



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN



Institut National de Statistique
et d'Economie Appliquée

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation de la sinistralité des nouveaux marchés en réassurance : cas de l'Asie- Pacifique

Préparé par : *M. Ez-zarzouri Yassin*

Sous la direction de : *M. Fouad Marri (INSEA)*

M. Anasse YOUSSEFI (SCR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Fouad Marri (INSEA)*
- *M. AHMED OUAZZA (INSEA)*
- *M. Anasse Youssfi (SCR)*

Dédicace

Je dédie ce travail,

A mes chers parents, Abderrahmane et Idrissia. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation et aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tout l'amour que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

A mes frères, Ayoub et Walid, votre disponibilité, et pour tout le soutien que vous m'avez offert je vous dis MERCI. Trouvez dans ce travail l'expression de ma reconnaissance.

A tous les membres de ma famille, à mes amis, veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection

Table des matières

Dédicace	3
Table des matières.....	4
Remerciements.....	7
Liste des abréviations	8
Liste des figures	8
Liste des tableaux	10
Résumé et mots clés.....	12
Introduction générale.....	13
CHAPITRE I : Contexte et cadre général du projet.....	15
I. Présentation d'organisme d'accueil.....	16
I.1. La Société Centrale de Réassurance (SCR)	16
I.2. Organigramme de la SCR :	17
I.3. Entreprise Risk Management (ERM) :	17
II. La Réassurance :	18
II.1. Définition de la Réassurance :	18
II.2. Rôle de la réassurance :	19
II.3. Critères de classification de la Réassurance :.....	19
II.3.1. Critère juridique :	20
II.3.2. Critère technique :	20
III. Enjeux et piliers de la « Solvabilité Basée sur les Risques » :	23
III.1. La réglementation prudentielle actuelle au Maroc :.....	23
III.2. Les trois piliers de la « Solvabilité Basée sur les Risques »	24
III.2.1. Pilier 1 : Exigences quantitatives	25
III.2.2. Pilier 2 : Exigences qualitatives.....	25
III.2.3. Pilier 3 : Information.....	26
CHAPITRE II : Provisionnement et évaluation du Best Estimate.....	27
Partie 1 : Cadre théorique :.....	28
I. le provisionnement en assurance non vie.....	28
I.1. La vie d'un sinistre :.....	28
I.2. Notations :.....	28

II. les méthodes déterministes de provisionnement :	30
II.1. Les Méthodes Chain-Ladder :	30
II.1.1. Méthode de Chain-Ladder classique :	31
II.1.2. Méthode de Chain-Ladder Ajustée :	31
II.2. London Chain : une méthode autorégressive	32
II.3. La Méthode de Bornhuetter-Ferguson	33
II.4. Méthode de séparation de Taylor ::	34
II.5. AVANTAGES ET LIMITES DES METHODES DETERMINISTES :	35
III. les méthodes stochastiques de provisionnement :	36
III.1. MODELE DE THOMAS MACK :	36
III.2. Les modèles GLM :	38
III.3. La Méthode du Bootstrap GLM :	40
IV. Calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistre (Best Estimate pour sinistres) : .	41
IV.1. BE pour Sinistres dans le cadre du projet SBR : :	42
IV.2. La méthode interne du calcul du BE pour Sinistres :	43
V. Modélisation de la courbe des taux :	48
V.1. La courbe empirique : :	48
V.2. Modèles Paramétriques de la courbe des taux:	50
V.2.1 La méthode de Smith-Wilson :	50
V.2.2. Modèle de Nelson Siegel ::	52
Partie 2 : Cadre pratique : Application sur le portefeuille de la Région Asie-Pacifique :	53
I. Analyse du marché de l'assurances non vie de la région Asie-Pacifique :	53
II. Construction de la courbe des taux :	58
III. Application des méthodes de provisionnement classiques :	62
III.1. Résultats des méthodes déterministes ::	63
III.2. Résultats des méthodes Stochastiques :	73
IV-Calcul du Best Estimate pour sinistres :	79
IV.1. La méthode standard (SBR):	79
IV.2. Le modèle interne utilisé par la SCR :	82
CHAPITRE III : Inclusion des données de marché et Prévision du loss-ratio	89
Problématique :	90
Partie 1 : Cadre théorique des méthodes de prévision :	91
I. Notions de base des séries chronologiques :	91
I.1. Fonctions d'autocorrélation simple et partielle :	91

I.2. Stationnarité d'un processus :.....	91
I.3. Bruit blanc:.....	92
I.4. Tests de stationnarité (ou tests de racine unitaire) :.....	92
I.5. Processus ARIMA :.....	94
I.6. Processus ARMA.....	94
I.7. Méthodologie de Box-Jenkins :	95
II. Prédiction par lissage exponentiel :.....	97
II.1. Lissage exponentiel simple:.....	98
II.2. Lissage exponentiel double (ou de Holt) :	98
II.3. Lissage exponentiel de Holt-Winters :	99
Partie 2 : Cadre Pratique d'application des méthodes de prédiction et le calcul de BE :	100
I. La Prédiction naïve :.....	101
II. Prédiction par lissage exponentiel :.....	101
II.1. Lissage exponentiel simple:.....	101
II.2. Lissage exponentiel double (ou de Holt) :	102
II.3. Lissage exponentiel de Holt-Winters :	104
III. Prédiction par modèles linéaires des séries chronologiques :	104
IV. Choix de la plus juste prédiction du Loss Ratio :.....	107
IV.1. Première approche : Back-testing:.....	107
IV.2. La deuxième approche : Calage avec le bilan comptable :	108
Conclusion générale :	109
Références bibliographiques :	110
Annexe :	111

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie Dieu, le tout-puissant, de m'avoir donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'exprime mon respect et ma gratitude à l'égard de M. Youssfi Anasse, Directeur du pôle ERM, ainsi que l'ensemble de l'équipe constituée de M. Assali Anass, Mme OUDRHIRI Aziza, M. Mejdoubi Ilyass et M. BLALI Achraf pour l'accompagnement et l'encadrement de qualité ainsi que pour la bonne ambiance durant toute la période qui s'est écoulée de mon stage

Ainsi, je tiens à exprimer ma gratitude à tout le corps professoral de l'institut nationale de statistique et d'économie appliquée (INSEA) pour leur professionnalisme, pédagogie et l'intérêt qu'ils manifestent à l'égard de la formation des futurs ingénieurs, et particulièrement mon encadrant interne M. Fouad Marri pour ses précieux conseils, ses encouragements et pour sa disponibilité

Je tiens également à remercier M. OUAZZA, pour avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

Enfin, merci à tous ceux et celles qui feuilletteront ces pages.

Liste des abréviations

APAC : Asie-Pacifique

SCR : Société Centrale de Réassurance

ERM : Enterprise Risk Management

ACAPS : Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale

BE : Best Estimate

EPI : Estimated Premium Income

SBR : Solvabilité basée sur les risques

KRW : Won sud-coréen

NT\$: New Taiwan dollar

MAD : Marocain dirham

GLM : Generalized Linear Model

LR : Loss Ratio

SEP : Standard Error of Prediction

SER : Standard Error of Reserving

MSEP : Mean Squared Error of Prediction

BAM : Bank Al-Maghrib

Liste des figures

Figure 1 :	Evolution des primes émises et résultat net en millions MAD	p.16
Figure 2 :	Organigramme de la SCR	p.17
Figure 3 :	Réassurance : Acteurs et fonctionnement	p.18
Figure 4 :	Réassurance Quote part avec taux de cession de 40%	p.21
Figure 5 :	Traité Excédent de plein avec rétention de 5000000	p.21
Figure 6 :	Illustration d'un XS de priorité F et de portée C.	p.22
Figure 7 :	SL : portée P = 30%, C = 80%	p.22
Figure 8 :	les piliers de la SBR	p.24
Figure 9 :	Dynamique de la vie d'un sinistre	p.28
Figure 10 :	Schéma de la procédure à effectuer B fois	p.41
Figure 11 :	Méthodologie de calcul du BE selon la méthode standard	p.42
Figure 12 :	La forme du triangle de liquidation réestimé	p.44
Figure 13 :	L'assurance non-vie en Inde : Évolution des primes émises par branche	p.54
Figure 14 :	L'assurance non-vie en Corée de sud : Évolution des primes émises par branche	p.56
Figure 15 :	L'assurance non-vie en Taiwan : Évolution des primes émises par branche	p.58
Figure 16 :	Figure 1 : La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode du bootstrap	p.61
Figure 17 :	La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode de Smith Wilson	p.61
Figure 18 :	La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode du Nelson Siegel	p.62
Figure 19 :	Comparaison des $\lambda_{i,j}$ à $\bar{\lambda}_j$ pour $j=1, \dots, 12$	p.64
Figure 20 :	Vérification de la deuxième hypothèse Chain Ladder	p.66
Figure 21 :	Extrapolation des $\log(\mu_n)$ linéairement	p.71
Figure 22 :	Validation de la troisième hypothèse de Mack pour la branche Incendie de la région APEC	p.74
Figure 23 :	les paramètres du modèle GLM Poisson surdispersé pour la branche incendie	p.76
Figure 24 :	Les étapes de la méthodologie de Box-Jenkins	p.95
Figure 25 :	Représentation de la série des loss ratios historiques de la branche « incendie » du marché de la Corée de sud entre 1994 et 2019	p.101
Figure 26 :	Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par lissage exponentiel simple	p.102
Figure 27 :	représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de lissage exponentiel simple avec intervalle de confiance à 95%	p.102
Figure 28 :	Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par la méthode de Holt	p.103
Figure 29 :	Représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de Holt	p.103
Figure 30 :	Vérification de la saisonnalité de la série sous R	p.104
Figure 31 :	Application de la méthode de Lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnier sur les loss ratios historiques sous R et l'estimation des coefficients du modèle	p.104
Figure 32 :	Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par la méthode de Holt-Winters non saisonnier	p.104
Figure 33 :	Résultat sous R de test de stationnarité de dickey fuller augmenté sur l'historique des loss Ratios pour la branche incendie du marché sud-coréen	p.105
Figure 34 :	Estimation du paramètre d du modèle ARIMA Sous R	p.105
Figure 35 :	Estimation des coefficients p et q du modèle ARIMA sous R	p.105
Figure 36 :	Résultat test de Ljung-Box sous R	p.106
Figure 37 :	Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par le modèle ARIMA	p.106
Figure 38 :	Représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de Holt	p.106

Liste des tableaux

Tableau 1 : Les différentes formes juridique de la réassurance	p.20
Tableau 2 : Triangle des paiements cumulés	p.29
Tableau 3 : Table des paiements cumulés estimés	p.29
Tableau 4 : La forme du triangle décumulé dans la méthode de Taylor	p.34
Tableau 5 : la matrice des cadences de liquidation	p.47
Tableau 6 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en inde entre 2016 et 2020 en millions USD	p.54
Tableau 7 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie indienne entre 2016 et 2020	p.55
Tableau 8 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie en Corée de sud entre 2015 et 2019	p.55
Tableau 9 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en Corée de sud entre 2016 et 2020 en milliard KRW	p.56
Tableau 10 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie en Taiwan entre 2016 et 2020	p.57
Tableau 11 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en Taiwan entre 2016 et 2020 en millions de NT\$	p.57
Tableau 12 : Les transactions sur les bons de trésor au 31/12/2020	p.59
Tableau 13 : Taux actuariels	p.60
Tableau 14 : Taux actuariels interpolés	p.60
Tableau 15 : Le triangle des paiements cumulés la branche « Incendie »	p.63
Tableau 16 : Triangle des coefficients de développement individuels	p.65
Tableau 17 : Moyenne-Ecart type-Coefficient de variation des coefficients de développement individuels	p.65
Tableau 18 : Les coefficients Chain Ladder classique pour la branche « Incendie » de la région d'Asie	p.66
Tableau 19 : provisions obtenus par la méthode Chain Ladder	p.67
Tableau 20 : Les PSAP Chain Ladder obtenus pour les trois segments du portefeuille non vie de la région APEC en MAD	p.67
Tableau 21 : développement du triangle des primes par méthode de Chain Ladder standard	p.68
Tableau 22 : le calcul de ratio de sinistralité retenu par la méthode de Bornhuetter-Ferguson	p.68
Tableau 23 : Les provisions à l'ultime par année de souscription par la méthode de Bornhuetter-Ferguson	p.69
Tableau 24 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de Bornhuetter-Ferguson du portefeuille non vie de la région APEC en MAD	p.69
Tableau 25 : Les coefficients de la méthode de london Chain pour le segment incendie de la région APAC	p.69
Tableau 26 : Tableau des règlements prédits par méthode London-Chain	p.70
Tableau 27 : les PSAP par la méthode London Chain	p.70
Tableau 28 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de London Chain du portefeuille non vie de la région APEC en MAD	p.70
Tableau 29 : Calcul des μ_n actuels et futurs ainsi que les r_i	p.71
Tableau 30 : Calcul des règlements futurs par la méthode de Taylor	p.72
Tableau 31 : les PSAP sous le modèle de Taylor en MAD	p.72
Tableau 32 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de Taylor du portefeuille non vie de la région APEC en MAD	p.73
Tableau 33 : récapitulatif des provisions constituées par segment selon les différentes méthodes de provisionnement déterministes sur les trois segments du portefeuille d'étude	p.73

Tableau 34 : les volatilités du triangle de règlements par année de déroulement pour la branche incendie	p.75
Tableau 35 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack par année de survenance pour la branche incendie	p.75
Tableau 36 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack pour tous les segments du portefeuille	p.76
Tableau 37 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM surdispersé par année de survenance pour la branche incendie	p.77
Tableau 38 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM pour tous les segments du portefeuille	p.77
Tableau 39 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap GLM par année de survenance pour la branche incendie	p.78
Tableau 40 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap GLM pour tous les segments du portefeuille	p.79
Tableau 41 : le triangle de sinistres payés rempli par la méthode de Chain pour la branche incendie	p.80
Tableau 42 : le triangle de sinistres payés rempli décumulé par la méthode de Chain pour la branche incendie	p.80
Tableau 43 : Les cashflows obtenus par la méthode Chain Ladder par année de projection	p.80
Tableau 44 : Les taux zéro-coupon, générés par le modèle de Smith Wilson de maturité 1 à 15 ans	p.81
Tableau 45 : Les cashflows actualisés	p.81
Tableau 46 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille	p.82
Tableau 47 : Les coefficients Chain Ladder classique pour le triangle des sinistres payés et de charges de sinistres	p.82
Tableau 48 : Les coefficients Chain Ladder classique pour le triangle des primes	p.83
Tableau 49 : Les ratios S/P ultimes obtenus par année de survenance et le S/P retenu	p.83
Tableau 50 : Les ratios C/P ultimes obtenus par année de survenance et le C/P retenu	p.83
Tableau 51 : Triangle des sinistres payés cumulés rempli	p.84
Tableau 52 : Triangle des charges de sinistres cumulés rempli	p.84
Tableau 53 : Les soldes à liquider par année de survenance	p.85
Tableau 54 : Les soldes à liquider obtenues par année de survenance après paramétrage	p.86
Tableau 55 : Calcul des cadences de liquidations par année de survenance	p.86
Tableau 56 : Calcul des cashflows non actualisés	p.86
Tableau 57 : Calcul des cashflows actualisés	p.87
Tableau 58 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille	p.87
Tableau 59 : Récapitulatif des résultats d'estimation du loss ration 2020 de la branche « incendie » du marché sud-coréen	p.107
Tableau 60 : Récapitulatif des résultats d'estimation du loss ration 2019 de la branche « incendie » du marché sud-coréen	p.107
Tableau 61 : erreur de prédiction du Loss Ratio 2019 de la branche « incendie » du marché sud-coréen par les différentes méthodes	p.108

Résumé et mots clés

Résumé :

Le problème de fiabilité et disponibilité des données est parmi l'un des plus populaires avec lesquels l'actuaire est confronté dans le cadre de calcul des provisions techniques des compagnies d'assurance. Dans le cadre des méthodes classiques, cela peut se manifester sous la forme d'un historique de portefeuille non significatif. Or, dans le cadre des approches internes, qui intègrent parfois des paramètres issus des données externes dans ce processus, cela peut s'avérer plus compliqué. Ainsi, une fausse estimation de ces paramètres peut engendrer des graves retombées pour la compagnie.

Ce travail a comme objectif effectuer une étude approfondie de l'approche de provisionnement de la SCR pour un portefeuille de la région Asie Pacifique.

Pour réaliser ce travail, nous effectuerons en premier lieu une projection des sinistres à l'ultime, en faisant appel aux directives de l'ACAPS relatives aux méthodes classiques du provisionnement, et à la notion du Best Estimate.

Ensuite, nous exposerons la politique interne de la SCR qui traite alternativement cette problématique, et nous comparerons les résultats issus avec ceux déjà obtenus.

Pour finir, nous confronterons le problème du manque des données dans l'estimation des paramètres clés de cette approche interne. On s'intéresse en particulier à l'estimation du Benchmark du ratio de sinistralité à partir des données du marché. Nous exposerons les différentes techniques statistiques permettant de pallier ce problème du manque des données, allant des méthodes naïves vers celles plus complexe, puis nous identifierons l'approche menant à l'estimation la plus optimale de ce ratio.

Mots clés :

Solvabilité basée sur les risques, Best Estimate non vie, Chain Ladder, London Chain, Bornhuetter Ferguson, Taylor, Bootstrap, GLM, Ratio de sinistralité, Lissage exponentiel, ARIMA

Introduction générale

Dans sa quête à augmenter son chiffre affaires et confirmer sa position comme réassureur international de référence, la SCR a créé un nouveau portefeuille dédié à la région Asie-Pacifique, une région qui contient des économies parmi les plus développées au monde, et par conséquent des marchés d'assurance en plein essor, ce qui constitue une opportunité à ne pas rater.

Avec la création de ce portefeuille, la SCR est tenu d'assurer sa capacité à honorer ses engagements vers ses clients avec une évaluation prudente des actifs et passifs associés, et avec un pourcentage de 80 de ce passif, une bonne estimation des provisions est primordiale pour assurer la solvabilité et la pérennité de ce portefeuille.

Dans cette perspective, L'ACAPS a instauré la réforme SBR ; Solvabilité Basée sur les Risque ; pour aider les compagnies d'assurance à vérifier leur solvabilité, et par la suite, protéger leurs clients contre tout événement d'insolvabilité imprévu. Dans le cadre de cette réforme, les provisions sont évaluées suivant le principe du « Best Estimate », qui se base sur une évaluation à valeur de marché. Cette estimation fait appel à des techniques statistiques et actuarielles, qui seules sont capables de tenir compte de toutes les entrées et sorties du capital nécessaire pour modéliser ces provisions.

Ces techniques souvent se basent sur les observations du portefeuille étudié pour réaliser ces estimations, ce qui impose accorder une grande importance à la qualité et la disponibilité des données. Or, pour un portefeuille récent comme le nôtre, dont on ne dispose pas d'historique suffisant et significatif, l'application directe de ces méthodes peut mener à des résultats qui biaisent le jugement de l'actuaire et le mènent à prendre des décisions avec des graves retombées sur la compagnie.

Ce mémoire vise dans un premier lieu réaliser une étude approfondie de la politique du provisionnement pratiquée par la SCR, afin de vérifier son adéquation à son profil de risque. Ensuite, nous nous intéresserons au problème de manque de données dans la modélisation de sinistralité, plus précisément celle du Loss Ratio.

Dans la première partie, nous présenterons le cadre général de l'étude, on commencera par une présentation de l'organisme d'accueil, ensuite nous aborderons quelques généralités sur la réassurance avant de finir par la présentation du nouveau cadre réglementaire mis en place par l'ACAPS et qui régit le secteur des assurances au Maroc : la Solvabilité Basée sur les Risques(SBR).

Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons au calcul des provisions techniques non vie par les différentes méthodes de provisionnement, que ça soit déterministes (Chain

Ladder, London Chain, Bornhuetter-Ferguson, Taylor), ou stochastiques (Mack, GLM, Bootstrap). Après, nous essaierons de calculer le Best Estimate en suivant la démarche élaborée par la réforme SBR. Cette approche sera par la suite confrontée avec celle de la SCR, dont la méthodologie sera présentée en détail. Par la suite, nous comparerons les résultats obtenus pour déterminer la méthode la plus adéquate.

Dans la dernière partie, Nous traiterons la problématique de l'estimation du benchmark d'un ratio de sinistralité à partir des données de marché et plus précisément lors du manque des données fiables. Nous exposerons les différentes techniques statistiques permettant de réaliser cette opération allant des méthodes naïves vers celles plus complexe, puis nous identifierons l'approche menant à l'estimation la plus optimale de ce ratio.

CHAPITRE I :

Contexte et cadre général du projet

.....

I. Présentation d'organisme d'accueil

I.1. La Société Centrale de Réassurance (SCR)

La Société Centrale de Réassurance est créée en 1960, par convention entre l'Etat et la Caisse de Dépôt et de Gestion qui est le 1er groupe Financier qui détient la majorité du Capital avec plus de 94% et ceci afin de fournir divers produits de réassurance dans les deux branches d'assurance vie et non vie pour les compagnies d'assurance au Maroc ainsi qu'à l'étranger, au niveau national la SCR a pour mission de conserver, réguler et sécuriser le marché de la réassurance.

La SCR est devenue aujourd'hui un partenaire de choix des différentes institutions financières et ceci grâce à son excellente réputation, elle est le 1er Réassureur arabe et 3ème Réassureur africain, elle notée par les agences de notation comme suit : AM.Best (B++ Good), Standard & Poors (BBB-/Stable) et Fitch (AAA/ Stable).

En 2020, et malgré le contexte marqué par la Pandémie de la Covid 19 et le durcissement du marché, la SCR a augmenté son chiffre d'affaire et son résultat net de plus de 30% et 14% respectivement par rapport à l'année 2019 et a affiché en 2020 un chiffre d'affaire de 2633 millions de Dirham et un résultat net de 318 millions de Dirham

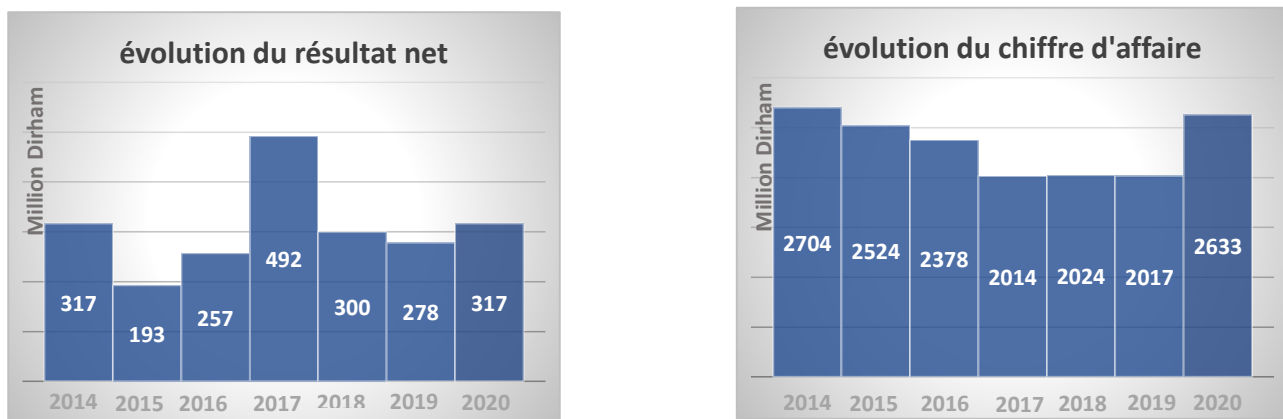


Figure 1 : Evolution des primes émises et résultat net en millions MAD

I.2. Organigramme de la SCR :

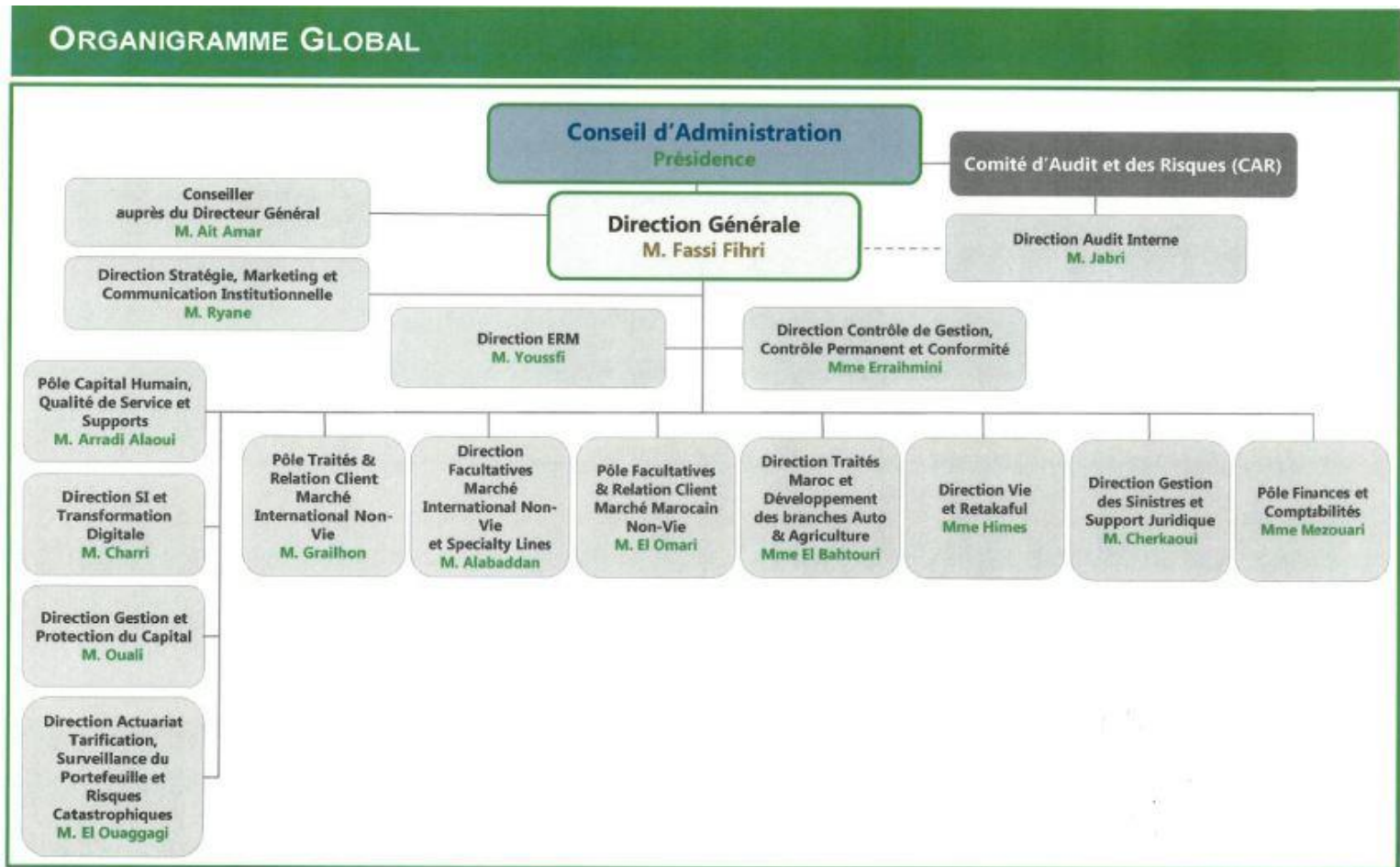


Figure 2 : Organigramme de la SCR

I.3. Enterprise Risk Management (ERM)

L'ERM est une méthodologie qui envisage la gestion des risques de manière stratégique du point de vue de l'ensemble de l'entreprise ou de l'organisation. Il s'agit d'une stratégie descendante qui vise à identifier, à évaluer et à se préparer aux pertes, dangers, risques et autres dommages potentiels qui peuvent interférer avec les opérations et les objectifs d'une organisation et/ou entraîner des pertes.

L'ERM est crucial dans L'instauration des nouvelles normes de solvabilité qui associent la régulation du capital requis au notion de risque.

C'est pour ceci que la SCR s'est doté d'un système de management centralisé, à savoir le pole ERM et surtout avec les nouvelles règles prudentielles qui s'apprêtent à rentrer en vigueur.

Ce pôle se compose de deux départements : Le Département Actuariat & Solvabilité sous la et le département ALM et gestion des risques.

II. La Réassurance

II.1. Définition de la Réassurance :

Juridiquement, la réassurance est un contrat par lequel un réassureur (dit cessionnaire) s'engage, moyennant rémunération, à rembourser à un assureur (dit cédant), dans des conditions déterminées, tout ou en partie des sommes dues ou versées par l'assureur à ses assurés à titre de sinistres.

L'opération constitue une cession pour l'assureur et une acceptation pour le ou les réassureurs. Les réassureurs à leur tour peuvent à leur tour rétrocéder cette affaire à un rétrocessionnaire. La réassurance est donc une activité où une entreprise financière spécialisée accepte de porter les risques cédés par une entreprise d'assurance ou par une autre entreprise de réassurance moyennant décote des créances cédées.

Et selon PICARD ET BESSON (1975) : « la réassurance est un contrat par lequel l'assureur direct se décharge sur une autre personne, le réassureur, de tout ou partie de ses risques qu'il a assumés. »

Cette définition fait apparaître quelques éléments typiques de la réassurance :

- C'est une assurance au second degré (Assurance Secondaire)
- Le réassureur suit le sort de l'assureur
- L'assuré ignore tout de l'opération dont il n'est pas parti
- La réassurance permet de stabiliser le résultat de l'assureur.

La définition la plus simpliste possible de la réassurance c'est de dire que c'est « l'assurance de l'assurance »

La figure suivante illustre le fonctionnement et les différents acteurs de la réassurance

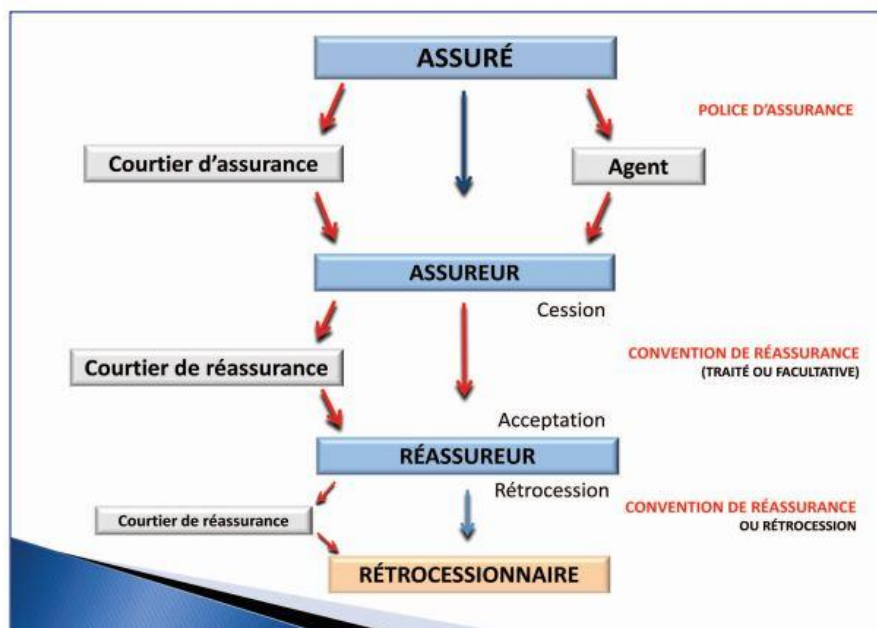


Figure 3 : Réassurance : Acteurs et fonctionnement

II.2. Rôle de la réassurance :

Dans le monde assurantiel, la Réassurance est d'une importance capitale de contrôle de risque mais Son utilité ne se limite pas à la gestion du risque uniquement, mais atteint plusieurs aspects de son activité. Nous citerons dans la suite quelques utilités de la réassurance :

II.2.1. Protection financière

La réassurance offre une protection du bilan pour l'assureur contre les événements extrêmes en particulier contre :

- Sinistres catastrophiques
- Sinistres individuels graves
- Fréquence anormale de sinistres "normaux".

Ceci permet aux assureurs de ne garder pour leur compte que des sinistres homogènes et donc posséder des portefeuilles homogènes

II.2.2. Augmentation de la Capacité de Souscription

Un assureur réassuré est un assureur protégé. Et par conséquent, il peut envisager la souscription des polices portant sur des risques plus nombreux ou plus importants sans pour autant augmenter son besoin en fond propre

II.2.3. Rôle de conseil et Support technique

Les réassureurs jouent le rôle d'un conseiller et support technique grâce à leur qualification dans le domaine, en effet ils disposent à la fois de l'expérience et de l'expertise parfois inaccessibles aux assureurs traditionnels, ce support technique consiste à :

- Apporter son expertise dans certains domaines comme la tarification des risques aggravés rarement confrontés par les assureurs traditionnels, ou bien la sélection médicale en assurance-vie.
- Proposer et définir aux compagnies d'assurance le plan de réassurance le plus efficace qui répond parfaitement à leur besoin en réassurance
- Offrir des services en termes d'assistance, de formation des collaborateurs de cédante ou encore d'organisation.

II.2.4. Allègement de la Trésorerie :

Avec la protection de la réassurance, une compagnie d'assurance arrive à maintenir sa liquidité à un niveau suffisant surtout en cas de sinistralité exceptionnelle, en mettant à sa disposition immédiatement la liquidité qu'elle en a besoin, et ce par l'appel au comptant.

II.3. Critères de classification de la Réassurance :

La réassurance peut être classée selon deux critères :

Un premier critère juridique : la forme du contrat et un deuxième technique : il définit les paramètres liés à la rétention.

II.3.1. Critère juridique :

Juridiquement on distingue trois types de réassurance : la réassurance facultative, la réassurance obligatoire et la réassurance semi-facultative.

II.3.1.1. La réassurance facultative :

C'est la plus ancienne forme de réassurance, elle constitue un contrat entre la cédante et un réassureur portant sur un ou des risques explicitement, et qui sont l'objet d'un seul et même contrat. Dans ce type de réassurance l'assureur est libre de céder une partie ou la totalité d'un risque au réassureur, tandis que ce dernier se réserve le droit d'accepter ou de refuser, d'où la dénomination « facultative ».

S'appliquant risque par risque, la réassurance facultative présente toutefois l'inconvénient d'engendrer des coûts élevés en matière de gestion.

II.3.1.2. La réassurance Obligatoire (dite aussi conventionnelle) :

C'est un accord ou une convention entre l'assureur et ses réassureurs au terme duquel, ces derniers s'engageront à couvrir toutes les affaires que l'assureur leur cédera dans certaines limites et clauses. Cet accord s'appelle un traité de réassurance. Toute affaire qui répond aux exigences du traité est incluse automatiquement et sans discussion. L'avantage de cette couverture, la plus répandue, est qu'elle nécessite un travail de gestion simple et aisé.

II.3.1.3. La réassurance semi-facultative (dite aussi facultative –obligatoire) :

C'est une forme de réassurance intermédiaire, au terme de laquelle, la cédante n'est pas obligée de céder, par contre, le réassureur est obligé d'accepter les risques qui lui sont proposés par l'assureur.

