



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Évaluation et Projection des Retraites en Zone CIPRES : Analyse actuarielle et Modélisation Macroéconomique

Préparé par : *Mme Nissrine IFEGH*

Sous la direction de : *M. Pierre DEVOLDER (INSEA)*  
*Mme Widad FANNAN (FINACTU)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

## Diplôme d'Ingénieur d'Etat

**Filière : Actuariat - Finance**

*Devant le jury composé de :*

- *M. Pierre DEVOLDER ( INSEA)*
- *M. Yassine EL QALLI ( INSEA)*
- *Mme Widad FANNAN (FINACTU)*

**Juin 2024 / PFE N° 17**



# Dédicace

Je dédie ce travail, modeste mais empreint de profondes convictions, en témoignage de mon affection, de mon respect et de ma gratitude :

À ma mère, pilier de mon existence et source inépuisable de soutien et d'inspiration. Ta force, ta détermination et ton amour sans bornes ont sculpté les fondements de ma vie. Merci pour tous les sacrifices endurés et pour ta foi indéfectible en mes capacités. Je suis profondément honorée de t'appeler maman.

À la mémoire de mon père bien-aimé, qui a toujours cru en moi. Ta présence me manque chaque jour, mais l'empreinte de ton enseignement guide encore chacun de mes pas.

À mes frères, Ayoub et Yassine, mes compagnons de toujours, et mes amis fidèles, dont le soutien indéfectible, les encouragements constants et les sourires ont transformé chaque défi en une aventure mémorable.

À mes chers ami(e)s, Haitam, Zineb et Saif Eddine, ainsi que tous ceux qui enrichissent ma vie par leur présence et leur amitié sincère.

Enfin, à tous ceux que la plume peut oublier, mais que le cœur garde en son sein. . .

- *Nissrine*

# Remerciement

En préambule de ce rapport, il me paraît opportun d'adresser mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont tant appris au cours de ce stage et qui ont fait de cette expérience professionnelle un moment très enrichissant.

Je tiens à exprimer ma gratitude à tous les professeurs de l'Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée (**INSEA**), ainsi qu'à toute l'équipe pédagogique, pour leur engagement et leur dévouement dans notre formation.

Je tiens d'adresser mes profonds remerciements à **M. Denis CHEMILLIER-GENDREAU**, Président du groupe FINACTU pour m'avoir offert cette opportunité en tant que stagiaire au sein de son organisme.

Je remercie **Mme Widad FANNAN**, Consultante Senior au sein du Groupe FINACTU pour son encadrement et son aide tout au long de la période de stage, ainsi que pour sa confiance et son dévouement à me transmettre toutes les informations nécessaires.

Ainsi que **Mme Ghita LAMRIKI**, Senior Manager et experte en protection sociale, pour son orientation, ses conseils avisés, et pour avoir veillé à ce que mon stage soit une expérience complète et enrichissante.

Je tiens d'adresser mes profonds remerciements à **M. Pierre DEVOLDER** pour son encadrement attentif, sa disponibilité constante et ses conseils avisés, qui m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce projet.

Je remercie également **M. Yassine EL QALLI**, notre professeur de finance quantitative, pour les connaissances approfondies qu'il nous a transmises. Je suis sincèrement honorée qu'il examine mon travail.

Je remercie tout le personnel de **FINACTU** pour le climat agréable dans lequel s'est déroulé mon stage, et pour leurs efforts constants qui ont grandement facilité mon apprentissage et mon intégration.

Je suis profondément reconnaissante à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce rapport. J'espère que ce travail pourra atteindre ses objectifs et répondre aux attentes.

Enfin, veuillez agréer, Mesdames et Messieurs, l'expression de mes sentiments de reconnaissance les plus distingués.

# Résumé

Les systèmes de retraite sont indubitablement confrontés à des défis majeurs en raison des contraintes économiques, des fluctuations démographiques mondiales et des restrictions budgétaires. Ces facteurs soulèvent des questions cruciales sur la viabilité et la pérennité de ces systèmes. En Afrique subsaharienne francophone, et plus particulièrement en zone CIPRES, le pilotage technique des risques est souvent négligé. Les institutions de retraite, les banques et les assurances y mènent souvent leurs activités sans intégrer pleinement la gestion des risques.

L'objectif principal de ce projet est de fournir une évaluation précise des systèmes de retraite actuels et de proposer des projections économiques robustes pour l'avenir. En allant de l'analyse actuarielle à la modélisation macroéconomique, ce projet vise alors à développer des outils et des stratégies pour améliorer la gestion des retraites dans la région de la CIPRES, assurant ainsi un avenir plus sûr pour les retraités.

Pour ce faire, nous réaliserons un audit actuariel d'un régime de retraite en répartition à prestations définies géré par une caisse de retraite dans la zone CIPRES. Cet audit révélera plusieurs faiblesses structurelles. Nous poserons les hypothèses nécessaires, effectuerons les simulations et projections, et expliquerons les raisons de la crise. Des réformes seront proposées pour assurer l'avenir du régime, notamment l'ajout d'un régime complémentaire obligatoire en capitalisation.

En outre, compte tenu du développement progressif des pays de la zone CIPRES, nous estimons que le Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est un outil essentiel pour le pilotage technique des risques liés aux activités des États et de l'industrie des banques et des assurances. Nous nous concentrerons sur la conception d'un GSE spécifique pour cette zone. Dans ce rapport, nous spécifierons d'abord les modèles mathématiques adaptés au contexte de la zone CIPRES, couvrant un nombre important de variables économiques et financières. Ensuite, nous présenterons des méthodes de calibrage adaptées, en tenant compte de l'absence ou de la présence de données, en utilisant des avis d'experts ou des approches statistiques.

Ce rapport met également en lumière l'application du GSE dans le développement des pays de la zone CIPRES à travers la modélisation de la courbe des taux. Nous développerons un modèle de projection des scénarios économiques, puis nous illustrerons l'application du GSE aux régimes de retraite en montrant son impact sur les provisions d'un échantillon de

salariés.

En conclusion, ce rapport offre une vision claire et approfondie des défis et des solutions possibles pour les systèmes de retraite dans la zone CIPRES. En combinant des analyses théoriques, actuarielles et économiques, nous proposons des réformes adaptées et durables pour garantir la pérennité des systèmes de retraite et améliorer la sécurité financière des retraités dans cette région.

**Mots clés :** Audit actuariel, CIPRES, Afrique francophone, Pilotage technique, Courbe des taux, Générateur de scénarios économiques, Régime de retraite, Modélisation macroéconomique.

# Abstract

Pension systems are undoubtedly facing major challenges due to economic constraints, global demographic fluctuations and budget restrictions. These factors raise crucial questions about the viability and sustainability of these systems. In French-speaking sub-Saharan Africa, and particularly in the CIPRES zone, technical risk management is often neglected. Pension institutions, banks and insurance companies often operate without fully integrating risk management.

The main aim of this project is to provide an accurate assessment of current pension systems and to propose robust economic projections for the future. Ranging from actuarial analysis to macroeconomic modeling, this project then aims to develop tools and strategies to improve pension management in the CIPRES region, thus ensuring a more secure future for retirees.

To this end, we will carry out an actuarial audit of a defined-benefit pay-as-you-go pension scheme managed by a pension fund in the CIPRES area. This audit will reveal several structural weaknesses. We will make the necessary assumptions, carry out simulations and projections, and explain the reasons for the crisis. Reforms will be proposed to ensure the future of the scheme, including the addition of a mandatory supplementary funded scheme.

In addition, given the progressive development of the countries in the CIPRES zone, we believe that the Economic Scenario Generator (ESG) is an essential tool for the technical management of risks linked to the activities of governments and the banking and insurance industry. We will focus on the design of a specific ESG for this area. In this report, we will first specify the mathematical models adapted to the context of the CIPRES zone, covering a large number of economic and financial variables. Then, we present adapted calibration methods, considering the absence or presence of data, using expert opinions or statistical approaches.

This report also highlights the application of GSE in the development of CIPRES zone countries, through the modeling of the yield curve. We develop a model for projecting economic scenarios, then illustrate the application of GSE to pension plans by showing its impact on provisions for a sample of employees.

In conclusion, this report offers a clear and in-depth view of the challenges and possible solutions for pension systems in the CIPRES zone. By combining theoretical, actuarial

and economic analyses, we propose appropriate and sustainable reforms to guarantee the sustainability of pension systems and improve the financial security of retirees in this region.

**Key Words** : Actuarial audit, CIPRES, Francophone Africa, Technical management, Yield curve, Economic Scenario Generator (ESG), Pension scheme, Macroeconomic modeling.

# Table des matières

Dédicace	1
Remerciement	2
Résumé	4
Abstract	6
Table des matières	13
Table des Figures	16
Liste des Tableaux	17
Liste des abréviations	18
Introduction générale	19
Table des matières	21
0.1 CONTEXTE ORGANISATIONNEL : PRÉSENTATION DU GROUPE FI- NACTU . . . . .	22
0.2 LOGICIELS UTILISÉS : . . . . .	23
0.2.1 PRÉSENTATION DU LOGICIEL ATLAS <sup>©</sup> : . . . . .	23
<b>PARTIE 1 : CADRE THÉORIQUE DE L'ÉTUDE</b>	<b>25</b>
<b>1 PRÉSENTATION DES RÉGIMES DE RETRAITE</b>	<b>26</b>
1.1 THÉORIE DES TROIS PILIERS . . . . .	26
1.2 PRESTATIONS D'UN RÉGIME DE RETRAITE . . . . .	27
1.2.1 LES RÉGIMES À PRESTATIONS DÉFINIES . . . . .	27
1.2.2 LES RÉGIMES À CONTRIBUTIONS DÉFINIES . . . . .	28
1.2.3 LES RÉGIMES DE TYPE CASH BALANCE . . . . .	28
1.3 MÉTHODES DE FINANCEMENT . . . . .	28
1.3.1 PRÉSENTATION DES MÉTHODES PRINCIPALES DE FINANCE- MENT . . . . .	28
1.3.2 CARACTÉRISTIQUES DES MÉTHODES DE FINANCEMENT . . .	29
<b>2 ÉLÉMENTS DÉMOGRAPHIQUES</b>	<b>31</b>

