V_{Eng} + V_{Inc}$: Le volume pour le risque de primes et réserves non vie pour notre portefeuille comportant les trois segments.

Donc pour pouvoir calculer ce terme, on aura besoin des coefficients de corrélation entre les branches d'assurance. La meilleure façon de les obtenir c'est d'essayer de les modéliser en procédant à des méthodes de modélisation des dépendances stochastiques comme les copules par exemple. Mais, on va se contenter juste de les corréler en utilisant la matrice de corrélation de Pearson avec R (Elle est calculée sur la base des sinistres payés).

	MT	Inc	Eng
MT	1.0000000	0.6651868	0.8751125
Inc	0.6651868	1.0000000	0.6813390
Eng	0.8751125	0.6813390	1.0000000

FIGURE 35 – Matrice de corrélation de Pearson des segments traités

$$\text{Corr}S_{MT,Inc} = 0.6652$$

$$\text{Corr}S_{MT,Eng} = 0.8751$$

$$\text{Corr}S_{Eng,Inc} = 0.6813$$

Après avoir substitué ces valeurs dans la formule, on obtient :

$$\sigma_{nl} = 0,3279$$

Avec ça, on est arrivé à la phase finale qui consiste à déduire le capital de solvabilité requis ou encore l'exigence en capital pour le risque de souscription non vie associé à notre portefeuille à un horizon d'un an

$$\begin{aligned} SCR_{nl\text{ prem res}} &= 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl} \\ &= 46\,847\,457,58 \end{aligned}$$

Donc pour pouvoir faire face au risque de souscription en non vie qui peut être issu soit d'une sous tarification des contrats ou d'une mauvaise estimation des provisions techniques, il faut lui consacrer une partie des fonds propres qui doit être à peu près égale à 46 847 457,58 DH.

Conclusion

Le plus grand souci d'une compagnie d'assurance ou de réassurance est l'insolvabilité ou l'incapacité d'honorer ses engagements. Chose qui est due principalement à l'inversion du cycle de production. Par conséquence, elle doit établir ses calculs d'une façon minutieusement prudente. Le cadre réglementaire actuel, inspiré de "Solvabilité 1", a révélé plusieurs insuffisances et faiblesses notamment le fait qu'il ne prend pas en considération plusieurs risques que peuvent rencontrer les assureurs et qu'il est très orienté vers la constitution des provisions. Pour cette raison, la nouvelle réforme SBR (Solvabilité Basée sur les risques), initiée par l'ACAPS, vise en s'inspirant de "Solvabilité 2" la réglementation actuelle adoptée dans l'Union Européenne, à remédier à ces lacunes tout en mettant la lumière sur l'importance de gérer les différents risques à travers la détermination du capital de solvabilité requis pour faire face à ces risques.

On a donc essayé dans ce mémoire de traiter une des problématiques inscrites dans le cadre proposé par la nouvelle réforme SBR, à savoir le calcul du capital de solvabilité requis pour maîtriser un des risques majeurs obstruant les compagnies d'assurance et de réassurance. Il s'agit du risque de souscription en non vie pour un portefeuille représentant l'Afrique du Nord, et précisément ses deux volets les plus prépondérants, à savoir le risque de primes, issu principalement d'une sous tarification des contrats et le risque de réserves occasionné par un mauvais provisionnement.

Pour atteindre cet objectif, on a dû passer par plusieurs étapes. En effet, on a commencé par la construction de la courbe des taux selon plusieurs modèles dont on a retenu celui préconisé par l'ACAPS, à savoir le modèle de Smith Wilson. Puis on a estimé les provisions en utilisant plusieurs méthodes de provisionnement, pour évaluer, en faisant usage de toutes ces données, la meilleure estimation des engagements pour sinistres (Best Estimate) conformément à deux approches, l'approche standard et l'approche interne. Ensuite on a essayé de quantifier le risque de souscription non vie à travers le calibrage de la volatilité du risque de réserves suivant le modèle de Merz Wüthrich, et de la volatilité du risque de primes d'après la méthode des moindres carrés ordinaires.

Finalement, on a pu déduire le capital de solvabilité requis ou l'exigence en fonds propres nécessaire pour faire face au risque de souscription non vie avec une probabilité de confiance de 99.5 %.