On peut résumer ces formes de réassurance dans le tableau suivant :

Formes de réassurance	Cédante	Réassureur
Obligatoire	Ob	Ob
Facultative	Fac	Fac
Facultative obligatoire	Fac	Ob

Tableau 1 : Les différentes formes juridique de la réassurance

II.3.2. Critère technique :

Par critère technique on distingue entre deux grandes catégories de réassurance :

II.3.2.1. La réassurance proportionnelle

La réassurance proportionnelle consiste en une participation proportionnelle du réassureur aux gains (primes) et pertes (sinistres) de la cédante

Il existe deux formes de traité de réassurance proportionnelle : la quote-part et l'excédent de plein.

a. La Quote part QP (ou Quota share QS)

Dans un traité en quote-part, encore appelé traité en participation, cédante et réassureur conviennent d'une cession identique des primes et de la sinistralité. Chaque sinistre, quelle que soit sa hauteur, est partagé selon la même proportion entre assureur et réassureur

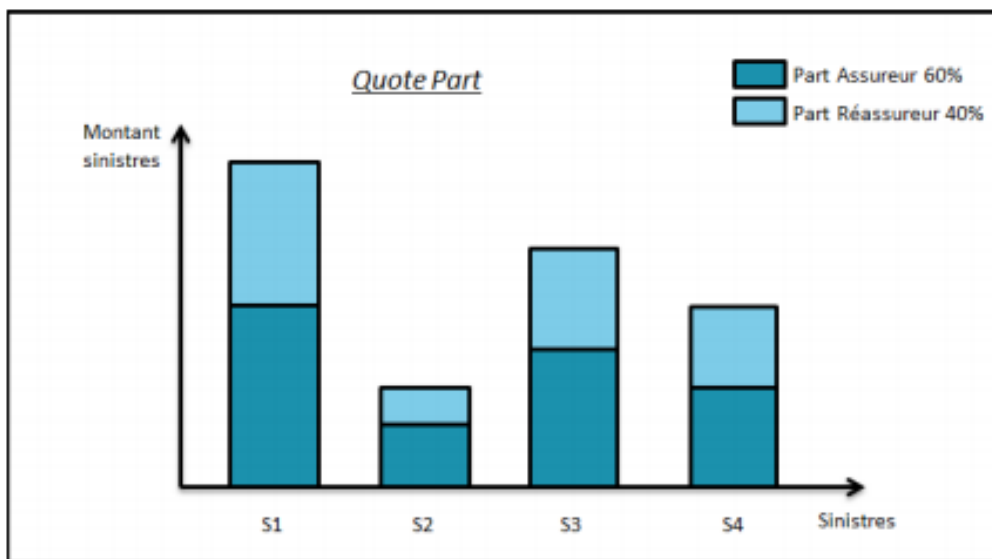


Figure 4 : Réassurance Quote part avec taux de cession de 40%

b. L'excédent de plein XP :

Dans cette forme, la cédante détermine un plein de rétention, ou plein de conservation, c'est le montant monétaire maximal que la cédante souhaite prendre en charge lorsqu'un sinistre survient, le taux de cession est déterminé risque par risque, en fonction de la somme assurée et de ce plein et par conséquent pour les risques dont les sommes assurées ne dépassent pas le plein, il n'y a pas de réassurance. Les petits risques ne sont donc pas réassurés.

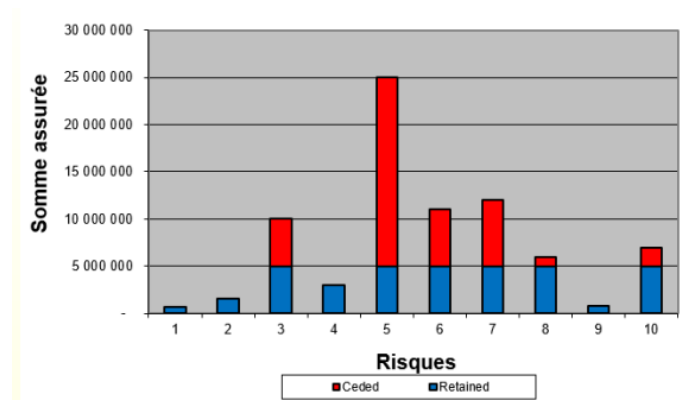


Figure 5 : Traité Excédent de plein avec rétention de 5000000

II.3.2.2. La réassurance non proportionnelle :

Dans ce type de réassurance Les primes cédés et sinistres pris en charge par le réassureur ne sont pas dans les mêmes proportions.

Il existe deux formes de traité de réassurance non proportionnelle : l'Excédent de Sinistre (XS) et l'Excédent de Perte (Stop loss LS).

a. Traités de réassurance en excédent de Sinistre :

Appelé aussi « XS par sinistre », il s'agit du type de protection le plus répandu en réassurance non proportionnelle. Dans ce type de traité, le réassureur s'engage à rembourser la cédante pour les montants dépassant la franchise à hauteur d'une certaine portée.

Le schéma ci-dessous illustre la zone protégée et non protégée pour un XS de priorité F et de portée C.

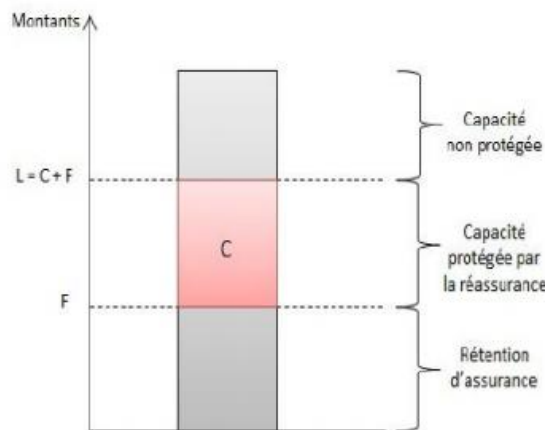


Figure 6 : Illustration d'un XS de priorité F et de portée C.

b. Traités de réassurance en excédent de perte :

Le principe du Stop Loss est le même que celui de l'XS, mis à part qu'il protège le ratio S/P (loss ratio) de l'année, en effet Le réassureur intervient lorsque le ratio de sinistralité annuelle dépasse la priorité (P) et son intervention est limitée à une valeur prédéterminée (C), La priorité et la portée sont en général exprimées en pourcentage de la prime directe.

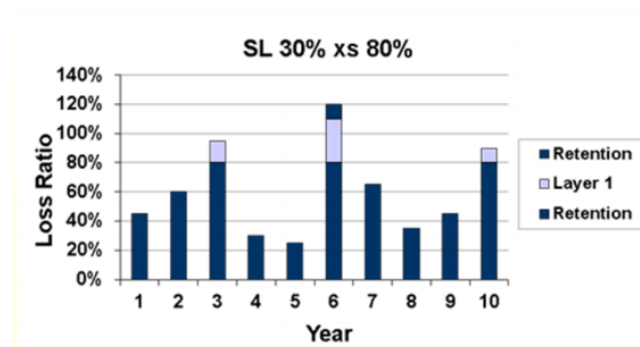


Figure 7 : SL : portée P = 30%, C = 80%

III. Enjeux et piliers de la « Solvabilité Basée sur les Risques »

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) a élaboré en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) » qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour l'évaluation de la solvabilité. Vu les insuffisances du cadre prudentiel actuel au Maroc, et afin que celui-ci soit sur pied d'égalité avec l'Europe en termes de réglementation prudentielle dans le secteur assurantiel, le projet SBR devrait être planté. Mais avant tout, il est impératif de rappeler les règles sur lesquelles se base le régime actuel et ses points faibles pour mieux appréhender les objectifs de la SBR

III.1. La réglementation prudentielle actuelle au Maroc

En vue d'honorer les engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats, les sociétés d'assurance suivent la réglementation prudentielle marocaine qui est fondé sur quatre volets :

- Évaluer prudemment les provisions techniques et les placements ;
- Avoir des actifs de bonne qualité en représentation des engagements ;
- Calculer une marge de solvabilité ;
- Déterminer des ressources permettant de couvrir cette marge de solvabilité.

En effet, la réglementation exige des provisions techniques suffisantes et prudentes pour évaluer le règlement intégral des engagements. A cet instar, des taux et des tables de mortalité prudentes surestimant la mortalité sont considérés dans le calcul de provisions. Cependant, malgré ce degré de prudence, d'autres scénarios et risques ne sont pas pris en compte, ce qui génère des insuffisances liées à ce régime :

- Basé sur des éléments comptables et non économiques ;
- Trop simpliste : pas de prise en compte de la diversité des risques et de leurs spécificités ainsi la marge de Solvabilité ;
- La marge de solvabilité réglementaire ne reflète pas les risques portés par l'assureur ;
- Règlementation non cohérente avec la règlementation bancaire (Bâle III) ;
- Risques associés aux placements 3mal appréhendés ;
- Quasi absence de normes en matière de gouvernance ;
- Non prise en compte de la réalité des groupes d'assurance.

Dans l'objectif de remédier à ces insuffisances, et afin de se conformer aux normes internationales de façon structurée, la future réglementation s'organise en trois niveaux de textes :

- Articles 239 et 239-2 de la loi n°17-99 portant code des assurances ;
- Circulaire d'application : projet en consultation ;

- Instructions et décisions éventuelles.

III.2. Les trois piliers de la « Solvabilité Basée sur les Risques »

La réforme réglementaire SBR, inspirée de la directive européenne Solvabilité II entrée en vigueur le 1er janvier 2016, vient combler les lacunes du régime prudentiel actuel et le modifier en profondeur. Et, afin d'harmoniser la mise en œuvre des exigences internationales et de mieux appréhender les profils de risque des entreprises d'assurance, la nouvelle réglementation s'articule autour de trois piliers.

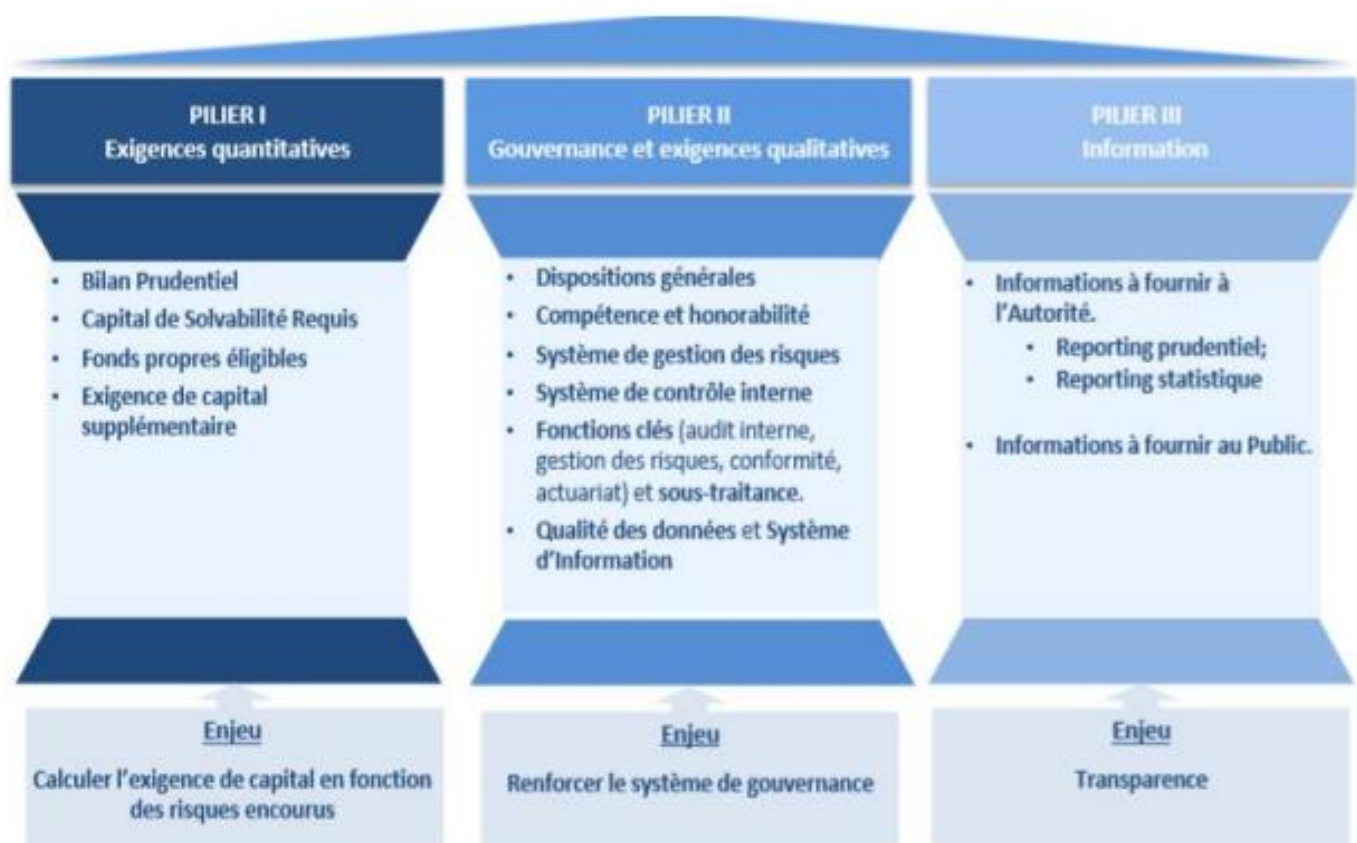


Figure 8 : les piliers de la SBR

Les objectifs visés par l'ACAPS via cette nouvelle réglementation, sont les suivants :

- Renforcer la résilience du secteur des assurances face aux risques encourus
- Renforcer les systèmes de gouvernance et la culture de gestion des risques
- Se conformer aux normes internationales

Faisant maintenant un Zoom sur les 3 piliers de la SBR :

III.2.1. Pilier 1 : Exigences quantitatives

Ce pilier a pour objectif de définir les normes quantitatives en matière de provisions techniques et de fonds propres en tenant compte de tous les risques inhérents à l'activité de l'entreprise. En effet seul le risque de souscription est actuellement pris en compte, ce qui conduit à des calculs de ratios de solvabilité qui ne reflètent pas la situation réelle de l'assureur. Ces risques sont :

- Le Risque de souscription : résultant des hypothèses inadéquates en matière de sinistralité, de tarification, ou de provisionnement.
- Le Risque de marché : c'est un risque généré par les fluctuations que connaît le niveau de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers.
- Risque de contrepartie : résultant d'un défaut de paiement d'une contrepartie. } Risque opérationnel : qui peut être résultat de procédures internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événement extérieurs.
- Risque de concentration : résultant d'un manque de diversité des émetteurs auxquels l'entreprise d'assurance est exposée.

Le changement touchera également à la valorisation des bilans, ces derniers seront valorisés aux valeurs économiques.

Ainsi ce pilier concernera :

- La valorisation des actifs et des passifs.
- Les fonds propres (FP).
- Le SCR : Capital de Solvabilité Requis (Solvency Capital Requirement).
- Provisions techniques : La valeur des provisions techniques représente le montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance. Ces provisions techniques doivent être calculées de manière prudente, fiable, objective et en cohérence avec le marché, afin qu'elles puissent tenir compte des différents risques.

Elles sont évaluées en additionnant :

- 1) La meilleure estimation des engagements correspond à la valeur probabilisée et actualisée de flux de trésorerie futurs afférents aux engagements de l'entreprise d'assurances et de réassurance au titre des contrats souscrits et déterminée, selon la nature des opérations d'assurance.
- 2) La meilleure estimation des frais de gestion correspond à la valeur probabilisée et actualisée du montant relatif à la gestion des contrats et déterminée, selon la nature des opérations d'assurance.
- 3) La marge de risque correspond au coût d'immobilisation du capital de solvabilité requis afférent aux engagements garantis. Elle est déterminée en appliquant à la meilleure estimation des engagements, selon la nature des opérations d'assurance, un coefficient qu'on déterminera ultérieurement.

III.2.2. Pilier 2 : Exigences qualitatives

Ce pilier est relatif aux exigences qualitatives et à la gouvernance. Ce pilier étoffe le dispositif actuel concernant le contrôle de la gestion de risque et la partie audit interne dans l'objectif

d'établir une gouvernance globale appropriée, des politiques clairement définies et de mettre en place des fonctions essentielles suffisamment indépendantes dont le rôle est clairement défini

Ainsi ce deuxième pilier structure :

- Une gouvernance appropriée qui reflète des politiques écrites concernant le système de gouvernance validées par le conseil d'administration, une direction générale et un conseil d'administration possédant collectivement les qualifications, un système opérationnel et efficace de coopération, de reporting interne et de communication des informations. . .
- Des systèmes d'audit, de contrôle interne et de gestion des risques performants via la mise en place d'un manuel de procédures de contrôle interne, révisé à intervalles réguliers et tenant compte des audits internes et externes, Une évaluation interne des risques effectuée de façon régulière, des systèmes sous la responsabilité de la direction générale.

III.2.3. Pilier 3 : Information

Le pilier 3 oblige les opérateurs à communiquer de façon transparente et périodique des informations précises et détaillées sur leurs activités avec l'Autorité et avec le public à travers des états prudentiels et statistiques ainsi que des rapports narratifs. Toutes les informations rapportées doivent respecter les impératifs de pertinence, d'intégrité et de fiabilité

CHAPITRE II :

Provisionnement et évaluation du Best Estimate

.....

Partie 1 : Cadre théorique

I. le provisionnement en assurance non vie

Le cycle de production en assurance est inversé, chose qui rend essentiel de constituer à tout moment des provisions afin de régler les sinistres

I.1. La vie d'un sinistre

Pour comprendre la notion de sinistre en assurance, il est important de la dynamique de la vie d'un sinistre.

L'inversion du cycle de production caractérise l'assurance. L'assureur fait la promesse d'une indemnisation à l'assuré en cas de réalisation d'un sinistre, moyennant une prime reçue périodiquement.

Si un sinistre survient pendant la période de couverture de sinistre alors l'assureur s'occupe du règlement du sinistre survenu. L'indemnisation suit tout un processus et passe par des étapes comme l'indique le schéma ci-dessous :

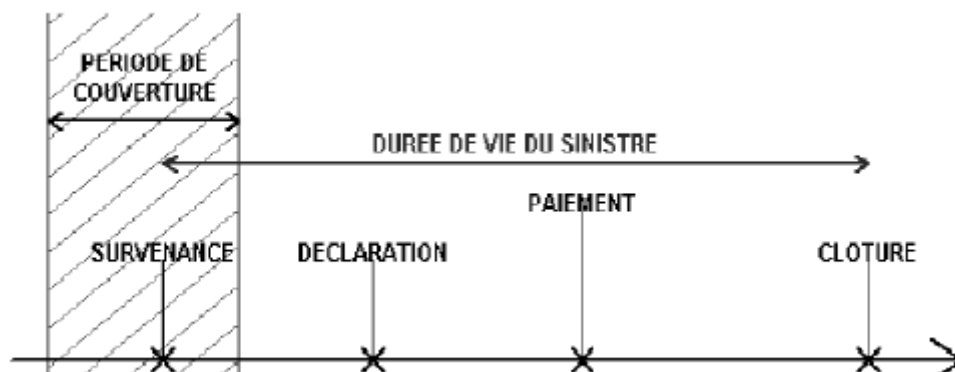


Figure 9 : Dynamique de la vie d'un sinistre

Il y'a alors quatre étapes qui définissent la dynamique d'un sinistre : la survenance, la déclaration, le paiement et la clôture, en effet après la survenance d'un sinistre pendant la période de couverture, l'assuré déclare à l'assureur qui effectue à son tour des règlements. Une fois que tous les règlements ont été effectués, l'assureur peut clôturer ce sinistre.

Les règlements futurs sont estimés par la compagnie d'assurance à partir de plusieurs critères et méthodes de provisionnement. Ces estimations concernent non seulement les sinistres survenus et déclarés à la compagnie mais aussi les sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire. Les sinistres survenus non déclarés sont appelés les tardifs ou sinistres Incurred But Not Reported (IBNR).

I.2. Notations

Les données utilisées dans ce mémoire sont sous forme de triangle (triangles run-off) qui reflète la dynamique de liquidation des sinistres, elles sont annuelles et les notations utilisées sont les suivant

- n = nombre maximal d'années nécessaires pour clore un sinistre et le régler en totalité
- i : l'indice des années de survenance $i=1, \dots, n$
- j : l'indice des années de développement $j=1, \dots, n$
- $Y_{i,j}$: les paiements non cumulés des sinistres survenus l'année i , en j années de développement
- $C_{i,j}$: les paiements cumulés des sinistres survenus l'année i , en j années de développement

Et on a :

$$C_{i,j} = Y_{i,1} + Y_{i,2} + Y_{i,3} + \dots + Y_{i,j} = \sum_{k=1}^j Y_{i,k}$$

On représente Le triangle des paiements cumulés sous la forme ci-dessous :

$i \backslash j$	1	2	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	
.	.	.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
n	$C_{n,1}$				

Tableau 2 : Triangle des paiements cumulés

Notre objectif sera alors d'estimer la partie inférieure du triangle de liquidation à partir des informations que nous disposons dans la partie supérieure.

$i \backslash j$	1	2	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
.
.	.	.	.		
.	.	.	.		
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$...	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$...	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Tableau 3 : Table des paiements cumulés estimés

Les $\widehat{C}_{i,j}$ et $\widehat{Y}_{i,j}$ sont les valeurs estimées des règlements cumulés et des règlements non cumulés respectivement

L'estimation des $\widehat{C}_{i,j}$ et $\widehat{Y}_{i,j}$ nous permettra de déterminer les provisions pour chaque année de sinistre notées :

$$\widehat{R}_i = \sum_{k=n+2-i}^n \widehat{Y}_{i,k} = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

Et la réserve totale est alors :

$$\widehat{R} = \sum_{i=2}^n \widehat{R}_i$$

Dans ce mémoire nous allons utiliser les méthodes déterministes (Chain Ladder, CL pondérée, London Chain, BornFerguson, méthode de Taylor, méthode de de vylder ...) et stochastiques (Mack, GLM et bootstrap) de provisionnement pour l'estimation de la partie inférieure de triangle. Ainsi qu'une méthode interne propre à la SCR pour le calcul des provisions techniques

On présente dans ce qui suit de ce chapitre un aperçu sur la théorie de ces différentes méthodes.

II. les méthodes déterministes de provisionnement :

Dans cette partie, nous présenterons la théorie d'un package des méthodes de provisionnement déterministes qu'on va utiliser dans ce mémoire. Ces méthodes sont dites déterministes parce qu'elles sont basées sur des données non variables. Ces méthodes s'avèrent plus pratiques dans l'estimation de la charge finale lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le(s) règlements(s), quel que soit l'exercice de survenance ;
- Absence de changement de structure du portefeuille ;
- Les garanties des contrats, franchises restent les mêmes ;
- La gestion des sinistres ne change pas.

Les méthodes qu'on va essayer de présenter sont :

- Chain-Ladder classique
- London Chain
- Chain-Ladder Ajustée
- Bornhuetter-Ferguson
- Méthode de séparation de Taylor

II.1. Les Méthodes Chain-Ladder :

La méthode Chain Ladder est une méthode standard très répandue dans le milieu professionnel grâce à sa simplicité. Elle présente l'avantage de s'appliquer à des triangles de toutes natures (règlements, charges ou nombre de sinistre). Dans ce mémoire, nous l'appliquerons pour les triangles des paiements cumulés et des charges de sinistre cumulées

II.1.1. Méthode de Chain-Ladder classique :

La méthode de Chain Ladder considère que la cadence des paiements dépend de coefficients de développement λ_j qui dépendent uniquement de l'année de développement j .

Cela que les $C_{i,j}$ sont liés par la formule suivante :

Pour $i = 1 \dots n$ et $j = 1 \dots n - 1$ on a :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j}$$

Cette proportion d'évolution des règlements cumulés est dite facteur de développement et elle est estimée par :

Pour $j = 1 \dots n-1$

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Les hypothèses du modèle :

Avant d'appliquer la méthode Chain Ladder il faut au préalable vérifier les hypothèses suivantes :

H1 : $\forall j=1, \dots, n-1$ les facteurs de développement individuels $\lambda_{i,j}$ définis par $\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ sont indépendants de l'année de survenance i .

Autrement, cela signifie que le pourcentage des sinistres liquidés entre deux années comptables successives ne dépend pas de l'année de survenance de ces sinistres

H2 : La droite de régression des couples $(C_{i,j} ; C_{i,j+1})$ pour $i=1, \dots, n-1$, passe par l'origine et son coefficient de détermination est proche de 1.

Cette hypothèse montre l'existence d'une relation de proportionnalité entre les montants cumulés, d'une année de développement à la suivante sous la forme $C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j}$

II.1.2. Méthode de Chain-Ladder Ajustée :

La méthode de Chain Ladder Ajustée est une variante de la méthode classique. Elle utilise des facteurs de développement nouveaux définis à partir des facteurs de développement individuels $\lambda_{i,j}$ selon la nature du triangle et l'expertise de l'actuaire.

Présentation du Modèle :

Les facteurs de développement pour cette méthode λ_j sont définis comme des moyennes pondérées des facteurs de développement individuel. L'expression générale de $\hat{\lambda}_j$ est définie par :

$\forall j= 1, \dots, n-1$

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} \lambda_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j}}$$

Avec $w_{i,j}$ sont les pondérations qui prennent deux valeurs : 0 et 1

Lors de cet exercice de choix de la valeur de cette pondération, l'actuaire souhaite donc écarter les sinistres qu'il reconnaît comme « anormaux ». En ce sens, la pondération sert à éliminer l'importance de certaines données jugées non représentatives. Ces données proviennent de plusieurs sources : Evènement exceptionnel, Changement du mode de gestion des sinistres, ...

Cette méthode sera utilisée par la suite dans le processus interne de calcul du BE pour sinistres

II.2. London Chain : une méthode autorégressive

Introduite par Benjamin et Eagles [1986], la méthode de London Chain est une généralisation de la méthode de Chain Ladder.

La méthode London Chain a pour objectif de rectifier les résultats de Chain Ladder classique quand le nuage de points, relatifs aux paiements cumulés de deux colonnes successives du triangle des paiements, s'ajuste mieux avec une fonction affine. En effet Contrairement à la méthode de Chain Ladder qui ne peut être appliquée que lorsque les couples $(C_{i,j} ; C_{i,j+1})$ pour $i=1, \dots, n-1$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine, la méthode de London Chain suppose que la dynamique des $C_{i,j+1}$ est de la forme : $\forall j= 1, \dots, n-1, \forall i= 1, \dots, n$

$$C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j} + \sigma_j$$

Donc ici la cadence des paiements ne dépend pas uniquement des coefficients de développement λ_j , mais également d'une composante constante σ_j

Nous avons donc $(2n-2)$ paramètres à identifier, donc deux fois plus de paramètres que dans la méthode de Chain Ladder. Le modèle London Chain étant sous forme linéaire, nous estimons ses paramètres par la méthode des moindres carrés.

Pour $j= 1, \dots, n-1$

$$(\hat{\lambda}_j, \hat{\sigma}_j) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \sigma_j)^2 \right\}$$

Nous obtenons les estimateurs de λ_j et σ_j dont les expressions respectives sont les suivantes :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} C_{i,j+1} - \hat{C}_j \hat{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^2 - \hat{C}_j^2}$$

Avec

$$\hat{C}_k = \frac{1}{n-k} * \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}$$

Et

$$\hat{C}_{k+1} = \frac{1}{n-k} * \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}$$

Et on a :

$$\hat{\sigma}_j = \hat{C}_{j+1} - \hat{\lambda}_j * \hat{C}_j$$

Il est à noter que si les hypothèses de chain Ladder classique sont vérifiées alors les hypothèses de la méthodes london chain le seront aussi

II.3. La Méthode de Bornhuetter-Ferguson

La méthode Bornhuetter-Ferguson est utilisée quand on dispose des données complémentaires au triangle de liquidation pour déterminer une estimation des provisions. Elle permet d'insérer un indicateur d'exposition au risque qui est en général le montant des primes acquises

Cette méthode repose sur une hypothèse exogène d'estimation préalable de la charge finale sur laquelle est appliquée un taux de liquidation. En procédant ainsi, les estimations récentes dépendent moins des anciens paiements comparativement à la méthode de Chain Ladder qui reflète une dépendance entre les années. La méthode de Bornhuetter-Ferguson s'adapte donc aux triangles dont les paiements sont instables.

Classiquement on suit la démarche suivante dans cette méthode :

Soient :

L^{BF} : Le ratio sinistres à primes (ou loss ratio) attendu pour l'année de survenance i

P_i : Le montant de primes acquises relatif à l'année de survenance i

z_j : La cadence de règlement cumulée après j années de développement. Cette cadence est le plus souvent issue de la méthode Chain Ladder.

Alors z_j est défini comme égale à :

$$z_j = \frac{1}{\prod_{i=n-j}^{n-1} \hat{\lambda}_i}$$

On introduit une estimation a priori des montants de charge ultime \hat{U}_i , tel que :

$$\hat{U}_i = L^{BF} * P_i ; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n-1$$

L^{BF} est généralement estimé par la moyenne des $L_{i,j}$, tel que : $L_i = \frac{C_{i,n}}{P_i}$; Pour $1 \leq i \leq n$

L'estimateur $C_{i,n}^{BF}$ de la charge ultime par cette méthode pour l'année de survenance i est :

$$C_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i} + (1 - z_{n-i}) * \hat{U}_i \quad \text{Pour } 1 \leq i \leq n$$

On déduit l'estimateur R_i^{BF} la provision à constituer pour cette même année de survenance :

$$R_i^{BF} = C_{i,n}^{BF} - C_{i,n-i} = (1 - z_{n-i}) * \hat{U}_i$$

Et la provision globale est :

$$R^{BF} = \sum_{i=1}^n R_i^{BF}$$

II.4. Méthode de séparation de Taylor :

Proposée par Taylor en 1974, Elle s'applique au triangle de règlement non cumulé et considère le modèle suivant :

$$Y_{i,j} = r_j * \mu_{i+j-1}$$

Où

- r_j est la part payée la $j^{\text{ème}}$ année de développement
- μ_{i+j-1} Est le coût total payé lors de l'année calendaire $i + j - 1$.

Cette méthode est de considérer l'inflation comme un facteur endogène aux triangles.

Le triangle des paiements non cumulés s'écrit dans ce cas sous la forme :

$r_1 \cdot \mu_1$	$r_2 \cdot \mu_2$...	$r_{n-1} \cdot \mu_{-1n}$	$r_n \cdot \mu_n$
$r_1 \cdot \mu_2$	$r_2 \cdot \mu_3$...	$r_{n-1} \cdot \mu_n$	
⋮	⋮			
$r_n \cdot \mu_n$	$r_2 \cdot \mu_n$			
$r_n \cdot \mu_n$				

Tableau 4 : La forme du triangle décumulé dans la méthode de Taylor

Dans ce modèle on fera l'hypothèse de normalisation des r_j suivante :

$$\sum_{j=1}^n r_j = 1$$

On a la somme des éléments la diagonale noté d_n principale est :

$$d_n = Y_{1,n} + Y_{2,n-1} + \dots + Y_{n,1} = \sum_{j=1}^n r_j * \mu_n = \mu_n \sum_{j=1}^n r_j = \mu_n$$

On note d_k la somme sur la $k^{\text{ème}}$ diagonale :

$$d_k = \mu_{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} r_j$$

On a en particulier :

$$d_{n-1} = \mu_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} r_j = \mu_{n-1} * (1 - r_n)$$

On note : γ_k la somme sur la k^{eme} colonne du triangle non cumulé

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} Y_{i,k} = r_k \sum_{i=1}^{n-k+1} \mu_i$$

Et On a en particulier :

$$\gamma_n = Y_{1,n} = r_n * \mu_n$$

D'où

$$r_n = \frac{\gamma_n}{\mu_n}$$

Et

$$\mu_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - r_n}$$

On trouve finalement :

$$\mu_{n-i} = \frac{d_{n-i}}{1 - (r_n + r_{n-1} + r_{n-2} + \dots + r_{n-i+1})}$$

Et

$$r_{n-i+1} = \frac{\gamma_{n-i+1}}{\mu_n + \mu_{n-1} + \dots + \mu_{n-i+1}}$$

Il s'agit ensuite d'extrapoler les coefficients $\hat{\mu}_{n-k}$ de n à $2n-2$. Pour cela il faut estimer l'inflation future. Il est possible de se baser sur l'inflation observée de 1 jusqu'à n , en utilisant une régression linéaire par exemple.

On reconstitue ensuite le triangle inférieur par :

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{r}_i * \hat{\mu}_{i+j-1}$$

II.5. AVANTAGES ET LIMITES DES METHODES DETERMINISTES

AVANTAGES :

Les méthodes déterministes sont caractérisées par leur simplicité, leur facilité à mettre en œuvre et elles sont utilisées généralement de Benchmark pour les autres méthodes de provisionnement.

LES INCONVENIENTS :

- Ces méthodes utilisent données agrégées ce qui constitue une perte d'information, en plus on ne fait pas la séparation entre les types de sinistre (attritionnel ou grave) où le mode de gestion des sinistres diffère, ce qui peut donner une instabilité au triangle.
- Elles très sensibles à des variations de données
- Elles rendent impossible toute prise en compte d'un changement de jurisprudence, une inflation non-constante, une innovation quant à la gestion de la sinistralité
- Elles ne permettent pas la modélisation par une loi de probabilité pour la provision globale.

Finalement Ces méthodes ne permettent pas d'estimer les erreurs de prédiction, C'est pourquoi nous faisons recours aux **méthodes stochastiques** qui permettent de mesurer l'incertitude liée aux provisionnement.

III. les méthodes stochastiques de provisionnement :

Les méthodes stochastiques ont été introduites Pour corriger les limites des méthodes déterministes. Ces méthodes ont l'avantage de mesurer la volatilité des provisions et de fournir des intervalles de confiance, en plus de fournir la distribution des provisions.

Dans cette partie, nous présentons trois modèles usuels classique à savoir : Le modèle de Mack, les modèles GLM et le modèle Bootstrap qui permettent non seulement l'obtention des provisions mais aussi de déterminer le degré d'incertitude correspondant à la réserve. Ce qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie.

III.1. MODELE DE THOMAS MACK

Le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. En effet, même si la provision estimée est la même que celle de chain ladder. Il a cependant l'avantage de mesurer l'incertitude associée à la prédiction du montant des provisions que doit faire l'assureur.

Cette méthode s'appuie sur trois hypothèses :

H1 : Les années de survenance des sinistres sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire, $C_{i,j}$, et $C_{k,j}$, sont indépendants pour $i \neq k$.