2.1	FONCTION DE POPULATION . . . . .	31
2.2	RATIOS DÉMOGRAPHIQUES . . . . .	32
2.2.1	QUOTIENT DE VIEILLESSE . . . . .	32
2.2.2	TAUX DE SUPPORT POTENTIEL . . . . .	32
2.2.3	LE COEFFICIENT D'INTENSITÉ DE VIEILLISSEMENT . . . . .	32
2.2.4	LE QUOTIENT DE JEUNESSE . . . . .	32
2.2.5	LE COEFFICIENT DE DÉPENDANCE TOTAL . . . . .	32
2.3	PROJECTIONS DÉMOGRAPHIQUES . . . . .	33
2.3.1	SCHÉMATISATION DE LA PROJECTION . . . . .	33
2.3.2	ÉQUATION DU BILAN DÉMOGRAPHIQUE . . . . .	33
2.3.3	MÉTHODOLOGIE DES PROJECTIONS DÉMOGRAPHIQUES . . . . .	33
<b>3</b>	<b>SYSTÈMES GÉNÉRAUX DE FINANCEMENT</b>	<b>35</b>
3.1	ÉQUILIBRE ACTUARIEL D'UN RÉGIME DE RETRAITE . . . . .	35
3.2	PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE FINANCEMENT	36
3.2.1	RÉPARTITION PURE . . . . .	36
3.2.2	INITIAL FUNDING . . . . .	37
3.2.3	PRIME MOYENNE GÉNÉRALE . . . . .	37
3.3	ANALYSE DES TAUX DE COTISATION SELON DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE FINANCEMENT . . . . .	37
3.3.1	RÉPARTITION PURE . . . . .	37
3.3.2	LA RÉPARTITION DES CAPITAUX DE COUVERTURE . . . . .	38
3.3.3	LA CAPITALISATION INDIVIDUELLE . . . . .	38
3.4	STRATIFICATION DES RÉSERVES . . . . .	39
<b>4</b>	<b>MODÉLISATION DE LA COURBE DES TAUX ZÉRO-COUPON</b>	<b>40</b>
4.1	NOTATIONS . . . . .	40
4.2	DÉFINITIONS . . . . .	40
4.3	PRÉSENTATION DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT . . . . .	42
4.3.1	LE MODÈLE DE NELSON SIEGEL (1987) . . . . .	42
4.3.2	LE MODÈLE DE LARS SVENSSON (1994) . . . . .	43
4.3.3	LE MODÈLE DE VASICEK FONG (1982) . . . . .	44
<b>5</b>	<b>CALIBRAGE DES MODÈLE DE TAUX</b>	<b>45</b>
5.1	PRÉSENTATION DES MODÈLES . . . . .	45
5.1.1	LE MODÈLE DE NELSON SIEGEL . . . . .	45
5.1.2	LE MODÈLE DE LARS SVENSSON . . . . .	47
5.1.3	LE MODÈLE DE VASICEK-FONG . . . . .	48
5.2	QUALITÉ D'AJUSTEMENT . . . . .	48
<b>PARTIE 2 : RÉGIME PAR RÉPARTITION : ACTUALISATION DE L'AUDIT ACTUARIEL DU RÉGIME DES PENSIONS GÉRÉ PAR UNE CAISSE DE RETRAITE DANS LA ZONE CIPRES</b>		<b>50</b>
<b>Introduction</b>		<b>51</b>

<b>1</b>	<b>FONCTIONNEMENT DÉTAILLÉ DU RÉGIME GÉRÉ PAR LA CAISSE</b>	<b>52</b>
1.1	LES RESSOURCES DE LA CAISSE . . . . .	52
1.2	SEGMENTATION DE LA POPULATION . . . . .	52
1.3	LES PRESTATIONS SERVIES . . . . .	53
1.4	ANALYSE DE LA SITUATION COMPTABLE RECENTE DE LA CAISSE	54
<b>2</b>	<b>CADRAGE DES SIMULATIONS ACTUARIELLES</b>	<b>58</b>
2.1	ÉTAPES D'UNE ÉTUDE ACTUARIELLE . . . . .	58
2.1.1	ÉTAPE N° 1 : COLLECTE DES DONNÉES . . . . .	58
2.1.2	ÉTAPE N° 2 : RETRAITEMENT DES DONNÉES . . . . .	58
2.1.3	ÉTAPE N° 3 : HYPOTHÈSES ET OPTIONS DE MODÉLISATION	59
2.1.4	ÉTAPE N° 4 : LANCEMENT D'ATLAS© . . . . .	59
2.2	PRÉSENTATION DES HYPOTHÈSES . . . . .	59
2.2.1	HYPOTHÈSES AU PLAN NATIONAL : ÉCONOMIQUES, DÉMO- GRAPHIQUES ET SOCIALES . . . . .	59
2.2.1.1	LE TAUX D'INFLATION . . . . .	60
2.2.1.2	LE TAUX D'INFLATION . . . . .	60
2.2.1.2	TAUX DE CROISSANCE DU PIB . . . . .	61
2.2.1.3	TAUX DE CROISSANCE DU PIB . . . . .	61
2.2.1.3	HYPOTHESES DEMOGRAPHIQUES . . . . .	62
2.2.2	HYPOTHESES DEMOGRAPHIQUES . . . . .	62
2.2.2	HYPOTHÈSES SUR LA CROISSANCE DES EFFECTIFS ET DES REVENUS DES COTISANTS . . . . .	65
2.2.2.1	ÉVOLUTION DES EFFECTIFS DES COTISANTS . . . . .	65
2.2.2.2	ÉVOLUTION DES EFFECTIFS DES COTISANTS . . . . .	65
2.2.2.2	EVOLUTION DE LA PRODUCTIVITE ET DES SALAIRES	67
2.2.3	EVOLUTION DE LA PRODUCTIVITE ET DES SALAIRES . . . . .	67
2.2.3	RÉSUMÉ DES HYPOTHÈSES DE CADRAGE ÉCONOMIQUE ET DÉMOGRAPHIQUE . . . . .	68
2.2.4	DONNÉES ET HYPOTHÈSES SPÉCIFIQUES À LA CAISSE . . . . .	68
2.2.4.1	POPULATION DE COTISANTS . . . . .	68
2.2.4.2	POPULATION DE COTISANTS . . . . .	68
2.2.4.2	SALAIRES ET PROFILS DE CARRIERE . . . . .	71
2.2.4.3	SALAIRES ET PROFILS DE CARRIERE . . . . .	71
2.2.4.3	POPULATION DE BENEFICIAIRES . . . . .	73
2.2.4.4	POPULATION DE BENEFICIAIRES . . . . .	73
2.2.4.4	STOCK INITIAL DE RETRAITES . . . . .	74
2.2.5	STOCK INITIAL DE RETRAITES . . . . .	74
2.2.5	LES PROBABILITÉS DE DÉPART EN RETRAITE . . . . .	76
2.2.6	STOCK DE PENSIONS SERVIES POUR L'ANNÉE DE BASE DE PROJECTIONS . . . . .	77
2.2.7	STOCK DE PENSIONS SERVIES POUR L'ANNÉE DE BASE DE PROJECTIONS . . . . .	77
2.2.7	HYPOTHÈSES SUR LA GESTION ADMINISTRATIVE ET FI- NANCIÈRE . . . . .	79
2.2.7	TAUX DE RECOUVREMENT DES PRESTATIONS . . . . .	79

2.2.7.1	FRAIS DE GESTION, AUTRES CHARGES ET PRODUITS NON TECHNIQUES . . . . .	79
	FRAIS DE GESTION, AUTRES CHARGES ET PRODUITS NON TECH- NIQUES . . . . .	79
2.2.7.2	TAUX DE RENDEMENT DES PLACEMENTS . . . . .	80
	TAUX DE RENDEMENT DES PLACEMENTS . . . . .	80
<b>3</b>	<b>SYNTHÈSE DES SIMULATIONS ET RAISONS DE LA CRISE</b>	<b>81</b>
3.1	FORTE CROISSANCE DES PRESTATIONS . . . . .	81
3.1.1	L'ÉVOLUTION DE LA POPULATION DES ASSURÉS . . . . .	81
3.1.2	IMPACT DE LA CONFORMITÉ À LA RÉGLEMENTATION SUR LES RÉSULTATS DE LA CAISSE . . . . .	82
	DU SOLDE TECHNIQUE AU SOLDE GLOBAL . . . . .	83
3.1.3	TAUX DE COTISATION POUR ASSURER L'ÉQUILIBRE TECH- NIQUE . . . . .	85
3.1.4	APPLICATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL DE PENSION UTILISÉE EN PRATIQUE . . . . .	86
3.2	LES RAISONS DE LA CRISE . . . . .	90
3.2.1	IMPACT STRUCTUREL DES DYNAMIQUES DÉMOGRAPHIQUES SUR L'ÉQUILIBRE DE LA BRANCHE DES PENSIONS . . . . .	90
	PREMIER EFFET : RISQUE DE LONGÉVITÉ . . . . .	90
	SECOND EFFET : HAUSSE DU NOMBRE DE DEPARTS A LA RETRAITE . . . . .	91
	TROISIÈME EFFET : RÉDUCTION DU RATIO COTISANTS-RETRAITÉS	92
3.2.2	INCOHÉRENCES DANS LA PARAMÉTRISATION DU RÉGIME DE LA CAISSE . . . . .	93
3.2.2.1	LE TAUX DE RENDEMENT INTERNE . . . . .	93
	LE TAUX DE RENDEMENT INTERNE . . . . .	93
3.2.2.2	LE DÉLAI DE RÉCUPÉRATION . . . . .	95
3.2.2.3	LE TAUX DE RÉCUPÉRATION . . . . .	96
<b>4</b>	<b>LES RÉFORMES NÉCESSAIRES POUR ASSURER L'AVENIR DU RÉGIME DE LA CAISSE</b>	<b>97</b>
4.1	RÉFORMES PARAMÉTRIQUES SUGGÉRÉES . . . . .	97
4.1.1	RÉDUCTION DU TAUX D'ANNUITÉ . . . . .	97
4.1.2	ÉLARGISSEMENT DE L'ASSIETTE DE COTISATION À LA SU- JÉTION . . . . .	98
4.1.3	AUGMENTATION DU NOMBRE D'ANNÉES PRISES EN COMPTE POUR LE CALCUL DE LA PENSION . . . . .	98
4.1.4	AUTRES INDEX POSSIBLES POUR LA REVALORISATION DES PENSIONS . . . . .	98
4.2	LA BONNE RÉFORME : COMBINER TOUS LES PARAMÈTRES DANS DES BOUQUETS . . . . .	99
4.2.1	LES BOUQUETS DE RÉFORMES RECOMMANDÉS, SELON LEUR FAISABILITÉ ET LEUR EFFICACITÉ . . . . .	99

4.2.2	ANALYSE DES 2 BOUQUETS DE RÉFORME PROPOSÉS : . . . . .	101
4.3	POUR ALLER AU-DELA DES REFORMES PARAMÉTRIQUES . . . . .	103
4.3.1	L'INTRODUCTION D'UN RÉGIME DE RETRAITE COMPLÉ- MENTAIRE OBLIGATOIRE EN CAPITALISATION . . . . .	103
4.3.2	CONSTRUIRE DE VÉRITABLES BRANCHES PRÉSTATIONS FA- MILIALES ET ACCIDENTS DU TRAVAIL . . . . .	103
	Conclusion . . . . .	104

### **PARTIE 3 : CONCEPTION D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCO- NOMIQUES APPLIQUÉ AU DÉVELOPPEMENT DE LA ZONE CIPRES**

#### **Introduction** **106**

#### **1 MODÉLISATION DE LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE EN AFRIQUE SUBSAHARIENNE FRANCOPHONE** **107**