Bibliographie

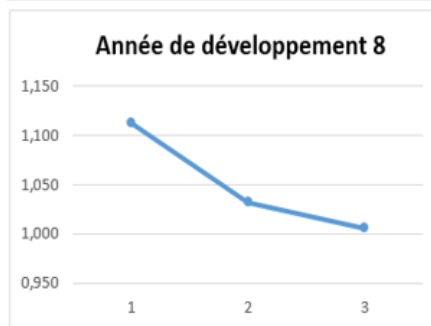
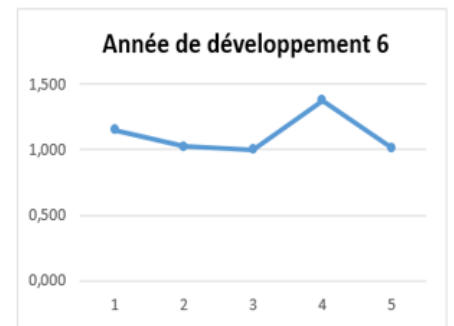
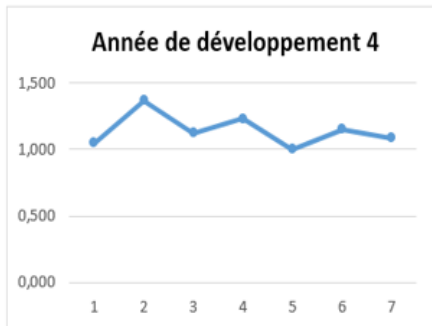
- Denuit & Charpentier (2005). Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Economica.
- Marri Fouad, cours assurance non vie II : tarification et provisionnement
- Salma Berrada Souni , cours Solvabilité des entreprises d'assurances et de réassurance.
- Cours Modèles et Méthodes de Réservation , Université de Strasbourg
- Layar K, Gouriach H, Méthodes de Provisionnement non-vie et Risque de Réserve à un an , Mémoire d'actuariat , INSEA 2017
- Yassine El Qalli, cours Courbe des Taux et Produits à Revenu Fixe
- Davy Sengdy, Optimisation du SCR Risque de Réserve sous Solvabilité II, Mémoire d'actuariat, Institut des actuaires

Annexe

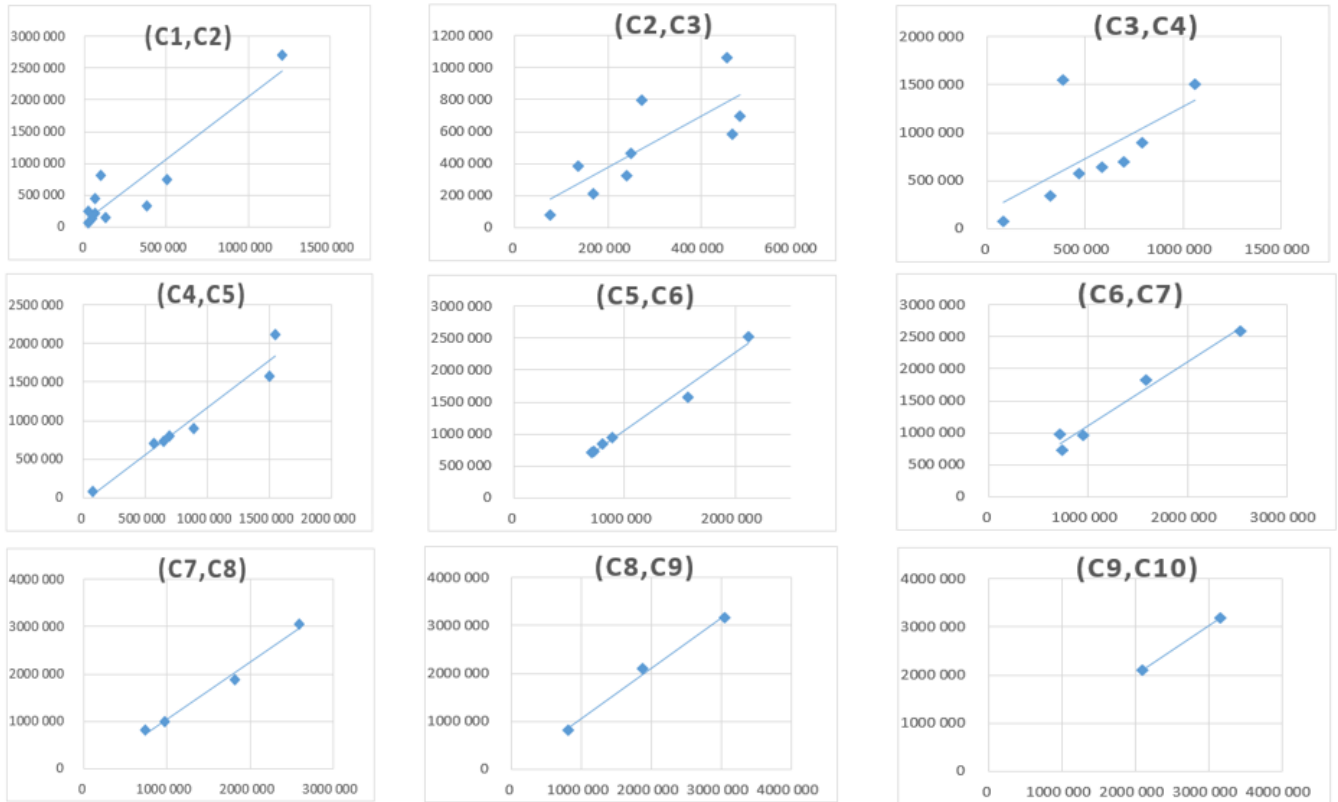
Annexe 1 : Vérification des hypothèses de Mack