H2 : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n - 1$ il existe λ_j tel que :

$$E(C_{i,j+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j * C_{i,j}$$

H3 : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n - 1$ il existe σ_j tel que

$$Var(C_{i,j+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 * C_{i,j}$$

Sous les hypothèses (H1) et (H2) les estimateurs des moindres carrés du facteur de développement λ_j associé à l'année de développement j sont obtenus par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Ces estimateurs sont sans biais et non corrélés

Dans son raisonnement, Mack propose également un estimateur sans biais de σ_j^2 donnée par :

$\forall j = 1, \dots, n - 2$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j \right)^2$$

Le modèle de Mack considère implicitement que les paiements cumulés suivent une distribution normale avec une moyenne et une variance qui sont décrites dans les hypothèses (H2) et (H3)

Mesure de l'incertitude de l'estimateur

L'apport de T. Mack par rapport à Chain Ladder déterministe est la possibilité de quantifier l'erreur de prédiction. L'erreur quadratique moyenne de prévision (MSEP- Mean Square of Error of Prediction) des provisions représente l'écart moyen entre les valeurs estimées et les valeurs observées réellement. L'erreur quadratique moyenne par année de survenance se définit par :

$\forall i + j \leq 1, \dots, n + 1$

$$MSEP(\hat{C}_{i,n}) = E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 \mid C_{i,j})$$

Et donc on a :

$$MSEP(\hat{C}_{i,n}) = Var(C_{i,n} \mid C_{i,j}) + (E(C_{i,n} \mid C_{i,j}) - \hat{C}_{i,n})^2$$

Avec les notations définies précédemment :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} \quad \text{et} \quad \hat{R}_i - R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n}$$

Et on a :

$$MSEP(\hat{C}_{i,n}) = MSEP(\hat{R}_i)$$

L'erreur standard SEP :

$$SEP(\hat{R}_i) = \sqrt{MSEP(\hat{R}_i)}$$

Avec $\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i$ des estimateurs de $MSEP(\hat{R}_i)$ et $MSEP(\hat{R})$ sont respectivement :

$\forall i = 2, \dots, n$

$$MSEP(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{i,n}^2 * \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\lambda_j^2} * \left(\frac{1}{C_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

$$MSEP(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^n \{ (MSEP(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{k,n} \right) \left(\sum_{k=n-i+1}^n \frac{2\sigma_j^2}{\lambda_j^2 \sum_{i=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)) \}$$

III.2. Les modèles GLM :

Le but principal de GLM sera de chercher une loi paramétrique suivie par les règlements incrémentaux en considérant les années d'origine et les années de développement autant que des variables explicatives.

Ces modèles ont trois composantes principales : une composante aléatoire, une composante systématique et une fonction de lien.

La composante aléatoire :

On suppose que les règlements non cumulés $Y_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et appartiennent à la famille exponentielle de fonction de densité :

$$f(Y_{i,j}; \theta_{i,j}; \phi) = \exp\left\{ \frac{[\theta_{i,j} Y_{i,j} - b(\theta_{i,j})] w_{i,j}}{\phi} + c(Y_{i,j}, \phi) \right\}$$

Où :

- $\theta_{i,j}$ est un paramètre naturel de la famille exponentiel
- ϕ est un paramètre de dispersion, il est indépendant de i et de j , avec $\phi = 1$ pour une loi de poisson et $\phi \neq 0$ pour la loi de poisson sur-dispersée.
- $w_{i,j}$ est une pondérée donnée qu'on va prendre égale à 1.
- b et c sont de fonctions spécifiques de la distribution, b est une fonction régulière.

On peut montrer les relations suivantes sur l'espérance et la variance des règlements non cumulés par :

$$\mu_{ij} = E(Y_{i,j}) = b'(\theta_{i,j})$$

$$V(Y_{i,j}) = \frac{\phi}{w_{i,j}} b''(\theta_{i,j}) = \frac{\phi}{w_{i,j}} b''(b'^{-1}(\mu_{ij})) = \frac{\phi}{w_{i,j}} V(\mu_{ij})$$

La composante systématique

La composante systématique est une composante déterministe basée sur un prédicteur linéaire de la forme :

Pour $1 \leq i, j \leq n$

$$\eta_{i,j} = \mu + \beta_j + \alpha_i$$

Avec :

α_i : Un paramètre lié à la i éme année de survenance

β_j : Un paramètre lié à la j ème année de développement

Où μ représente la moyenne générale (ou intercept), et les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ correspondent respectivement aux effets « lignes » et aux effets « colonnes » du modèle qu'on cherche à estimer.

La fonction lien

La fonction de lien est la composante qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique.

$$g(\mu_{ij}) = \eta_{i,j} \quad \text{ou} \quad \mu_{ij} = g^{-1}(\eta_{i,j})$$

Avec g une fonction réelle g strictement monotone et dérivable

Pour résumer, un modèle GLM est la donnée de :

1. la distribution de probabilité des variables réponses $Y_{i,j}$
2. la fonction variance V et, éventuellement, un paramètre de dispersion ϕ avec :

$$\mu_{ij} = E(Y_{i,j}) \text{ et } V(Y_{i,j}) = \phi b''(\theta_{i,j})$$

Il existe plusieurs distribution classique possible à utiliser dans notre modélisation telles que :
: Poisson, Poisson sur-dispersée, Gamma, normal ...

Dans ce mémoire on s'intéressera à la distribution de poisson sur-dispersée

La loi poisson sur-dispersée :

Les réglements suivent la loi de poisson sur-dispersée de paramètres (μ_{ij}, ϕ) , si les $\frac{Y_{i,j}}{\phi}$ suivent une loi de Poisson de paramètre μ_{ij} la densité de probabilité de $Y_{i,j}$ en $y_{i,j}$ est :

$$\begin{cases} P(Y_{i,j} = y_{i,j}) = \frac{\left(\frac{\mu_{ij}}{\phi}\right)^{y_{i,j}} \exp\left(-\frac{\mu_{ij}}{\phi}\right)}{\left(\frac{\mu_{ij}}{\phi}\right)!} \\ E(Y_{ij}) = \mu_{ij} \text{ et } Var(Y_{ij}) = \phi E(Y_{ij}) \end{cases}$$

Ce modèle suppose qu'il existe des paramètres réels $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β_1, \dots, β_n tels que

$$\mu_{ij} = \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)$$

Les paramètres du modèle sont estimés par maximisation de la quasi vraisemblance

Dans ce modèle la provision totale est calculée par :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=n-i+2}^n \hat{Y}_{ij}$$

Avec

$$\hat{Y}_{ij} = \hat{E}(Y_{ij}) = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$$

Erreur de prédiction :

La MSEP de ce modèle est calculée par

$$MSEP(\hat{R}) = E\left(\left(\hat{R} - R\right)^2 \mid C_{i,j}\right) \quad \text{avec } i + j \leq 1, \dots, n + 1$$

Cette expression peut être décomposée comme suit :

$$MSEP(\hat{R}) \approx E\left(\left(\hat{R} - E(\hat{R})\right)^2 \mid C_{i,j}\right) + E\left(\left(R - E(R)\right)^2 \mid C_{i,j}\right) \quad \text{avec } i + j \leq 1, \dots, n + 1$$

On peut approcher $E\left(\left(\hat{R} - E(\hat{R})\right)^2 \mid C_{i,j}\right)$ appelée l'erreur de l'estimation par la variance de \hat{R} , d'où la formule :

$$MSEP(\hat{R}) \approx V(\hat{R}) + V(R)$$

III.3. La Méthode du Bootstrap GLM :

Le modèle de Bootstrap est une méthode basée sur un ré échantillonnage avec remise en utilisant des simulations de Monte-Carlo à la place des calculs statistiques complexes, il est très utilisé en assurance non vie du fait de sa simplicité. En la couplant avec les modèles GLM, on peut déterminer une estimation de la distribution des provisions.

L'utilisation du bootstrap suppose que les éléments de l'échantillon de départ soient indépendants et identiquement distribués or Les variables Y_{ij} ne sont en général pas identiquement distribuées. Donc on choisit d'avoir recours aux résidus du modèle, un choix classique est d'utiliser les résidus de Pearson car plus simples à calculer.

$$r_{ij}^{(p)} = \frac{Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\text{var}(\hat{\mu}_{ij})}$$

Présentation de la technique du Bootstrapping GLM :

La méthode du bootstrap dans le cadre de la modélisation GLM a trois étapes principales à savoir :

➤ Estimation des paramètres des valeurs prévues $\hat{\mu}_{ij}$ et la provision $\hat{R} = \sum_{i+j>n} \hat{\mu}_{ij}$ via l'ajustement un modèle linéaire

➤ Calcul des résidus de Pearson

$$r_{ij}^{(p)} = \frac{Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\text{var}(\hat{\mu}_{ij})} \quad \forall i + j \leq n$$

➤ Pour un nombre B de fois on fait :

- Un Ré échantillonnage avec remise des résidus , ces derniers seront notés : $\left(r_{ij}^{(p)}\right)_b$ avec b est une itération parmi B itérations

- En inversant la relation des résidus $r_{ij}^{(p)} = \frac{Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\text{var}(\hat{\mu}_{ij})}$, et l'obtention d'un nouveau triangle des liquidation formé des valeurs : $\left(Y_{ij}\right)_b = \hat{\mu}_{ij} + \left(r_{ij}^{(p)}\right)_b \sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}$

- On remplit le triangle de liquidation construit dans l'étape précédente à l'aide d'une nouvelle modélisation GLM appliqué à ce triangle et la détermination d'une nouvelle estimation des provisions \hat{R}_b associée à l'itération b

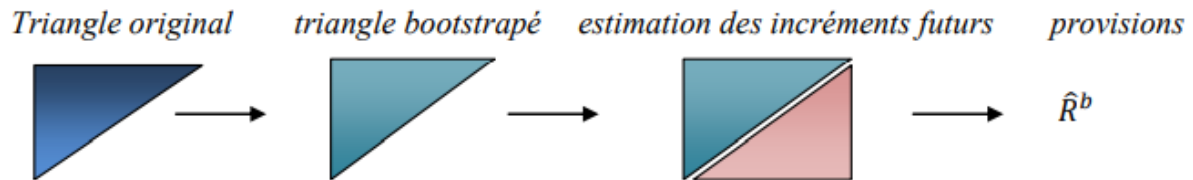


Figure 10 : Schéma de la procédure à effectuer B fois

Les B échantillons des provisions nous permettra par la suite d'estimer la moyenne, la variance ainsi que l'erreur de prédiction de la réserve grâce aux formules suivantes :

La provision retenue :

$$E^B(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}^b$$

Risque d'estimation :

$$\text{Var}^B(\hat{R}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B [\hat{R}^b - E^B(\hat{R})]^2$$

Risque de processus :

$$\hat{V}(R) = \hat{\phi} \sum_{i+j>n} V(\hat{\mu}_{ij})$$

Erreur de prédiction :

$$\text{sep} = \sqrt{\hat{V}(R) + \text{Var}^B(\hat{R})}$$

Nous avons utilisé cette méthode pour 10 000 simulations avec le modèle Log Poisson surdispersé.

IV. Calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistre (Best Estimate pour sinistres) :

Selon la nouvelle réglementation « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) », Les provisions techniques sont valorisées en vision Best Estimate (BE) et sont actualisées pour tenir compte du cout du temps et du risque. Ces provisions sont complétées d'une marge de risque, on a alors :

$$\text{PT} = \text{Meilleure estimation des engagements} + \text{Meilleure estimation des frais de gestion} + \text{Marge de risque}$$

Dans le cas de l'assurance non vie la Meilleure estimation des engagements est égale à :

$$\text{Best Estimate Engagements Non Vie} = \text{BE pour sinistres} + \text{BE pour prime}$$

Dans ce mémoire on va s'intéresser au calcul du BE pour sinistres dans le cadre de la SBR aussi on va présenter la méthode interne propre à la société centrale de réassurance pour le calcul du BE pour sinistre.

IV.1. BE pour Sinistres dans le cadre du projet SBR :

Best Estimate pour sinistre représente l'équivalent prudentiel des PSAP (y.c. IBNR) - dont on a présenté plusieurs méthodes de calcul dans la partie précédente-, C'est l'engagement de L'assureur concernant les sinistres déjà survenus en actualisant des flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres survenus des dossiers en cours. Il est évalué alors suivant la formule suivante :

$$BE = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1 + r_i)^i}$$

Avec

- CF_i : les cash flows de l'année comptable i, ces CF_i correspondent à la somme des diagonales au-dessous de la dernière diagonale supérieur du triangle de liquidation non cumulé rempli
- r_i : le taux sans risque de maturité i obtenu grâce à la courbe des taux sans risque à la date d'évaluation.

Il faut donc extrapoler le triangle de liquidation afin de prévoir la partie inférieure du triangle qui est inconnue, pour ce faire plusieurs méthodes existent comme celles qu'on a cité dans la partie précédente, Puis il faut agréger et actualiser les résultats en diagonale en se basant sur les courbes des taux sans risque

Le graphique suivant illustre la méthodologie suivie pour estimer un Best Estimate sur base d'un triangle de liquidation.

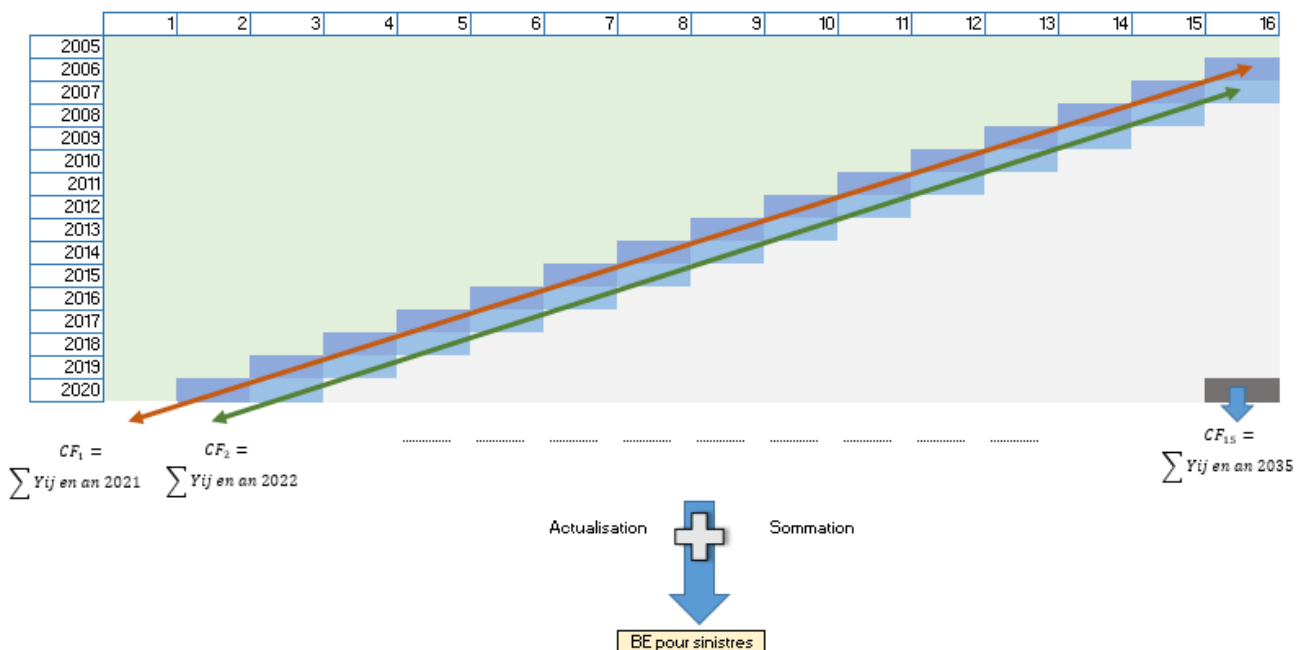


Figure 11 : Méthodologie de calcul du BE selon la méthode standard

Donc le calcul de ce BE, présente un enjeu présenté en deux grandes tâches :

- Trouver la méthode adéquate de provisionnement afin d'obtenir les Cash Flows : les méthodes envisageables ont été présentés dans la partie précédente.

Or Le projet de circulaire met en avant l'utilisation de la méthode Chain Ladder (CL) déterministe sur triangle de règlements par année de survenance net de recours pour le calcul de BE, et donc on va se limiter à la méthode Chain Ladder (CL) déterministe dans notre mémoire

- Construire la courbe de taux à travers la méthode qui convient le plus pour actualiser les Cash Flows et par la suite obtenir un BE prudent.

Ces méthodes seront présentées, avec plus de détail, dans la partie intitulée « Modélisation de la courbe des taux ».

IV.2. La méthode interne du calcul du BE pour Sinistres :

Dans l'objectif de calculer les provisions et d'évaluer le BE pour sinistres, La société centrale de réassurance utilise sa propre méthode de calcul, cette méthode interne se différencie des méthodes classiques par le fait qu'elle utilise 3 triangles au lieu d'un seul triangle de règlements, il s'agit des triangles suivants :

Le triangle des primes cédées(cumulées) : les éléments constitutifs de ce triangle seront notés P_{ij}

Le triangle des charges de sinistres(cumulées) : les éléments constitutifs de ce triangle seront notés C_{ij}

Le triangle des sinistres payés(cumulés) : les éléments constitutifs de ce triangle seront notés S_{ij}

On va essayer d'explicitier dans cette partie les différentes étapes du calcul de BE pour sinistres selon l'approche ou méthode interne.

Le calcul du BE selon la méthode interne passe par plusieurs étapes :

- **Le remplissage des tableaux :**

Le remplissage des tableaux des sinistres payés cumulés et des charges de sinistres cumulés a des spécificités se fait de la manière suivante :

On procède d'abord à une réestimation de la diagonale qui n'est plus considérée comme une donnée, du fait des retards de déclarations des sinistres de la part des assureurs, la SCR propose que la réestimation se fait de la manière suivante :

Au niveau des deux triangles : charges de sinistres et celui de sinistres payés on exclue la diagonale

On calcule les nouveaux coefficients de développement en utilisant la méthode de Chain Ladder ajustée pour les deux triangles, on les représentera comme suivant :

λ_j^{CS} facteur de développement associé à l'année de développement j calculée par la méthode Chain Ladder ajustée dans le triangle des charges de sinistres en excluant les valeurs diagonales

$$\hat{\lambda}_j^{CS} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} w_{ij} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} w_{ij} C_{i,j}}$$

λ_j^{SP} facteur de développement associé à l'année de développement j calculée par la méthode Chain Ladder ajustée dans le triangle des Sinistres Payées en excluant les valeurs diagonales

$$\hat{\lambda}_j^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} w_{ij} S_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} w_{ij} S_{i,j}}$$

Alors les valeurs diagonales illustrées en rouge dans la figure ci-dessous et qui correspondent aux $C_{i,16-(i-2005)}$ des charges de sinistres ou bien $S_{i,16-(i-2005)}$ pour les Sinistres Payées sont réestimées grâce aux coefficients de développement $\hat{\lambda}_j^{CS}$ ou bien $\hat{\lambda}_j^{SP}$ calculées comme décrit ci-dessus, ceci pour les i allant de 2005 à 2019 par les formules :

$$\begin{cases} C_{i,16-(i-2005)} = C_{i,16-(i-2005)-1} * \hat{\lambda}_{16-(i-2005)-1}^{CS} \\ S_{i,16-(i-2005)} = S_{i,16-(i-2005)-1} * \hat{\lambda}_{16-(i-2005)-1}^{SP} \end{cases}$$

Pour $i=2020$ (c'est-à-dire l'année ou on fait les calculs) en vert foncé dans la figure ci-dessous la réestimation se fait de manière différente :

Pour la charge de sinistres de 2020 :

$$C_{2020,1} = \left(\frac{C}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{CS}}$$

Pour les sinistres payés de 2020 :

$$S_{2020,1} = \left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{SP}}$$

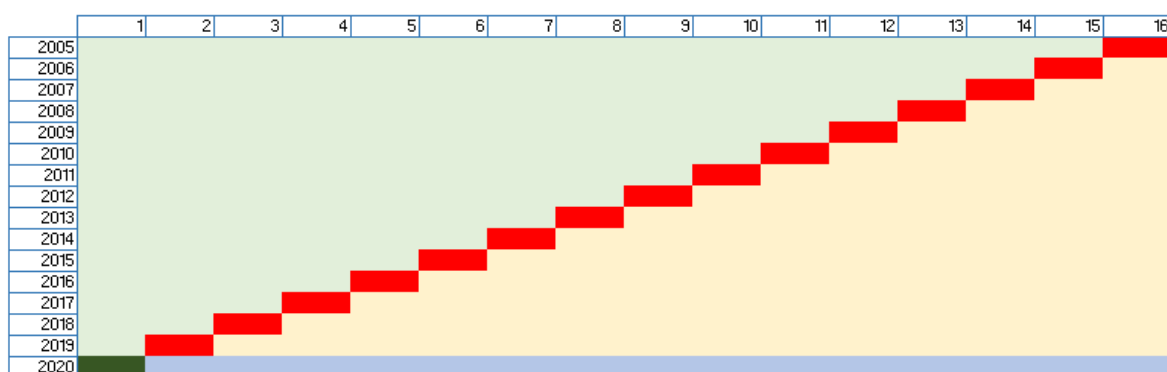


Figure 12 : La forme du triangle de liquidation réestimé

Avec :

EPI (Estimated Premium Income) : c'est le montant de la prime estimé pour l'année 2020, en effet l'activité de la réassurance est caractérisée par une dépendance quasi-totale vis-à-vis de l'information communiquée par l'assureur cédant et un retard de transmission de celle-ci

pouvant atteindre 6 à 12 mois, c'est pour cela la SCR ne connaît pas exactement le montant de la prime à la date d'évaluation (2020 dans notre cas), on doit alors fait recours à une estimation de cette quantité : c'est l'EPI.

$\left(\frac{C}{P}\right)_{\text{retenu}}$: Est le ratio charge de sinistres/primes, utilisé pour la conversion de l'EPI et donc l'estimation de la charge de sinistres de l'année de survenance 2020. On peut envisager plusieurs méthodes pour le calculer. On peut choisir par exemple la moyenne des $\left(\frac{CS}{P}\right)_{\text{ultime}}$ des années entre 2005 et 2019 ou bien une moyenne pondérée des $\left(\frac{CS}{P}\right)_{\text{ultime}}$ des années précédentes, ou même utiliser des données extérieures en faisant une analyse de marché, ceci sera l'objectif de la dernière partie de notre mémoire.

$\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}}$: Est le ratio sinistre payés/primes, utilisé pour la conversion de l'EPI et donc l'estimation de la sinistralité payée de l'année de survenance 2020. On procèdera, pour le calculer, de la même démarche qu'on a suivie pour le ratio précédent.

Après la réestimation de la diagonale, on peut compléter facilement le triangle inférieur pour les charges de sinistres et pour les sinistres payés grâce aux coefficients de développement $\hat{\lambda}_j^{CP}$ et $\hat{\lambda}_j^{SP}$ par la relation de Chain Ladder $C_{i,j+1} = \hat{\lambda}_j^{CP} * C_{i,j}$ et $S_{i,j+1} = \hat{\lambda}_j^{SP} * S_{i,j}$

Pour le triangle des primes le développement s'effectue de la même manière que la méthode classique (Chain Ladder), il n'y a pas lieu à la réestimation de la diagonale.

L'étape suivante est le calcul des Soldes à liquider et des cadences de liquidation :

- **Calcul des soldes à liquider :**

La SCR en accord avec les spécificités de son activité définit le solde à liquider d'une année de survenance de la manière suivante : C'est la partie résiduelle au niveau des charges de sinistres de la provision dédiée à cette année après le dernier règlement cumulé payé par la SCR, Ainsi, Ce solde correspond à la différence entre la charge de sinistre ultime de cette année et le dernier règlement cumulé de cette année.

Et on a Pour i de 2005 à 2020 :

$$SL_i = \hat{C}_{i,16} - \hat{S}_{i,16-(i-2005)}$$

- **Calcul des cadences de liquidation :**

Ici on détermine la dynamique sous laquelle chaque année de survenance sera liquidé

Le calcul des cadences de liquidation pour chaque année de développement j pour les différentes années de survenance i permet d'obtenir cette dynamique

En se basant sur le triangle des primes payés, pour chaque année de survenance on calcul la cadence de liquidation suivant les étapes suivantes :

1- Coefficients de Chain ladder	λ_1^{SP}	λ_2^{SP}	λ_3^{SP}	λ_4^{SP}	λ_{14}^{SP}	λ_{15}^{SP}
2- Produit cumulé des CL	P_1	P_2	P_3	P_4	P_{14}	P_{15}
3- Inverse du produit	$\frac{1}{P_1}$	$\frac{1}{P_2}$	$\frac{1}{P_3}$	$\frac{1}{P_4}$	$\frac{1}{P_{14}}$	$\frac{1}{P_{15}}$
4- Décumul de l'inverse	d_1	d_2	d_3	d_4	d_{14}	d_{15}

Avec :

$$P_j = \prod_{k=j}^{15} \lambda_k^{SP}$$

$$d_j = P_j - P_{j-1} \text{ pour } j \geq 2 \text{ et } d_1 = P_1$$

Par la suite, on estime la matrice des cadences de liquidation :

Années de survénance	de Soldes à liquider	à Les cadences de liquidation														
2005	SL_{2005}															
2006	SL_{2006}	$\frac{d_{15}}{t_{15}}$														
2007	SL_{2007}	$\frac{d_{14}}{t_{14}}$	$\frac{d_{15}}{t_{14}}$													
2008	SL_{2008}	$\frac{d_{13}}{t_{13}}$	$\frac{d_{14}}{t_{13}}$	$\frac{d_{15}}{t_{13}}$												
2009	SL_{2009}	$\frac{d_{12}}{t_{12}}$	$\frac{d_{13}}{t_{12}}$	$\frac{d_{14}}{t_{12}}$	$\frac{d_{15}}{t_{12}}$											
2010	SL_{2010}	$\frac{d_{11}}{t_{11}}$	$\frac{d_{12}}{t_{11}}$	$\frac{d_{13}}{t_{11}}$	$\frac{d_{14}}{t_{11}}$	$\frac{d_{15}}{t_{11}}$										
2011	SL_{2011}	$\frac{d_{10}}{t_{10}}$	$\frac{d_{11}}{t_{10}}$	$\frac{d_{12}}{t_{10}}$	$\frac{d_{13}}{t_{10}}$	$\frac{d_{14}}{t_{10}}$	$\frac{d_{15}}{t_{10}}$									
2012	SL_{2012}	$\frac{d_9}{t_9}$	$\frac{d_{10}}{t_9}$	$\frac{d_{11}}{t_9}$	$\frac{d_{12}}{t_9}$	$\frac{d_{13}}{t_9}$	$\frac{d_{14}}{t_9}$	$\frac{d_{15}}{t_9}$								
2013	SL_{2013}	$\frac{d_8}{t_8}$	$\frac{d_9}{t_8}$	$\frac{d_{10}}{t_8}$	$\frac{d_{11}}{t_8}$	$\frac{d_{12}}{t_8}$	$\frac{d_{13}}{t_8}$	$\frac{d_{14}}{t_8}$	$\frac{d_{15}}{t_8}$							
2014	SL_{2014}	$\frac{d_7}{t_7}$	$\frac{d_8}{t_7}$	$\frac{d_9}{t_7}$	$\frac{d_{10}}{t_7}$	$\frac{d_{11}}{t_7}$	$\frac{d_{12}}{t_7}$	$\frac{d_{13}}{t_7}$	$\frac{d_{14}}{t_7}$	$\frac{d_{15}}{t_7}$						
2015	SL_{2015}	$\frac{d_6}{t_6}$	$\frac{d_7}{t_6}$	$\frac{d_8}{t_6}$	$\frac{d_9}{t_6}$	$\frac{d_{10}}{t_6}$	$\frac{d_{11}}{t_6}$	$\frac{d_{12}}{t_6}$	$\frac{d_{13}}{t_6}$	$\frac{d_{14}}{t_6}$	$\frac{d_{15}}{t_6}$					
2016	SL_{2016}	$\frac{d_5}{t_5}$	$\frac{d_6}{t_5}$	$\frac{d_7}{t_5}$	$\frac{d_8}{t_5}$	$\frac{d_9}{t_5}$	$\frac{d_{10}}{t_5}$	$\frac{d_{11}}{t_5}$	$\frac{d_{12}}{t_5}$	$\frac{d_{13}}{t_5}$	$\frac{d_{14}}{t_5}$	$\frac{d_{15}}{t_5}$				
2017	SL_{2017}	$\frac{d_4}{t_4}$	$\frac{d_5}{t_4}$	$\frac{d_6}{t_4}$	$\frac{d_7}{t_4}$	$\frac{d_8}{t_4}$	$\frac{d_9}{t_4}$	$\frac{d_{10}}{t_4}$	$\frac{d_{11}}{t_4}$	$\frac{d_{12}}{t_4}$	$\frac{d_{13}}{t_4}$	$\frac{d_{14}}{t_4}$	$\frac{d_{15}}{t_4}$			
2018	SL_{2018}	$\frac{d_3}{t_3}$	$\frac{d_4}{t_3}$	$\frac{d_5}{t_3}$	$\frac{d_6}{t_3}$	$\frac{d_7}{t_3}$	$\frac{d_8}{t_3}$	$\frac{d_9}{t_3}$	$\frac{d_{10}}{t_3}$	$\frac{d_{11}}{t_3}$	$\frac{d_{12}}{t_3}$	$\frac{d_{13}}{t_3}$	$\frac{d_{14}}{t_3}$	$\frac{d_{15}}{t_3}$		
2019	SL_{2019}	$\frac{d_2}{t_2}$	$\frac{d_3}{t_2}$	$\frac{d_4}{t_2}$	$\frac{d_5}{t_2}$	$\frac{d_6}{t_2}$	$\frac{d_7}{t_2}$	$\frac{d_8}{t_2}$	$\frac{d_9}{t_2}$	$\frac{d_{10}}{t_2}$	$\frac{d_{11}}{t_2}$	$\frac{d_{12}}{t_2}$	$\frac{d_{13}}{t_2}$	$\frac{d_{14}}{t_2}$	$\frac{d_{15}}{t_2}$	
2020	SL_{2020}	$\frac{d_1}{t_1}$	$\frac{d_2}{t_1}$	$\frac{d_3}{t_1}$	$\frac{d_4}{t_1}$	$\frac{d_5}{t_1}$	$\frac{d_6}{t_1}$	$\frac{d_7}{t_1}$	$\frac{d_8}{t_1}$	$\frac{d_9}{t_1}$	$\frac{d_{10}}{t_1}$	$\frac{d_{11}}{t_1}$	$\frac{d_{12}}{t_1}$	$\frac{d_{13}}{t_1}$	$\frac{d_{14}}{t_1}$	$\frac{d_{15}}{t_1}$

Tableau 5 : la matrice des cadences de liquidation

où
$$t_i = \sum_{k=i}^{15} d_k$$

On passe maintenant au calcul des Cash-Flows :

- **Calcul des Cash-Flows :**

On commence premièrement par le calcul des Cash-flows non actualisés, en multipliant les soldes à liquider par les cadences de liquidation,

Ainsi en multipliant le solde à liquider de l'année de survénance i par la cadences de liquidation correspondante du colonne j ($j \leq i-2005$) on obtient le cash-flow non actualisé l'année de survénance projetée en $2020+j$

Si on note la matrice de liquidation par $(CL)_{ij}$ pour i de 2005 à 2020 et j de 1 à 15

Alors l'expression du cash-flow non actualisé l'année de survenance projetée en 2020+ j :

$$CFNA_{ij} = SL_i * CL_{ij}$$

Ensuite on actualise ces Cash-flows en utilisant la courbe des taux publiée par l'EIOPA qui se base sur le modèle de Smith-Welson :

Alors l'expression du cash-flow actualisé l'année de survenance projetée en 2020+ j :

$$CFNA_{ij} = \frac{SL_i * CL_{ij}}{(1 + r_j)^j}$$

Avec r_j : taux zéro coupon de maturité j

- **Calcul du BE :**

La somme des Cash-flows actualisés nous donne le BE pour sinistres par la méthode internes

V. Modélisation de la courbe des taux :

Comme on a vu dans le calcul du BE, le courbe zéro coupon est d'une importance majeure puisqu'elle nous serve dans l'actualisation des cash-flows futurs figurant dans la formule de BE, et en générale en assurance non vie la modélisation de cette courbe est essentielle puisqu'elle nous permet de :

- Donner une valeur de marché au passif de la compagnie en actualisant chacun de ses flux, selon leurs maturités, au taux zéro-coupon de la courbe.
- Valoriser les portefeuilles obligataires de la compagnie au prix du marché, et ainsi protéger l'assureur contre les risques liés aux variations défavorables des taux d'intérêts.

Cette courbe, reflète le niveau des taux d'emprunt de l'Etat, qui est considéré généralement comme un acteur sans risque.

On va essayer étudier la méthodologie de construction de la courbe des taux zéro-coupon basée sur l'interpolation linéaire et sur l'extrapolation de Smith et Wilson et de Nelson-Siegel des données observées sur le marché.

V.1. La courbe empirique :

Au Maroc, Bank Al Maghrib publie régulièrement une courbe de taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés primaire et secondaire les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les prix. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an.

Ces taux ne sont pas en lecture directe, en effet les taux d'intérêts publiés par Bank Al Maghrib ne correspondent pas à des taux actuariels aux maturités pleines mais plutôt à des taux de rendement aux maturités résiduelles correspondantes aux dates d'échéance d'où la nécessité de passer par certaines étapes :

- **La Transformation des taux monétaires en taux actuariels**

Comme on a précisé, la courbe publiée Bank Al Maghrib comprend des taux monétaires, or pour pouvoir interpoler entre les taux, ils doivent avoir la même base d'intérêt ainsi, on doit les transformer en taux actuariels pour trouver les taux supérieurs à 1 an.

Cette transformation se fait selon la formule suivante :

$$t_a = \left(1 + \frac{n \cdot t_m}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

Où :

- t_a le taux actuariel
- t_m le taux monétaire
- n le nombre de jours de placement

- **Interpolation de la courbe des taux de référence**

Les taux actuariels obtenus après la transformation faite dans l'étape précédente sont des taux de maturités non entières, mais grâce à eux on peut obtenir Les taux actuariels pour les maturités pleines, et ce en procédant à une interpolation linéaire de deux valeurs de taux voisines en utilisant la courbe des taux.

En connaissant $R(t_i)$ et $R(t_j)$ nous obtenons une valeur approximative de $R(t_p)$ grâce à la formule d'interpolation linéaire suivante :

$$R(t_p) = R(t_i) + \left(R(t_j) - R(t_i)\right) * \frac{t_p - t_i}{t_j - t_i}$$

avec t_p est la maturité pleine et $R(t_p)$ le taux correspondant

t_i, t_j les deux valeurs de maturité des taux retenus après l'étape précédente et qui sont avoisinantes de t_p c'est-à-dire $t_p \in [t_i, t_j]$

- **Transformation des taux actuariels en taux zéro-coupon (Méthode Bootstrap)**

La courbe des taux interpolée obtenue à l'étape précédente est transformée en une courbe zéro-coupons en supposant que les prix des obligations des bons du trésor sont « au pair » (le prix d'émission de l'obligation est égal à 100% de la valeur nominale).

La méthode utilisée est celle de bootstrap : c'est une procédure permettant de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est-à-dire de proche en proche selon les maturités des obligations étant à disposition en se basant sur le principe qui dit que «le prix théorique d'une obligation égalise la somme des différents flux actualisés au différents taux zéros coupon respectifs au maturités de chacun de ses mêmes flux » .

Pour la maturité un an, le taux zéro coupon 1 an correspond au taux actuariel de rendement 1 an puisqu'aucun coupon n'est versé entre le moment de calcul du taux zéro coupon et l'échéance.