	Introduction . . . . .	107
1.1	MODÉLISATION DE LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'IN- TÉRÊT . . . . .	108
1.1.1	PRÉSENTATION DES DONNÉES . . . . .	108
1.1.2	MÉTHODOLOGIE DE CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX POUR LA ZONE CIPRES . . . . .	108
1.1.3	RÉSULTATS DES MODÈLES . . . . .	109
1.1.3.1	COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE L'UEMOA . . . . .	109
1.1.3.2	COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE LA CEMAC . . . . .	111
1.1.3.3	CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE LA CIPRES . . . . .	113
1.2	ANALYSE DE LA SENSIBILITÉ . . . . .	114
1.2.1	SENSIBILITÉ DE LA COURBE DES TAUX AUX HYPOTHÈSES . . . . .	114
	Conclusion . . . . .	116

#### **2 DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉ- NARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES** **117**

2.1	CONCEPTION D'UN GSE POUR LA ZONE CIPRES . . . . .	118
2.1.1	VUE D'ENSEMBLE DU GSE . . . . .	118
2.1.2	SPÉCIFICATION ET CALIBRAGE DES MODÈLES DU GSE . . . . .	119
2.1.2.1	INDICE DES PRIX À LA CONSOMMATION (IPC) . . . . .	119
	Modélisation choisie . . . . .	119
	Discrétisation du processus . . . . .	120
2.1.2.2	TAUX D'INTÉRÊT NOMINAUX . . . . .	121
2.1.2.3	TAUX D'INTÉRÊT RÉELS . . . . .	122
2.1.2.4	ÉCART DE TAUX . . . . .	124
2.1.2.5	RENDEMENT DES ACTIONS . . . . .	125
2.1.2.6	RENDEMENT DE L'IMMOBILIER . . . . .	127
2.1.2.7	RENDEMENT DU MONÉTAIRE . . . . .	128
2.1.2.8	RENDEMENT DES OBLIGATIONS DE SOCIÉTÉ . . . . .	128

2.2	ANALYSE DES TRAJECTOIRES DES VARIABLES . . . . .	129
<b>3</b>	<b>APPLICATION DU GSE AUX RÉGIMES DE RETRAITE</b>	<b>134</b>
3.1	VALEUR ÉCONOMIQUE DES PROVISIONS . . . . .	134
3.2	APPLICATION DU GSE AUX RÉGIMES DE RETRAITE . . . . .	135
	Conclusion . . . . .	136
	<b>Conclusion générale</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>138</b>

# Table des figures

1	Logo de Finactu . . . . .	23
2	Schéma de synthèse de la méthodologie d'implémentation du logiciel ATLAS©. . . . .	24
2.1	Schématisation du processus de projection . . . . .	33
2.2	Exemple de la méthode démographique en un an instant t différentiel de la naissance et de l'âge 1 an plus tard . . . . .	34
1.1	Une hausse de 75% des pensions servies par la caisse sur la période 2015-2022 (milliards FCFA) . . . . .	55
1.2	Les cotisations encaissées par la caisse ont connu une augmentation de +50% sur la période 2015-2022 (milliards FCFA) . . . . .	55
1.3	Le déficit technique de la branche des pensions s'est fortement creusé ces dernière années (milliards FCFA) . . . . .	56
1.4	Sans subvention, le déficit global de la Caisse atteint 4 milliards FCFA en 2021 (milliards FCFA) . . . . .	57
2.1	Taux d'inflation annuel entre 1980 et 2022 . . . . .	60
2.2	Projection de la population du pays en milliers (2022-2072) . . . . .	63
2.3	Taux de croissance démographique (2022-2072) . . . . .	63
2.4	Mortalité par âge en 2020 (par 1.000 individus) . . . . .	65
2.5	Mortalité par âge en 2065 (par 1.000 individus) . . . . .	65
2.6	Répartition des effectifs de cotisants par groupe (2022) . . . . .	70
2.7	Hypothèse de distribution par âge et sexe des nouveaux cotisants (G1 - civils) . . . . .	71
2.8	Hypothèse de distribution par âge et sexe des nouveaux cotisants G4 - militaires . . . . .	71
2.9	Profil salarial par âge et par sexe (G1 – civils) . . . . .	72
2.10	Profil salarial par âge et par sexe (G4 - militaires) . . . . .	73
2.11	Répartition des effectifs de retraités par groupe (2022) . . . . .	74
2.12	Pyramide des âges des retraités du G1 (civils) de la caisse (2022) . . . . .	75
2.13	Pyramide des âges des retraités du G4 (militaires) de la caisse (2022) . . . . .	75
2.14	Hypothèse de probabilités de départ en retraite par âge et sexe (G1 - civils) . . . . .	76
2.15	Hypothèse de probabilités de départ en retraite par âge (G4 - militaires) . . . . .	77
2.16	Distribution des pensions de retraite moyennes par âge et par sexe (G1 - civils) . . . . .	78
2.17	Distribution des pensions de retraite moyennes par âge (Hommes G4 - militaires) . . . . .	78
3.1	Croissance des Retraités et des Cotisants sur l'Horizon de Simulation . . . . .	82

3.2	Une dynamique importante des prestations par rapport aux cotisations (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	83
3.3	Un solde technique déficitaire sur tout l’horizon de projection (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	83
3.4	Un solde global déficitaire sur les 50 prochaines années (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	84
3.5	Un solde global déficitaire atteignant une part importante du PIB . . . . .	85
3.6	Le taux de cotisation d’équilibre annuel atteint jusqu’à 62% . . . . .	86
3.7	Montant des prestations plus faible que dans le statu quo réglementaire, mais important par rapport aux cotisations (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	87
3.8	Présentation du rapport « prestations/cotisations » . . . . .	87
3.9	Présentation du déficit technique (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	88
3.10	Le solde global de la caisse représentera un maximum de 0,3% du PIB du pays en 2050 . . . . .	88
3.11	Présentation du ratio « solde global/cotisations » en 2072 . . . . .	89
3.12	Le déficit global cumulé augmentera fortement sur les 50 prochaines années (milliards FCFA constants de 2022) . . . . .	89
3.13	Les taux de cotisation d’équilibre sont largement supérieurs au taux de cotisation actuel . . . . .	90
3.14	Présentation de l’espérance de vie à la retraite . . . . .	91
3.15	Pyramide des Âges des Immatriculés et Augmentation Prévues du Flux de Nouveaux Retraités (2021) . . . . .	92
3.16	Le ratio cotisants-retraités en diminution progressive sur les prochaines années . . . . .	92
3.17	Taux de rendement interne particulièrement élevé par rapport à d’autres caisses dans l’Afrique francophone . . . . .	94
3.18	Un TRI élevé par rapport au niveau de PIB à la caisse . . . . .	94
3.19	Un délai de récupération parmi les plus faibles . . . . .	95
3.20	Présentation du taux de récupération dans plusieurs caisses . . . . .	96
4.1	Une efficacité et une faisabilité plus ou moins importante de la réforme selon le paramètre considéré . . . . .	100
4.2	Présentations du déficit pour les différents bouquets de réformes sur tout l’horizon de simulation (milliards FCFA constants) . . . . .	102
1.1	Évolution de la courbe des taux de la zone UEMOA pour les deux modèles . . . . .	111
1.2	Évolution de la courbe des taux de la zone CEMAC pour les deux modèles . . . . .	112
1.3	Représentation des courbes des taux sans risque pour l’UEMOA, la CEMAC et la CIPRES . . . . .	113
1.4	Sensibilité de la courbe des taux UEMOA au changement des taux long et court dans le modèle de Svensson . . . . .	115
1.5	Sensibilité de la courbe des taux UEMOA au changement des bornes des paramètres dans le modèle de Svensson . . . . .	115
2.1	Structure du GSE proposé adapté à la CIPRES . . . . .	118
2.2	Évolution probable de l’inflation . . . . .	130

2.3	Évolution des taux d'intérêt nominaux . . . . .	130
2.4	Évolution des taux d'intérêt réels . . . . .	131
2.5	Allure de la courbe des écarts de taux issue de la méthode indirecte . . . . .	131
2.6	Comparaison des écarts de taux issus des deux méthodes . . . . .	132
2.7	Comparaison des écarts de taux issus des deux méthodes . . . . .	132
2.8	Évolution probable du rendement de l'immobilier . . . . .	133
2.9	Évolution des indices BRVM 10 et composite dans le modèle de Black Scholes	133

# Liste des tableaux

2.1	Périodisation du taux d'inflation . . . . .	60
2.2	Taux de croissance annuel moyen par période . . . . .	61
2.3	Taux de croissance moyen sur les différentes périodes . . . . .	62
2.4	Projections de l'espérance de vie à la naissance au pays . . . . .	64
2.5	La proportion des cotisants par rapport à la population nationale est quasi-stable sur les 5 dernières années de l'étude pour les 4 groupes . . . . .	66
2.6	Résumé des hypothèses de cadrage économique et démographique . . . . .	68
2.7	Effectifs des bénéficiaires de la caisse en 2022 . . . . .	74
2.8	Taux de recouvrement entre 2017 et 2020 (montants en milliards FCFA) . . . . .	79
2.9	Proportion des frais de gestion sur les cotisations . . . . .	80
2.10	Proportion des autres charges non techniques sur les prestations de vieillesse . . . . .	80
2.11	Proportion des autres produits non techniques sur les cotisations . . . . .	80
2.12	Taux de rendement des placements sur les 3 dernières années (montants en millions) . . . . .	80
4.1	Récapitulatif des bouquets de réforme paramétrique . . . . .	101
1.1	Paramètres des modèles de Nelson-Siegel et Svensson . . . . .	110
1.2	Statistiques des modèles de Nelson-Siegel et Svensson . . . . .	110
1.3	: Estimation des paramètres des modèles pour la même date de cotation (CEMAC) . . . . .	112
1.4	: Indicateurs de mesure de la qualité d'ajustement . . . . .	112
1.5	Valeurs des taux zéro coupon sur 15 ans pour les 3 zones . . . . .	113
3.1	Échantillon aléatoire des salariés . . . . .	135
3.2	Présentation des hypothèses démographiques et financières . . . . .	135
3.3	Estimation de la charge financière totale et des provisions pour retraite . . . . .	136

# Liste des abréviations

- **CIPRES** : Conférence interafricaine de la prévoyance sociale
- **UEMOA** : Union économique et monétaire ouest-africaine
- **CEMAC** : Communauté économique et monétaire de l’Afrique centrale
- **BRVM** : Bourse Régionale des Valeurs Mobilières
- **CIMA** : Conférence interafricaine des Marchés d’assurances
- **DAT** : Dépôts à Terme
- **YTM** : Yield to Maturity (rendement à l’échéance)
- **UFR** : Ultimate Forward Rate
- **L-BFGS-B** : Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno with Box constraints
- **LLP** : Last Liquid Point
- **GSE** : Générateur de Scénarios Économiques ; Economic Scenario Generator
- **BCEAO** : Banque Centrale des États de l’Afrique de l’Ouest
- **IPC** : Indice des prix à la consommation
- **OHADA** : Organisation pour l’harmonisation en Afrique du Droit des Affaires
- **SIG** : Société d’Intermédiation et de Gestion
- **SIB** : Société Ivoirienne de Banque
- **DB** : Defined Benefit
- **DC** : Defined contribution

# Introduction générale

Depuis belle lurette, et particulièrement au cours des dernières décennies, la protection sociale et la gestion des retraites ont gagné une importance cruciale dans le développement économique et social des nations. Cependant, en Afrique francophone, ces secteurs sont confrontés à de nombreux défis et sont en pleine évolution. La CIPRES, regroupant 18 pays africains, joue un rôle essentiel en cherchant à renforcer les systèmes de prévoyance sociale et à harmoniser les politiques de sécurité sociale, ses pays membres sont : Bénin, Burkina Faso, Cameroun, République centrafricaine, République démocratique du Congo, Comores, Congo, Côte d'Ivoire, Gabon, Guinée, Guinée-Bissau, Guinée équatoriale, Madagascar, Mali, Niger, Sénégal, Tchad et Togo. Ces nations ont multiplié les efforts pour améliorer la gestion de la sécurité sociale.