* Engineering

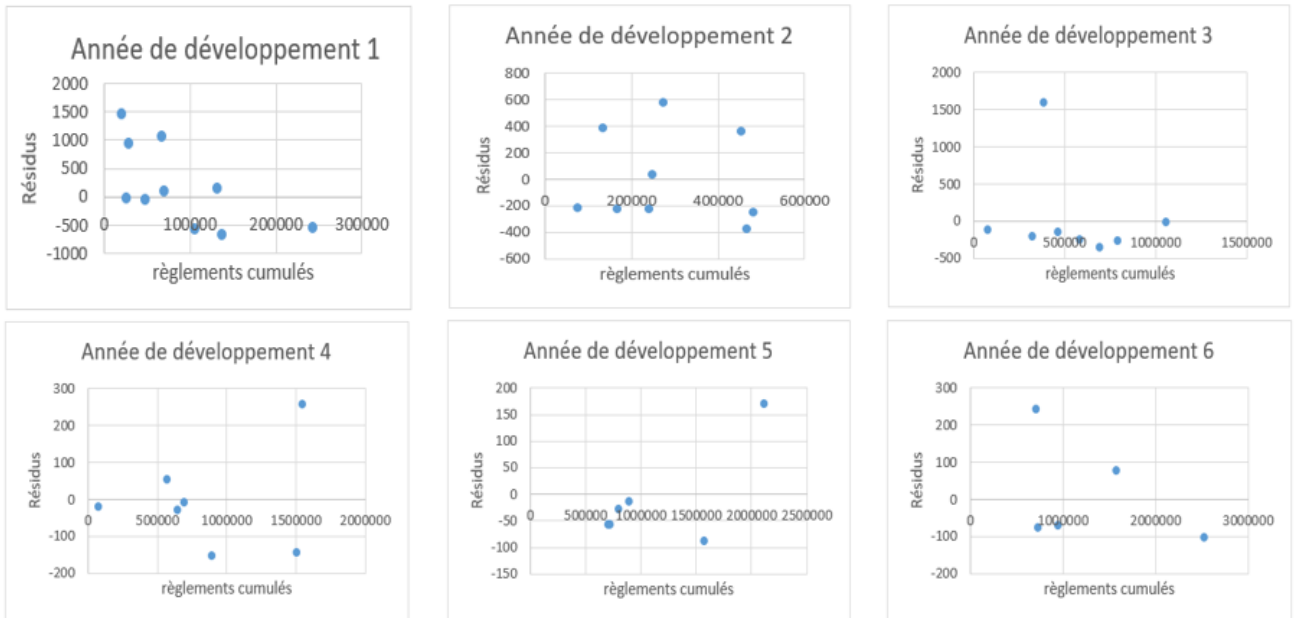
Hypothèse 1 :

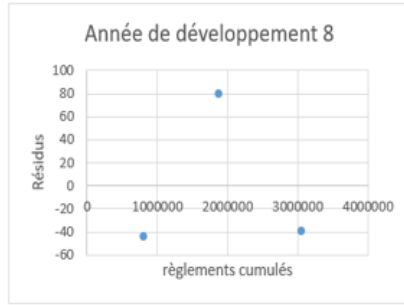
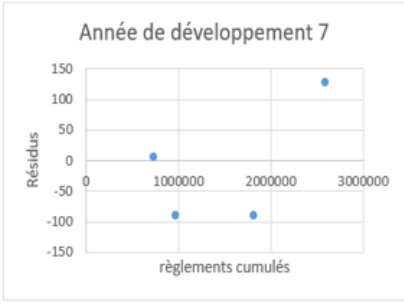