Pour les maturités supérieures à un an, le taux zéro-coupon est calculé avec la formule suivante :

$$ZC_j = \left(\frac{1 + R_j}{1 - R_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{(1 + ZC_i)^i}} \right)^{\frac{1}{j}} - 1 \quad \text{pour } 1 < j \leq n$$

Où

- ZC_j : le taux zéro-coupon de maturité j .
- R_j : le taux actuariel de maturité j

V.2. Modèles Paramétriques de la courbe des taux

Dans cette partie on va essayer d'expliquer deux modèles qui sont très utilisés pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt court, et l'extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon Il s'agit de : le Modèle de Smith-Wilson et le Modèle de Nelson Siegel

V.2.1 La méthode de Smith-Wilson :

La technique de Smith-Wilson est une méthode macroéconomique d'interpolation et d'extrapolation de la courbe des taux, macroéconomique dans le sens où le taux d'intérêt forward à long terme, TFR (Taux Forward Ultime), est considéré comme une donnée dans le modèle.

Elle correspond à la méthode choisie par EIOPA pour projeter la courbe de taux sans risque, ce qui a motivé notre intérêt envers cette méthode dans ce mémoire puisque la SCR travaille avec la courbe des taux affichée par l'EIOPA.

La méthode de Smith-Wilson permet d'estimer la fonction de prix $P(t)$ des zéro coupon pour toutes les maturités $t > 0$. Cette fonction est supposée satisfaire les caractéristiques suivantes :

- P est une fonction positive.
- P est une fonction strictement décroissante de la maturité.
- $P(t = 0) = 1$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$

La fonction des prix proposée est définie pour tout $t > 0$. Elle est déterminée de la façon suivante:

$$P(t) = e^{-TFU \times t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(t)$$

Où

- t représente la variable maturité
- $(\zeta_j)_{j=1, \dots, N}$ Sont les inconnues à ajuster par rapport à la courbe des taux zéro-coupon disponible avant extrapolation

- D'un terme $e^{-TFU \times t}$ pour le comportement asymptotique à long terme du facteur d'actualisation. Le terme TFU correspond au « Taux Forward Ultime », il correspond à une estimation du taux zéro-coupon des obligations à long terme dans 20 ans.
- D'une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(t)$ de N fonctions noyau (le nombre N correspondant au nombre de maturités de zéro-coupon disponibles avant extrapolation, ici 20). Chacune des fonctions noyau prend en compte des données de marché ainsi que deux autres arguments :
 - o Le TFU : Taux Forward Ultime.
 - o La vitesse de convergence vers le TFU.

Les fonctions noyaux $K_j(t)$ sont définies de la manière suivante : $\forall j \in 1, \dots, N$

$$K_j(t) = e^{-TFU \times (t+u_j)} \left\{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0,5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \left(e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \right) \right\}$$

Les inconnues $(\zeta_j) (j = 1, \dots, N)$ sont ajustées de la façon suivante:
 - Si on note $(m_i) (i = 1, \dots, N)$ les prix de marché respectifs des zéro-coupon disponibles, alors, les paramètres $(\zeta_j) (j = 1, \dots, N)$ à ajuster sont les solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} m_1 = P(u_1) &= e^{-TFU \times u_1} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_1) \\ m_2 = P(u_2) &= e^{-TFU \times u_2} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ m_N = P(u_N) &= e^{-TFU \times u_N} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_N) \end{aligned}$$

Le système ci-dessous peut être retranscrit sous forme matricielle. Les paramètres $(\zeta_j) (j = 1, \dots, N)$ sont alors déduits par inversion matricielle. Il ne reste plus qu'à les injecter dans la fonction de prix de Smith Wilson pour obtenir la valeur du prix d'un zéro-coupon pour les maturités au-delà de la dernière maturité disponible. Les taux zéro-coupon $(R_t) t > N$ sont ensuite déduits en utilisant la relation suivante :

$$R_t = \left(\frac{1}{P(t)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Les paramètres TFU et α sont calibrés de la façon suivante:

Le Taux Forward Ultime (TFU) correspond à la somme des éléments suivants :

- La moyenne des taux réels 1 an (correspondant aux taux zéro coupon 1 an au 31/12 ajustés de l'inflation annuelle) sur l'historique disponible.
- Le taux d'inflation cible fixé calibré sur l'historique d'inflation disponible et selon une moyenne géométrique pondérée de la façon suivante :

$$\text{Taux d'inflation cible} = \exp\left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i \times \ln(1 + \text{Taux inflation}_i)}{\sum_{i=0}^n w_i}\right) - 1$$

Où :

- n est le nombre d'années d'historique d'inflation disponible.
- w_i est le poids associé à l' i ème taux d'inflation avec $w_i = \beta^{n-i}$ et $\beta = 0.99$

La vitesse de convergence α est calibrée de façon à ce que la différence entre les taux forward 1an projetés et le TFU converge vers zéro à horizon 60 ans à un seuil de 0.00001, On obtient ainsi une vitesse de convergence $\alpha_{optimale} = 0,11128$

V.2.2. Modèle de Nelson Siegel :

Le modèle de Nelson-Siegel (1987) constitue une des méthodes les plus populaire de reconstitution de la courbe des taux. Il est caractérisé par sa simplicité, sa flexibilité et pour ses résultats statistiquement précis et économiquement significatifs.

L'idée sous-jacente dans le modèle de Nelson-Siegel est de trouver une famille de fonctions paramétriques capable de générer des courbes suffisamment flexibles pour suivre les fluctuations usuelles de la courbe des taux zéro-coupon mais également suffisamment lisses. Le modèle recherché doit aussi être d'une complexité réduite en comportant peu de paramètres à estimer.

Le taux forward instantané dans ce modèle est défini comme suit :

$$f_t(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\lambda}} + \beta_2 \frac{m}{\lambda} e^{-\frac{m}{\lambda}}$$

On déduit donc le taux zéro coupon à partir de formule suivante :

$$R_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du$$

On obtient :

$$R_t(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right)$$

où, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda$ sont quatre paramètres à estimer. Ces paramètres ont tous un rôle bien spécifique et influencent la forme de la courbe. De plus, un point fort du modèle de Nelson Siegel est que ces paramètres ont une interprétation économique et financière. L'expression du taux à terme instantané de maturité m et à la date t peut alors être déduite de cette expression

Les paramètres s'interprètent en se basant sur l'expression du taux zéro coupon, ainsi :

- β_0 : Facteur de niveau ; il s'agit du taux long.
- β_1 : Facteur de rotation ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long.
- β_2 : Facteur de courbure ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux moyen.

- λ : Paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps.

Partie 2 : Cadre pratique de l'évaluation des provisions techniques et calcul de BE : Application sur le portefeuille de la Région Asie-Pacifique

Dans ce chapitre de notre mémoire, nous allons appliquer les notions théoriques citées dans le chapitre précédent sur trois branches du portefeuille non-vie de la région Asie-Pacifique de la société centrale de réassurance, à savoir : Incendie, RC-Automobile, et Maritime. Pour des raisons de simplifications, On expose en détails seulement les résultats obtenus de la branche Incendie de la région Asie-Pacifique, les résultats des autres branches seront seulement affichés.

Dans un premier lieu, on va essayer de mettre en place la courbe des taux zéro coupons qu'on va utiliser pour l'actualisation des cashflows pour le calcul du BE en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre précédent et ce en se basant sur les données du marché Marocain

Dans un deuxième lieu, on va appliquer les méthodes classiques du calcul des provisions technique (déterministes et stochastiques), ainsi que le calcul du best Estimate pour sinistres (le cadre du projet SBR)

Finalement, on exposera les résultats obtenus par la méthode interne de la SCR dans le calcul du BE

Avant de passer à l'application, commençant d'abord par une analyse abrégée du marché de l'assurance non vie de la région concernée par notre portefeuille à savoir la région Asie-Pacifique, en présentant quelques chiffres clés de quelques pays de ce marché.

I. Analyse du marché de l'assurances non vie de la région Asie-Pacifique :

La région Asie-Pacifique regroupe des marchés d'assurance diversifiés et en forte croissance qui offrent d'énormes possibilités d'investissement aux assureurs et réassureurs internationaux, C'est dans ce sens que la SCR est inscrite en essayant d'augmenter le volume de ses opérations avec les différents acteurs de ce marché

On va essayer de présenter des statistiques clés de ce marché pour les pays membre et ayant souscrits des contrats avec la SCR en se basant sur les données disponibles aux sites des autorités d'assurance des pays concernés

Les affaires étrangères dans la région Asie-Pacifique de la SCR se résument principalement dans cinq pays à savoir : la Corée de sud, l'Inde, la Chine, le Taiwan et le Pakistan.

Vu l'absence de statistiques du marché d'assurance de la Chine et de Pakistan, On va présenter juste les trois pays restants du portefeuille d'assurance non vie de la SCR dans la région APAC

I.1. INDE

	2016	2017	2018	2019	2020	Part du Marché
Automobile	6.379	7.744	9.106	9.272	9.302	38,97%
Santé	4.140	5.320	6.453	7.305	7.671	28,80%
Incendie	1.317	1.470	1.657	1.677	2.121	7,68%
Maritime	450	450	445	465	476	2,13%
Autres	2.248	4.761	5.496	5.631	5.914	22,42%

Tableau 6 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en inde entre 2016 et 2020 en millions USD

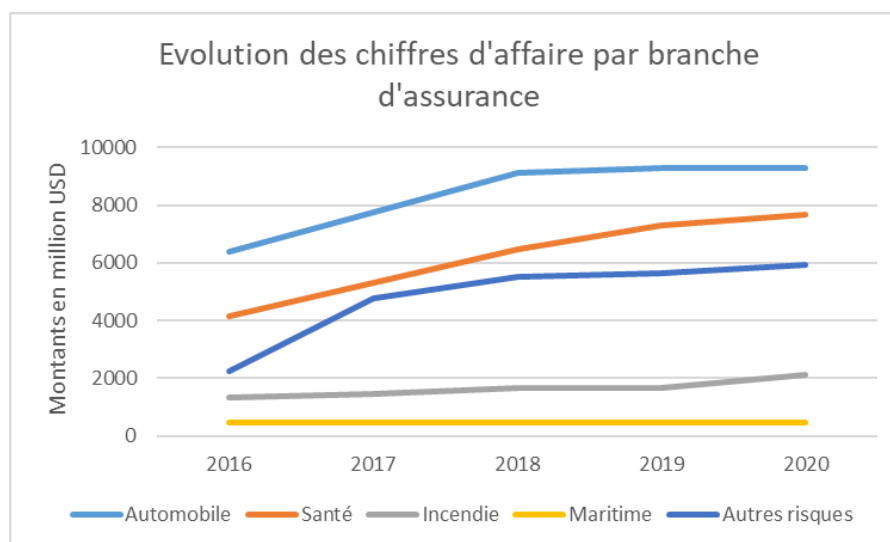


Figure 13 : L'assurance non-vie en Inde : Évolution des primes émises par branche

Le secteur de l'assurance non vie indien a connu une évolution marquante de son chiffre d'affaire pendant les 5 dernières années :

On constate d'après la représentation graphique que le niveau des primes acquises par les assureurs non vie indien a connu au niveau global une hausse assez remarquable pour toute les branches notamment les branches « santé » et « automobile » qui connaissaient une évolution importante entre 2016 et 2018

Le marché indien de l'assurance non-vie est dominé par deux branches d'assurance suivantes : l'assurance automobile et l'assurance maladie qui représentent respectivement 39% et 29% des recettes globales sur la période entre 2016 et 2020.

Avec environ 7.6 % des primes sur le marché, l'incendie se place loin derrière les deux risques évoqués précédemment, tandis que l'assurance maritime ne représente que 2% des primes sur le marché indien d'assurance non-vie

	2016	2017	2018	2019	2020
Automobile	81,2%	88,2%	83,4%	90,6%	85,6%
Santé	98,4%	101,0%	92,2%	89,3%	85,7%
Incendie	74,4%	84,4%	82,3%	90,4%	78,1%
Maritime	72,0%	74,9%	65,3%	84,4%	71,2%
Autres risques	75,9%	81,9%	78,9%	82,8%	93,4%

Tableau 7 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie indienne entre 2016 et 2020

D'une manière générale, la sinistralité du marché indien de l'assurance non-vie est élevée, toutes les branches d'activité affichant des ratios de sinistres supérieurs à 70%. La santé, l'automobile et l'incendie sont les activités affichant les ratios de sinistres les plus élevés.

I.2. Corée de sud :

	2015	2016	2017	2018	2019
Incendie	49,8%	56,5%	48,0%	51,0%	64,4%
Maritime	73,1%	73,2%	55,5%	65,6%	71,6%
Automobile	87,7%	83,0%	80,9%	86,4%	92,8%
Garantie	52,9%	41,9%	44,1%	46,6%	60,7%
Domage	63,2%	67,3%	69,7%	72,4%	73,3%
Long-term	84,8%	84,3%	82,7%	81,6%	82,7%
Total	83,0%	81,8%	80,3%	81,0%	83,5%

Tableau 8 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie en Corée de sud entre 2015 et 2019

Les assureurs non-vie Sud-Coréens ont enregistré en 2019 le plus grand ratio de sinistralité pour la période entre 2015 et 2019 avec un ratio de 83,5%, soit 2,5% de plus qu'en 2018 qui a connu un ratio de 81%.

Les ratios de sinistralité de toutes les branches ont légèrement augmenté par rapport à 2018. Notamment, le loss ratio de l'assurance automobile a dépassé 90 % et ceux de l'assurance garantie et de l'assurance incendie en 2019 ont augmenté de 14,1 % et 13,4 % par rapport à 2018, pour atteindre respectivement 60,7 % et 64,4

	2015	2016	2017	2018	2019
Incendie	304	301	297	275	272
Maritime	709	608	644	595	600
Automobile	14.991	16.405	16.857	16.720	17.568
Garantie	1.582	1.591	1.744	1.954	1.934
Dommage	5.162	5.468	5.783	6.198	6.517

Tableau 9 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en Corée de sud entre 2016 et 2020 en milliard KRW

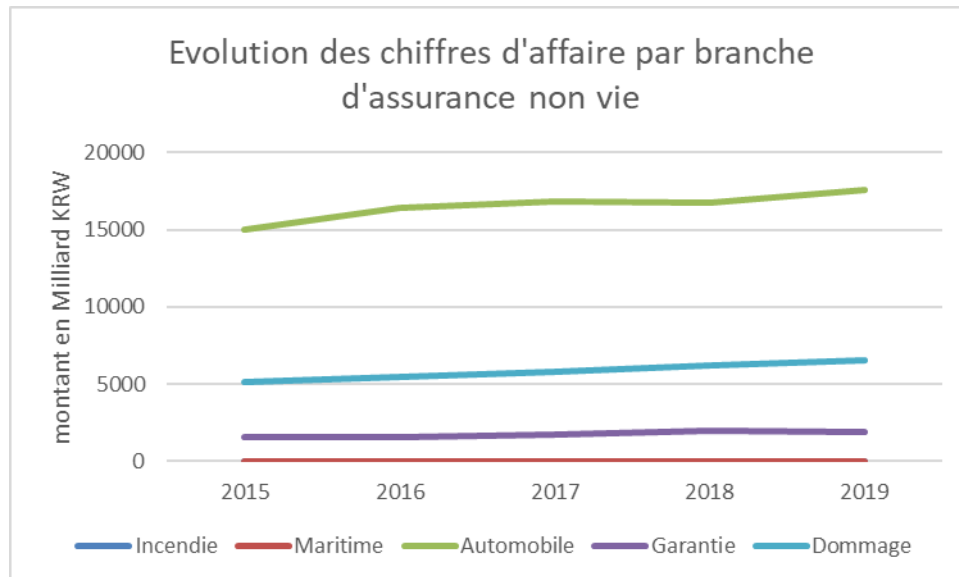


Figure 14 : L'assurance non-vie en Corée de sud : Évolution des primes émises par branche

On remarque que les branches qui se caractérisent par le plus grand chiffre d'affaires sont « Automobile », « dommage » et « garantie ». Alors que les deux autres branches restantes sont négligeables en chiffres d'affaire devant ces trois branches.

On stipule également d'après ce graphe, que les trois branches majoritaires sur le marché d'assurance non-vie sud-coréen ont une tendance croissante entre 2015 et 2019, à l'opposé des deux branches restantes qu'elles connaissaient des fluctuations au niveau d'évolution durant cette même durée

I.3. Taiwan :

	Incendie	Maritime	automobile	Domage
2016	70,7%	87,4%	73,5%	57,7%
2017	77,4%	89,3%	75,6%	57,8%
2018	59,3%	69,1%	73,9%	58,8%
2019	56,9%	71,3%	78,1%	57,6%
2020	51,6%	65,2%	75,4%	65,2%

Tableau 10 : Ratio de sinistralité par branche d'assurance non vie en Taiwan entre 2016 et 2020

Généralement la sinistralité du marché Taiwanais de l'assurance non-vie est n'est pas très élevé, toutes les branches d'activité affichant des ratios de sinistres inférieurs à 78.1%, sauf pour la branche maritime qui affichait des ratios élevés dépassant 87% en 2016 et 2017

	Incendie	maritime	automobile	Domage
2016	23.025	6.854	80.092	15.417
2017	25.293	6.743	85.951	16.466
2018	25.883	7.066	89.534	17.724
2019	25.882	7.122	94.654	19.204
2020	29.096	7.710	101.586	18.497

Tableau 11 : Evolution des primes émises par branche d'assurance en Taiwan entre 2016 et 2020 en millions de NT\$

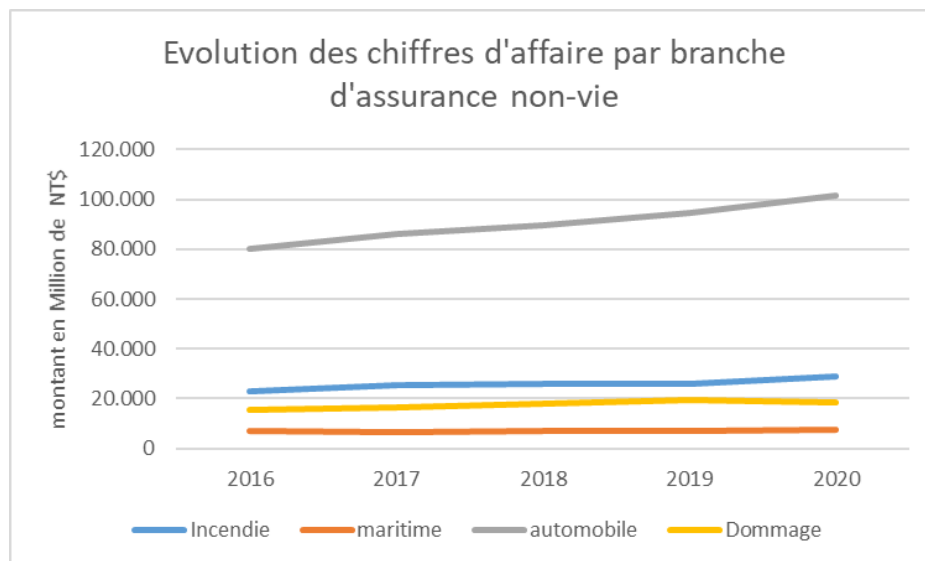


Figure 15 : L'assurance non-vie en Taiwan : Évolution des primes émises par branche

On constate que le marché taiwanais de l'assurance non-vie est dominé par la branche automobile qui connaît une évolution marquante de son chiffre d'affaire durant la période entre 2016 et 2020.

Les trois branches mentionnées restantes à savoir « incendie », « maritime » et « dommage », connaissent à leur tour une stabilité de leur chiffre d'affaire pendant la même période (2016-2020) avec des petites fluctuations occasionnellement.

Conclusion :

A partir des statistiques qu'on vient d'exhiber on peut confirmer que le secteur de l'assurance non vie de la région APAC connaît une croissance progressive, on remarque également que le secteur dominant est celui de l'assurance automobile suivi par celui de l'incendie ce qui justifie bien notre choix de portefeuille constitué des branches : « Incendie », « RC Automobile » et « Maritime et transport »

Ces données de marché vont être utilisées dans la dernière partie de ce mémoire.

On passe maintenant à l'application des notions théoriques de provisionnement déjà citées sur notre portefeuille d'étude.

II. Construction de la courbe des taux

Cette section vise à construire une courbe des taux zéro-coupon en suivant méticuleusement les étapes déjà décrites dans le chapitre précédent. À cet effet, on applique la méthodologie de construction de la courbe des taux zéro-coupon en se basant sur l'interpolation linéaire et sur l'extrapolation de Smith et Wilson et sur l'extrapolation de Nelson Siegel de données issues de Bank Al Maghrib.

II.1. Interpolation et Bootstrap des taux

Le tableau ci-dessous représente les données qu'on va utiliser pour la construction de la courbe zéro coupon empirique, Elles correspondent aux transactions sur les bons de trésor du marché secondaire observées le 31/12/2020 (qui n'est autre que la date d'évaluation des provisions)

Les champs :

- Transaction : correspond au prix du bon de trésor
- Les taux moyens pondérés : sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an

Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur
08/02/2021	173,09	1,46%	31/12/2020
15/03/2021	1392,82	1,46%	31/12/2020
17/05/2021	118,14	1,48%	31/12/2020
14/06/2021	39,08	1,47%	31/12/2020
13/09/2021	120,80	1,47%	31/12/2020
17/01/2022	230,74	1,62%	31/12/2020
18/04/2022	39,71	1,67%	31/12/2020
18/07/2022	117,61	1,72%	31/12/2020
15/08/2022	47,47	1,74%	31/12/2020
20/03/2023	190,87	1,90%	31/12/2020
02/06/2025	48,15	2,01%	31/12/2020
15/06/2026	124,53	2,14%	31/12/2020
16/04/2029	57,47	2,27%	31/12/2020
05/08/2030	48,32	2,35%	31/12/2020
18/07/2031	280,31	2,41%	31/12/2020
18/07/2033	68,4	2,54%	31/12/2020
16/07/2035	94,8	2,67%	31/12/2020
19/02/2046	34,57	3,20%	31/12/2020
14/02/2050	25,74	3,40%	31/12/2020
20/02/2051	507,05	3,37%	04/01/2021

Tableau 12 : Les transactions sur les bons de trésor au 31/12/2020

Parcourant les étapes permettant la détermination des taux zéros coupon par interpolation linéaire et bootstrap :

- **Transformation des taux monétaires en taux actuariels :**

La première étape c'est l'obtention des taux actuariels à partir taux monétaires, on obtient alors :

Maturité en année	Taux actuariel
0,11	1,49%
0,20	1,49%
0,38	1,51%
0,45	1,50%
0,70	1,49%
1,05	1,62%
1,30	1,67%
1,55	1,72%
1,62	1,74%
2,22	1,90%
4,42	2,01%
5,46	2,14%
8,30	2,27%
9,60	2,35%
10,55	2,41%
12,55	2,54%
14,55	2,67%
25,15	3,20%
29,14	3,40%
30,15	3,37%

Tableau 13 : Taux actuariels

- **L'interpolation linéaire des taux actuariels**

Les maturités affichées dans le tableau précédent sont pas pleines (durée entière), donc on applique la formule d'interpolation linéaire vu dans la partie théorique pour obtenir des taux actuariels associés à des maturités pleines, on obtient alors :

Maturité	Taux actuariel pour les maturités pleines
1	1,60%
2	1,84%
3	1,93%
4	1,98%
5	2,08%
6	2,16%
7	2,21%
8	2,26%
9	2,32%
10	2,38%
11	2,44%
12	2,51%
13	2,57%
14	2,63%
15	2,69%
16	2,74%
17	2,79%
18	2,84%
19	2,89%
20	2,94%
21	2,99%
22	3,04%
23	3,09%
24	3,14%
25	3,19%
30	3,38%

Tableau 14 : Taux actuariels interpolés

- **Bootstrap de la courbe Zéro-Coupon**

Les taux actuariels interpolés obtenus précédemment sont convertis en taux zéro coupon en utilisant la technique du bootstrap décrite dans la partie théorique, on obtient finalement la courbe des zéro coupon suivante :

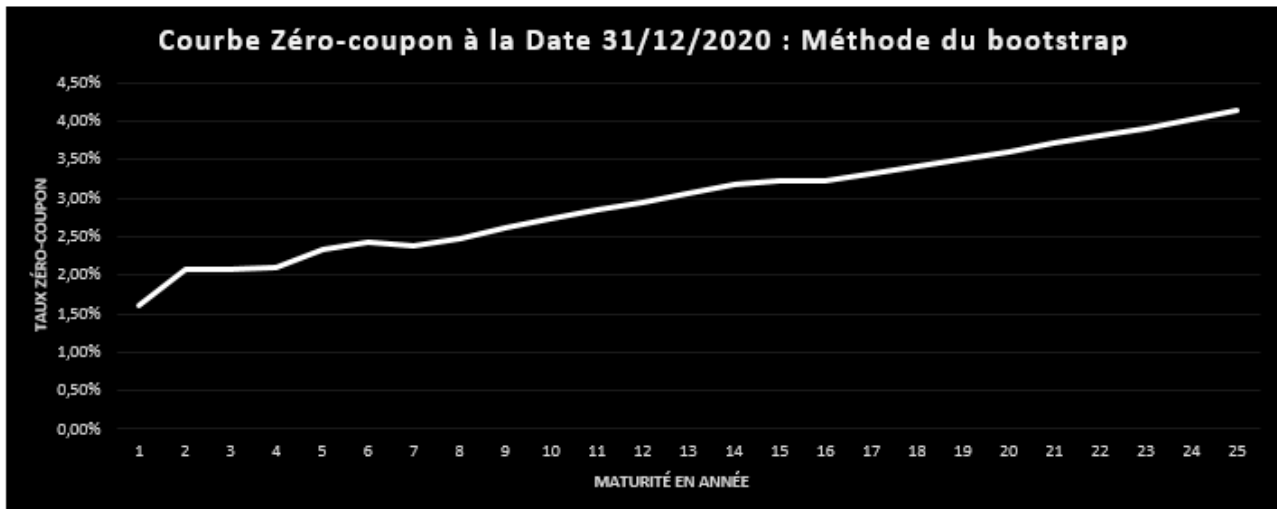


Figure 16 : La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode du bootstrap

II.2. Le modèle de Smith-Wilson

La méthode de Smith-Wilson génère la courbe suivante :

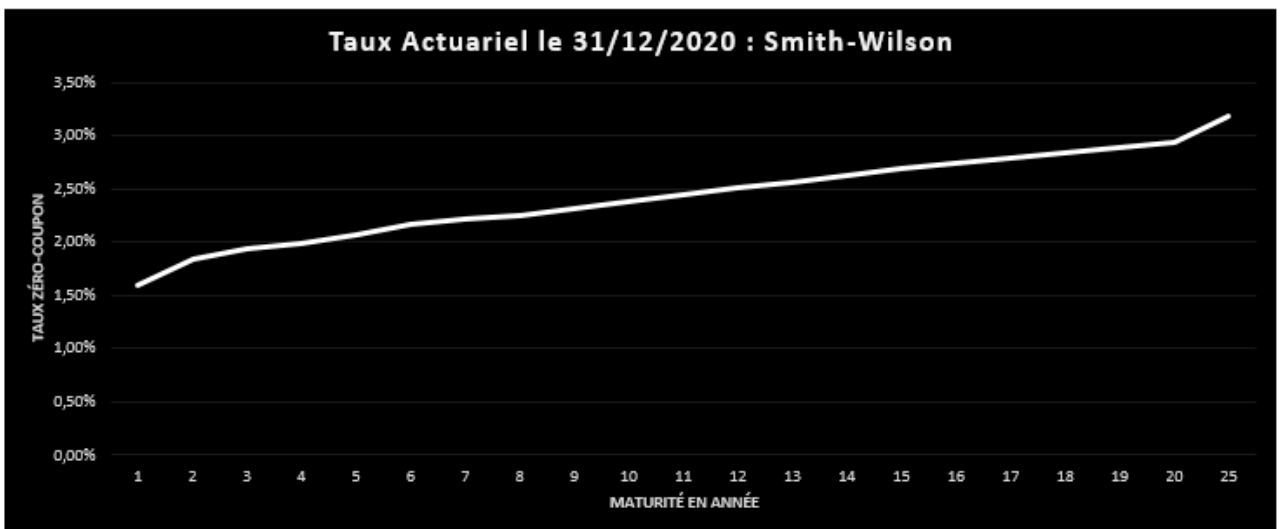


Figure 17 : La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode de Smith Wilson

II.3. Le modèle de Nelson Siegel

L'enjeu dans ce modèle est de préciser les paramètres $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda$ dans la formule

$$R_t(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right)$$

Nous exploitons la courbe des taux publié par BANK AL Maghrib, pour estimer les paramètres du modèle, En utilisant le solveur d'excel on obtient les coefficients suivants :

$$\begin{cases} \beta_0 = 0,0465 \\ \beta_1 = -0,0305 \\ \beta_2 = -0,0015 \\ \lambda = 31,9159 \end{cases}$$

On trouve finalement la courbe des taux zéro-coupon selon cette méthode :

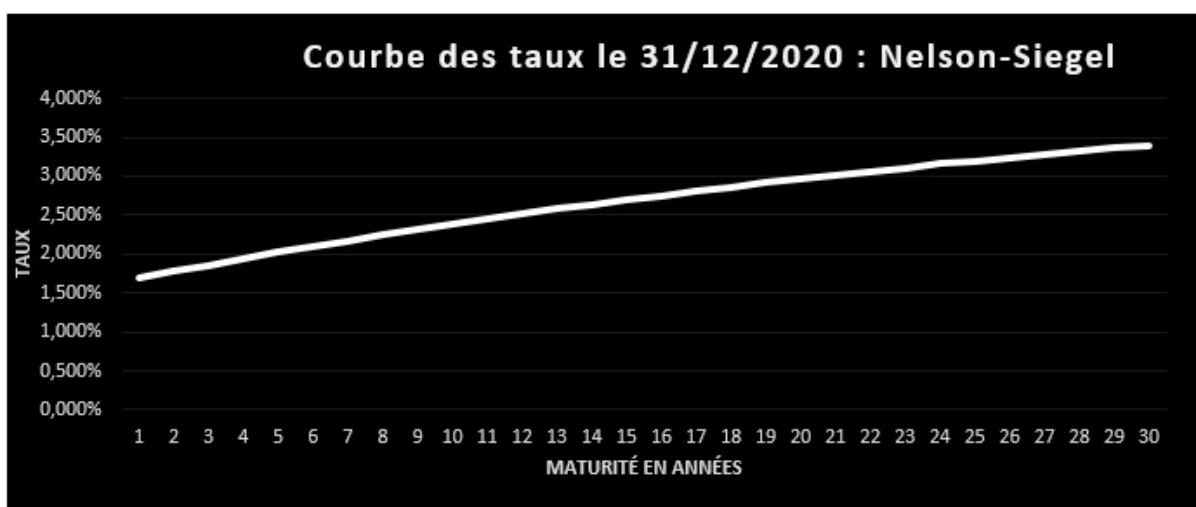


Figure 18 : La courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2020 par la méthode du Nelson Siegel

La société centrale de réassurance travaille avec la courbe des taux zéro coupon fournie par l'EIOPA qui se base sur la méthode Smith Wilson. Donc dans ce qui suit, les cash-flows seront actualisés en se basant sur les courbes obtenus par cette méthode.

III. Application des méthodes de provisionnement classiques

Dans ce mémoire on va baser notre étude sur le portefeuille non vie de la région d'Asie-Pacifique comme mentionné précédemment on présentera en détail les calculs de la branche « Incendie », pour les deux branches restantes on se contente d'afficher les résultats.

Vu la nature confidentielle des données utilisées, elles ont été modifiées de sorte que nul ne puisse les retrouver, et ce en multipliant le triangle initial par une matrice de passage. Cependant les ordres de grandeurs des résultats et les interprétations obtenues sont les mêmes obtenues lors de notre travail initial.

Le triangle des paiements cumulés relatif à la branche « Incendie » modifié se présente comme suit :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48.538	59.346	191.990	450.675	666.475	818.853	886.513	928.355	928.391	932.296	944.747	963.501	965.542	968.465	969.792	969.796
2006	40.479	274.182	882.914	1.600.884	2.947.321	3.655.157	3.873.337	3.929.645	3.969.452	3.985.703	4.075.346	4.087.707	4.088.727	4.101.162	4.101.169	
2007	243.538	1.214.871	2.015.966	2.642.536	3.137.203	3.251.922	3.475.583	3.505.033	3.584.929	3.588.977	3.609.870	3.631.801	3.666.984	3.666.989		
2008	186.223	1.074.525	1.508.577	1.682.182	2.114.702	2.236.089	2.495.672	2.591.652	2.645.417	2.658.943	2.665.067	2.710.537	2.711.270			
2009	163.328	641.437	1.052.064	1.411.330	1.736.061	2.164.173	2.194.475	2.288.479	2.356.398	2.403.970	2.516.333	2.518.527				
2010	169.133	357.950	589.641	754.225	981.646	1.002.550	1.390.932	1.447.125	1.495.781	1.520.435	1.523.470					
2011	92.681	433.652	727.732	1.162.106	1.624.869	2.360.080	2.939.189	2.967.343	3.057.512	3.076.954						
2012	108.952	535.039	892.682	1.066.692	1.466.659	1.877.203	2.104.938	2.185.536	2.198.016							
2013	122.656	354.484	580.640	660.040	1.274.631	1.786.170	2.203.547	2.223.824								
2014	500	618.795	1.096.318	1.648.321	2.285.018	2.373.476	2.415.113									
2015	307.427	1.546.996	2.143.069	3.119.209	3.242.274	3.382.093										
2016	99.277	247.116	410.226	571.230	620.461											
2017	92.037	764.653	1.011.083	1.073.750												
2018	273.588	458.361	576.095													
2019	264.813	429.126														
2020	1.443.067															

Tableau 15 : Le triangle des paiements cumulés la branche « Incendie » de la région APAC

On présentera dans cette partie les résultats des méthodes classique du provisionnement pour les deux catégories de méthodes :

Les Méthodes Déterministes notamment la méthode de :

- Chain-Ladder classique
- Bornhuetter-Ferguson
- Méthode de séparation de Taylor

Les méthodes Stochastiques notamment :

- Le modèle de Mack
- Les modèles GLM
- Le modèle Bootstrap

III.1. Résultats des méthodes déterministes :

III.1.1 Méthode Chain-Ladder Classique :

Malgré la simplicité de mise en place de la méthode Chain-Ladder, il est essentiel d'effectuer certaines vérifications pour valider cette méthode. Nous allons retenir deux tests :

Première hypothèse :

La première hypothèse est celle de l'indépendance des années de survenance entre elles, cette hypothèse est vérifiée lorsque le coefficient de passage individuel $\lambda_{i,j}$ pour une année de développement j est équivalent pour toutes les années de survenance i c'est-à-dire $\lambda_{i,j} =$

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \bar{\lambda}_j \text{ avec } \bar{\lambda}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j}$$

On peut vérifier l'exactitude de cette première hypothèse par deux méthodes. La première est une méthode graphique alors que la deuxième repose sur le calcul et l'interprétation de quelques statistiques de base.