La sécurité sociale, véritable filet de protection, garantit à chaque individu une sécurité financière face aux aléas de la vie. Elle représente une promesse collective de solidarité, transformant les contributions individuelles en un bouclier commun contre les incertitudes de demain, assurant ainsi une société plus équitable et résiliente, notamment en matière de retraite.

Cependant, les systèmes de retraite de cette région sont soumis à de nombreuses contraintes. Les défis économiques, les fluctuations démographiques et les contraintes budgétaires soulèvent des questions cruciales sur la viabilité et la pérennité de ces systèmes. La zone CIPRES doit notamment affronter une population vieillissante, des taux de cotisation souvent inadéquats, et une gestion des fonds de retraite nécessitant des réformes structurelles profondes.

Ce projet vise à fournir une évaluation précise des systèmes de retraite actuels et à proposer des projections économiques robustes pour l'avenir. En allant de l'analyse actuarielle à la modélisation macroéconomique, nous cherchons à développer des outils et des stratégies pour améliorer la gestion des retraites dans cette région, assurant ainsi un avenir plus sûr pour les retraités.

Pour atteindre cet objectif, ce rapport est structuré comme suit :

Dans la première partie, nous détaillons le cadre théorique général de l'étude, en expliquant les différents régimes de retraite, les types de prestations et les méthodes de financement. Nous présentons également les éléments démographiques nécessaires et une analyse des systèmes de financement des régimes de retraite. Enfin, nous introduisons les méthodes

de modélisation et leur calibrage nécessaires pour cette étude.

Nous consacrons la deuxième partie à l’audit actuariel du régime des pensions géré par une caisse de retraite dans la zone CIPRES, caractérisé par un régime de retraite en répartition à prestations définies (DB). Cette caisse montre un déficit nécessitant des réformes. Nous analyserons les causes internes du déficit, telles que la mauvaise gouvernance, l’augmentation du nombre de retraités, la diminution du nombre d’actifs, ainsi que les défis démographiques et économiques. Nous détaillerons le fonctionnement du régime géré par la caisse, cadrerons les simulations actuarielles et synthétiserons les raisons de la crise actuelle. Ensuite, nous proposerons des réformes pour assurer l’avenir de ce régime.

Dans la troisième partie, nous concevons des outils techniques capables d’appréhender la dynamique des variables économiques et financières (GSE) pour la zone CIPRES à partir des informations disponibles, car le manque de données dans la zone étudiée ne permet pas majoritairement d’utiliser certains modèles (comme Hull et White à deux facteurs pour modéliser les taux d’intérêt réels de court terme). Cette section complètera notre objectif d’amélioration du contexte de la retraite en zone CIPRES. Si dans la deuxième partie nous avons proposé des solutions pour assurer l’équilibre du régime, notamment l’ajout d’un second régime complémentaire obligatoire en capitalisation, il est essentiel d’étudier le cadre économique de la zone, car ce type de régimes est directement soumis aux risques économiques et financiers. Pour ce faire, nous commencerons par la modélisation de la courbe des taux sans risque en Afrique subsaharienne francophone, avant de développer un modèle de projection des scénarios économiques. Nous analyserons les hypothèses utilisées, les méthodologies et les modèles de construction et d’analyse, ainsi que les résultats obtenus. Enfin, nous illustrerons l’application du GSE aux régimes de retraite en montrant son effet sur les provisions d’un échantillon aléatoire de salariés.

Ainsi, ce rapport vise à offrir une compréhension approfondie des défis et des solutions possibles pour les systèmes de retraite en zone CIPRES, en combinant des analyses théoriques, actuarielles et économiques pour proposer des réformes adaptées et durables.

# Partie préliminaire : Contextualisation et cadrage du stage

## 0.1 CONTEXTE ORGANISATIONNEL : PRÉSENTATION DU GROUPE FINACTU

Le stage a été réalisé au sein du le Groupe FINACTU, spécifiquement dans l'équipe protection sociale. Ce groupe a été fondé en **1999** par **Denis CHEMILLIER-GENDREAU**, spécialisé dans le conseil, l'audit et l'appui technique, principalement destinés aux pays émergents. Depuis sa création, le groupe a réalisé plus de 300 missions auprès de plus de 200 institutions publiques et privées sur le continent africain. Avec des filiales implantées à Dubaï, Genève et Casablanca, le groupe a développé une expertise pointue dans les domaines de l'actuariat et de la finance. Il est particulièrement reconnu pour son expertise en matière de protection sociale, qui constitue une part significative de ses activités. En plus de ce domaine, il intervient également dans plusieurs autres secteurs, notamment la banque, les garanties, le private equity, le financement de l'habitat, l'assurance et la réassurance. Cette spécialisation fait de FINACTU un partenaire incontournable pour les institutions souhaitant renforcer leurs capacités dans ces domaines essentiels.

Avec plus de vingt ans d'expérience, le Groupe FINACTU a gagné la confiance de plus de 100 clients répartis dans 30 pays du continent. Cette vaste clientèle témoigne de son expertise approfondie dans le domaine de la protection sociale dans les pays en développement, couvrant des aspects variés tels que la retraite, l'assurance maladie et les fonds de pension. Le siège administratif du groupe est situé à Genève, tandis que ses équipes opérationnelles sont principalement basées à Casablanca. En outre, des équipes permanentes sont présentes en Tunisie, en Côte d'Ivoire, au Togo et au Gabon. Le groupe s'appuie également sur un réseau dynamique de plusieurs dizaines de consultants issus de 10 nationalités différentes, couvrant toutes les expertises nécessaires à la réalisation de ses missions.

De plus, FINACTU a réussi à établir des relations de confiance durables avec de grands bailleurs de fonds de l'assistance technique tels que la Banque Mondiale, la Banque Africaine de Développement, l'Union Européenne, et l'UNIDO. Ces partenariats représentent chaque année entre 20% et 30% de son chiffre d'affaires, qui dépasse les 6 millions d'euros, soulignant ainsi l'importance et l'impact de ses activités à l'échelle internationale.

### Étapes de création du groupe :

- 1999 : Création d'ACTUARIA International SAS
- 2012 : Création de FINACTU à Genève (Suisse)
- 2013 : Création de FINACTU Maroc à Casablanca (Maroc)
- 2014 : Création de FINACTU à l'Île Maurice
- 2015 : Obtention du statut de Casablanca Finance City
- 2018 : Création de FINACTU à Dubaï (DMCC), holding du Groupe

Depuis deux décennies, FINACTU offre son conseil à la plupart des pays et institutions du continent africain dans toutes les branches de la protection sociale, y compris les pensions de retraite, l'assurance maladie, les accidents du travail, les prestations familiales, et les

systèmes d'assistance sociale. Cette expertise globale confirme le rôle crucial de FINACTU dans le renforcement des systèmes de protection sociale en Afrique.

La direction du groupe est assurée par *Denis CHEMILLIER-GENDREAU*, avec *Géraldine MERMOUX* en tant que Directrice Générale associée et *Luc MORIO*, Directeur associé, garantissant ainsi une gouvernance experte et dédiée à l'essor de solutions innovantes en protection sociale.



FIGURE 1 – Logo de Finactu

## 0.2 LOGICIELS UTILISÉS :

Dans ce rapport, nous allons avoir utilisé principalement 2 logiciels, dans la première partie, nous avons réalisé des simulations actuarielles grâce au logiciel interne de FINACTU, ATLAS<sup>©</sup> que nous présentons ci-dessous et le logiciel R pour l'accomplissement de la majorité des tâches.

### 0.2.1 PRÉSENTATION DU LOGICIEL ATLAS<sup>©</sup> :

Pour réaliser toutes les simulations actuarielles, FINACTU s'appuie sur le logiciel ATLAS<sup>©</sup>, développé en interne depuis 2004. Ce logiciel a la particularité d'avoir été conçu, développé et enrichi constamment depuis 17 ans dans des missions aux périmètres variés : d'une simple étude actuarielle d'un régime, jusqu'au plan stratégique de réforme du système de protection sociale au plan national.

Ce positionnement particulier de FINACTU, au service des États et des gouvernements, détermine les caractéristiques et atouts d'ATLAS<sup>©</sup> :

- Un logiciel complet de simulations actuarielles, couvrant tous les régimes de retraite et toutes les autres branches : prestations familiales, risques professionnels, etc.
- Un outil à la structure simple et accessible : une application web avec la possibilité d'import des inputs et d'export des outputs ;
- Un outil adapté aux contraintes concernant la collecte difficile des données : un juste équilibre entre finesse des hypothèses et technicité actuarielle d'une part, et d'autre

- part la possibilité de modéliser certains aspects selon une seconde option, avec une simplicité des formules sur les variables où la qualité des données serait insuffisante ;
- Un outil fournissant une synthèse des indicateurs actuariels les plus parlants pour identifier les réformes paramétriques et/ou systémiques qui se dessineront selon les caractéristiques du régime et de la population assujettie.