Hypothèse 2 :



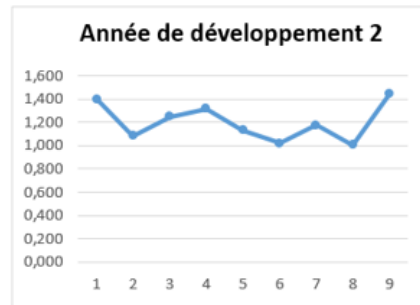
Hypothèse 3 :



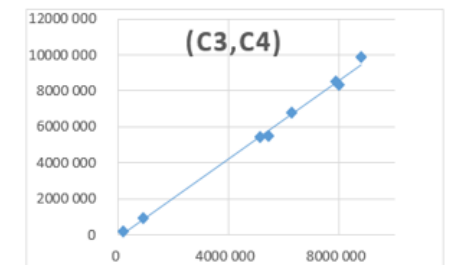
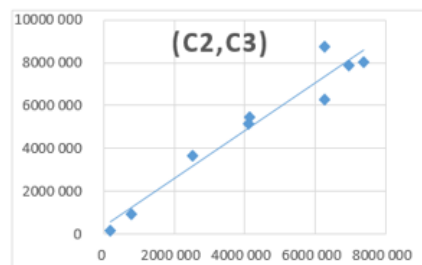
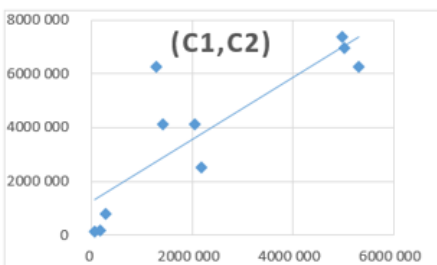


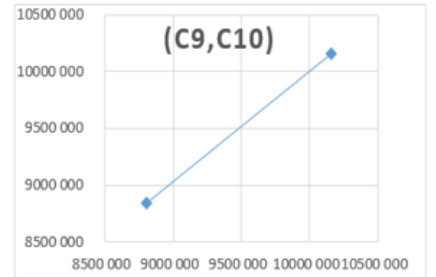
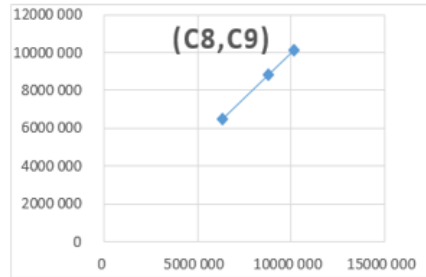
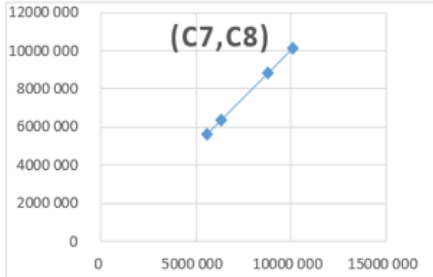
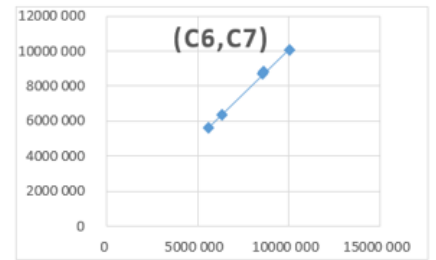
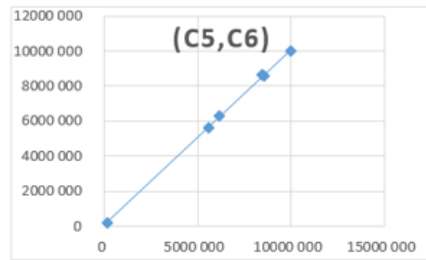
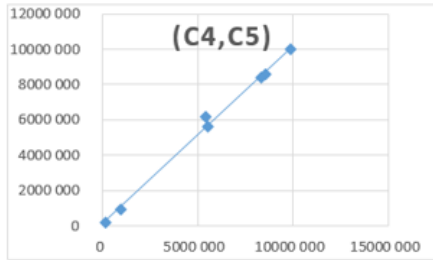
*** Incendie**

Hypothèse 1 :