La méthode graphique : Pour chaque année de développement j , il s'agit de calculer les $\lambda_{i,j}$ $i=1, \dots, 15$ et les comparer à leur moyenne $\bar{\lambda}_j$, on obtient alors :

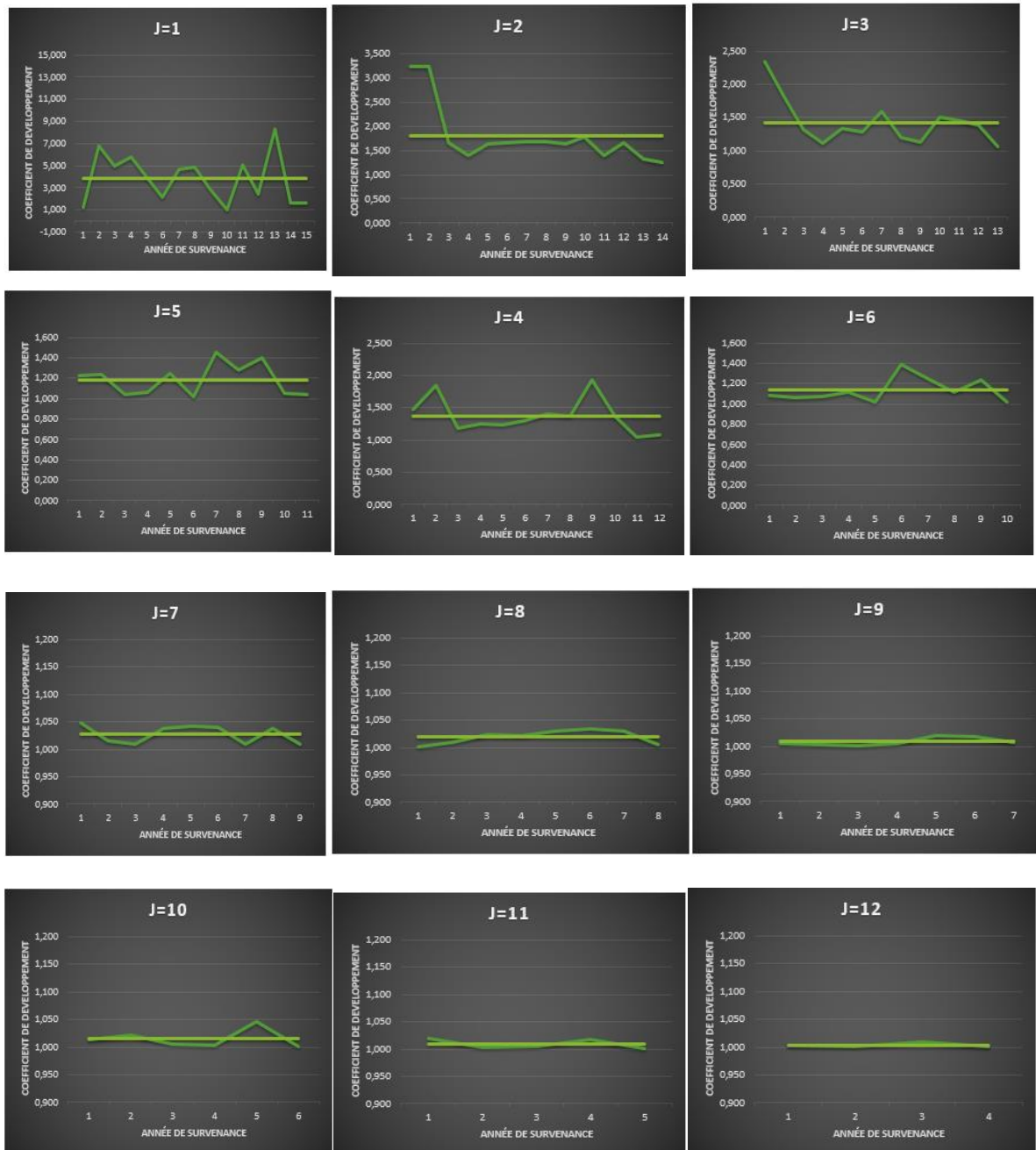


Figure 19 : Comparaison des $\lambda_{i,j}$ à $\bar{\lambda}_j$ pour $j=1, \dots, 12$

On constate que pour les quatre premières années, l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survivance n'est pas réaliste vu qu'il y'a une volatilité importante des $\lambda_{i,j}$ par rapport à $\bar{\lambda}_j$. En revanche l'hypothèse paraît plus réaliste pour les autres années où on remarque des coefficients de variation très faibles.

Pour mieux justifier cette première hypothèse de Chain Ladder, nous allons donc déterminer la moyenne, l'écart type et enfin le coefficient de variation des facteurs de développement individuel. Ci-dessous nous avons le triangle de coefficients individuels

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31/12/2005	1,223	3,235	2,347	1,479	1,229	1,083	1,047	1,000	1,004	1,013	1,020	1,002	1,003	1,001	1,000	
31/12/2006	6,773	3,220	1,813	1,841	1,240	1,060	1,015	1,010	1,004	1,022	1,003	1,000	1,003	1,000		
31/12/2007	4,988	1,659	1,311	1,187	1,037	1,069	1,008	1,023	1,001	1,006	1,006	1,010	1,000			
31/12/2008	5,770	1,404	1,115	1,257	1,057	1,116	1,038	1,021	1,005	1,002	1,017	1,000				
31/12/2009	3,927	1,640	1,341	1,230	1,247	1,014	1,043	1,030	1,020	1,047	1,001					
31/12/2010	2,116	1,647	1,279	1,302	1,021	1,387	1,040	1,034	1,016	1,002						
31/12/2011	4,679	1,678	1,597	1,398	1,452	1,245	1,010	1,030	1,006							
31/12/2012	4,911	1,668	1,195	1,375	1,280	1,121	1,038	1,006								
31/12/2013	2,890	1,638	1,137	1,931	1,401	1,234	1,009									
31/12/2014	1,000	1,772	1,504	1,374	1,048	1,018										
31/12/2015	5,032	1,385	1,455	1,039	1,043											
31/12/2016	2,489	1,660	1,392	1,086												
31/12/2017	8,308	1,322	1,062													
31/12/2018	1,675	1,257														
31/12/2019	1,620															
31/12/2020																

Tableau 16 : Triangle des coefficients de développement individuels

Les résultats obtenus des statistiques sont représentés dans le tableau suivant :

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Moyenne	3,827	1,799	1,427	1,375	1,187	1,135	1,028	1,019	1,008	1,015	1,009	1,003	1,002	1,001	1,000
Ecart type	2,115	0,602	0,333	0,26	0,148	0,113	0,016	0,012	0,007	0,016	0,008	0,004	0,001	0,0006842	0
Coeff de variation	55,3%	33,5%	23,4%	18,9%	12,4%	9,9%	1,5%	1,1%	0,7%	1,5%	0,8%	0,4%	0,1%	0,1%	0,0%

Tableau 17 : Moyenne-Ecart type-Coefficient de variation des coefficients de développement individuels

Pour $j=4, \dots, 13$, nous observons une variation maximale de 18.9% par rapport à la valeur moyenne (en valeur absolue), contrairement aux $j=1, 2, 3$ où la variation minimale est de 23.4%, et les écarts type sont relativement élevés.

Donc Pour les trois premières années de développement l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survenance n'est pas réalisée, les coefficients dans ces années sont volatiles autour de la moyenne, à partir de la quatrième année l'hypothèse est bien vérifiée car les facteurs sont relativement stables et les coefficients de variations sont inférieurs à 20%.

La première hypothèse relative à l'indépendance des années de survenance est supposée vérifiée.

Deuxième hypothèse :

La droite de régression des couples $(C_{i,j} ; C_{i,j+1})$ pour $i=1, \dots, n-1$, passe par l'origine et son coefficient de détermination est proche de 1

Afin de vérifier cette hypothèse, on trace l'ensemble des points $(C_{i,j} ; C_{i,j+1})$ selon les années de développement, on obtient les résultats suivants :

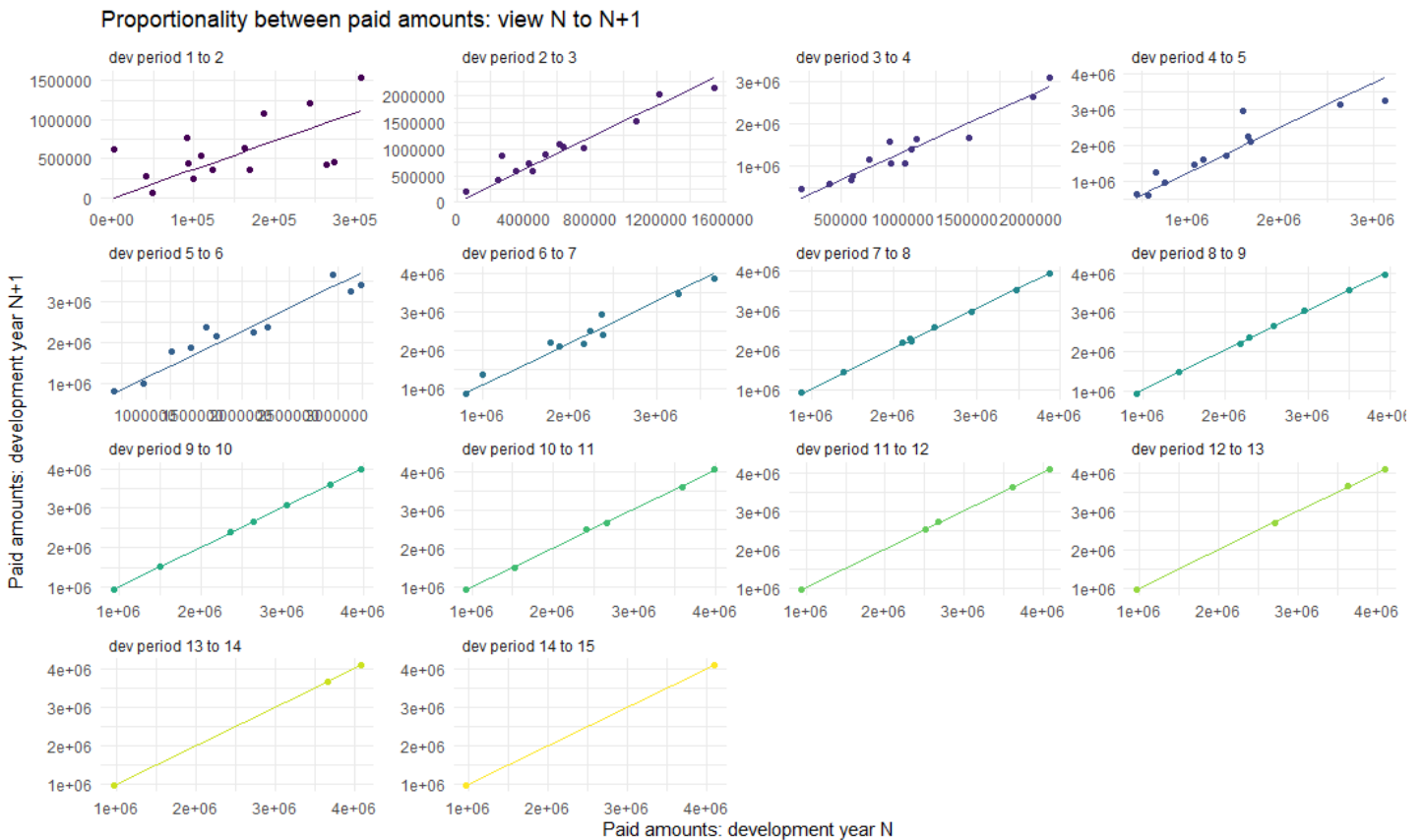


Figure 20 : Vérification de la deuxième hypothèse Chain Ladder

La deuxième hypothèse de Chain Ladder paraît raisonnable car les points semblent alignés sur des droites issues de l'origine pour chaque année de développement.

Nous considérons donc que les hypothèses du modèle de Chain Ladder sont ici vérifiées, et nous pouvons appliquer le modèle.

- **Application du modèle**

On calcul les coefficients de passage par année de développement Chain Ladder, on obtient :

Année de développement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
coefficient chaine Ladder	4,0713	1,5940	1,3618	1,3165	1,1608	1,1140	1,0233	1,0198	1,0072	1,0162	1,0073	1,0034	1,0018	1,0003	1,0000

Tableau 18 : Les coefficients Chain Ladder classique pour la branche « Incendie » de la région d'Asie

Grace à ces coefficients Chain Ladder, et Suite à l'application directe de formules mentionnées dans la partie théorique on remplit le triangle des règlements cumulés et on calcule les réserves annuelles ainsi que la valeur de la réserve globale, on obtient les résultats suivants :

Année de survenance	Réserve Chain Ladder
2005	0
2006	17
2007	980
2008	5.502
2009	13.744
2010	19.483
2011	89.844
2012	80.408
2013	126.975
2014	197.426
2015	693.497
2016	247.476
2017	903.697
2018	868.681
2019	1.286.360
2020	22.043.770

Réserve globale 26.577.860

Tableau 19 : provisions obtenus par la méthode Chain Ladder

Donc, la réserve de Chain Ladder obtenue est : **26 577 860 MAD**

Pour les autres segments on obtient de la même manière les provisions suivantes :

Incendie	RC automobile	Maritime et transport
26.577.860	18.765.052	4.402.937

Tableau 20 : Les PSAP Chain Ladder obtenus pour les trois segments du portefeuille non vie de la région APEC en MAD

III.1.3. Bornhuetter-Ferguson

Dans cette méthode On introduit une estimation a priori des montants de charge ultime \hat{U}_i , tel que :

$$\hat{U}_i = L^{BF} * P_i ; \text{ Pour } 1 \leq i \leq n$$

Avec L^{BF} est une estimation de ratio de sinistralité qu'on va utiliser dans ce modèle

On estime L^{BF} par une moyenne des $\left(\frac{SP}{P}\right)_{ultime}$

Donc on développe le triangle des primes par méthode de chain Ladder standard pour estimation de L^{BF} on obtient alors :

primes projetée Années de Souscription	Années d'															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31/12/2005	666.475	1.044.481	1.129.075	1.177.571	1.210.504	1.222.142	1.242.668	1.253.350	1.258.113	1.261.582	1.261.582	1.261.582	1.261.582	1.261.582	1.261.582	1.261.582
31/12/2006	2.947.321	4.618.958	4.993.055	5.207.517	5.353.152	5.404.618	5.495.389	5.542.628	5.563.692	5.579.031	5.579.031	5.579.031	5.579.031	5.579.031	5.579.031	5.579.031
31/12/2007	3.137.203	4.916.536	5.314.734	5.543.012	5.698.030	5.752.812	5.849.431	5.899.713	5.922.135	5.938.462	5.938.462	5.938.462	5.938.462	5.938.462	5.938.462	5.938.462
31/12/2008	2.114.702	3.314.102	3.582.517	3.736.393	3.840.886	3.877.813	3.942.941	3.976.835	3.991.949	4.002.955	4.002.955	4.002.955	4.002.955	4.002.955	4.002.955	4.002.955
31/12/2009	1.736.061	2.720.706	2.941.060	3.067.384	3.153.168	3.183.483	3.236.950	3.264.775	3.277.183	3.286.218	3.286.218	3.286.218	3.286.218	3.286.218	3.286.218	3.286.218
31/12/2010	1.986.328	3.590.942	3.876.764	4.106.697	4.280.276	4.129.767	4.247.389	4.285.617	4.304.838	4.316.707	4.316.707	4.316.707	4.316.707	4.316.707	4.316.707	4.316.707
31/12/2011	1.941.603	3.525.337	3.951.089	4.258.925	4.350.959	4.527.650	4.628.049	4.690.945	4.705.838	4.718.812	4.718.812	4.718.812	4.718.812	4.718.812	4.718.812	4.718.812
31/12/2012	3.042.065	5.120.992	5.709.334	5.895.223	6.134.792	6.274.533	6.338.557	6.368.213	6.392.415	6.410.039	6.410.039	6.410.039	6.410.039	6.410.039	6.410.039	6.410.039
31/12/2013	2.519.335	3.868.466	4.041.011	4.173.312	4.254.521	4.282.868	4.323.538	4.360.704	4.377.276	4.389.344	4.389.344	4.389.344	4.389.344	4.389.344	4.389.344	4.389.344
31/12/2014	3.386.461	5.312.780	5.992.503	6.302.308	6.428.956	6.479.363	6.588.184	6.644.817	6.670.070	6.688.459	6.688.459	6.688.459	6.688.459	6.688.459	6.688.459	6.688.459
31/12/2015	3.522.442	4.913.808	5.335.824	5.500.344	5.632.919	5.687.075	5.782.590	5.832.297	5.854.462	5.870.603	5.870.603	5.870.603	5.870.603	5.870.603	5.870.603	5.870.603
31/12/2016	3.147.866	3.433.192	3.509.950	3.572.015	3.671.911	3.707.214	3.769.477	3.801.879	3.816.328	3.826.850	3.826.850	3.826.850	3.826.850	3.826.850	3.826.850	3.826.850
31/12/2017	3.271.794	5.566.253	5.776.877	6.025.005	6.193.502	6.253.048	6.358.068	6.412.723	6.437.094	6.454.841	6.454.841	6.454.841	6.454.841	6.454.841	6.454.841	6.454.841
31/12/2018	2.116.117	3.744.108	4.047.350	4.221.191	4.339.243	4.380.961	4.454.540	4.492.831	4.509.906	4.522.340	4.522.340	4.522.340	4.522.340	4.522.340	4.522.340	4.522.340
31/12/2019	3.266.154	5.118.625	5.533.191	5.770.952	5.932.242	5.989.276	6.089.866	6.142.215	6.165.558	6.182.557	6.182.557	6.182.557	6.182.557	6.182.557	6.182.557	6.182.557
31/12/2020	8.099.665	12.693.567	13.721.641	14.311.012	14.711.239	14.852.675	15.102.127	15.231.946	15.289.834	15.331.988	15.331.988	15.331.988	15.331.988	15.331.988	15.331.988	15.331.988

Tableau 21 : développement du triangle des primes par méthode de chain Ladder standard

Année de survenance	Primes ultimes	Sinistres payés ultime	S/P	S/P retenu
2005	1.261.582	969.796	77%	60%
2006	5.579.031	4.101.169	74%	
2007	5.938.462	3.672.013	62%	
2008	4.002.955	2.723.235	68%	
2009	3.286.218	2.540.782	77%	
2010	4.316.707	1.550.338	36%	
2011	4.718.812	3.186.938	68%	
2012	6.410.039	2.293.293	36%	
2013	4.389.344	2.370.184	54%	
2014	6.688.459	2.638.218	39%	
2015	5.870.603	4.159.806	71%	
2016	3.826.850	901.862	24%	
2017	6.454.841	2.067.415	32%	
2018	4.522.340	1.538.315	34%	
2019	6.182.557	1.848.353	30%	
2020	15.331.988	27.376.392	179%	

Tableau 22 : le calcul de ratio de sinistralité retenu par la méthode de Bornhuetter-Ferguson

Alors on retient pour cette méthode un $\frac{S}{P}$ de 60 %

Comme on a vu dans la partie théorique, la provision à constituer R_i^{BF} pour l'année de survenance i :

$$R_i^{BF} = (1 - z_{n-i}) * \hat{U}_i$$

avec

$$z_j = \frac{1}{\prod_{i=n-j}^{n-1} \hat{\lambda}_j}$$

Et la provision globale est :

$$R^{BF} = \sum_{i=1}^n R_i^{BF}$$

Année de survenance	Primes ultimes	SPeF	1-zi	Fii = (1-zi)*Ui
2005	1.261.582	756.285	0,0000%	0
2006	5.579.031	3.344.482	0,0004%	13
2007	5.938.462	3.559.951	0,0267%	950
2008	4.002.955	2.399.666	0,2025%	4.860
2009	3.286.218	1.970.001	0,5428%	10.693
2010	4.316.707	2.587.752	1,2628%	32.677
2011	4.718.812	2.828.803	2,8371%	80.256
2012	6.410.039	3.842.649	3,5292%	135.614
2013	4.389.344	2.631.296	5,4015%	142.129
2014	6.688.459	4.009.555	7,5570%	303.001
2015	5.870.603	3.519.272	17,0160%	598.839
2016	3.826.850	2.294.095	28,5132%	654.120
2017	6.454.841	3.869.507	45,7003%	1.768.375
2018	4.522.340	2.711.023	60,1257%	1.630.022
2019	6.182.557	3.706.279	74,9852%	2.779.160
2020	15.331.988	9.191.122	93,8559%	8.626.406

Tableau 23 : Les provisions à l'ultime par année de souscription par la méthode de Bornhuetter-Ferguson

La provision globale de cette méthode : **16.767.116 MAD**

Pour les autres segments on obtient de la même manière on trouve les provisions suivantes :

Incendie	RC automobile	Maritime et transport
16.767.116	12.235.841	3.202.337

Tableau 24 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de **Bornhuetter-Ferguson** du portefeuille non vie de la région APEC en MAD

III.1.4. Méthode de London chain :

Les hypothèses du modèles Chain Ladder ont toutes été vérifiées donc ceux de London Chain

La méthode « London Chain » les chargements cumulés ($C_{i,j+1}$, $C_{i,j}$) s'ajustent selon une droite de constante non nulle selon une équation de la forme

$$C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j} + \sigma_j$$

Alors on estime pour chaque λ_j et σ_j pour j de 1 à 15, on applique les formules dans la partie pratique on trouve :

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lambda	2,479	1,331	1,308	1,040	0,998	0,996	0,996	1,017	0,999	1,018	0,999	1,004	1,002	1,000	1,000
Sigma	234915,62	161102,79	53815,25	385988,46	317692,41	253939,29	64676,25	5719,11	20869,19	-3329,66	22149,41	-2641,24	554,26	1734,06	0,00

Tableau 25 : Les coefficients de la méthode de London Chain pour le segment incendie de la région APAC

On remplit ainsi le tableau des règlements cumulés, on obtient

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48538,36708	59345,6659	191989,533	450675,498	666475,159	818852,645	886512,684	928355,443	928391	932296	944747	963501	965542	968465	969731,98	969809
2006	40479,10873	274182,427	882914,1	1600883,99	2947320,62	3655157,43	3873337,48	3929644,79	3969452	3985703	4075346	4087707	4088727	4101162	4101172,1	4101244
2007	243538,3436	1214871,37	2015966,02	2642535,69	3137202,55	3251922,02	3475583,17	3505033,16	3584929	3588977	3609870	3631801	3666984	3666985	3667177,4	3667242
2008	186222,7242	1074525,16	1508577,39	1682181,83	2114702,3	2236088,57	2495671,83	2591652,12	2645417	2658943	2665067	2710537	2711270	2716082	2716674,4	2716722
2009	163327,5675	641436,67	1052063,77	1411330,4	1736060,8	2164173,33	2194474,9	2288479,4	2356398	2403970	2516333	2518527	2526836	2531359	2532028,8	2532073
2010	169133,1527	357949,56	589640,722	754225,12	981645,548	1002549,99	1390931,62	1447125,41	1495781	1520435	1523470	1544513	1548587	1551573	1552655,3	1552683
2011	92680,62682	433652,379	727731,632	1162106,18	1624868,91	2360079,8	2939188,56	2967343,17	3057512	3076954	3127554	3147430	3158475	3163989	3164393	3164448
2012	108951,6029	535038,708	892681,592	1066692,21	1466658,83	1877202,84	2104938,13	2185536,41	2198016	2216852	2252377	2272889	2280131	2284266	2285039,9	2285080
2013	122656,017	354483,893	580640,131	660040,038	1274631,45	1786170,1	2203546,85	2223823,58	2268428	2287199	2323957	2344417	2351970	2356218	2356961,3	2357003
2014	500	618795,427	1096318,01	1648320,79	2265017,56	2373476,25	2415113,36	2470910,75	2519836	2538374	2579534	2599809	2608472	2613123	2613758,4	2613804
2015	307426,8155	1546996,44	2143068,54	3119208,95	3242274,16	3382092,71	3622556,32	3673914,7	3743875	3761281	3823875	3843245	3857316	3863927	3864037,1	3864105
2016	99277,23597	247116,469	410225,877	571229,898	620461,441	936889,338	1187096,27	1247408,31	1274939	1294629	1313990	1335185	1338349	1341005	1342175,6	1342199
2017	92036,98291	764652,977	1011082,98	1073749,91	1503024,52	1817655,19	2064352,18	2121439,1	2164253	2183120	2218054	2238592	2245684	2249765	2250553,4	2250593
2018	273587,7971	458360,684	576095,021	807566,874	1226110,83	1541305,59	1789103,67	1847202,51	1885221	1904347	1934394	1955138	1960938	1964632	1965540,1	1965575
2019	264813,1194	429126,442	732355,216	1012014,7	1438800,58	1753562,08	2000514,44	2057836,06	2099538	2118465	2152266	2172851	2179658	2183635	2184451	2184489
2020	1443066,802	3812508,27	5236307,66	6904899,3	7569245,44	7871518,93	8094094,79	8129014,11	8276876	8290088	8432058	8448079	8482173	8496047	8494209,8	8494359

Tableau 26 : tableau des règlements prédits par méthode London-Chain

Ainsi on peut déduire les provisions par année de survenance et la réserve totale

Année de survenance	provision par année
2005	0
2006	72
2007	257
2008	5.452
2009	13.547
2010	29.212
2011	87.495
2012	87.064
2013	133.179
2014	198.691
2015	482.012
2016	721.738
2017	1.176.843
2018	1.389.480
2019	1.755.363
2020	7.051.292
provision totale	
13.131.695	

Tableau 27 : les PSAP par la méthode London Chain

La provision globale de cette méthode : **13.131.695 MAD**

On procède de la même manière pour les autres segments on obtient les provisions suivantes :

Incendie	RC automobile	Maritime et transport
13.131.695	10.148.924	2.804.077

Tableau 28 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de London Chain du portefeuille non vie de la région APEC en MAD

III.1.5. Méthode de séparation de Taylor :

C'est un modèle qui intègre les hypothèses d'inflation, en effet, nous supposons que chaque règlement estimé est une proportion cout total payé dans l'année calendaire $i+j$, et cela selon l'équation :

$$Y_{i,j} = r_j * \mu_{i+j-1}$$

En se basant sur les formules introduites dans le cadre théorique du modèle de Taylor, on a calculé les $r(i)$ pour les 16 premières années calendaires. Puis, on a extrapolé ceux des années futures 17 à 32 par régression linéaire de $\log(\mu_n)$ en fonction de n , on obtient les résultats suivants :

i	r_i	μ_{ui}
1	0,095068249	510561,85
2	0,179158752	187021,5325
3	0,135013164	1490286,521
4	0,130708879	3750302,615
5	0,163241115	3962645,154
6	0,120859765	3891362,719
7	0,099491629	2312718,491
8	0,022498111	1953557,989
9	0,019255691	1795851,607
10	0,006957056	2069548,001
11	0,014791873	2071776,033
12	0,006965589	3701716,303
13	0,003623606	3172636,935
14	0,00202505	3599031,795
15	0,000332999	1908134,794
16	8,18624E-06	2076656,546
17		4297607,616
18		5221561,552
19		10260051,95
20		11188335,76
21		12200606,56
22		13304463,12
23		14508191,7
24		15820828,28
25		17252226,38
26		18813131
27		20515259,32
28		22371388,63
29		24395452,26
30		26602644,16
31		29009532,94
32		31634186,31

Tableau 29 : Calcul des μ_n actuels et futurs ainsi que les r_i

Le prolongement des μ_n ; $n = 17, \dots, 32$ se fait par extrapolation. Pour cela on fait un modèle régression linéaire de $\log(\mu_n)$ sur n

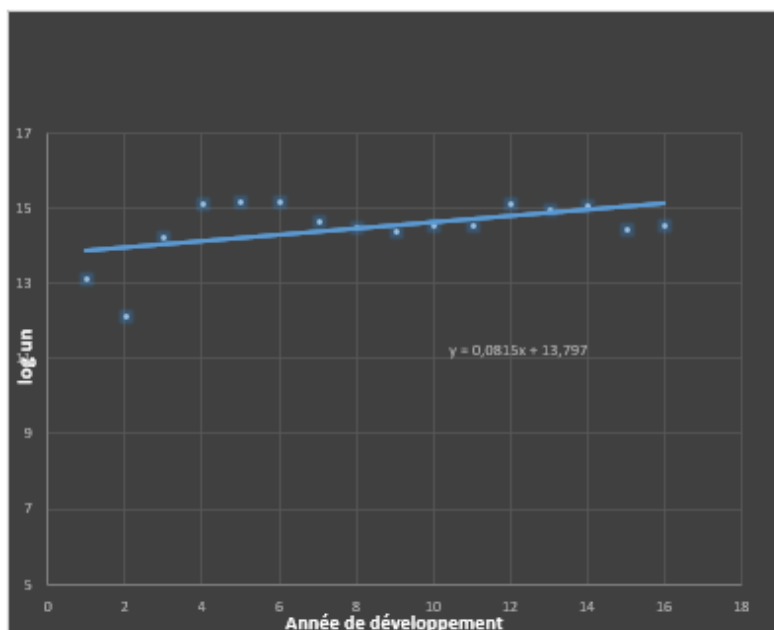


Figure 21 : Extrapolation des $\log(\mu_n)$ linéairement

On peut maintenant calculer les règlements estimés, d'où le triangle :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48539	33507	201210	490202	646872	470313	230098	43952	34581	14398	30646	25785	11496	7288	635	17
2006	17780	267000	506344	517957	635236	279517	194364	40404	39851	14414	54756	22099	13042	3864	692	35
2007	141680	671905	535014	508640	377534	236109	178674	46561	39894	25753	46930	25070	6314	4205	1431	43
2008	356538	709949	525390	302295	318904	217048	205904	46611	71280	22072	53237	13291	7525	8703	1739	84
2009	376725	697178	312250	255350	293159	250127	206126	83282	61092	25039	28225	14465	15573	10574	3417	92
2010	369948	414347	263758	234736	337838	250397	368293	71379	69302	13275	30718	29936	18921	20777	3726	100
2011	219868	350000	242466	270511	338202	447392	315654	80972	36743	14448	63570	36372	37179	22657	4063	109
2012	185723	321745	279419	270802	604277	383447	358077	42930	39988	29899	77237	71468	40542	24707	4430	119
2013	170730	370781	279719	483851	517909	434982	189845	46721	82754	36327	151767	77934	44211	26942	4831	130
2014	196750	371180	499785	414695	587515	230619	206612	96689	100546	71380	165498	84985	48211	29380	5268	141
2015	196962	663200	428351	470429	311489	250986	427580	117476	197566	77839	180471	92674	52572	32038	5745	154
2016	351919	568410	485921	249412	338999	519412	519506	230834	215441	84881	196800	101059	57329	34937	6265	168
2017	301620	644803	257625	271440	701552	631082	1020798	251719	234933	92561	214605	110202	62516	38098	6832	183
2018	342157	341862	280378	561740	852381	1240038	1113155	274493	256189	100935	234022	120173	68172	41545	7450	200
2019	181405	372054	580238	682510	1674877	1352231	1213869	299328	279368	110067	255195	131046	74340	45304	8124	218
2020	197426	769960	704985	1341091	1826412	1474575	1323694	326410	304644	120026	278284	142902	81066	49402	8859	237

Tableau 30 : Calcul des règlements futurs par la méthode de Taylor

On trouve les provisions par année de survenance, on trouve finalement :

année de survenance	Réserve
2005	0
2006	35
2007	1.474
2008	10.526
2009	29.655
2010	73.460
2011	163.949
2012	248.403
2013	424.896
2014	602.098
2015	1.184.116
2016	1.966.632
2017	3.365.081
2018	4.870.492
2019	6.706.714
2020	8.752.548

Réserve totale **28.400.079**

Tableau 31 : les PSAP sous le modèle de Taylor en MAD

En parcourant les mêmes étapes décrites au-dessus, on retiendra les résultats suivants pour les autres segments

Incendie	RC automobile	Maritime et transport
28.400.079	19.224.483	5.168.698

Tableau 32 : Les PSAP obtenus pour les trois segments par la méthode de Taylor du portefeuille non vie de la région APEC en MAD

Résumant l'ensemble des résultats obtenus par les méthodes déterministes de provisionnement qu'on vient de voir, appliquées sur les trois branches de notre portefeuille :

Méthode \ Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
Chain Ladder standard	26.577.860	18.765.052	4.402.937
Bornhuetter-Ferguson	16.767.116	12.235.841	3.202.337
London Chain	13.131.695	10.148.924	2.804.077
Séparation de Taylor	28.400.079	21.627.284	4.998.798

Tableau 33 : récapitulatif des provisions constituées par segment selon les différentes méthodes de provisionnement déterministes sur les trois segments du portefeuille d'étude

Comparaison des résultats :

En observant ce tableau, notre première remarque est que la méthode de Taylor est celle qui donne la provision la plus grandes et donc prudente par rapport aux autres. Cependant, nous devons faire attention au risque de sur-provisionnement. A l'inverse de la méthode London Chain et Bornhuetter-Ferguson qui affichent les provisions les plus faibles.

III.2. Résultats des méthodes Stochastiques :

III.2.1. Méthode de thomas Mack :

Comme précisé dans la partie théorique, Il s'agit d'une extension stochastique de la méthode Chain Ladder classique que donne la même estimation du montant des provisions avec l'avantage de donner l'erreur de prédiction des provisions à l'ultime.

Validation des hypothèses :

Ce modèle est basé sur 3 hypothèses à vérifier dont les deux premières (H1) et (H2) correspondent bien aux hypothèses Chain Ladder classique déjà vérifiées, il nous reste donc que la troisième hypothèse (H3) qui se formule comme suit :

(H3) : $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n - 1$ il existe σ_j tel que

$$\text{Var}(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 * C_{i,j}$$

La vérification de cette hypothèse se fait par observation des points $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=1 \dots n-j-1}$, avec $r_{i,j}$ les résidus normalisés définie par :

Pour $j = 1, \dots, n - 1$ et $i = 1, \dots, n - j - 1$

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Si l'ensemble de ces points ne suivent pas une tendance spécifique on dit que l'hypothèse (H3) est vérifiée

Représentons graphiquement les couples $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=1 \dots n-j-1}$, Sous R on obtient les résultats :

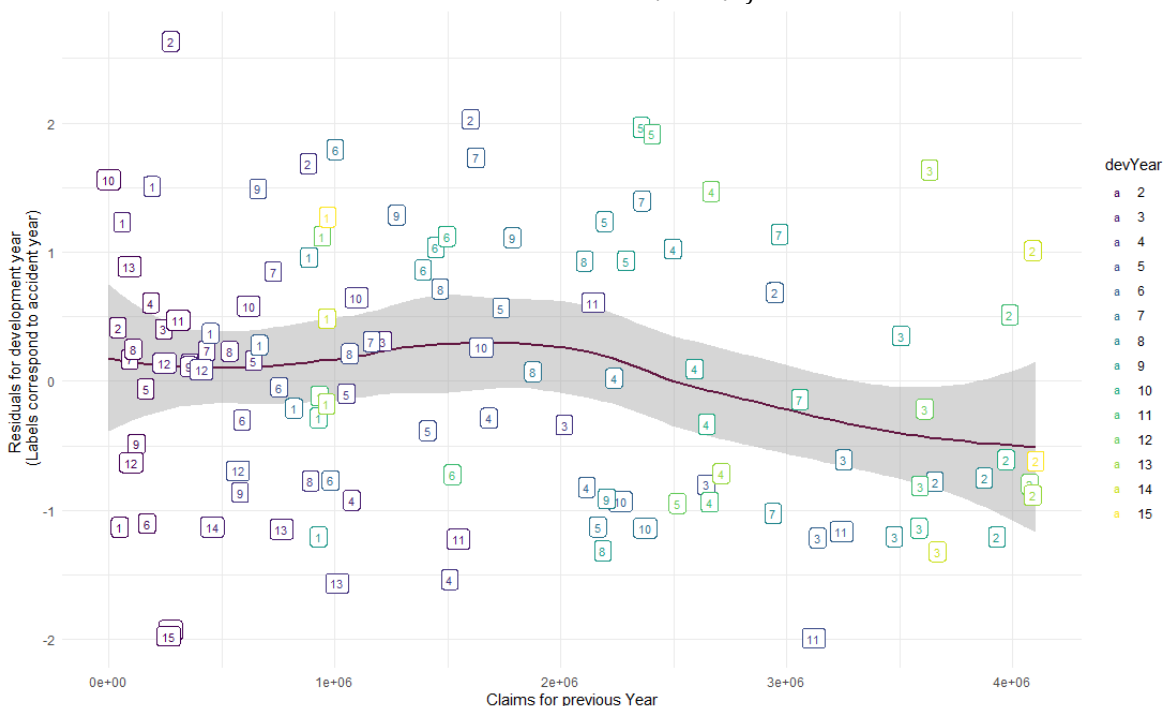


Figure 22 : Validation de la troisième hypothèse de Mack pour la branche Incendie de la région APEC

On remarque qu'aucune tendance spécifique n'est observée et ceci pour toutes les années de développement. Par conséquent l'hypothèse H3 vérifiée. On peut maintenant appliquer le modèle

- **Application :**

Le résultat des provisions et les coefficients de développement reste le même que celui de la méthode Chain Ladder standard comme on a mentionné avant, l'apport de cette version stochastique est l'estimation des erreurs de prédiction notamment le MSEP, SEP et le SER qu'on a déjà défini dans la partie théorique.