Pour une meilleure compréhension globale, nous présentons ci-après un schéma de synthèse de la méthodologie d'implémentation du logiciel ATLAS<sup>©</sup> :

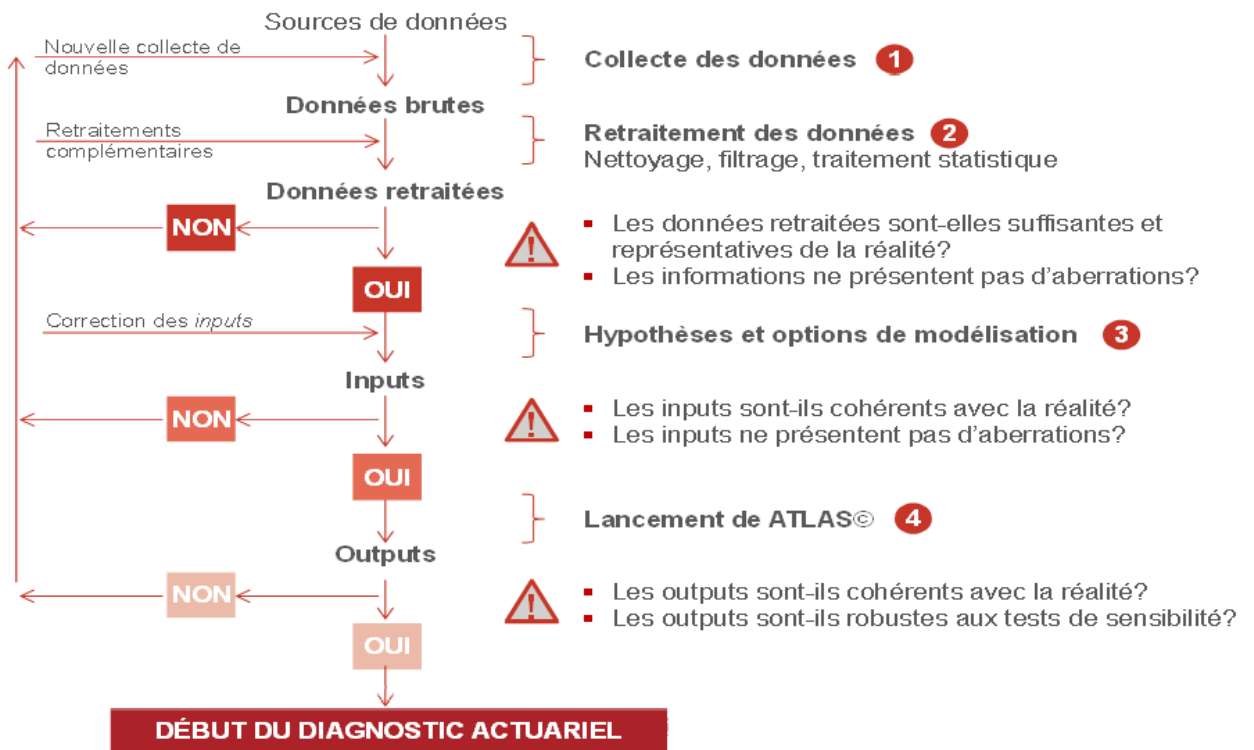


FIGURE 2 – Schéma de synthèse de la méthodologie d'implémentation du logiciel ATLAS<sup>©</sup>.

ATLAS<sup>©</sup> est organisé en modules simples, distincts les uns des autres, que l'utilisateur alimente après retraitement des données extraites du système d'information de l'institution.

Les populations couvertes sont modélisées par leurs données moyennes par cohorte d'âge et le logiciel permet de suivre ces cohortes comme des individus moyens au fur et à mesure de leur vieillissement et de l'acquisition de leurs droits, puis de leur liquidation et mise en service.

# **PARTIE 1 : CADRE THÉORIQUE DE L'ÉTUDE**

# Chapitre 1

## PRÉSENTATION DES RÉGIMES DE RETRAITE

### 1.1 THÉORIE DES TROIS PILIERS

Un régime évolué de retraite doit reposer sur trois composantes, complémentaires et de nature très différente :

<b>1<sup>er</sup> pilier : la sécurité sociale</b>	<b>2<sup>nd</sup> pilier : les régimes professionnels</b>	<b>3<sup>ème</sup> pilier : l'épargne individuelle</b>
1 <sup>er</sup> niveau de base en matière de pension. Organisé au sein d'un pays et concerne par définition une population importante.	Organisé au sein d'une entreprise / secteur d'activité. Complément à la sécurité sociale. Il peut concerner des effectifs importants ou réduites.	Organisée au libre choix de chacun. Assurance personnelle.

Historiquement, 2 modèles de base qui ont influencé le développement des régimes de retraite, chacun répondant à une certaine philosophie du rôle de la Sécurité Sociale :

- **Le modèle de BISMARCK** : nommé d'après le chancelier allemand Otto von Bismarck, est un système de sécurité sociale qui a été fondé sur l'idée que les prestations octroyées par la sécurité sociale sont la contrepartie octroyée par la collectivité. Il s'agit d'un principe d'assurance, car il y a une proportionnalité importante entre les revenus d'activité et les prestations octroyées pendant la retraite. C'est donc un principe où la solidarité est limitée.
- **Le modèle de BEVERIDGE** : nommé d'après l'économiste britannique William Beveridge, est un système de protection sociale conçu pour couvrir tous les citoyens, indépendamment de leur statut professionnel ou de leur niveau de revenu. Il est fondé sur l'idée que les prestations octroyées par la sécurité sociale ont pour objectif de subvenir aux besoins fondamentaux de l'individu. Il s'agit plutôt d'un principe d'assistance,

les prestations sont naturellement beaucoup plus uniformes et largement moins généreuses que dans le premier système. C'est un modèle où il y a une solidarité nationale avec une redistribution des ressources des plus riches vers les plus pauvres.

## 1.2 PRESTATIONS D'UN RÉGIME DE RETRAITE

On distingue 2 grands systèmes qui diffèrent dans la façon dont les avantages à la retraite sont calculés au profit des affiliés :

- Les régimes à prestations définies (*DB = Defined Benefits*) ;
- Les régimes à contributions définies (*DC = Defined Contributions*) ;
- Il se développe aussi des systèmes intermédiaires hybrides : *CB = Cash Balance* ;

### 1.2.1 LES RÉGIMES À PRESTATIONS DÉFINIES

Ils sont basés sur une optique de revenu de remplacement, ils définissent explicitement les prestations octroyées en fonction de différents paramètres comme la durée d'affiliation et les salaires d'activité.

L'avantage des régimes à prestations définies est la transparence vis-à-vis des affiliés, car ils connaissent dès le départ le niveau des prestations qu'ils recevront, cependant, le coût est inconnu a priori.

La rente de retraite, qu'on la note **RR** est une fonction de plusieurs variables, généralement :

- Le salaire d'une ou plusieurs années de carrière ;
- La durée de la carrière ;
- Des plafonds permettant d'écarter ou de découper en tranches les salaires ;
- Des prestations obtenues par d'autres régimes. Une formule très générale est :

$$RR = a * g(N) * f(S) - M$$

Tel que :

- $a$  : le coefficient à définir ;
- $f(S)$  : la fonction du salaire prise en compte ;
- $g(N)$  : la durée de carrière prise en compte ;
- $M$  : les éléments soustractifs éventuels, qui s'agissent souvent de la prise en compte des prestations déjà garanties par les autres plans. : le coefficient à définir ;

## 1.2.2 LES RÉGIMES À CONTRIBUTIONS DÉFINIES

Ils sont basés sur une optique d'épargne, définissant explicitement les cotisations qui vont être versées au régime. Les prestations en découlent après selon des définies. C'est donc ici le niveau du financement qui est défini a priori, les prestations devant être adaptées afin d'assurer l'équilibre du régime.

L'avantage des régimes à cotisations définies est la maîtrise du coût, connu dès le départ. Cependant, ils présentent une insécurité pour les affiliés en raison de l'incertitude des prestations, qui dépendent des rendements des investissements des cotisations.

Il y a plusieurs méthodes utilisées dans la pratique :

- Cotisations en pourcentage des salaires :

$$\text{cotisation} = \pi \times \text{salaire}$$

- Cotisations en pourcentage des salaires plafonnés :

$$\text{cotisation retraite} = \pi \times \min(\text{salaire}, M) \quad \text{où } M \text{ est un plafond}$$

- Cotisations par tranches :

$$\text{cotisation retraite} = \pi_1 \times \min(\text{salaire}, M) + \pi_2 \times \max(\text{salaire} - M, 0)$$

- Cotisations croissantes : Le pourcentage de cotisation à appliquer au salaire est croissant avec l'âge

- Cotisation par tranche et croissante.

## 1.2.3 LES RÉGIMES DE TYPE CASH BALANCE

Ils sont des régimes proches des contributions définies, le principe est de définir une cotisation de base inscrite sur le compte de l'affilié, qui sera ensuite revalorisée non pas par des taux de rendement réels (inconnus au départ), mais par un taux d'intérêt prédéfini et fixe.

## 1.3 MÉTHODES DE FINANCEMENT

### 1.3.1 PRÉSENTATION DES MÉTHODES PRINCIPALES DE FINANCEMENT

Afin d'honorer les promesses du régime, qu'il soit à prestations ou à cotisations définies, il faut établir un équilibre entre prestations et cotisations. Dans un régime de retraite, cet

équilibre est basé sur deux notions fondamentales : la communauté de risque et la relation d'équivalence actuarielle.

La communauté de risque est un sous-ensemble de la population rendu solidaire dans le financement de la retraite quant à la relation d'équivalence actuarielle, elle exprime pour chacune des communautés de risque, l'équilibre entre prestations et cotisations.

Et pour visualiser les communautés de risque, l'outil utilisé est le diagramme de LEXIS, qui est un outil souvent utilisé dans la démographie et en analyse actuarielle pour représenter les événements dans la vie des individus en fonction de l'âge et du temps. L'axe horizontal (x) représente le temps ou l'année calendaire et l'axe vertical (y) : représente l'âge des individus.

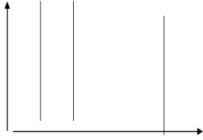
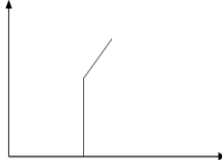
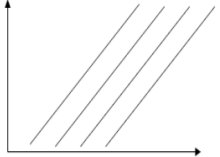
On peut distinguer 2 classes de méthodes extrêmes engendrées par des communautés de risques très différentes :

- **La capitalisation individuelle** : l'équilibre cotisation / prestation est réalisé au niveau de chaque ligne de vie d'un individu. Chacun finance sa propre retraite, s'il y a solidarité, c'est au niveau de la cohorte de tous les individus nés la même année au travers de l'utilisation d'une table de mortalité. Il n'y a par contre aucune solidarité entre générations.
- **La répartition pure** : l'équilibre cotisation / prestation est réalisé à chaque instant, en mettant en parallèle les cotisations versées par les actifs et les prestations à verser aux retraités.