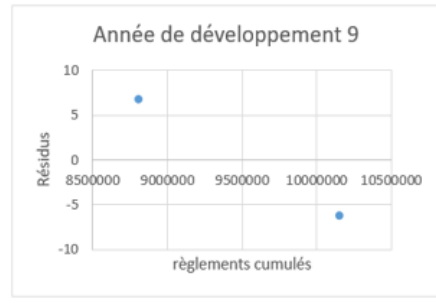
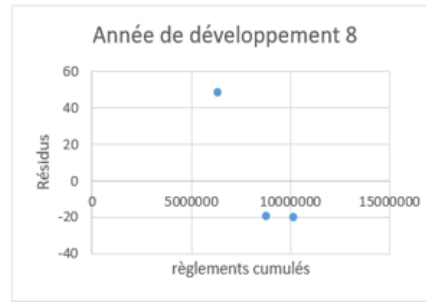
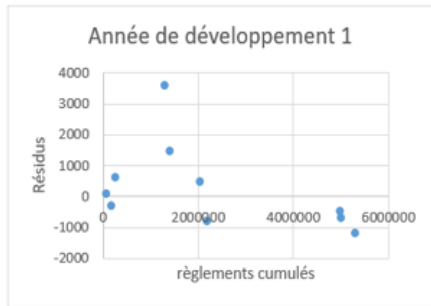


Hypothèse 2 :





Hypothèse 3 :



Annexe 2 : Estimation des coefficients de De Vyl-der

* Engineering

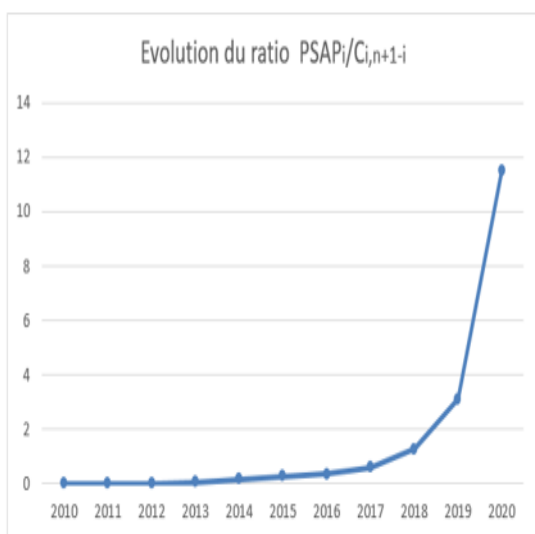
\hat{a}_i	2 141 639	3 919 798	632 231	861 083	1 112 247	735 837	59 746	366 628	515 782	1 075 489	11 105 952
\hat{b}_j	0,0451	0,0775	0,1431	0,2496	0,1157	0,0743	0,0452	0,0950	0,0412	0,0040	0,0019

* Incendie

\hat{a}_i	15 748 539	19 789 709	10 325 648	11 076 159	19 405 306	523 530	1 885 917	17 595 274	8 085 169	324 152	9 447 920
\hat{b}_j	0,2246	0,1447	0,0646	0,0318	0,0099	0,0053	0,0057	0,0020	0,0024	0,0012	0,0014

Annexe 3 : Vérification des hypothèses de Bornhuetter Ferguson

Engineering



Incendie



Annexe 4 : Vérification des hypothèses de Merz Wüthrich

Engineering

x	
2	6.875324e-02
3	5.915073e-01
4	6.955489e-02
5	1.448237e+00
6	2.273361e-02
7	7.204498e-01
8	2.366422e-02
9	1.699738e-01
10	5.498657e-09
11	0.000000e+00

Incendie

x	
2	5.004341e-02
3	1.873064e-01
4	1.778288e-04
5	1.528733e-01
6	3.564224e-04
7	6.780579e-02
8	1.695648e-05
9	2.737655e-03
10	5.550770e-10
11	0.000000e+00

Annexe 5 : Résultats du test de log normalité des charges de sinistralité après un an

Engineering

```
> shapiro.test(vasd$u)
shapiro-wilk normality test
data: vasd$u
w = 0.7348, p-value = 0.11318
```

Incendie

```
> shapiro.test(vasd$u)
shapiro-wilk normality test
data: vasd$u
w = 0.79408, p-value = 0.17862
```

Annexe 6 : Estimation des paramètres β et μ de la méthode du maximum de vraisemblance

Engineering

```
> optim(c(10,0.1),lognormal.lik2,y=vasd,method="BFGS")
$par
[1] 682.41234802 0.32413124
```

Incendie

```
> optim(c(10,0.1),lognormal.lik2,y=vasd,method="BFGS")
$par
[1] 1901.23110451 0.42173215
```