On calcule d'abord les volatilités du triangle de règlements par année de déroulement. On obtient les coefficients ci-dessous :

année de dev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
volatilité	54892460,00	87272,98	57875,84	95377,10	43110,26	22591,18	606,24	290,00	119,81	722,86	146,59	70,76	9,80	1,47	0,22

Tableau 34 : les volatilités du triangle de règlements par année de déroulement pour la branche
Incendie

Ces coefficients nous permettent de déduire pour chaque année de survenance l'erreur quadratique moyennes MSEP, l'erreur standard de prédiction SEP et l'erreur quadratique relative SER des estimations des provisions

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Année de survenance	Réserve	MSEP	SEP	SER
2005	0	0	0	0,000
2006	17,00	13123151,06	3623	213,093
2007	980,00	43242894,82	6576	6,710
2008	5502,00	258019455	16063	2,919
2009	13744,00	395978678	19899	1,448
2010	19483,00	3653312609	60443	3,102
2011	89844,00	2810525653	53014	0,590
2012	80408,00	3682537418	60684	0,755
2013	126975,00	5970195934	77267	0,609
2014	197246,00	1,13437E+11	336805	1,708
2015	963497,00	61456556337	247904	0,257
2016	247476,00	3,58621E+11	598850	2,420
2017	903697,00	3,75662E+11	612913	0,678
2018	868681,00	6,97145E+11	834952	0,961
2019	126360,00	2,10707E+15	45902845	363,270
2020	22043770,00	2,11129E+15	45948727	2,084

Tableau 35 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack par année de survenance pour la branche incendie

On trouve finalement que la réserve totale du segment « Incendie » pour la région d'Asie par la méthode de Mack stochastique est : **26.577.855 MAD**

L'erreur standard de prédiction est : **45.948.727**

L'erreur relative de prédiction est égale à : **172,8835 %**

On constate que l'erreur relative de prédiction est très élevée. D'où, on peut conclure que la méthode Chain Ladder ne donne pas une très bonne estimation des provisions.

On applique la même méthode sur les autres branches on trouve finalement :

Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
PSAP	26.577.855	18.765.052	4.402.937
SEP	45.948.727	11.012.867	5.030.737
SER	1.728	0,5868	1,1425

Tableau 36 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Mack pour tous les segments du portefeuille

III.2.2. Méthode de GLM :

La méthode de GLM est une méthode stochastique qui se base sur le triangle de liquidation décumulé et non pas celui qui est cumulé, l'idée principale d'un modèle GLM est de capter la tendance des règlements incrémentaux $Y_{i,j}$ au fil des années de survenance et des années de développement en supposant que les règlements suivent une loi paramétrique (par exemple, log normal, gamma, poisson sur dispersé ...). On va se contenter dans notre application juste du cas où les incréments $Y_{i,j}$ suivent une loi de poisson surdispersé. Une particularité de cette c'est que le GLM reproduit exactement les mêmes prédictions que la méthode de Chain Ladder.

Dans un premier lieu, on a estimé les paramètres du modèle GLM considéré

	Estimate	Std. Error
constante	10.9951717	0.3653431
lign2	1.4419458	0.3407317
lign3	1.3303076	0.3445747
lign4	1.0301139	0.3570760
lign5	0.9597859	0.3606949
lign6	0.4643681	0.3921270
lign7	1.1833905	0.3516860
lign8	0.8541536	0.3681750
lign9	0.8854247	0.3676427
lign10	0.9909920	0.3633375
lign11	1.4356851	0.3488081
lign12	-0.1109661	0.4920272
lign13	0.7124760	0.4259591
lign14	0.3986240	0.5065025
lign15	0.5703665	0.5609213
lign16	3.1871095	0.4433693
co11	1.1221094	0.2335383
co12	0.8831381	0.2439517
co13	0.8534949	0.2472884
co14	1.0286565	0.2437706
co15	0.6266062	0.2622497
co16	0.4314690	0.2829741
co17	-1.0474871	0.4738015
co18	-1.1883592	0.5250836
co19	-2.1835978	0.8649332
co110	-1.3616686	0.6464014
co111	-2.1440430	0.9748049
co112	-2.8935993	1.5439320
co113	-3.5539387	2.4448480
co114	-5.4534909	8.2641774
co115	-9.6088773	150.8800399

Figure 23 : les paramètres du modèle GLM Poisson surdispersé pour la branche incendie

A partir de ces paramètres, on peut calculer la réserve finale, on exhibe les résultats suivants :

Année de survenance	Réserve	MSEP	SEP	SER
2005	0	0	0	0,000
2006	17	158004900	12570	739,412
2007	980	675220225	25985	26,515
2008	5502	1583562436	39794	7,233
2009	13744	2031124624	45068	3,279
2010	19483	10371996649	101843	5,227
2011	89844	8786812644	93738	1,043
2012	80408	13988739076	118274	1,471
2013	126975	22285414089	149283	1,176
2014	197425	90195105625	300325	1,521
2015	693497	32605163761	180569	0,260
2016	247476	1,62269E+11	402826	1,628
2017	903697	2,07952E+11	456018	0,525
2018	868681	4,93398E+11	702423	0,546
2019	1286360	5,45038E+13	7382666	0,335
2020	22043765	5,73884E+13	7575514	0,344

Tableau 37 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM surdispersé par année de survenance pour la branche incendie

On trouve finalement que la réserve totale du segment « Incendie » pour la région d'Asie par la méthode de GLM est : **26.577.855 MAD**

L'erreur standard de prédiction est : **7.575.514**

L'erreur relative de prédiction est égale à : **28,5 %**

La méthode GLM donne le même montant de prévision que celui de la méthode de Mack sauf que dans ce cas l'erreur relative de prédiction est clairement inférieur à celui de la méthode de Mack où on a trouvé une erreur de prédiction inacceptable, et donc on peut affirmer que cette méthode est plus adaptée pour faire estimer les provisions pour la branche « incendie » que celle de Mack stochastique

De même on retrouve pour sur les autres branches :

Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
PSAP	26577855	18765052	4402937
SEP	7.575.514	4592105	1727794
SER	0.285	0.2447158	0.3924184

Tableau 38 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de GLM pour tous les segments du portefeuille

III.2.3. Méthode de bootstrap GLM :

Une dernière méthode stochastique de provisionnement inspirée des méthodes déterministes est mise en place : Le Bootstrap GLM. En précisant que la distribution suivie est celle de Poisson surdispersé, On lance le modèle à partir du modèle Chain ladder en prenant 10000 comme nombre d'itération. Ceci nous permettra d'exploiter des résultats satisfaisants. Après application des étapes détaillées dans la partie théorique, la méthode permet d'obtenir les résultats suivants :

Année de survenance	Réserve	MSEP	SEP	SER
2005	0	0	0	0,000
2006	167	123765625	11125	66,617
2007	926	653058025	25555	27,597
2008	5286	1362495744	36912	6,983
2009	16951	3338643961	57781	3,409
2010	19956	3142947844	56062	2,809
2011	100974	15656265625	125125	1,239
2012	83086	9541968489	97683	1,176
2013	133823	16142464809	127053	0,949
2014	197479	21482471761	146569	0,742
2015	689675	90993929104	301652	0,437
2016	249670	33945114564	184242	0,738
2017	903927	1,61457E+11	401817	0,466
2018	862422	2,00972E+11	448299	0,351
2019	1278760	4,90066E+11	700047	0,030
2020	23302802	7,05381E+13	8398698	0,360

Tableau 39 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap GLM par année de survenance pour la branche incendie

On trouve finalement que la réserve totale du segment « Incendie » pour la région d'Asie par la méthode de bootstrap GLM est : **27,845,569 MAD**

Si on compare ce résultat aux résultats obtenus par la méthode Chain-Ladder stochastique et même le GLM Poisson surdispersé, on retrouve que ces résultats sont très proches

Concernant les erreurs d'estimation on retrouve des différences.

L'erreur standard de prédiction est : **8,543,885**

L'erreur relative de prédiction est égale à : **30,68 %**

En poursuivant la même démarche on trouve pour les autres segments :

Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
PSAP	27,845,569	19,264,172	4,493,114
SEP	8,543,885	4,887,112	2,446,581
SER	0.3068	0,25368918	0,5445179

Tableau 40 : Les provisions et les erreurs de prédiction obtenues par la méthode de Bootstrap GLM pour tous les segments du portefeuille

Comparaison des méthodes :

Les résultats trouvés après application de ces modèles stochastiques sur les trois branches de notre portefeuille nous permettront de tirer les conclusions suivantes :

- La méthode Bootstrap GLM présente des MSEP supérieure à celles obtenue par Mack ou le GLM par Poisson surdispersé
- Au niveau de l'erreur relative SER les méthode GLM et bootstrap GLM présentent des valeurs proches de SER largement meilleur que celles trouvées par la méthode Chain Ladder pour les trois branches du portefeuille

IV-Calcul du Best Estimate pour sinistres

IV.1. La méthode standard (SBR)

Selon la réglementation actuelle SBR le BE pour sinistres est calculé par la formule déjà détaillée en partie théorique suivante :

$$BE = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+r_i)^i}$$

Les cash flows de l'année comptable CF_i se déduisent des triangles liquidation non cumulé rempli et les r_i sont les taux sans risque qu'on a obtenu dans la partie consacrée à la modélisation de la courbe des taux

On remplit le triangle de sinistres payés par la méthode de Chain Ladder, on obtient :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48.538	59.346	191.990	450.675	666.475	818.853	886.513	928.355	928.391	932.296	944.747	963.501	965.542	968.465	969.792	969.796
2006	40.479	274.182	882.914	1.600.884	2.947.321	3.655.157	3.873.337	3.929.645	3.969.452	3.985.703	4.075.346	4.087.707	4.088.727	4.101.162	4.101.169	4.101.185
2007	243.538	1.214.871	2.015.966	2.642.536	3.137.203	3.251.922	3.475.583	3.505.033	3.584.929	3.588.977	3.609.870	3.631.801	3.666.984	3.666.989	3.667.953	3.667.968
2008	186.223	1.074.525	1.508.577	1.682.182	2.114.702	2.236.089	2.495.672	2.591.652	2.645.417	2.658.943	2.665.067	2.710.537	2.711.270	2.716.047	2.716.762	2.716.773
2009	163.328	641.437	1.052.064	1.411.330	1.736.061	2.164.173	2.194.475	2.288.479	2.356.398	2.403.970	2.516.333	2.518.527	2.527.142	2.531.595	2.532.261	2.532.271
2010	169.133	357.950	589.641	754.225	981.646	1.002.550	1.390.932	1.447.125	1.495.781	1.520.435	1.523.470	1.534.580	1.539.829	1.542.543	1.542.948	1.542.954
2011	92.681	433.652	727.732	1.162.106	1.624.869	2.360.080	2.939.189	2.967.343	3.057.512	3.076.954	3.126.810	3.149.610	3.160.385	3.165.954	3.166.786	3.166.799
2012	108.952	535.039	892.682	1.066.692	1.466.659	1.877.203	2.104.938	2.185.536	2.198.016	2.213.785	2.249.654	2.266.059	2.273.811	2.277.818	2.278.417	2.278.426
2013	122.656	354.484	580.640	660.040	1.274.631	1.786.170	2.203.547	2.223.824	2.267.837	2.284.107	2.321.116	2.338.042	2.346.040	2.350.174	2.350.792	2.350.802
2014	500	618.795	1.096.318	1.648.321	2.265.018	2.373.476	2.415.113	2.471.427	2.520.341	2.538.422	2.579.552	2.598.362	2.607.251	2.611.845	2.612.532	2.612.542
2015	307.427	1.546.396	2.143.069	3.119.209	3.242.274	3.382.093	3.767.604	3.855.453	3.931.760	3.959.967	4.024.130	4.053.474	4.067.341	4.074.508	4.075.579	4.075.596
2016	99.277	247.116	410.226	571.230	620.461	720.250	802.349	821.057	837.307	843.314	856.978	863.228	866.181	867.707	867.935	867.939
2017	92.037	764.653	1.011.083	1.073.750	1.413.615	1.640.967	1.828.014	1.870.638	1.907.662	1.921.347	1.952.479	1.966.717	1.973.445	1.976.922	1.977.442	1.977.450
2018	273.588	458.361	576.095	784.511	1.032.826	1.198.935	1.335.597	1.366.739	1.393.789	1.403.788	1.426.534	1.436.936	1.441.852	1.444.392	1.444.772	1.444.778
2019	264.813	429.126	684.039	931.506	1.226.348	1.423.582	1.585.850	1.622.827	1.654.946	1.666.819	1.693.826	1.706.178	1.712.015	1.715.031	1.715.482	1.715.489
2020	1.443.067	5.875.195	9.365.220	12.753.304	16.790.005	19.490.342	21.711.968	22.218.226	22.657.969	22.820.517	23.190.278	23.359.381	23.439.294	23.480.594	23.486.769	23.486.863

Tableau 41 : le triangle de sinistres payés rempli par la méthode de Chain pour la branche incendie

Et puis on décumule on obtient :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48538	10807	132644	258686	215800	152377	67660	41843	36	3905	12451	18754	2041	2923	1327	4
2006	40479	233703	608732	717970	1346437	707837	218180	56307	39808	16251	89643	12361	1020	12435	7	16
2007	243538	971333	801095	626570	494667	114719	223661	29450	79896	4048	20894	21931	35183	5	964	15
2008	186223	888302	434052	173604	432520	121386	259583	95980	53765	13526	6124	45470	733	4777	714	11
2009	163328	478109	410627	359267	324730	428113	30302	94005	67919	47572	112362	2194	8616	4453	666	10
2010	169133	188816	231691	164584	227420	20904	388382	56194	48655	24655	3035	11109	5250	2713	406	6
2011	92681	340972	294079	434375	462763	735211	579109	28155	90169	19442	49856	22801	10775	5569	833	13
2012	108952	426087	357643	174011	399967	410544	227735	80598	12480	15769	35870	16404	7752	4006	599	9
2013	122656	231828	226156	79400	614591	511539	417377	20277	44014	16269	37009	16926	7998	4134	618	9
2014	500	618295	477523	552003	616697	108459	41637	56313	48914	18081	41130	18810	8889	4594	687	10
2015	307427	1239570	596072	976140	123065	139619	385511	87849	76307	28206	64163	29344	13867	7167	1072	16
2016	99277	147839	163109	161004	49232	99789	82098	18708	16250	6007	13664	6249	2953	1526	228	3
2017	92037	672616	246430	62667	339665	227352	187047	42624	37024	13666	31132	14237	6728	3477	520	8
2018	273588	184773	117734	208416	248315	166109	136662	31142	27050	9999	22746	10402	4916	2541	380	6
2019	264813	164313	254913	247467	294842	197234	162268	36977	32119	11873	27007	12351	5837	3017	451	7
2020	1.443.067	4.432.129	3.490.025	3.388.084	4.036.701	2.700.337	2.221.626	506.258	4.397.43	1.625.48	3.697.61	1.691.04	7.991.2	4.130.0	6.175	94

Tableau 42 : le triangle de sinistres payés rempli décumulé par la méthode de Chain pour la branche incendie

La somme des diagonales au-dessous de la dernière diagonale supérieur de ce triangle donne les cash flows futurs non actualisés CF_i , on obtient :

Années de projection	Cashflows
2021	5.912.057
2022	4.517.392
2023	4.216.757
2024	4.529.469
2025	3.032.595
2026	2.355.982
2027	604.845
2028	499.415
2029	209.294
2030	390.750
2031	178.004
2032	83.317
2033	41.757
2034	6.182
2035	94

Tableau 43 : Les cashflows obtenus par la méthode Chain Ladder par année de projection

Ensuite, on actualise ces cashs-flows obtenus en utilisant la courbe des taux qu'on a déterminé précédemment (la courbe de Smith Wilson recommandée par l'EIOPA), les taux zéro coupon de cette courbe se présente ainsi :

Maturité	Taux zéro coupon
1	1,602%
2	1,838%
3	1,935%
4	1,984%
5	2,078%
6	2,161%
7	2,209%
8	2,258%
9	2,316%
10	2,379%
11	2,442%
12	2,505%
13	2,569%
14	2,634%
15	2,691%

Tableau 44 : Les taux zéro-coupon, générés par le modèle de Smith Wilson de maturité 1 à 15 ans

On obtient finalement les Cashs-flow actualisés :

Années de projection	Cashflows actualisés
2021	5.818.823
2022	4.355.791
2023	3.981.183
2024	4.187.132
2025	2.736.294
2026	2.072.318
2027	519.047
2028	417.727
2029	170.316
2030	308.873
2031	136.508
2032	61.913
2033	30.028
2034	4.296
2035	63

Tableau 45 : Les cashflows actualisés

Et on en déduit finalement le best estimate pour sinistres en sommant ces cash flows actualisés, on obtient

BE = 24.800.314

On refait la même démarche exhibée au-dessus pour trouver le BE pour sinistres par la méthode standard pour la branche « incendie », on trouve ce BE pour les autres branches :

Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
Best Estimate	24.800.314	17.352.120	4.002.632

Tableau 46 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille

IV.2. La méthode interne utilisée par la SCR

Dans cette section on va appliquer en détail la procédure du calcul de BE pour sinistre par la méthode interne utilisée par la SCR, sur la branche « Incendie » des traités de la région d'Asie.

Comme on a mentionné dans la partie théorique, la méthode interne de calcul du BE pour sinistres de la société centrale de réassurance utilise trois triangles à l'encontre de la majorité des méthodes classiques qui n'utilisent que le triangle des règlements, alors les triangles utilisés sont :

- Le triangle des primes
- Le triangle des sinistres payés
- Le triangle des charges de sinistres

On essaiera de suivre les étapes déjà décrites dans la partie théorique :

• Le remplissage des tableaux et la réestimation de la diagonale

On rappelle que la méthode Chain-ladder pour les triangles des sinistres payés et des charges de sinistres est appliquée sur les triangles sans diagonale c'est-à-dire le sous triangle allant de l'année de survenance 2005 à 2019 et de l'année de développement 1 à 15, et que la diagonale de ces deux triangles est réestimée de la manière expliquée dans la partie théorique, ensuite on remplit ces triangles grâce à la formule de Chain ladder. Pour le triangle des primes on le remplit par Chain ladder classique sans réestimation de la diagonale

Calcul des coefficients de chain Ladder :

Après vérification des hypothèses Chain ladder sur les trois triangles, on obtient les résultats suivant :

Pour Le triangle des sinistres payés et Le triangle des charges de sinistres qui sont pris sans diagonale dans le calcul des coefficients de développement on a :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
sinistre payé	4,4044	1,6131	1,3868	1,3246	1,1818	1,1259	1,0249	1,0215	1,0073	1,0178	1,0087	1,0044	1,003	1	1
charge de sinistres	3,1397	1,4218	1,4761	1,1516	1,1123	1,0714	0,9714	0,9603	0,9952	0,9706	0,9868	1,0018	1,0004	1,0015	1

Tableau 47 : Les coefficients Chain Ladder classique pour le triangle des sinistres payés et de charges de sinistres

Pour le triangle des primes :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Prime	1,56717	1,081	1,043	1,028	1,0096	1,0168	1,0086	1,0038	1,0028	1,0001	1,0001	1,0005	1	1	1

Tableau 48 : Les coefficients Chain Ladder classique pour le triangle des primes

La réestimation de $C_{2020.1}$ et de $S_{2020.1}$ requiert des ratios à estimer aussi, à titre de rappel :

Pour la charge de sinistres de 2020 :

$$C_{2020.1} = \left(\frac{C}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{CS}}$$

Pour les sinistres payés de 2020 :

$$S_{2020.1} = \left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{SP}}$$

On choisit la moyenne des $\left(\frac{CS}{P}\right)_{\text{ultime}}$ ($\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{ultime}}$) des années entre 2005 et 2019 comme estimateur de $\left(\frac{C}{P}\right)_{\text{retenu}}$ ($\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}}$) respectivement.

On calcule les primes ultimes, sinistres ultimes et les charges ultimes pour déduire les $\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}}$ et $\left(\frac{CS}{P}\right)_{\text{ultime}}$ on a alors :

Année de survenance	Primes ultimes	Sinistres payés ultime	S/P	S/P retenu
2005	1.261.582	969.796	77%	52%
2006	5.579.031	4.101.169	74%	
2007	5.938.462	3.666.989	62%	
2008	4.002.955	2.719.508	68%	
2009	3.286.218	2.537.306	77%	
2010	4.316.707	1.548.217	36%	
2011	4.718.812	3.182.578	67%	
2012	6.410.039	2.290.155	36%	
2013	4.389.344	2.366.941	54%	
2014	6.688.459	2.634.608	39%	
2015	5.870.603	4.154.114	71%	
2016	3.826.850	900.628	24%	
2017	6.454.841	2.064.586	32%	
2018	4.522.340	1.536.210	34%	
2019	6.182.557	1.845.824	30%	

Tableau 49 : Les ratios S/P ultimes obtenus par année de survenance et le S/P retenu

Année de survenance	Primes ultimes	Charge de sinistres	CS/P	CS/P retenu
2005	1.261.582	976.755	77%	61%
2006	5.579.031	3.613.999	65%	
2007	5.938.462	3.646.339	61%	
2008	4.002.955	2.596.474	65%	
2009	3.286.218	2.529.084	77%	
2010	4.316.707	1.720.997	40%	
2011	4.718.812	3.227.203	68%	
2012	6.410.039	2.769.503	43%	
2013	4.389.344	2.227.776	51%	
2014	6.688.459	2.838.532	42%	
2015	5.870.603	5.450.607	93%	
2016	3.826.850	1.212.210	32%	
2017	6.454.841	3.472.600	54%	
2018	4.522.340	4.175.703	92%	
2019	6.182.557	3.035.020	49%	

Tableau 50 : Les ratios C/P ultimes obtenus par année de survenance et le C/P retenu

On obtient alors :

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}} = 52 \% \text{ et } \left(\frac{CS}{P}\right)_{\text{retenu}} = 61 \%$$

Et on en déduit :

$$C_{2020.1} = \left(\frac{C}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{CS}} = 1158718,61$$

$$S_{2020.1} = \left(\frac{S}{P}\right)_{\text{retenu}} \cdot \frac{EPI}{\prod_{i=1}^{15} \lambda_i^{SP}} = 420829,98$$

Par conséquent on peut développer des triangles des sinistres payés et des charges de sinistres :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	48.538	59.346	191.990	450.675	666.475	818.853	886.513	928.355	928.391	932.296	944.747	963.501	965.542	968.465	963.792	969.796
2006	40.479	274.182	882.914	1.600.884	2.947.321	3.655.157	3.873.337	3.929.645	3.969.452	3.985.703	4.075.346	4.087.707	4.088.727	4.101.162	4.101.169	4.101.169
2007	243.538	1.214.871	2.015.966	2.642.536	3.137.203	3.251.922	3.475.583	3.505.033	3.584.929	3.588.977	3.609.870	3.631.801	3.666.984	3.666.989	3.666.989	3.666.989
2008	186.223	1.074.525	1.508.577	1.682.182	2.114.702	2.236.089	2.495.672	2.591.652	2.645.417	2.658.943	2.665.067	2.710.537	2.711.270	2.719.508	2.719.508	2.719.508
2009	163.328	641.437	1.052.064	1.411.330	1.736.061	2.164.173	2.194.475	2.288.479	2.356.398	2.403.970	2.516.333	2.518.527	2.529.619	2.537.306	2.537.306	2.537.306
2010	169.133	357.950	589.641	754.225	981.646	1.002.550	1.390.932	1.447.125	1.495.781	1.520.435	1.523.470	1.536.758	1.543.527	1.548.217	1.548.217	1.548.217
2011	92.681	433.652	727.732	1.162.106	1.624.869	2.360.080	2.939.189	2.967.343	3.057.512	3.076.954	3.131.708	3.159.023	3.172.936	3.182.578	3.182.578	3.182.578
2012	108.952	535.039	892.682	1.066.692	1.466.659	1.877.203	2.104.938	2.185.536	2.198.016	2.214.149	2.253.550	2.273.205	2.283.218	2.290.155	2.290.155	2.290.155
2013	122.656	354.484	580.640	660.040	1.274.631	1.786.170	2.203.547	2.223.824	2.271.712	2.288.387	2.329.108	2.349.423	2.353.771	2.366.941	2.366.941	2.366.941
2014	500	618.795	1.096.318	1.648.321	2.265.018	2.373.476	2.415.113	2.475.306	2.528.610	2.547.170	2.592.497	2.615.109	2.626.627	2.634.608	2.634.608	2.634.608
2015	307.427	1.546.996	2.143.069	3.119.209	3.242.274	3.382.093	3.808.027	3.902.335	3.986.983	4.016.247	4.087.716	4.123.369	4.141.530	4.154.114	4.154.114	4.154.114
2016	99.277	247.116	410.226	571.230	620.461	733.250	825.594	846.171	864.393	870.737	886.232	893.962	897.899	900.628	900.628	900.628
2017	92.037	764.653	1.011.083	1.073.750	1.422.337	1.680.893	1.892.581	1.939.750	1.981.522	1.996.066	2.031.586	2.049.305	2.058.331	2.064.586	2.064.586	2.064.586
2018	273.588	458.361	576.095	798.952	1.058.328	1.250.713	1.408.225	1.443.323	1.474.404	1.485.226	1.511.656	1.524.840	1.531.557	1.536.210	1.536.210	1.536.210
2019	264.813	429.126	692.203	959.976	1.271.627	1.502.787	1.692.044	1.734.216	1.771.561	1.784.564	1.816.320	1.832.163	1.840.232	1.845.824	1.845.824	1.845.824
2020	420.830	1.853.518	2.989.822	4.146.408	5.492.517	6.490.959	7.308.417	7.490.567	7.651.872	7.708.037	7.845.200	7.913.627	7.948.482	7.972.634	7.972.634	7.972.634

Tableau 51 : Triangle des sinistres payés cumulés rempli

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2005	6.336	190.538	341.898	622.304	1.054.341	1.246.703	1.213.572	1.086.837	1.066.020	1.118.046	1.114.635	981.630	971.849	975.289	976.755	976.755
2006	167.172	369.199	1.100.312	2.891.114	4.145.103	4.747.672	4.846.117	4.843.674	3.755.567	3.765.469	3.623.656	3.614.930	3.610.012	3.608.572	3.613.999	3.613.999
2007	688.353	1.844.611	2.802.450	3.497.928	3.552.598	3.493.858	3.576.982	3.741.699	3.744.987	3.692.734	3.653.480	3.609.605	3.639.276	3.640.864	3.646.339	3.646.339
2008	676.640	2.077.323	2.378.047	2.450.315	2.602.781	2.666.198	2.914.553	2.705.034	2.739.585	2.658.095	2.545.060	2.586.725	2.591.444	2.592.575	2.596.474	2.596.474
2009	400.214	1.089.248	1.669.358	1.895.449	2.314.343	2.870.756	2.661.560	2.538.304	2.715.897	2.664.542	2.553.191	2.519.587	2.524.184	2.525.286	2.529.084	2.529.084
2010	251.574	461.958	836.363	917.033	1.132.764	1.144.056	1.740.747	1.769.479	1.742.663	1.790.062	1.737.402	1.714.535	1.717.663	1.718.413	1.720.997	1.720.997
2011	332.952	681.240	964.358	1.462.349	1.920.311	2.953.372	3.793.709	3.243.082	3.372.921	3.356.714	3.257.965	3.215.086	3.220.952	3.222.357	3.227.203	3.227.203
2012	144.030	862.894	1.371.557	1.451.847	1.708.419	2.413.394	2.870.508	3.014.112	2.894.554	2.880.645	2.795.901	2.759.104	2.764.138	2.765.344	2.769.503	2.769.503
2013	325.471	817.807	1.400.788	3.132.298	3.108.570	2.832.270	2.495.929	2.424.539	2.328.367	2.317.179	2.249.011	2.219.412	2.223.461	2.224.431	2.227.776	2.227.776
2014	209.337	1.051.057	1.483.287	2.497.389	3.041.797	2.968.370	3.180.199	3.083.238	2.966.700	2.952.445	2.865.588	2.827.874	2.833.033	2.834.270	2.838.532	2.838.532
2015	1.086.311	2.591.480	2.937.706	4.976.198	5.124.229	5.699.925	6.106.683	5.932.017	5.696.718	5.663.344	5.502.561	5.430.141	5.440.048	5.442.422	5.450.607	5.450.607
2016	149.753	719.341	859.335	989.580	1.139.624	1.267.658	1.358.121	1.319.275	1.266.945	1.260.857	1.223.764	1.207.658	1.209.862	1.210.390	1.212.210	1.212.210
2017	211.947	1.356.688	1.920.540	2.834.834	3.264.664	3.631.442	3.890.589	3.779.308	3.629.398	3.611.958	3.505.700	3.459.561	3.465.873	3.467.385	3.472.600	3.472.600
2018	362.377	1.624.306	2.309.395	3.408.807	3.925.665	4.366.705	4.678.322	4.544.510	4.364.248	4.343.277	4.215.505	4.160.024	4.167.614	4.169.432	4.175.703	4.175.703
2019	376.020	1.180.532	1.678.534	2.477.619	2.853.286	3.173.847	3.400.339	3.303.080	3.172.060	3.156.818	3.063.950	3.023.625	3.029.141	3.030.463	3.035.020	3.035.020
2020	1.158.719	3.638.033	5.172.457	7.634.862	8.792.493	9.780.310	10.478.253	10.178.548	9.774.806	9.727.837	9.441.660	9.317.396	9.334.396	9.338.469	9.352.513	9.352.513

Tableau 52 : Triangle des charges de sinistres cumulés rempli

• **Calcul de soldes à liquider :**

On rappelle que le solde à liquider de l'année de survenance i est la différence entre la charge de sinistre ultime de cette année et le dernier règlement cumulé de cette même année.

Pour i de 2005 à 2020 :

$$SL_i = \hat{C}_{i,16} - \hat{S}_{i,16-(i-2005)}$$

On obtient alors les soldes suivantes :

année de survenance	Soldes à Liquider
2006	-487.170
2007	-20.650
2008	-114.796
2009	10.557
2010	197.527
2011	150.249
2012	571.487
2013	3.953
2014	423.419
2015	2.068.514
2016	591.748
2017	2.398.850
2018	3.599.607
2019	2.605.894
2020	8.931.683

Tableau 53 : Les soldes à liquider par année de survenance

On constate qu'il y a des valeurs négatives des soldes à liquider, à savoir les soldes à liquider des années 2006, 2007 et 2008, ce qui n'est pas acceptable.

Pour remédier à ce problème on fait recours à la méthode Chain Ladder ajustée sur les triangles de sinistres payés et de charges de sinistres, et ce pour faire un paramétrage et éliminer la source du problème, ce paramétrage consiste à éliminer les points atypiques qui perturbe l'estimation des coefficients de développement et donc le calcul des soldes à liquider.

Après paramétrage on obtient les résultats suivants :

Les nouveaux coefficients de développement pour :

Le triangle des charges de sinistres :

Coefficients de développement	2,67881	1,37829	1,56562	1,11075	1,12881	1,06547	1,00499	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-------------------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Le triangle des sinistres payés :

Coefficients de développement	2,43189	1,45669	1,22203	1,03503	1	1,00274	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-------------------------------	---------	---------	---------	---------	---	---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Et les nouvelles soldes à liquider :

année de survenance	Soldes à Liquider
2006	1.204
2007	27.708
2008	123.812
2009	36.858
2010	269.627
2011	315.409
2012	828.575
2013	180.045
2014	640.387
2015	2.643.370
2016	671.271
2017	2.600.566
2018	3.804.063
2019	2.129.087
2020	7.578.045

Tableau 54 : Les soldes à liquider obtenues par année de survenance après paramétrage

année de survenance	Soldes à Liquider		Cadences de Liquidation																				
	Montant	%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2006	1.204	100%																					
2007	27.708	100%	0%																				
2008	123.812	75%	25%	0%																			
2009	36.858	63%	25%	13%	0%																		
2010	269.627	56%	25%	13%	6%	0%																	
2011	315.409	53%	25%	13%	6%	3%	0%																
2012	828.575	52%	25%	13%	6%	3%	2%	0%															
2013	180.045	51%	25%	13%	6%	3%	2%	1%	0%														
2014	640.387	50%	25%	13%	6%	3%	2%	1%	0%	0%													
2015	2.643.370	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2016	671.271	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2017	2.600.566	92%	0%	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2018	3.804.063	83%	16%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2019	2.129.087	54%	38%	7%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2020	7.578.045	41%	32%	23%	4%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 55 : Calcul des cadences de liquidations par année de survenance

- **Calcul des cashflows**

En multipliant les cadences de liquidation par les soldes à liquider on obtient les cashflows non

année de survenance	Cash Flows Non Actualisés														
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035
2006	1.204														
2007	27.708	0													
2008	92.859	30.953	0												
2009	23.036	9.214	4.607	0											
2010	151.665	67.407	33.703	16.852	0										
2011	167.561	78.852	39.426	19.713	9.857	0									
2012	427.234	207.144	103.572	51.786	25.893	12.946	0								
2013	91.429	45.011	22.506	11.253	5.626	2.813	1.407	0							
2014	322.695	160.097	80.048	40.024	20.012	10.006	5.003	2.502	0						
2015	2.643.370	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2016	0	671.271	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2017	2.405.501	0	195.065	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2018	3.147.982	606.870	0	49.212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2019	1.147.272	812.482	156.631	0	12.701	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2020	3.106.509	2.409.516	1.706.386	328.958	0	26.676	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 56 : Calcul des cashflows non actualisés

Après actualisation on obtient :

	Cash Flows Actualisés														
	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035
2006	1.185														
2007	27.270	0													
2008	91.391	29.837	0												
2009	22.672	8.882	4.345	0											
2010	149.268	64.975	31.788	15.510	0										
2011	164.912	76.008	37.186	18.144	8.886	0									
2012	420.480	199.672	97.687	47.663	23.342	11.299	0								
2013	89.984	43.388	21.227	10.357	5.072	2.455	1.200	0							
2014	317.594	154.322	75.500	36.838	18.041	8.732	4.268	2.086	0						
2015	2.601.583	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
2016	0	647.058	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
2017	2.367.474	0	183.981	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
2018	3.098.218	584.980	0	45.294	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2019	1.129.136	783.177	147.731	0	11.450	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2020	3.057.400	2.322.606	1.609.433	302.770	0	23.280	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 57 : Calcul des cashflows actualisés

En sommant ces cashflows actualisés on obtient le Best Estimate pour sinistres :

Best Estimate = 21.259.040 MAD

En poursuivant les mêmes étapes exhibées au-dessus pour trouve le BE pour sinistres par la méthode standard pour la branche « incendie », on trouve ce BE pour les autres branches :

Branche	Incendie	RC automobile	Maritime et transport
Best Estimate	21.259.040	16.928.810	3.902.877

Tableau 58 : Les Best Estimate obtenus par la formule standard pour tous les segments du portefeuille

- **Le calage du Best Estimate obtenu par rapport le bilan comptable**

Dans l'étape précédente on obtient un BE, mais celui-ci n'est pas retenu tout de suite, il faut d'abord passer par une étape finale : c'est le calage du Best Estimate avec le bilan comptable. Il s'agit de :

- comparer entre le BE pour sinistres obtenu et le montant comptable des "Sinistres à Payer" obtenu par les méthodes réglementaires (Dossier par Dossier, coût moyen ou de la cadence des règlements) et vérifier si les deux montants sont assez proches

- Vérifier si les différences entre les valeurs diagonales du triangle des charges de sinistres et celles du triangle des sinistres payés sont assez proches de la SAP par année de survenance

Pour le cas de ce segment qu'on vient de traiter, son BE est bien calé avec le bilan comptable après le paramétrage qu'on a effectué, donc on retient le montant déjà calculé dans la partie précédente pour le BE pour sinistres de ce segment.