### 1.3.2 CARACTÉRISTIQUES DES MÉTHODES DE FINANCEMENT

Répartition pure	Capitalisation individuelle
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Résistance à l'inflation</li> <li>— Dépendance forte à l'évolution démographique</li> <li>— Solidarité intergénérationnelle</li> <li>— Hypothèse sous-jacente de pérennité du système</li> <li>— Rétroactivité facile en cas de création d'un régime</li> <li>— Pas de constitution de provision</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Dépendance forte à l'inflation</li> <li>— Résistance à l'évolution démographique</li> <li>— Équité au niveau individuel</li> <li>— Pérennité non indispensable</li> <li>— Rétroactivité difficile en cas de création d'un régime</li> <li>— Provisions importantes</li> </ul>

Entre ces deux méthodes, il existe toute une palette de méthodes intermédiaires qu'on peut regrouper en 3 familles :

La répartition étalée	La répartition des capitaux de couverture	La capitalisation collective
<p>La communauté de risque est constituée par l'ensemble des actifs et retraités présents, non plus seulement en un instant mais durant T années.</p>	<p>La communauté de risque est constituée d'une part, par l'ensemble des actifs présents en un instant, d'autre part, la génération partant à la retraite dans le même instant.</p>	<p>La communauté de risque est constituée par les lignes de vie de plusieurs cohortes, solidarisées dans le financement.</p>
		

# Chapitre 2

## ÉLÉMENTS DÉMOGRAPHIQUES

### 2.1 FONCTION DE POPULATION

Pour une modélisation discrète de la population, on note la fonction de population, qui donne à l'instant  $t$ , l'effectif de la population d'âge  $x$ , qu'on note  $\{L(x, t); x \in X; t \in T\}$ .

La population totale à la date  $t$  sera notée :  $N(t) = \sum_{x=x_0}^{x_n} L(x, t)$

La fonction  $L$  peut être vue comme fonction d'âge (pour  $t = t^*$  fixé), donc on peut l'utiliser pour représenter les pyramides des âges, elle peut être comme fonction de temps (pour  $x = x^*$  fixé), donc elle permet de suivre au cours du temps l'évolution en effectif d'une classe d'âge fixe. Et pour  $x$  et  $t$  reliés par  $x = x^* + t - t^*$ , pour suivre l'évolution d'une cohorte d'âge initial  $x^*$  au temps  $t^*$ .

Pour une population appartenant à un même régime de retraite, deux phénomènes permettent d'expliquer l'évolution des effectifs :

- **Les entrées** (généralement les nouvelles adhésions au régime), qu'on notera  $\{E(x, t); x \in X; t \in T\}$  : la fonction qui donne à la date  $t$  l'effectif de la population à l'âge  $x$ .
- **Les sorties** (généralement les départs du régime).

On notera  $\{p_t(x, x'), (x, x') \in X; t \in T\}$  la probabilité de survie de l'âge  $x$  à l'âge  $x'$  à l'instant  $t$ .

Ces fonctions de population sont reliées par la relation de **renouvellement**, basée sur le suivi d'une cohorte :

$$L(x + h, t + h) = L(x, t) \cdot p_t(x, x + h) + \sum_{k=1}^h E(x + k, t + k) \cdot p_{t+k}(x + k, x + h)$$

Cette équation exprime que pour être présent dans la population à l'instant  $t + h$ , il faut soit y être au départ et survivre, soit être parmi les entrées de la population et survivre.

## 2.2 RATIOS DÉMOGRAPHIQUES

En supposant un modèle discret de population, on introduit les trois ratios suivants :

### 2.2.1 QUOTIENT DE VIEILLESSE

C'est le rapport entre l'effectif des retraités et l'effectif des actifs, il mesure la dépendance des retraités par rapport aux actifs :

$$QV(t) = \frac{\sum_{x=x_r}^w L(x, t)}{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t)}$$

$x_r$  : l'âge de départ à la retraite.  $w$  : l'âge d'extinction de la population.

### 2.2.2 TAUX DE SUPPORT POTENTIEL

C'est l'inverse du quotient de vieillesse ; il mesure le nombre d'actifs par retraité :

$$TSP(t) = \frac{1}{QV(t)}$$

### 2.2.3 LE COEFFICIENT D'INTENSITÉ DE VIEILLISSEMENT

Il mesure au sein de la population des retraités, la population au-delà d'un certain âge  $X_r$  :

$$CIV(t) = \frac{\sum_{x=X_r}^w L(x, t)}{\sum_{x=x_r}^w L(x, t)}$$

### 2.2.4 LE QUOTIENT DE JEUNESSE

C'est le rapport entre l'effectif des jeunes et l'effectif des actifs, avec  $x_i$  supposé l'âge de début d'activité :

$$QJ(t) = \frac{\sum_{x=1}^{x_i-1} L(x, t)}{\sum_{x=x_i}^{x_r-1} L(x, t)}$$

### 2.2.5 LE COEFFICIENT DE DÉPENDANCE TOTAL

C'est la somme du quotient de vieillesse et du quotient de jeunesse ; il mesure le degré global de dépendance de la population inactive ("jeunes" et "vieux") par rapport à la population active :

$$CD(t) = QV(t) + QJ(t) = \frac{\sum_{x=x_r}^w L(x, t)}{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t)} + \frac{\sum_{x=1}^{x_i-1} L(x, t)}{\sum_{x=x_i}^{x_r-1} L(x, t)}$$

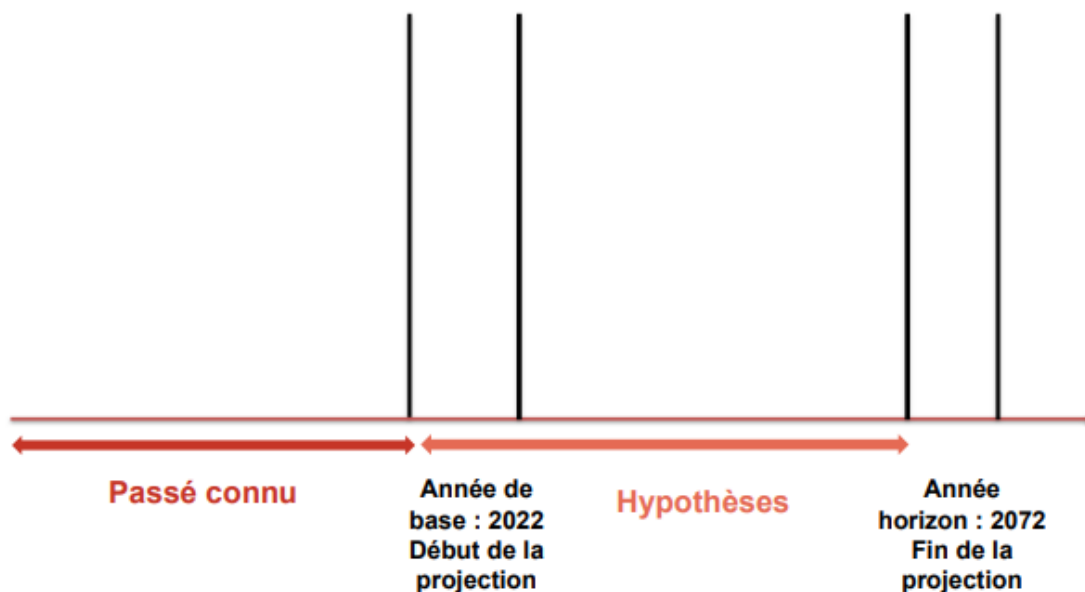


FIGURE 2.1 – Schématisation du processus de projection

## 2.3 PROJECTIONS DÉMOGRAPHIQUES

### 2.3.1 SCHÉMATISATION DE LA PROJECTION

Afin de concevoir le processus de projection que nous utiliserons dans notre étude, nous présentons ci-dessous un schéma représentatif :

### 2.3.2 ÉQUATION DU BILAN DÉMOGRAPHIQUE

La taille de la population du régime étudié à l'instant  $t + n$  est donnée par l'équation du bilan démographique suivante ( $n=50$ ) :

$$P_{t+n} = P_t + N_{t,t+n} - S_{t,t+n}$$

Avec :

- $P_{t+n}$  : la population adhérente au régime à l'instant  $t + n$  ;
- $P_t$  : la population adhérente au régime à l'instant  $t$  ;
- $N_{t,t+n}$  : les nouveaux adhérents au régime entre l'instant  $t$  et  $t + n$  ;
- $S_{t,t+n}$  : les sortants du régime entre l'instant  $t$  et  $t + n$ .

### 2.3.3 MÉTHODOLOGIE DES PROJECTIONS DÉMOGRAPHIQUES

Afin de réaliser des projections démographiques, plusieurs méthodes peuvent être appliquées :

- **Méthode de croissance démographique** : elle consiste à utiliser un accroissement démographique moyen qui est donné par :

$$\Delta_m = \frac{P_{t+n} - P_t}{n}$$

Sur une année, l'accroissement relatif est donné par la relation :  $P_{t+1} = P_t(1 + r)$

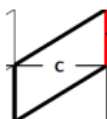
Et sur n années :  $P_{t+n} = P_t(1 + r)^n$

Donc :

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$$

- **Méthode des composantes de cohorte** : Cette méthode consiste tout d'abord à choisir une zone géographique (on utilise dans notre cas des zones), une année de base qui est l'année la plus récente pour laquelle on dispose de données de bonne qualité (2022 dans notre cas) et un horizon lointain (2072) dans ce cas, ensuite on utilise les taux de fécondité par âge de femmes projections. Les projections sont obtenues par les données historiques analysées par sexe dans le logiciel développé par l'USIAD. Mais dans notre cas, nous utilisons ATLAS, le logiciel développé en interne par FINACTUS.

Nous utilisons les données de fécondité et de mortalité afin de projeter les évolutions des cohortes. En fonction de la zone étudiée, nous appliquons les données de la table de vie française ou celle du diagramme de LEXIS.



$$P_{x,t+1} = P_{x,t} (1 - d_{x,t} + F_x)$$

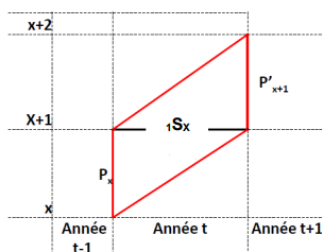


FIGURE 2.2 – Exemple de la méthode démographique en un an instant t différentiel de la naissance et de l'âge 1 an plus tard

Avec :  $P_{x,t}$  la population adhérente d'âge  $x$  révolu à  $t$   
 $P_{x,t+1}$  la population adhérente d'âge  $x + 1$  révolu à  $t + 1$ , et  
 $d_{x,t}$  le taux de mortalité des individus d'âge  $x$  révolu en  $t$  et  
 $F_x$  le taux de fécondité par âge des femmes en âge de procréer des âges révolus  $x$  et  $x + 1$ .

# Chapitre 3

## SYSTÈMES GÉNÉRAUX DE FINANCEMENT

### 3.1 ÉQUILIBRE ACTUARIEL D'UN RÉGIME DE RETRAITE

Pour que le régime de retraite soit en équilibre, il faut avoir une équivalence entre les prestations et les contributions : les prestations futures doivent être financées soit par les contributions futures, soit par la réserve initiale existante éventuelle.

Nous cherchons alors à garantir l'équation suivante :

$$\sum_{\text{window}} \text{valeurs actuelles des contributions} + \text{réserve initiale} = \sum_{\text{individus}} \text{valeurs actuelles des prestations}$$

Supposons que le régime démarre à l'instant  $t = 0$  et notons :

- $V_t = V(0) \cdot (1 + i)^t$  : la réserve initiale ;
- $\Pi(s)$  : le taux de cotisation moyen du régime à l'instant  $s$  ;
- $S(s)$  : le salaire moyen à l'instant  $s$  de la population des actifs ;
- $S(s) = \sum_{x=1}^{n-1} (x, s)\xi(s)$  = la masse salariale totale en  $s$  ;
- $p(s)$  : la pension de pension moyenne payée à l'instant  $s$  ;
- $B(s) = \sum_{x=t}^{x-t} \sum_s (X, s)p(s)$  = les prestations totales payées en  $s$  ;
- $i$  : le taux de capitalisation des réserves sur une période.

Donc l'équation d'équilibre actuariel est la suivante :

$$V(t) = V(0) \cdot (1 + i)^t + \sum_{s=0}^t (\pi(s)S(s) - B(s)) \cdot (1 + i)^{t-s}$$

De cette formule, on obtiendra facilement la formule de récurrence des réserves :

$$V(t + 1) = (V(t) + \pi(t) \cdot S(t) - B(t)) \cdot (1 + i)$$

Ou sous forme différentielle :

$$\Delta V(t+1) = V(t+1) - V(t) = (V(t) + (\pi(t) \cdot S(t) - B(t))) \cdot (1+i)$$

L'équation d'équilibre actuarielle permet aussi d'exprimer les réserves sous une forme prospective :

$V(t)$  = valeur actuelle des prestations futures - valeur actuelle des contributions futures

$$V(t) = \sum_{s=t}^{\infty} B(s) \cdot (1+i)^{-(s-t)} - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi(s)S(s)) \cdot (1+i)^{-(s-t)}$$

L'équilibre actuariel entre prestations et contributions s'obtient en égalant à chaque instant les réserves rétrospectives ( $V(t)$ ) et les réserves prospectives (ce qu'on devrait avoir).

$$V(0)(1+i)^t + \sum_{s=0}^{\infty} (\pi(s)S(s)) \cdot (1+i)^{t-s} = \sum_{s=0}^{\infty} B(s) \cdot (1+i)^{-(s-t)} - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi(s)S(s)) \cdot (1+i)^{-(s-t)}$$

- Dans un régime à prestations définies (vecteur  $B(t)$  fixé), l'équation admet une infinité de solutions ; chaque solution correspond à une méthode de financement particulière.
- Par contre, dans un régime à cotisations définies (vecteur  $\Pi$  fixé), les prestations octroyées par le régime doivent être telles que la relation d'équilibre soit vérifiée.

## 3.2 PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE FINANCEMENT

### 3.2.1 RÉPARTITION PURE

Cette méthode consiste à poser comme contrainte : avoir à tout instant des réserves nulles (avec l'hypothèse que  $V(0) = 0$ ).

D'après la relation de récurrence, il faut alors que :

$$\pi(t) \cdot S(t) - B(t) = 0 \quad \forall t$$

D'où :

Dans un régime à prestations définies	Dans un régime à contributions définies
$\pi(t) = \frac{B(t)}{S(t)}$	$B(t) = \pi(t) \cdot S(t)$

### 3.2.2 INITIAL FUNDING

Cette méthode consiste à se fixer comme contrainte en prestations définies, de ne plus devoir rien payer comme contributions futures ; c'est-à-dire  $\pi(t) \equiv 0 \quad \forall t$ .

Cela signifie que la réserve initiale doit être suffisante pour financer l'ensemble des prestations futures du régime, c'est évidemment la méthode qui génère les réserves les plus importantes.

$$V(0) = \sum_{s=0}^{\infty} B(s) \cdot (1+i)^{-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=xr}^w L(x, s) \bar{p}(s) \cdot (1+i)^{-s}$$

### 3.2.3 PRIME MOYENNE GÉNÉRALE

Cette méthode consiste à partir d'une réserve nulle et d'avoir un taux de cotisation constant dans le temps :  $\pi(t) = \pi \quad \forall t$

$$\pi = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} B(s) \cdot (1+i)^{-s}}{\sum_{s=0}^{\infty} S(s) \cdot (1+i)^{-s}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=xr}^w L(x, s) \bar{p}(s) \cdot (1+i)^{-s}}{\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=xr-1}^{xr-1} L(x, s) \bar{p}(s) \cdot (1+i)^{-s}}$$

Dans les régimes à prestations définies, il existe une infinité de méthodes de financement, il faut juste que la méthode choisie soit admissible, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire à la relation d'équilibre actuarielle tel que les réserves engendrées soient comprises à tout instant entre les 2 premières méthodes.

## 3.3 ANALYSE DES TAUX DE COTISATION SELON DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE FINANCEMENT

### 3.3.1 RÉPARTITION PURE

En notant  $\Pi_R(t)$  le taux de cotisation en répartition pure, les cotisations en  $t$  deviennent :

$$\pi_R(t) \cdot S(t) \sum_{x=xr-1}^{xr-1} L(x, t)$$

Et les dépenses de pension en  $t$  :

$$\bar{p}(t) \sum_{x=xr}^w L(x, t)$$

Après application du principe d'équivalence actuariel, on obtient :

$$\pi_R(t) \cdot S(t) \sum_{x=xr-1}^{xr-1} L(x, t) = \bar{p}(t) \sum_{x=xr}^w L(x, t)$$

C'est-à-dire :

$$\pi_R(t) = \frac{\bar{p}(t) \sum_{x=xr}^w L(x, t)}{S(t) \sum_{x=xr-1}^{xr-1} L(x, t)} = tr(t) \cdot QV(t)$$

Où :

- $tr(t)$  est le taux de remplacement qui est un paramètre socio-économique.
- $QV(t)$  est le quotient de vieillesse qui est un paramètre démographique.

Il y a aussi la répartition étalée qui se base sur les mêmes principes que la répartition, mais plutôt que d'égaliser recettes et dépenses sur une période, on en égale les valeurs actuelles sur plusieurs périodes, c'est-à-dire :

Valeur actuelle des cotisations des actifs perçues entre  $t$  et  $t+T$  = Valeur actuelle des pensions payées aux retraités entre  $t$  et  $t+T$

Il faut noter que dans la répartition étalée, il faut faire attention à l'admissibilité de la méthode, contrairement à la répartition pure qui est toujours admissible.

### 3.3.2 LA RÉPARTITION DES CAPITAUX DE COUVERTURE

Le principe d'équivalence dans cette méthode lie les cotisations versées par les actifs sur une période et, d'autre part, les capitaux constitutifs permettant de financer jusqu'au décès les pensions de la génération partant à la retraite lors de la même période.

En notant  $\Pi_{CC}(t)$  le taux de cotisation dans cette méthode, les cotisations deviennent :

$$\pi_{cc}(t) \cdot \bar{S}(t) \cdot \sum_{x=1}^{xr-1} L(x, t)$$

Quant aux dépenses, elles deviennent :

$$\sum_{x=xr}^w L(x, t+x-x_r) \cdot \bar{p}(t+x-x_r) \cdot V^{x-x_r}$$

Après application du principe d'équivalence, on obtient :

$$\pi_{cc}(t) = \frac{\sum_{x=xr}^w L(x, t+x-x_r) \bar{p}(t+x-x_r) \cdot V^{x-x_r}}{\bar{S}(t) \sum_{x=1}^{xr-1} L(x, t)}$$

Comme en répartition, la méthode des capitaux de couverture peut être étalée sur plusieurs années donnant naissance à la répartition étalée des capitaux de couverture.

### 3.3.3 LA CAPITALISATION INDIVIDUELLE

Cette méthode se base sur le fait que chacun finance durant sa vie active, sa propre retraite. Il y a dans ce cas équivalence individu par individu entre la valeur actuelle des cotisations versées durant l'activité et la valeur actuelle des pensions payées après retraite.

Analytiquement, pour le groupe entrant à l'instant  $t$  en activité, la valeur actuelle des cotisations est :

$$\sum_{x=1}^{xr-1} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{S}(t+x-x_1) \cdot \pi_c(t, x) \cdot V^{x-x_1}$$

La valeur actuelle des dépenses est :

$$\sum_{x=x_r}^w L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{p}(t+x-x_1) \cdot V^{x-x_1}$$

Après application du principe d'équivalence, et supposant bien sûr que le vecteur  $\{\pi_c(t, x_1), \pi_c(t, x_1+1), \dots, \pi_c(t, x_r-1)\}$  satisfait à l'équation. Il existe infinité de méthodes de capitalisation individuelle, on pose alors des hypothèses de calcul comme l'utilisation d'un taux de cotisation constant tout au long de la carrière, c'est-à-dire :

$$\pi_c(t, x_1), \pi_c(t, x_1+1), \dots, \pi_c(t, x_r-1) = \pi_c(t)$$

Dans ce cas :

$$\pi_c(t) = \frac{\sum_{x=x_r}^w L(x, t+x-x_r) \bar{p}(t+x-x_r) \cdot V^{x-x_1}}{\sum_{x=1}^{x_r-1} L(x, t+x-x_1) \bar{S}(t+x-x_1) \cdot V^{x-x_1}}$$

### 3.4 STRATIFICATION DES RÉSERVES

Les réserves globales  $V(t)$  d'un régime de retraite peuvent se décomposer en deux parties :

$$V(t) = V_r(t) + V_a(t)$$

Avec  $V_r(t)$  : les réserves nécessaires pour financer en totalité les retraites des individus pensionnés en  $t$ .

$$V_r(t) = \sum_{x=x_r}^w \sum_{s=t}^{t+w-x} L(x+s-t, s) \bar{p}(s) (1+i)^{1-s}$$

— Et  $V_a(t)$  les réserves des actifs, c'est l'excédent des réserves par rapport à la réserve des retraités.

En général, dans la répartition, le régime ne dispose d'aucune réserve ; la réserve des retraités constitue une dette à charge des actifs,  $V_a(t) < 0$ . Dans la répartition des capitaux de couverture, Le régime dispose en permanence exactement du montant nécessaire à la réserve des retraités ; les actifs ne disposent d'aucune réserve mais ne sont titulaires d'aucune dette  $V_a(t) = 0$ . Par contre, dans la capitalisation, car on n'a que les réserves des actifs  $V_a(t) > 0$ .

# Chapitre 4

## MODÉLISATION DE LA COURBE DES TAUX ZÉRO-COUPON

### 4.1 NOTATIONS

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes :

- $N, n$  : Le nombre d'obligation et de Cash-flows ;
- $t, T$  : Les dates de cotation et de maturité des obligations ;
- $\theta$  : La maturité de l'obligation.  $\theta = T - t$  ;
- $AC_t^k$  : Les intérêts courus de l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  ;
- $B_t(m)$  : Le prix d'un zéro coupon à la date de cotation  $t$  et à la maturité  $m$  ;
- $c^k$  : Le taux coupon de l'obligation  $k$  ;
- $CF_t^k(m)$  : Le flux généré par l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  et à la maturité  $m$  ;
- $FV^k$  : La valeur nominale de l'obligation  $k$  ;
- $P_c^k(t, \theta)$  : Le prix coté de l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  ;
- $P^k(t, \theta)$  : Le prix de marché de l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  ;
- $\hat{P}^k(t, \theta)$  : Le prix théorique de l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  ;
- $R_t(m)$  : Le taux zéro coupon à la date de cotation  $t$  et à la maturité  $m$  ;
- $f_t(m)$  : Le taux *forward* instantané à la date de cotation  $t$  et à la maturité  $m$  ;
- $D^k$  : La duration de l'obligation  $k$ .