A ce niveau on entame cette deuxième partie qui a été consacrée à l'application des différentes méthodes de provisionnement, ainsi que le calcul du BE pour sinistre par la méthode standard et la méthode interne sur les trois segments traités dans ce mémoire.

Dans le chapitre suivant on va s'intéresser à une deuxième approche dans le calcul du BE par la méthode interne, une approche qui se base sur l'utilisation du ratio de sinistralité de marché en 2020, en absence de ce ratio recherché en fait recours à des prévisions par séries chronologiques et méthodes de lissage exponentiel pour l'estimer.

CHAPITRE III :

Inclusion des données de marché et
Prévision du ratio de sinistralité

.....

Problématique :

On a vu dans la partie précédente que le processus de calcul du BE par la méthode interne de la SCR nécessite deux quantités importantes à savoir l'EPI et le ratio de sinistralité, l'EPI est donné par le souscripteur tandis que le ratio de sinistralité a été estimé grâce aux données internes de la SCR. Or le modèle interne de la SCR donne à l'actuaire la chance d'inclure un Benchmark d'avis d'expert si ce dernier juge son avis mieux adapté aux spécificités du portefeuille. Dans ce même principe nous essayons dans cette partie, en se basant sur les données de marché de définir le Loss Ratio à utiliser pour calculer le calcul de ce BE Dans notre modélisation on va suivre un principe très simple :

- Nous utiliserons les données fournies par les autorités des assurances des pays de la région APAC pour l'estimation du ratio de sinistralité, alors pour chaque pays nous aurons une estimation du loss ratio
- L'estimation du loss ratio retenu pour une branche donnée sera une combinaison pondérée des loss ratios par la taille de contribution de chaque pays dans le volume total du portefeuille associé à cette branche. Après nous utiliserons ce ratio pour calculer les provisions et le Best Estimate.

Nous utilisons les données fournies par les autorités des assurances de chaque pays de région. Ces données correspondent au ratio de sinistralité de chaque segment d'activité. Il aurait été plus prudent d'utiliser directement les données de 2020, mais malheureusement ces données ne sont pas disponibles pour tous les pays de la région au moment de rédaction de ce mémoire. Pour pallier ce problème de manque de données Une solution proposée est d'utiliser des techniques de prévisions par séries chronologiques en utilisant des ratios des années précédentes pour obtenir l'estimation de l'année 2020. Nous utiliserons ainsi les ratios de sinistralité issu de chaque pays. L'approche décrite ci-dessus sera appliquée sur le segment « Incendie » de notre portefeuille non vie d'Asie-pacifique.

En se basant sur les primes acceptées par la SCR pour la branche incendie dans la région Asie pacifique (dont on ne peut pas afficher les chiffres par souci de confidentialité), on remarque que la Corée de sud est le pays dominant dans cette branche avec une pondération dépassant 90%, donc il serait raisonnable de prendre le ratio de sinistralité de cette branche sur le marché sud-coréen comme un benchmark du ratio de sinistralité pour la branche « incendie » Or au moment de rédaction de ce mémoire les données sur le ratio de sinistralité pour la branche incendie en Corée de sud sont limitées à 2019, et ne donnent pas un ratio de sinistralité en 2020, d'où la nécessité de se recourir à des méthodes statistiques pour l'estimer.

Dans cette partie on essayera de présenter un ensemble de méthodes allant de plus naïves au plus complexes pour avoir une idée sur ce loss ratio, en commençant par une estimation par la moyenne et la dernière valeur puis en passant au modèles de lissage exponentiels, et finalement on utilisera les modèles linéaires de modélisation des séries chronologique notamment le modèle ARIMA

Présentons dans un premier temps la théorie derrière ces modèles utilisés avant de passer à l'application.

Partie 1 : Cadre théorique des méthodes de prévision :

I. Notions de base des séries chronologiques

I.1. Fonctions d'autocorrélation simple et partielle

La fonction d'autocorrélation simple notée ρ_k , mesure la corrélation de la série avec elle-même décalée de k périodes :

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+k})}{\sigma(y_t)\sigma(y_{t+k})} = \frac{\sum_{t-k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t-k+1}^n (y_t - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{t-k+1}^n (y_{t+k} - \bar{y})^2}}$$

On peut montrer que : $\rho_0 = 1$ et $-1 \leq \rho_k \leq 1 \forall k$

La fonction d'autocorrélation partielle mesure la corrélation entre y_t et y_{t+k} , l'influence des autres variables ($y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$) ayant été retirée.

Le graphe de la fonction d'autocorrélation est appelé corrélogramme.

I.2. Stationnarité d'un processus

L'une des questions majeures dans l'étude des séries chronologiques est de savoir si celles-ci suivent un processus stationnaire. En effet, avant de traiter une série chronologique, il convient d'en étudier les caractéristiques stochastiques. Si ces caractéristiques, c'est-à-dire son espérance et sa variance, se trouve modifiées dans le temps, la série est considérée comme non stationnaire. En revanche, dans le cas d'un processus stochastique invariant, la série temporelle est alors stationnaire.

I.2.1. Processus non stationnaire

On considère généralement deux notions de stationnarité :

I.2.1.1. Stationnarité stricte

Le processus (X_t) est strictement stationnaire si les vecteurs $(X_1, \dots, X_k)'$ et $(X_{h+1}, \dots, X_{h+k})'$ ont la même loi jointe pour tout entier k et pour tout entier relatif h .

I.2.2.2. Stationnarité au second ordre

- (i) $E(X_t) = m \forall t \in Z$
- (ii) $E(X_t^2) < \infty \forall t \in Z$
- (iii) $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h \forall t, h \in Z$

La fonction $\gamma(\cdot)$ Est appelée fonction d'autocovariance de (X_t) .

En d'autres termes, (X_t) est stationnaire si les conditions suivantes sont réunies:

1. L'espérance est constante dans le temps.
2. La variance est constante dans le temps.
3. La covariance entre une composante d'un instant t et une composante d'un autre instant $t + h$ ne dépend que de l'écart de temps (le retard) entre les deux instants.

I.2.2. Processus non stationnaire

Il existe deux type de processus non stationnaire : processus TS (Trend Stationary) et processus DS (Differency Stationary)

I.2.2.1. le Processus TS

Le processus TS s'écrit:

$$y_t = \alpha + \beta_t + \varepsilon_t$$

Où ε_t représente l'erreur du modèle à la date t .

Il présente une non-stationnarité de nature déterministe. Le processus TS est non stationnaire car $E(y_t) = \alpha + \beta_t$ dépend du temps t .

Le processus y_t peut être stationnarisé en retranchant à y_t la valeur estimée $\hat{\alpha} + \hat{\beta}_t$ par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO).

Le Processus DS

Le processus DS présente une non-stationnarité de nature stochastique. Il est appelé aussi marche au hasard (ou marche aléatoire) avec dérive (ou sans dérive $\beta = 0$). Ce processus s'écrit sous la forme suivante :

$$y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

Où $\beta \in R$ et ε_t représente l'erreur du modèle.

$\{y_t, \forall t \in Z\}$ est dit d'ordre d'intégration d , si le processus filtré par $(1 - L)^d$ est stationnaire, avec L : l'opérateur retard.

I.3. Bruit blanc

Une variable aléatoire $\{\varepsilon_t\}$ constitue un bruit blanc faible si elle possède les propriétés suivantes :

- (i) $E(\varepsilon_t) = 0 \forall t \in Z$
- (ii) $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \neq 0$ et constante
- (iii) $\text{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$ si $t \neq s$

I.4. Tests de stationnarité (ou tests de racine unitaire)

Il existe plusieurs tests de racine unitaire : tests de Dickey-Fuller simple et Dickey-Fuller Augmenté, test de Phillips et Perron, test de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (test de KPSS). Nous ne s'intéresserons ici que par les tests de Dickey-Fuller :

I.4.1. Test de Dickey-Fuller simple:

Le test de Dickey-Fuller permet de savoir si une série est stationnaire ou non et permet aussi de déterminer la bonne manière de stationnariser la série.

Les hypothèses du test sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{processus non stationnaire, il correspond à une de ces formes de non stationnarité} \\ [1] y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ [2] y_t = \phi_1 y_{t-1} + c + \varepsilon_t \\ [3] y_t = \phi_1 y_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t \\ \text{où } \phi_1 = 1 \text{ et } \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ H_1: |\phi_1| < 1 \end{array} \right.$$

On peut écrire aussi les hypothèses sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{processus non stationnaire, il correspond à une de ces formes de non stationnarité :} \\ [1] \Delta y_t = (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \\ [2] \Delta y_t = (\phi_1 - 1)y_{t-1} + c + \varepsilon_t \\ [3] \Delta y_t = (\phi_1 - 1)y_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t \\ \text{où } (\phi_1 - 1) = 0 \text{ et } \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ H_1: \phi_1 < 1. \end{array} \right.$$

Sous H_0 vraie, la statistique de test pour l'estimateur de ϕ_1 est donnée par:

$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}$$

On commence par étudier le modèle général [3]. On regarde si b est significativement différent de 0 ou non. Si b est significativement non différent de 0, on passe à l'étude du modèle [2] et on cherche à savoir si « c » est significativement différent de 0 ou pas. Si « c » est significativement non différent de 0, on étudie le modèle [1].

Les règles de décision sont les suivantes :

- Si $t > t_{DF}$ où t_{DF} désigne la valeur critique donnée par table de DF

⇒ on accepte H_1 : le coefficient de la variable explicative est significativement différent de 0.

Si on a b significativement différent de 0 pour le modèle [3], le test s'arrête ici, on n'étudie pas les autres modèles. De même que si on arrive au modèle [2] et que l'on a la constante qui est significativement différente de 0, le test s'arrête au modèle [2].

- Si $|t_{\phi_1}| > t_{DF} \Rightarrow$ On accepte H_0 : la série est non stationnaire

1.4.2. Test de Dickey-Fuller Augmenté :

Dans le test de Dickey-Fuller que nous venons d'étudier, le processus ε_t est par hypothèse un bruit blanc. Or il n'y a aucune raison pour que, a priori, l'erreur soit non corrélée. Le test de Dickey-Fuller Augmenté ne suppose pas que ε_t est un bruit blanc.

Les hypothèses du test de Dickey-Fuller Augmenté se définissent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{processus non stationnaire, il correspond à une de ces formes de non stationnarité :} \\ [1] \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k \Delta y_{t-k+1} + \eta_t \\ [2] \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k \Delta y_{t-k+1} + c + \eta_t \\ [3] \Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k \Delta y_{t-k+1} + bt + c + \eta_t \\ \text{où } \rho = 0, \phi_1 = 1 \text{ et } \eta_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\eta^2) \\ H_1: \phi_1 < 1 \end{array} \right.$$

Détermination du retard p du test ADF :

La valeur p est déterminée à l'aide du corrélogramme partiel de la série différenciée Δy_t .

Une fois déterminée la valeur p , on procède de la même façon qu'avec le test de Dickey-Fuller simple : on commence par étudier la significativité de b du modèle [3]. La règle de décision est la même que pour le test de DF simple.

La statistique de test pour l'estimateur de ϕ_1 est :

$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}$$

qui est à comparer avec la valeur critique t_{DF} de la table de Dickey-Fuller.

Si $|t_{\phi_1}| > t_{DF} \Rightarrow$ On accepte H_0 : la série est non stationnaire

I.5. Processus ARIMA

Lorsque l'on a une série $\{y_t\}$ à non stationnarité stochastique, il convient de la modéliser à l'aide d'un processus ARIMA(p,d,q) où d désigne l'ordre de différenciation (ou d'intégration). Un processus ARIMA(p,d,q) ou "Autoregressive Integrated Moving Average" d'ordre p, d, et q pour la série $\{y_t\}$ est un processus de la forme suivante:

$$(1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) \nabla^d y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

Ou encore

$$(1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) (1 - B)^d y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_k^2)$ B est l'opérateur de retard tel que $By_t = y_{t-1}$ et $B^p y_t = y_{t-p}$
 ∇^d est l'opérateur de différence de degré d ($d \geq 0$ est un entier positif), (Φ_1, \dots, Φ_p) et $(\theta_1, \dots, \theta_q)$ sont des coefficients à estimer.

La série $\{y_t\}$ est une série non stationnaire alors que la série $w_t = \nabla^d y_t$ est une série stationnaire.

Estimer les paramètres du processus ARIMA(p,d,q) pour la série $\{y_t\}$ non stationnaire revient à estimer les coefficients du processus ARMA(p,q) pour la série $\{w_t\}$ stationnaire.

I.6. Processus ARMA

Wold (1954) montre que les séries stationnaires peuvent être représentées par les processus ARMA.

- **Le modèle AR(p)**

Soit $\{y_t\}$ une série stationnaire. Le modèle AR(p) ou autorégressif d'ordre p est défini par :

$$y_t - \Phi_1 y_{t-1} - \Phi_2 y_{t-2} - \dots - \Phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t$$

Ou encore

$$(1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) y_t = \varepsilon_t$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ sont des coefficients (positifs ou négatifs) à estimer et $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_k^2)$.
 Un modèle AR(p) présente un corrélogramme simple caractérisé par une décroissance géométrique de ses termes et un corrélogramme partiel caractérisé par ses p premiers termes différents de 0.

- **Le modèle MA(q)**

Le modèle MA(q) ou "Moving Average" (moyenne mobile) d'ordre q est donné par:
 ou encore

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ y_t &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \end{aligned}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont des paramètres à estimer.

Un modèle MA(q) présente un corrélogramme simple défini par ses q premiers termes significativement différents de 0 et un corrélogramme partiel caractérisé par une décroissance géométrique des retards

- **Le modèle ARMA(p,q)**

Le modèle ARMA(p,q) est une combinaison des processus AR(p) et MA(q):
ou encore

$$y_t - \Phi_1 y_{t-1} - \Phi_2 y_{t-2} - \dots - \Phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

ou encore

$$\Phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_y$$

où

$$\varepsilon_t \sim \text{BB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Le modèle ARMA(p,q) présente un corrélogramme simple et partiel qui sont un mélange des deux corrélogrammes des processus AR et MA purs.

I.7. Méthodologie de Box-Jenkins

La méthode de Box et Jenkins permet de déterminer le modèle ARIMA pouvant convenir à une série temporelle selon ses caractéristiques. Elle se décompose en plusieurs étapes :

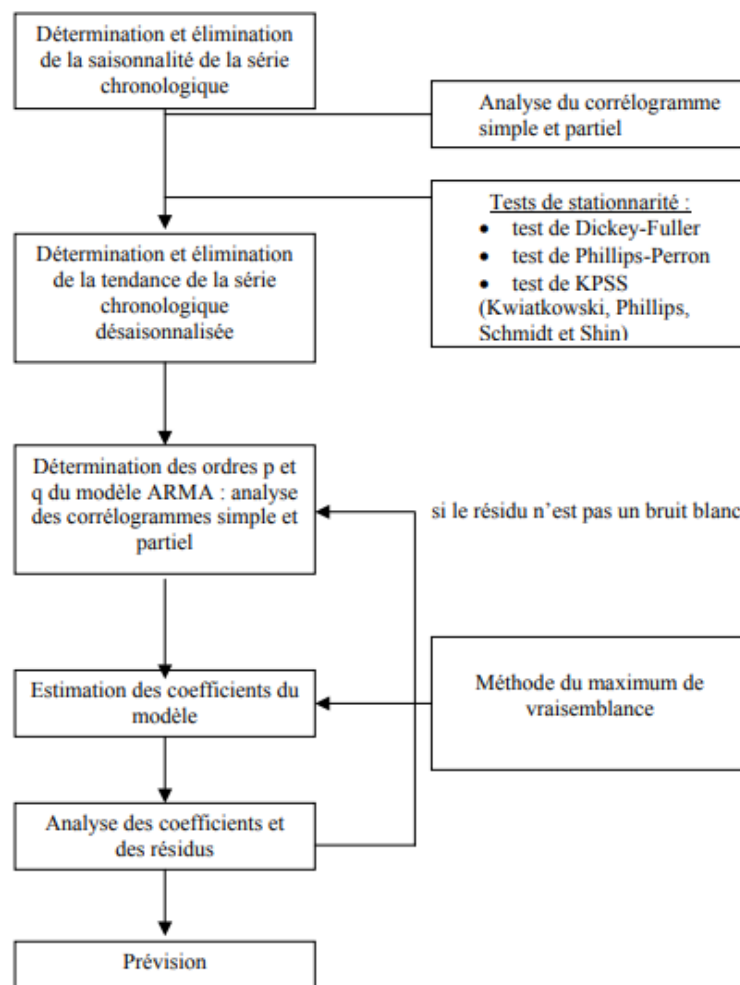


Figure 24 : Les étapes de la méthodologie de Box-Jenkins

1. Estimation des paramètres du processus ARMA(p,q) :

L'estimation des coefficients du processus ARMA(p,q) s'effectue principalement à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. On suppose pour cela que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

2. Validation du processus ARMA(p,q) :

Lors de la détermination des ordres p et q du processus ARMA(p,q) à l'aide des corrélogrammes simple et partiel, on peut être amené à sélectionner plusieurs ordres possibles p et q pour le processus ARMA(p,q). Après avoir estimé les différents processus ARMA(p,q) possibles, il reste à les valider et à les départager. La validation des processus passe par un examen des coefficients estimés (ils doivent être significativement non nuls) et par un examen des résidus (les résidus estimés doivent suivre un processus bruit blanc : $e_t \sim BB(0, \sigma_e^2)$ où e_t est l'estimateur de l'erreur ε_t puisque l'on a supposé que $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ lors de la définition du processus ARMA(p,q)

a. Test sur les coefficients

Parmi les processus ARMA estimés, on ne retiendra que ceux dont tous les coefficients ont un t de Student supérieur à 1,96 (pour un risque de 5% et pour une taille d'échantillon suffisamment grande : $T > 20$).

b. Tests sur les résidus

Test d'autocorrélation

Il existe un grand nombre de tests d'autocorrélation, les plus connus sont ceux de Box et Pierce (1970) et Ljung et Box (1978). Nous n'étudierons ici que le test de Box et Pierce. Le test de Ljung et Box est à appliquer lorsque l'échantillon est de petite taille.

Soit une autocorrélation des erreurs d'ordre $K (K > 1)$:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + v_t \text{ où } v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

Les hypothèses du test de Box-Pierce sont les suivantes :

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$ vs H_1 : Il existe au moins un ρ_i significativement différent de 0. Pour effectuer ce test, on a recours à la statistique Q :

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2$$

Où n est le nombre d'observations et $\hat{\rho}_k^2$ est le coefficient d'autocorrélation d'ordre k des résidus estimés e_t .

Sous l'hypothèse H_0 , Q suit la loi Khi-deux avec K degrés de liberté :

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 > \chi_K^2$$

La règle de décision est la suivante :

Si $Q > \chi_K^2$ où χ_K^2 est la valeur donnée par la table du Khi-Deux pour un risque fixé et un nombre K de degrés de liberté, on rejette H_0 et donc on accepte l'hypothèse d'autocorrélation des erreurs.

Test d'hétéroscédasticité

Il existe plusieurs tests possibles : test de Goldfeld et Quandt, test de White, test de Breusch et Pagan et test ARCH de Engle.

c. Critères de choix des modèles

Après examen des coefficients et des résidus, certains modèles sont écartés. Pour départager les modèles restants, on fait appel aux critères d'information, à savoir :

Le critère d'Akaike (AIC):

$$AIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2 \frac{(p + q)}{T}$$

Le critère d'information bayésien (BIC):

$$BIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2 \frac{(p + q)}{T} \log(T)$$

Où p est l'ordre de la partie AR et q est l'ordre de la partie MA.

On choisit le modèle qui minimise ces critères. Le modèle sélectionné peut donc être utilisé pour les prévisions.

II. Prévision par lissage exponentiel

Dans la vie professionnelle, il est courant que l'on est face à des situations où on doit effectuer des prévisions comme dans notre cas où on est face à un manque de données. Ces prévisions sont effectuées à partir des données historiques et l'horizon de prévision peut être court ou long. Dans le cas d'un court horizon de prévision, Un certain nombre de techniques "autoprojectives" regroupées sous la rubrique du lissage exponentiel sont adaptées à telles situations. Ces approches construisent des prévisions assez précises. Elles sont peu coûteuses et les calculs peuvent être rendus très rapides par l'utilisation de formules récursives de mise à jour. Ces méthodes ont connu beaucoup de succès importants malgré l'absence de bases théoriques solides comparables à celles des méthodes ARMA, ARIMA et SARIMA. Nous présenterons par la suite quelques modèles de lissage exponentiel qu'on va utiliser dans la prévision du ratio de sinistralité qu'on cherche.

Idées générales

On dispose d'une série chronologique $x = (x_1, \dots, x_n)$ de longueur n enregistrée aux dates 1, ..., n . On se situe à la date n et on souhaite prévoir la valeur x_{n+h} non encore observée à l'horizon h . On note cette prévision : $\hat{x}_{n,h}$ L'entier n est parfois appelé base de la prévision. La plus ancienne des techniques est celle du lissage exponentiel simple.

Toutes ces méthodes consistent à ajuster à une chronique de série temporelle une estimation locale de ce que va être sa valeur future. Selon les variantes :

- une constante pour le lissage exponentiel simple
- une droite pour le lissage exponentiel double ou de Holt
- des fonctions polynomiales ou périodiques pour les lissages plus généraux

Caractéristiques :

- Les méthodes de lissage exponentiel sont des méthodes de prévision à court terme ;
- Elles permettent de travailler sur des séries courtes ou changeant de structure ;
- Elles supposent que le phénomène étudié ne dépend que de ses valeurs passées ;

- Ce sont des méthodes d'extrapolation qui donnent un poids prépondérant aux valeurs récentes :
 - Les coefficients de pondération décroissent exponentiellement en remontant dans le temps ;
 - Chacune des méthodes dépend d'un ou plusieurs paramètres (paramètres de lissage) compris entre 0 et 1 ;
 - Le poids de chacune des valeurs passées se calcule à partir de ces paramètres.
- Cependant on considère que :
- Pour une série sans saisonnalité, un historique d'au moins 12 observations est nécessaire
 - Pour une série avec saisonnalité, un historique d'au moins 4 années est nécessaire (au moins 16 observations pour une série trimestrielle, au moins 48 observations pour une série mensuelle).

II.1. Lissage exponentiel simple

Un algorithme de base pour la prévision de séries temporelles univariées est le lissage exponentiel, c'est la plus ancienne des méthodes que nous verrons dans cette partie. On peut voir le lissage exponentiel comme une méthode de prévision mais également, comme son nom l'indique, comme une technique de lissage de données.

Définition

soit une série temporelle y_t . On appelle lissage exponentiel simple de paramètre $\alpha \in [0, 1]$ de cette série le processus \hat{y}_t définie ainsi:

$$\hat{y}_{t+1/t} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t/t-1}$$

On a donc :

$$\hat{y}_{t+1/t} = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha (1 - \alpha)^i y_{t-i}$$

La prévision de l'instant $t+1$ est donc une somme pondérée des valeurs passées de la série, les poids décroissant exponentiellement dans le passé. La mémoire de la prévision dépend de α . Plus α est proche de 1 plus les observations récentes influent sur la prévision, à l'inverse un α proche de 0 conduit à une prévision très stable prenant en compte un passé lointain.

Une autre façon d'écrire le lissage exponentiel (error correction form) :

$$\hat{y}_{t+1/t} = \hat{y}_{t/t-1} + \alpha (y_t - \hat{y}_{t/t-1})$$

$\hat{y}_{t+1/t}$ est une prévision à horizon 1. Il est parfois nécessaire d'effectuer une prévision à un horizon h quelconque. On notera par la suite $\hat{y}_{t+h/t}$ la prévision de y_{t+h} conditionnellement à (y_1, \dots, y_t) . Pour le lissage exponentiel simple cette prévision est tout simplement: $\hat{y}_{t+h/t} = \hat{y}_{t+1}$ car on approxime le futur de la série à une constante .

II.2. Lissage exponentiel double (ou de Holt)

Holt (1957) a étendu le lissage exponentiel simple au cas du lissage exponentielle linéaire. L'idée est d'ajuster une droite au lieu d'une constante dans l'approximation locale de la série. Le lissage exponentiel de Holt s'applique aux séries chronologiques sans composante saisonnière et à tendance localement linéaire

Définition

Soit une série temporelle y_t . On appelle lissage exponentiel double (ou de Holt) de paramètre $\alpha \in [0,1]$ de cette série le processus \hat{y}_t définie ainsi:

$$\hat{y}_{t+h/t} = l_t + b_t h$$

Avec :

$$\begin{cases} l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + (1 - (1 - \alpha)^2)(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) \\ b_t = b_{t-1} + \alpha^2(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) \end{cases}$$

l_t et b_t minimise à chaque instant:

$$(\hat{l}, \hat{b}) = \operatorname{argmin}_{l,b} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i (y_{t-i} - (l + bi))^2$$

II.3. Lissage exponentiel de Holt-Winters

Cette approche est une généralisation du lissage double, qui permet entre autre de proposer les modèles suivants :

- tendance linéaire locale
- tendance linéaire locale + saisonnalité (modèle additif)
- tendance linéaire locale * saisonnalité (modèle multiplicatif)

Dans ce cas 2 paramètres de lissage entrent en jeu et on ajuste au voisinage de t un fonction linéaire $l_t + b_t h$, h étant l'horizon de prévision.

Lissage exponentiel double de Holt-Winters

soit une série temporelle y_t . On appelle lissage exponentiel double de Holt-Winters de paramètres $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ de cette série le processus \hat{y}_t définie ainsi:

$$\hat{y}_{t+h} = l_t + h b_t$$

Avec

$$\begin{cases} l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \end{cases}$$

là encore l_t est une estimation du niveau de la série, b_t de sa pente (localement en temps). remarque la formule de mise à jour du lissage exponentiel double est un cas particulier du lissage de Holt-Winters. En effet on peut écrire dans ce cas :

$$\begin{cases} l_t = (1 - (1 - \alpha)^2)y_t + (1 - \alpha)^2(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \frac{\alpha^2}{1 - (1 - \alpha)^2}(l_t - l_{t-1}) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{1 - (1 - \alpha)^2}\right)b_{t-1} \end{cases}$$

remarque l_t est le barycentre affecté des poids α et $1 - \alpha$ de la dernière valeur de y observé et sa prévision à horizon 1. L'algorithme "corrige" donc la prévision de la constante en prenant en compte le dernier écart observé. De même, b_t est au barycentre de la dernière pente prévue et l'écart entre les 2 dernières ordonnées à l'origine prévues.

Pour ajuster une composante saisonnière, on considère le modèle (localement au voisinage de t):

$$\hat{y}_{t+h} = l_t + h b_t + s_t$$

ou s_t est une composante périodique de période T .

Lissage exponentiel double de Holt-Winters saisonnier

soit une série temporelle y_t . On appelle lissage exponentiel double de Holt-Winters saisonnier paramètres $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$, $\delta \in [0,1]$ de cette série le processus \hat{y}_t définie ainsi:

$$\hat{y}_{t+h} = l_t + hb_t + s_t$$

Avec

$$\begin{cases} l_t = \alpha(y_t - s_{t-T}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ s_t = \delta(y_t - l_t) + (1 - \delta)s_{t-T} \end{cases}$$

Il existe une variante multiplicative de ce lissage saisonnier.

Lissage exponentiel double de Holt-Winters saisonnier multiplicatif

soit une série temporelle y_t . On appelle lissage exponentiel double de Holt-Winters saisonnier multiplicatif de paramètres $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$, $\delta \in [0,1]$ de cette série le processus \hat{y}_t définie ainsi:

$$\begin{cases} \hat{y}_{t+h} = (l_t + hb_t)s_t \\ l_t = \alpha \frac{y_t}{s_{t-T}} + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ s_t = \delta \frac{y_t}{l_t} + (1 - \delta)s_{t-T} \end{cases}$$

Partie 2 : Cadre Pratique d'application des méthodes de prévision et le calcul de BE – application sur la branche « incendie » du portefeuille non vie de la région Asie-Pacifique

Le but dans cette partie c'est d'obtenir une estimation du loss-ratio 2020 de la branche incendie du marché d'assurance sud-coréen à partir des données historiques, afin de l'utiliser comme estimation du loss ratio retenu dans le calcul de BE de cette même branche de notre portefeuille, on applique alors les méthodes évoquées ci-dessus pour obtenir notre estimation.

Présentation des données :

Les données utilisées sont les loss ratios historiques de la branche « incendie » du marché de la Corée de sud, on possède un historique de 26 observations des loss ratios de 1994 à 2019.

Voici une représentation graphique de notre série d'observation :

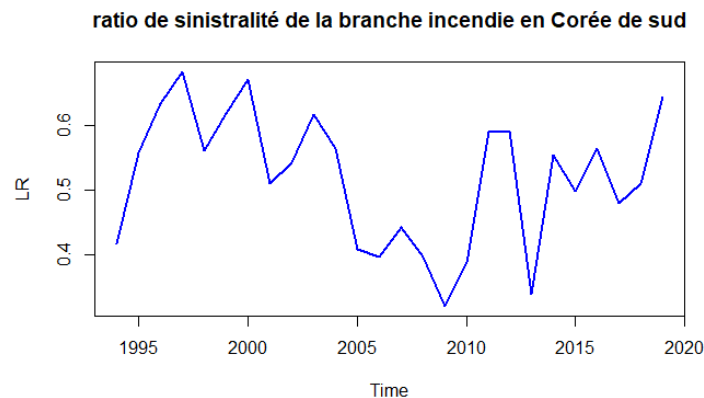


Figure 25 : Représentation de la série des loss ratios historiques de la branche « incendie » du marché de la Corée de sud entre 1994 et 2019

I. La Prévision naïve :

La prévision naïve consiste à estimer le ratio de sinistralité par deux approche :

La valeur moyenne des observations historique, on aura donc comme valeur du loss ratio en 2020 : $\widehat{LR}_{2020} = 51.9 \%$

La dernière valeur des observations historique, on aura alors : $\widehat{LR}_{2020} = 64.4 \%$

Cette méthode n'est peut-être pas la meilleure technique de prévision, mais elle constitue souvent un point de référence utile pour d'autres méthodes de prévision plus avancées.

II. Prévision par lissage exponentiel

II.1 Lissage exponentiel simple

La méthode de lissage exponentiel simple peut être vu comme une extension de la méthode naïve, dans laquelle les prévisions sont produites à l'aide de moyennes pondérées des observations passées, les pondérations diminuant de manière exponentielle à mesure que les observations vieillissent. En d'autres termes, une pondération plus élevée est accordée aux observations les plus récentes et vice versa. La valeur du paramètre de lissage pour le niveau est déterminée par le paramètre "alpha".

On utilise la fonction `ses()` de la bibliothèque « forecast » de R, on obtient les résultats

```

Forecast method: Simple exponential smoothing

Model Information:
Simple exponential smoothing

call:
ses(y = fr, h = 1)

Smoothing parameters:
alpha = 0.3837

Initial states:
l = 0.5298

sigma: 0.1037

      AIC      AICC      BIC
-29.20409 -28.11318 -25.42980

Error measures:
      ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
Training set 0.002965434 0.09965411 0.08346356 -2.848125 17.0763 0.9194336
      ACF1
Training set 0.08508351

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2020      0.5593582 0.4264314 0.6922849 0.3560642 0.7626521

```

Figure 26 : Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par lissage exponentiel simple

Le paramètre α est estimé sous R égale à : 0.3837

On obtient un loss ratio de :

$$\widehat{LR}_{2020} = 55.92 \%$$

Avec un Intervalle de confiance à 95% égale à $IC = [0.356, 0.762]$

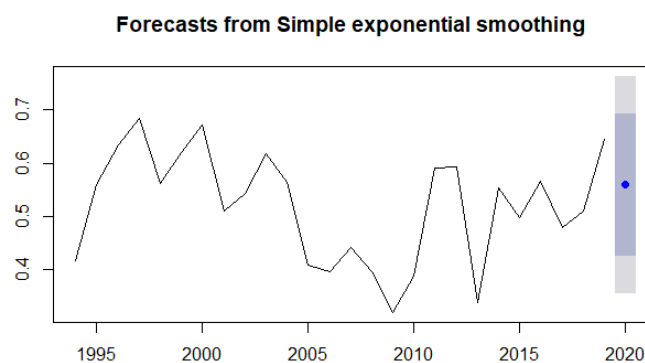


Figure 27 : représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de lissage exponentiel simple avec intervalle de confiance à 95%

II.2. Lissage exponentiel double (ou de Holt)

Il s'agit d'une extension de la méthode de lissage exponentiel simple qui prend en compte la composante de tendance lors de la génération des prévisions. Cette méthode implique deux équations de lissage, une pour le niveau et une pour la composante de tendance.

On utilise la fonction `holt()` de la bibliothèque « `forecast` » de R, on obtient les résultats :

```
Forecast method: Holt's method

Model Information:
Holt's method

Call:
holt(y = fr, h = 1)

Smoothing parameters:
alpha = 0.2639
beta  = 1e-04

Initial states:
l = 0.5515
b = 6e-04

sigma: 0.1092

      AIC      AICC      BIC
-24.81368 -21.81368 -18.52320

Error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
Training set -0.003790177 0.1004051 0.0860711 -4.464108 17.9769 0.9481583
              ACF1
Training set 0.1706363

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2020      0.5417316 0.4018479 0.6816153 0.3277979 0.7556653
```

Figure 28 : Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par la méthode de Holt

Le paramètre α et β estimé sont estimés respectivement dans R égaux à : 0.2639 et 0.0001
On obtient un loss ratio de :

$$\widehat{LR}_{2020} = 54.17 \%$$

Avec un Intervalle de confiance à 95% égale à $IC = [0.327, 0.755]$

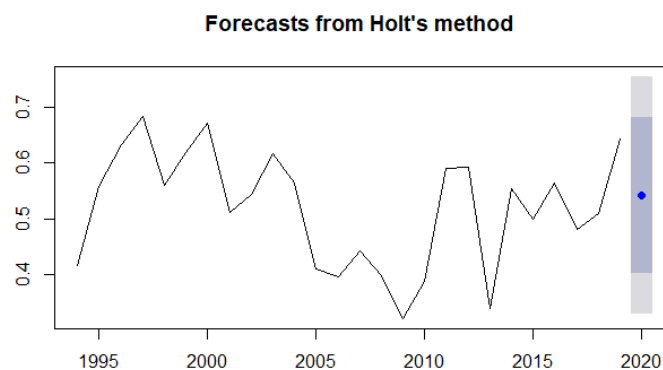


Figure 29 : représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de Holt avec intervalle de confiance à 95%

II.3. Lissage exponentiel de Holt-Winters

La saisonnalité de la série chronologique de notre étude

En remarquant la figure qui représente la série des ratios historiques on remarque bien que la série ne présente pas de saisonnalité, la fonction `decompose()` de la bibliothèque `stats` de R qui fait la décomposition empirique d'une série chronologique permet d'affirmer ceci :

```
> decompempirique=decompose(fr)
Error in decompose(fr) : la série temporelle a moins de 2 périodes
```

Figure 30 : Vérification de la saisonnalité de la série sous R

Donc on va utiliser le Lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnier pour la prédiction : On utilise la fonction `Holtwinters()` de la bibliothèque « `forecast` » de R, on obtient les résultats :

```
> hw_model
Holt-winters exponential smoothing with trend and without seasonal component.

Call:
Holtwinters(x = fr, gamma = FALSE)

Smoothing parameters:
alpha: 0.551229
beta : 0.5001854
gamma: FALSE

Coefficients:
      [,1]
a 0.58261536
b 0.03309619
```

Figure 31 : Application de la méthode de Lissage exponentiel de Holt-Winters non saisonnier sur les loss ratios historiques sous R et l'estimation des coefficients du modèle

On obtient la prévision suivante :

$$\widehat{LR}_{2020} = 61.57 \%$$

```
> predict(hw_model,h=1)
Time Series:
Start = 2020
End = 2020
Frequency = 1
      fit
[1,] 0.6157116
```

Figure 32 : Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par la méthode de Holt-Winters non saisonnier

III. Prévision par modèles linéaires des séries chronologiques

On applique le test de dickey fuller augmenté sur notre série chronologique afin de vérifier sa stationnarité.

Sous R la fonction `adf.test()` de la bibliothèque « `tseries` » nous permet de réaliser ce test, on obtient ainsi :

```
> adf.test(fr)

      Augmented Dickey-Fuller Test

data:  fr
Dickey-Fuller = -1.4055, Lag order = 2, p-value = 0.7989
alternative hypothesis: stationary
```

Figure 33 : Résultat sous R de test de stationnarité de dickey fuller augmenté sur l'historique des loss Ratios pour la branche incendie du marché sud-coréen

Ce test Donne une p-value supérieure à 0.05 donc on accepte l'hypothèse nulle c'est-à-dire la série n'est pas stationnaire.

Cette série temporelle n'est pas stationnaire, il est donc justifié d'utiliser des modèles ARIMA(p,d,q) .

Déterminons d'abord l'ordre de différentiation qui stationnarise la série :

La fonction `ndiffs()` de R permet d'estimer le paramètre d, en utilisant le test de racine unitaire Dickey-fuller augmenté, on trouve finalement :

```
> forADF=ndiffs(fr, test = "adf")
> forADF
[1] 2
```

Figure 34 : estimation du paramètre d du modèle ARIMA Sous R

Estimation des paramètres du modèle p et q :

La fonction `auto.arima()` de la bibliothèque `forecast` de R permet d'obtenir les coefficients p et q optimales suivant le critère de minimisation de AIC et BIC

```
> arifor=auto.arima(fr,d=2)
> arifor
Series: fr
ARIMA(4,2,0)

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3      ar4
    -1.288  -1.3508  -1.0184  -0.4089
s.e.    0.202   0.2626   0.2519   0.1923

sigma^2 estimated as 0.01122:  log likelihood=20.56
AIC=-31.11  AICC=-27.78  BIC=-25.22
```

Figure 35 : estimation des coefficients p et q du modèle ARIMA sous R

Le modèle optimal dans notre modélisation est alors ARIMA(4,2,0).

Validation du modèle :

```
> res=resid(arifor)
> Box.test(res,type="Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: res
x-squared = 0.26957, df = 1, p-value = 0.6036
```

Figure 36 : Résultat test de Ljung-Box sous R

On obtient un p-value supérieur à 0.05 donc on accepte H_0 , les résidus sont indépendants et le Modèle ARIMA (4,2,0) est validé pour faire des prévisions.

On obtient alors la provision suivante :

```
Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2020      0.5931983 0.4574707 0.7289258 0.3856208 0.8007757
```

Figure 37 : Résultat sous R de la prévision du loss ratio de la branche incendie du marché sud-coréen en 2020 par le modèle ARIMA

$$\widehat{LR}_{2020} = 59.31 \%$$

Avec intervalle de confiance à 95% égale à $IC = [0.3856, 0.8007]$

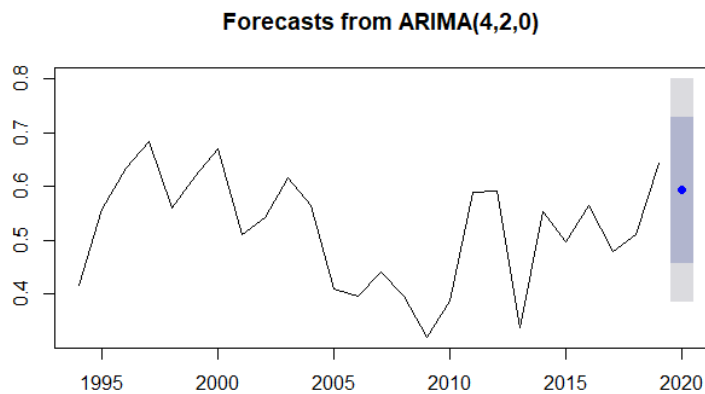


Figure 38 : représentation graphique de la prévision en 2020 par la méthode de Holt avec intervalle de confiance à 95

Récapitulatif des résultats :

Méthodes Naïves		Lissage exponentiel			Modèles linéaire des Série chronologique
Moyenne	Dernière valeur	Simple	Double (Holt)	Holt-winters	ARIMA
51.9%	64.4%	55.92%	54.7%	61.57%	59.32%

Tableau 59 : Récapitulatif des résultats d'estimation du loss ration 2020 de la branche « incendie » du marché sud-coréen

VI-Choix de la plus juste prévision du Loss Ratio

Pour choisir la meilleure estimation du Loss Ratio retenu, on va procéder par deux approches :

VI.1. Première approche : Back-testing

La première approche est très simpliste, elle représente un test de stabilité du modèle prédictif à un horizon d'un an, en calculant une erreur de prédiction sur les données historiques : on fait la prévision du loss ratio 2019 par les données antérieures à 2019 et on compare le résultat à la valeur du marché en 2019.

On choisit l'erreur de prédiction la quantité :

$$ERP = \left| \frac{\text{prédiction} - \text{valeur du marché}}{\text{valeur du marché}} \right| = \left| \frac{LR_{2019_Model} - LR_{2019}}{LR_{2019}} \right|$$

On applique de la même manière les mêmes méthodes sur la série des loss ratio entre 1994 et 2018 on obtient les estimations pour 2019 suivantes (les sorties R sont en annexe) :

Méthodes Naïves		Lissage exponentiel			Modèles linéaire des Série chronologique
Moyenne	Dernière valeur	Simple	Double (Holt)	Holt-winters	ARIMA
51.43%	51.0%	52.62%	48.88%	54.60%	55.63%

Tableau 60 : Récapitulatif des résultats d'estimation du loss ration 2019 de la branche « incendie » du marché sud-coréen

Avec un loss ratio recordé de 64.4 en 2019 on obtient les erreurs de prédiction suivantes :

Méthode	Moyenne	Dernière valeur	Simple	Double (Holt)	Holt-winters	ARIMA
ERP	20,14%	20,81%	18,29%	24,10%	15,22%	13,62%

Tableau 61 : erreur de prédiction du Loss Ratio 2019 de la branche « incendie » du marché sud-coréen par les différentes méthodes

On remarque que les méthodes ARIMA et Holt-winters sont les plus stables pour la prévision à un an pour notre série de données

Cette approche reste trop simpliste puisqu'elle se base seulement sur une seule valeur de prédiction pour trancher sur la qualité du modèle, mais elle nous permet d'avoir une idée avant de décider le Loss ratio à retenir par la deuxième approche

VI.2. La deuxième approche : Calage avec le bilan comptable

Principe

Cette deuxième approche est plutôt interne et elle se base sur des comparaisons avec le bilan comptable en faisant un calage avec ce dernier par le même principe déjà utilisé dans la méthode interne : nous calculons les nouveaux BE par la méthode interne en utilisant les loss ratio prédits par nos différents modèles, puis nous regardons le BE qui se cale le mieux avec le bilan comptable, ce dernier sera pris et le loss ratio correspondant sera le loss ratio retenu

Résultat

Par souci de confidentialité nous ne pouvons pas afficher les résultats et leur comparaison avec le bilan comptable, mais nous donnons seulement le résultat final trouvé : un ratio de sinistralité de 59.32% qui correspond au modèle ARIMA donne une valeur de BE qui est la plus optimale en terme du calage avec le bilan comptable. Par la suite nous pouvons conclure que la méthode ARIMA donne la meilleure prévision du loss ratio en 2020 de la branche « incendie » de l'assurance sud-coréen, ce qui est en accord avec les résultats de la première approche.

Conclusion générale

Vu la place primordiale qu'occupe la provision pour sinistres à payer et le Best Estimate qui en résulte dans le passif du bilan de chaque compagnie d'assurance, l'actuaire est censé être prudent lors de son estimation. Cette prudence doit être augmentée lors d'une estimation qui fait intervenir des données externes.

Ainsi, durant ce mémoire on s'est intéressé à cette problématique, en présentant les différentes méthodes qui permettent de réaliser cette estimation. Dans un second lieu, nous avons vu comment ce problème des données peut se manifester, et plus précisément quand il s'agit d'une approche interne.

Dans un premier lieu, nous avons présenté l'approche préconisée par l'ACAPS pour réaliser cette tâche, tout en exposant pour chaque méthode les hypothèses sous-jacentes.

Après, on a vu comment la SCR traite ce problème à travers son approche spécifique à son activité. Les résultats obtenus par cette méthode ont été confrontés avec ceux issus de l'approche Standard. Cette comparaison a montré que cette approche interne est plus performante vu qu'elle prend en considération le caractère spécial de la société en question.

Enfin, on a rentré plus dans les détails de cette approche, et plus précisément l'estimation du Benchmark du ratio de sinistralité dans le cas de manque des données. On a essayé de présenter quelques solutions pour pallier ce problème. Ces techniques occupent tout le spectre de complexité, du plus naïves (Estimation par dernière valeur), vers les plus sophistiquées (Modélisation ARIMA, Lissage Holt-Winter). On a appliqué ces différentes méthodes et on a pu obtenir à travers la méthode ARIMA, un estimateur qui a passé avec succès tous les tests de validation. Ce Benchmark permet d'obtenir la plus prudente estimation du Best Estimate et ainsi, assurer la solvabilité de notre portefeuille

Références bibliographiques :

- ❖ Arthur Charpentier, Michel Denuit, MATHEMATIQUES DE L'ASSURANCE NON-VIE, TOME II : TARIFICATION ET PROVISIONNEMENT
- ❖ FOUAD MARRI (2015-2016), PROVISIONNEMENT EN NON VIE, INSEA
- ❖ FADOUA BADAoui (2017-2018), SERIES CHRONOLOGIQUES, INSEA
- ❖ YASSINE EL QALLI (2019-2020), COURBE DES TAUX ET PRODUITS A REVENU FIXE, INSEA
- ❖ Hind Gouriach, Khadija Layar (2017) – Méthodes de Provisionnement non-vie et Risque de Réserve à un an – Mémoire d'actuariat, INSEA
- ❖ Aude Goichon, Franck Vermet, Françoise Pène (2014) - Estimation de l'erreur de prédiction dans le cas de l'utilisation d'une combinaison de méthodes pour le calcul de provisions en assurance IARD - mémoire EURIA
- ❖ Meriem BOUYSEFI, Fatima HAMMA (2017) – Etude des méthodes d'estimation des provisions pour sinistres à payer en assurance non-vie – Mémoire d'actuariat, INSEA
- ❖ Hamisultane, H., ECONOMETRIE DES SERIES TEMPORELLES, Université Paris Nanterre, 2002.
- ❖ Lagnoux, A., Séries chronologiques, Université Toulouse, 2010-2011.
- ❖ Yannig Goude, Lissages Exponentiels, Université Paris Saclay, 2018-2019
- ❖ KOREA INSURANCE RESEARCH INSTITUTE, KOREAN INSURANCE INDUSTRY 2020
- ❖ INSURANCE REGULATORY AND DEVELOPMENT AUTHORITY OF INDIA Annual report 2020
- ❖ FINANCIAL SUPERVISORY COMMISSION (ROC) OF TAIWAN, INDICATORS OF INSURANCE 2016 – 2021

Annexe

Annexe 1 : Les hypothèses Chain Ladder pour la branche « Maritime » de la région APEC :

Première hypothèse :

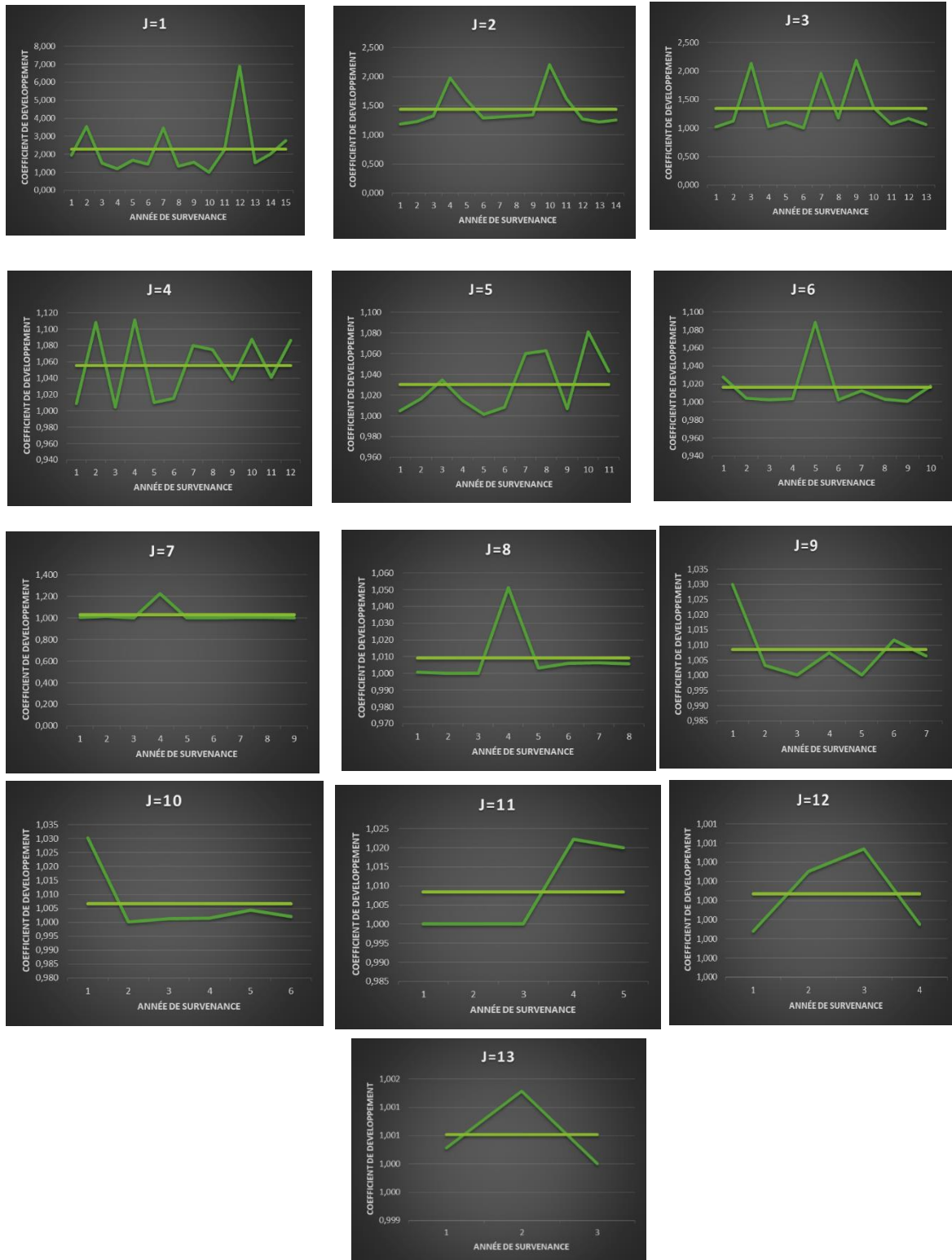


Figure 39 : vérification de la première hypothèse Chain ladder pour la branche « Maritime »

Deuxième hypothèse :

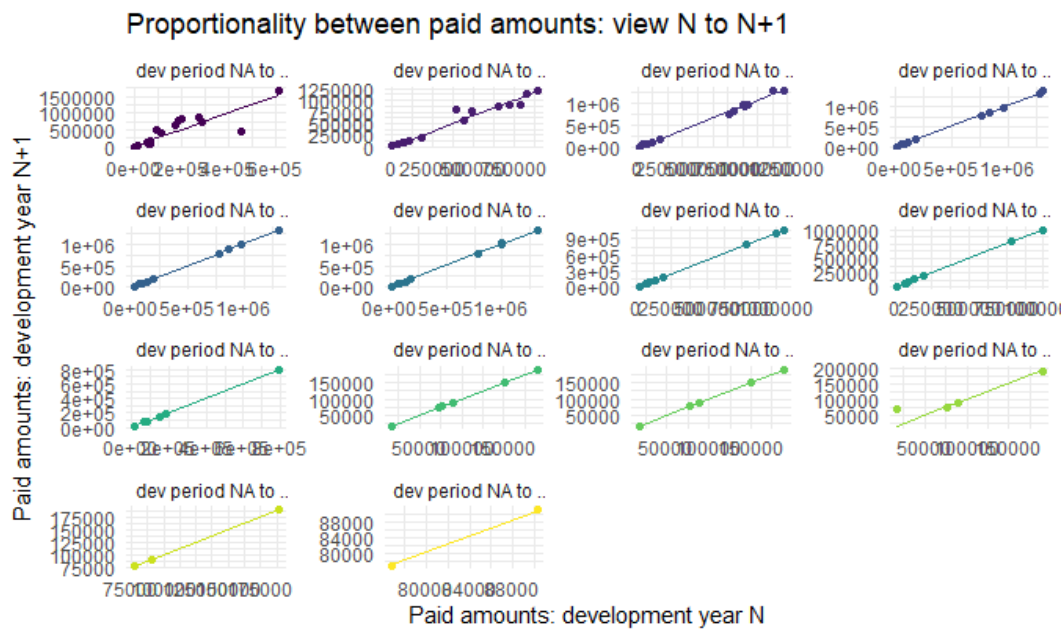


Figure 40 : vérification de la deuxième hypothèse Chain Ladder pour la branche « Maritime »

Troisième hypothèse :

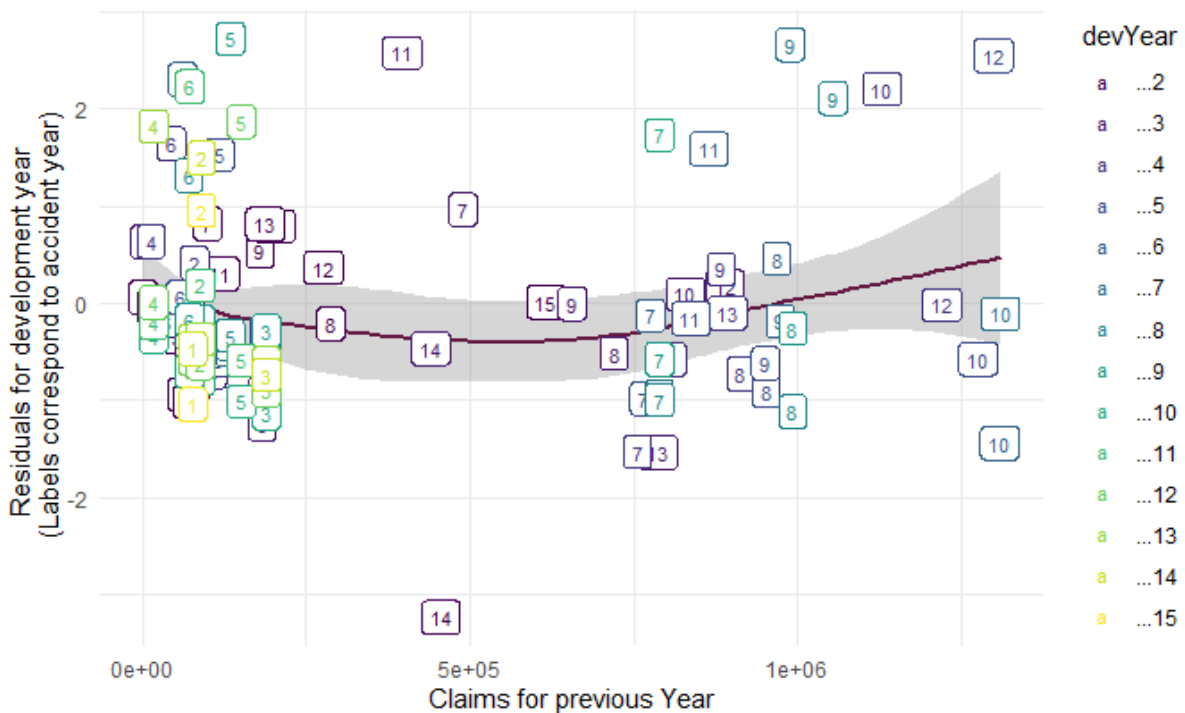


Figure 41 : vérification de la troisième hypothèse Chain Ladder pour la branche « Maritime »

Annexe 2 : Les hypothèses Chain Ladder pour la branche « Auto-RC » de la région APEC :

Première hypothèse :

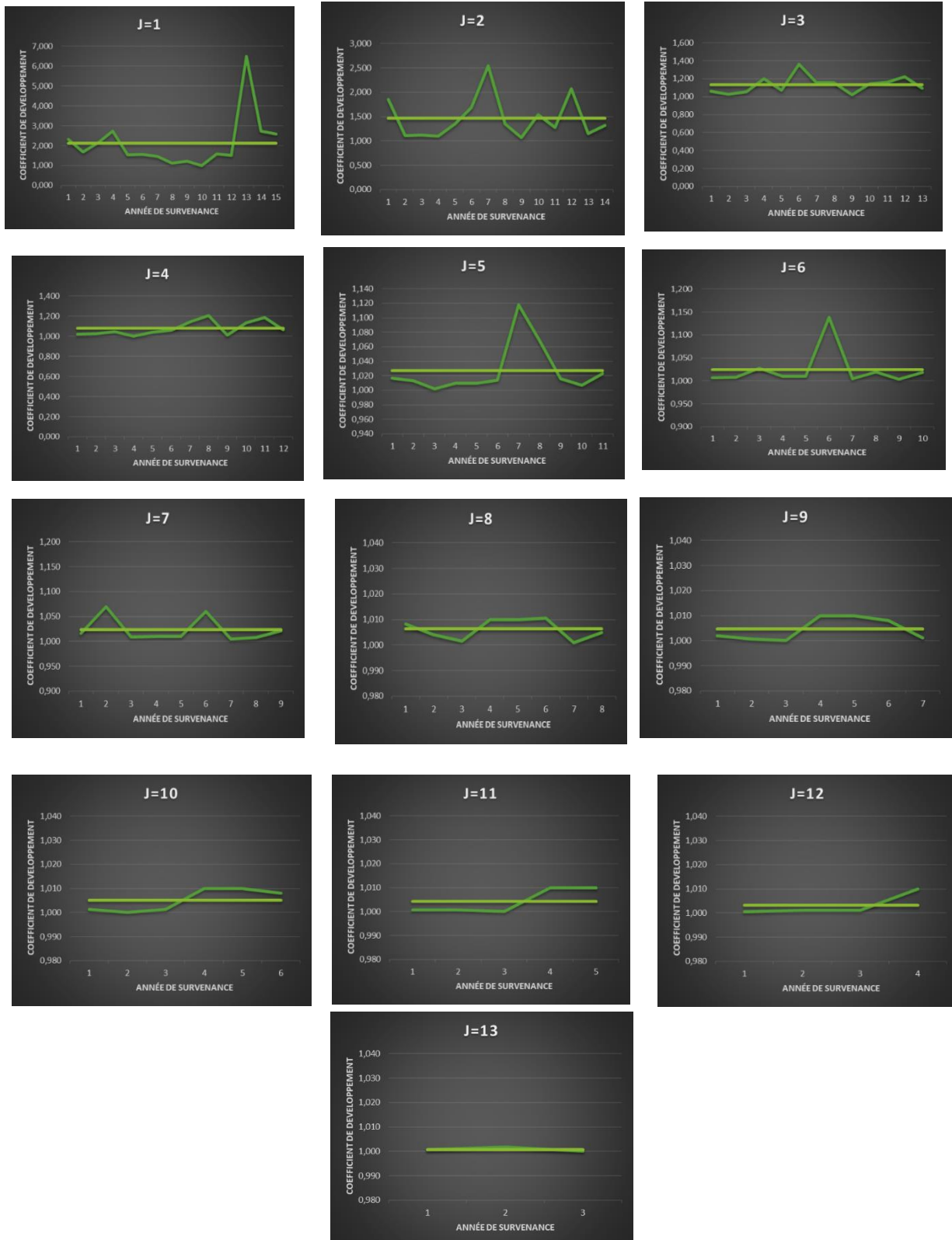


Figure 42 : vérification de la première hypothèse Chain ladder pour la branche « Maritime »

Deuxième hypothèse :

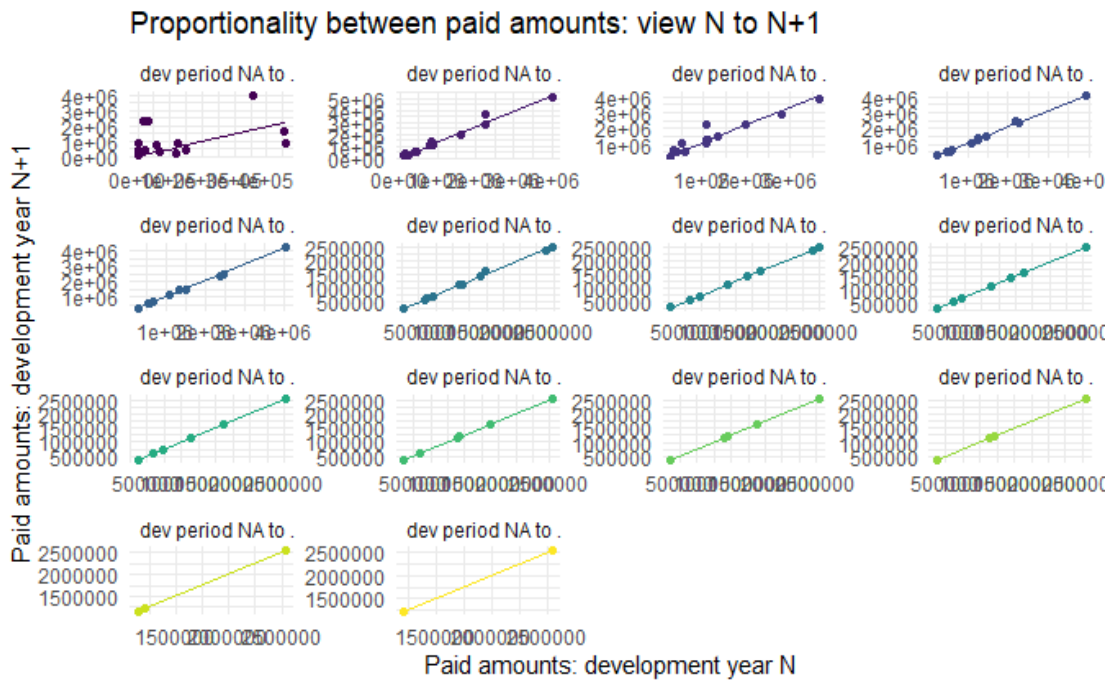


Figure 43 : vérification de la deuxième hypothèse Chain ladder pour la branche « Auto-RC »

Troisième hypothèse :

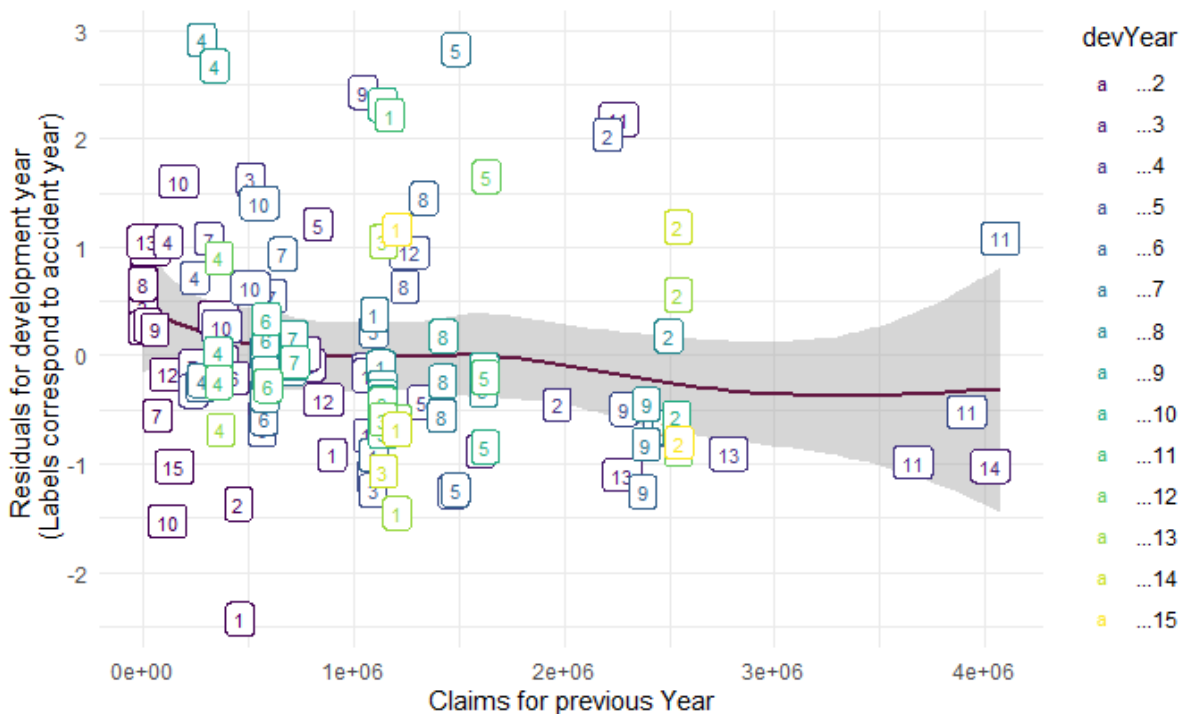


Figure 44 : vérification de la troisième hypothèse Chain Ladder pour la branche « Auto-RC »

Annexe 3 : Les sorties R relatifs à la prédiction du ratio de sinistralité en 2019 de la branche Incendie du marché sud-coréen :

```

Forecast method: Simple exponential smoothing

Model Information:
Simple exponential smoothing

Call:
ses(y = fr2, h = 1)

Smoothing parameters:
alpha = 0.368

Initial states:
l = 0.5326

sigma: 0.102

      AIC      AICC      BIC
-29.75115 -28.60829 -26.09452

Error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE
Training set -0.002859288 0.09783617 0.08164429 -3.934692 17.00459
              MASE      ACF1
Training set 0.9175971 0.100695

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2019      0.5262971 0.3755772 0.6570169 0.3063783 0.7262158

```

Figure 45 : Prédiction sous R du loss ratio de l'année 2019 pour la branche Incendie du marché sud-coréen par la méthode de lissage exponentiel simple

```

Forecast method: Holt's method

Model Information:
Holt's method

Call:
holt(y = fr2, h = 1)

Smoothing parameters:
alpha = 0.2469
beta = 1e-04

Initial states:
l = 0.5758
b = -0.003

sigma: 0.1071

      AIC      AICC      BIC
-25.59744 -22.43954 -19.50306

Error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
Training set -0.00129434 0.09813741 0.08298024 -3.803902 17.41356 0.9326118
              ACF1
Training set 0.1678705

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2019      0.4887847 0.3515604 0.626009 0.2789182 0.6986511

```

Figure 46 : Prédiction Sous R du loss ratio de l'année 2019 pour la branche Incendie du marché sud-coréen par la méthode de lissage exponentiel double

```
> predict(hw_model,h=1)
Time Series:
Start = 2019
End = 2019
Frequency = 1
          fit
[1,] 0.5460443
```

Figure 47 : Prédiction Sous R du loss ratio de l'année 2019 pour la branche Incendie du marché sud-coréen par la méthode de Holt-Winters

```
Series: fr2
ARIMA(3,2,0)

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3
-1.0388 -0.9213 -0.6038
s.e.    0.1646  0.1803  0.1587

sigma^2 estimated as 0.01241: log likelihood=18.37
AIC=-28.74  AICC=-26.52  BIC=-24.2
> |
```

Figure 48 : estimation des paramètres du modèle ARIMA pour la prévision du loss ratio de l'année 2019 pour la branche Incendie du marché sud-coréen

```
> arima= forecast(fr,model=arifor,h=1)
> arima
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
2019      0.5563065  0.3835409  0.6990721  0.3179654  0.7546476
```

Figure 49 : Prédiction Sous R du loss ratio de l'année 2019 pour la branche Incendie du marché sud-coréen par le modèle ARIMA

```
> Box.test(res,type="Ljung-Box")

Box-Ljung test

data:  res
x-squared = 0.55287, df = 1, p-value = 0.4571
```

Figure 50 : Résultat du test de Ljung-Box sous R pour le modèle du backtesting