### 4.2 DÉFINITIONS

Considérons une obligation d'État  $k$  sur un marché financier quelconque. Étant donné un taux d'intérêt fixe (YTM), le prix estimé de l'obligation  $k$  à la date de cotation  $t$  et pour une maturité de  $n = [\theta] + 1$  s'écrit comme suit :

$$\hat{P}^k(t, n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{C^k}{(1 + \text{YTM}(t))^m} + \frac{(C^k + FV^k)}{(1 + \text{YTM}(t))^n}$$

Avec :  $C^k = c^k \cdot FV^k$  et  $[\theta] = \lfloor \theta \rfloor$  la partie entière de  $\theta$ .

Le taux d'intérêt YTM ( $t$ ), également appelé taux actuariel, correspond au rendement interne d'une obligation  $k$  jusqu'à sa maturité  $n$ . Il reste constant pendant toute la période de versement des flux de trésorerie de l'obligation. En d'autres termes, il représente le rendement de l'obligation si elle est détenue jusqu'à son échéance  $n$ .

En l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix théorique d'une obligation avec coupon est calculé comme la somme des flux de trésorerie actualisés par les taux zéro-coupon. Cette relation s'exprime mathématiquement de la manière suivante :

$$\hat{P}^k(t, \theta) = \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_t^k(m) \times B_t(m) = P_c^k(t, \theta) + AC_t^k$$

Les flux de trésorerie ( $CF_t^k$ ) respectent les relations suivantes :

1. Pour  $m = 1$  :  $CF_t^k(1) = C^k$
2. Pour  $m = [\theta]$  :  $CF_t^k([\theta]) = C^k$
3. Pour  $m = [\theta] + 1$  :  $CF_t^k([\theta] + 1) = C^k + FV^k$

Et les intérêts courus se calculent comme suit :

$$AC_t^k = C^k \times \frac{t - t_{av}}{t_{ap} - t_{av}}$$

Avec  $t_{av}$  = date de versement du coupon précédent et  $t_{ap}$  = date de versement du coupon suivant.

Considérons  $R_t(m)$  comme le taux zéro-coupon associé à la maturité  $m$ . Le prix zéro-coupon, ou la fonction d'actualisation  $B_t(m)$ , dépend de la maturité  $m$  et du taux zéro-coupon  $R_t(m)$  :

$$B_t(m) = f(m, R_t(m)), \quad \text{avec } f(x, y) = e^{-xy}, \quad \text{donc } B_t(m) = e^{-mR_t(m)}$$

Donc le taux zéro-coupon  $R_t(m)$  est donné par :

$$R_t(m) = -\frac{1}{m} \log(B_t(m))$$

- La fonction  $m \rightarrow B_t(m)$  est appelée courbe d'actualisation à la date de cotation  $t$ .
- La fonction  $m \rightarrow R_t(m)$  est appelée courbe de rendement des obligations d'État à la date de cotation  $t$ .

La relation entre le taux zéro-coupon  $R_t(m)$  et le taux instantané forward  $f_t(m)$  est donnée par Diebold et Li (2006) :

$$f_t(m) = \frac{dR_t(m)}{dm} \times m + R_t(m)$$

Et en dérivant l'expression de  $R_t(m)$  par rapport à  $m$ , nous obtenons :

$$f_t(m) = -\frac{B_t'(m)}{B_t(m)}$$

Le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned}
 f_t(m) &= \frac{dR_t(m)}{dm} \times m + R_t(m) \\
 &= \frac{d}{dm} \left( -\frac{1}{m} \log(B_t(m)) \right) \times m + R_t(m) \\
 &= \left( -\frac{1}{m} \frac{B'_t(m)}{B_t(m)} + \frac{1}{m^2} \log(B_t(m)) \right) \times m + R_t(m) \\
 &= -\frac{B'_t(m)}{B_t(m)} + \frac{\log(B_t(m))}{m} + R_t(m) \\
 &= -\frac{B'_t(m)}{B_t(m)} + R_t(m) \\
 \Rightarrow f_t(m) &= -\frac{B'_t(m)}{B_t(m)}
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$R_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du \quad (*)$$

La structure par terme des taux d'intérêt hiérarchise les taux en fonction de leur échéance. Elle peut être décrite de manière équivalente par les courbes d'actualisation  $m \mapsto B_t(m)$ , de rendement des obligations  $m \mapsto R_t(m)$  ou par le taux forward  $m \mapsto f_t(m)$ . Dans notre contexte, cette structure par terme sera représentée par la courbe de rendement des obligations  $m \mapsto R_t(m)$ .

## 4.3 PRÉSENTATION DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT

Les modèles les plus utilisés dans la pratique et dont les paramètres représentent une interprétation économique intéressante et une riche information sont ceux Nelson Siegel, ses extensions et le modèle de Vasicek Fong.

### 4.3.1 LE MODÈLE DE NELSON SIEGEL (1987)

Nelson SIEGEL a proposé un modèle mathématique pour décrire la dynamique des taux à termes instantanés.

Le taux forward instantané  $f_t(m)$  se définit comme suit :

$$f_t(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$$

À partir de (\*) nous obtenons une expression fermée pour le taux zéro à la maturité  $R_t(m)$  :

$$R_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du$$

$$= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right] - \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$$

Cette équation peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$R_t(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\varphi\left(\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2\psi\left(\frac{m}{\tau_1}\right)$$

Avec :

$$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = -e^{-x}$$

Donc la courbe des taux zéro-coupon dépend de :  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ . Ces paramètres ont une interprétation économique importante. En effet :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_t(m) = \beta_0 \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow 0} (R_t(m) - \beta_0) = \beta_1$$

Donc :  $\beta_0$  représente le taux à long terme et  $\beta_1$  représente la différence entre le taux court instantané et le taux long terme.

### 4.3.2 LE MODÈLE DE LARS SVENSSON (1994)

Lars Svensson a présenté en 1994 une extension du modèle fonctionnel de Nelson-Siegel en ajoutant un quatrième terme et un second paramètre de forme à l'expression du taux forward instantané  $f_t(m)$  afin d'améliorer la flexibilité et la précision du modèle. Le taux forward instantané s'écrit comme suit :

$$f_t(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau_2}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)$$

En utilisant (\*), l'expression du taux zéro-coupon devient :

$$R_t(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right] - \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}{\frac{m}{\tau_2}} \right]$$

Par conséquent, le vecteur de paramètres contient six paramètres à estimer :  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2$ . Ces ont également une interprétation économique. D'ailleurs :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_t(m) = \beta_0 \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow 0} (R_t(m) - \beta_0) = \beta_1$$

Ce qui signifie que  $\beta_0$  représente le taux à long terme et  $\beta_1$  représente la différence entre le taux court instantané et le taux long terme.

### 4.3.3 LE MODÈLE DE VASICEK FONG (1982)

Vasicek et Fong ont présenté une méthode de construction de la structure par terme des taux d'intérêt basée sur l'utilisation de fonctions splines exponentielles. Cette méthode débute par la définition de la fonction d'actualisation  $B_t(m)$  comme une somme de fonctions exponentielles :

$$B_t(m) = a_0 + a_1 e^{-\alpha m} + a_2 e^{-2\alpha m} + a_3 e^{-3\alpha m}$$

et cela pour tout  $m \neq 0$  et  $\alpha$  est une constante.

Si on pose :  $m = -\frac{1}{\alpha} \log(1-x)$  avec  $0 \leq x \leq 1$ , la fonction d'actualisation devient :

$$B_t\left(-\frac{1}{\alpha} \log(1-x)\right) = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + a_3(1-x)^3 = F(1-x)$$

Avec :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

En développant les fonctions  $(1-x)^2$  et  $(1-x)^3$  en séries limitées d'ordre 2 et 3, on remarque que :

$$B_t\left(-\frac{1}{\alpha} \log(1-x)\right) \equiv G(x)$$

La fonction  $G(x)$  est une fonction polynomiale de degré 3 :

$$G(x) = \sum_{i=0}^3 \mu_i g_i(x)$$

Où  $x = 1 - e^{-\alpha m}$ , d'où :

$$G(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3$$

- $G(x)$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , avec  $G(0) = 1$  et  $G(1) = 0$
- Si  $B_t(m) \sim e^{-\gamma m}$  pour  $0 \leq m \leq \infty$  :
- Alors  $G(x)$  se comporte approximativement comme une fonction puissance :

$$G(x) \sim (1-x)^{\gamma/\alpha} \text{ sur } 0 \leq x \leq 1$$

On constate de ce qui précède que  $G(x)$  est une fonction polynomiale de degré 3 avec  $G(1) \neq 0$ .

Vasicek et Fong affirment dans ce contexte que les taux forwards instantanés  $f_t(m)$  tendent vers le paramètre  $\alpha$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_t(m) = f_t(\infty) = \alpha$$

# Chapitre 5

## CALIBRAGE DES MODÈLE DE TAUX

Le calibrage est une étape cruciale dans la détermination de la courbe des taux sans risque, mais sa mise en œuvre est complexe. Il consiste à ajuster au mieux, par une fonction paramétrique appropriée, les prix observés  $P$  avec les prix théoriques  $\hat{P}$ . L'ajustement consiste à minimiser la fonction de perte (Loss function) sous des contraintes.

### 5.1 PRÉSENTATION DES MODÈLES

#### 5.1.1 LE MODÈLE DE NELSON SIEGEL

Nous avons précisé auparavant que le modèle de Nelson Siegel nécessite l'estimation de quatre paramètres :  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ , et afin de déterminer les paramètres optimaux :  $\beta_0^{\text{opt}}, \beta_1^{\text{opt}}, \beta_2^{\text{opt}}, \tau_1^{\text{opt}}$ , plusieurs étapes sont nécessaires à suivre :

#### ÉTAPE 1 : DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ POUR DIFFÉRENTES VALEURS DE $\tau_1$ ENTRE 0 ET 30

Pour chaque valeur de  $T_1$  dans cet intervalle, les paramètres sont déterminés en minimisant la fonction objective  $H_1(\hat{P})$  sous contraintes. La fonction objective mesure l'écart entre les prix observés des obligations et les prix théoriques estimés par le modèle.

$$H_1(\hat{P}) = \sum_{k=1}^N (\hat{P}_k(t, \theta) - \hat{P}(t, \theta))^2$$

L'objectif est de minimiser cette fonction

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2} H_1(\hat{P})$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} UFR \leq \beta_0 \leq 15 \\ -15 \leq \beta_1 \leq -UFR \\ -30 \leq \beta_2 \leq 30 \end{cases}$$

- L'UFR est calculé en fonction des hypothèses sur le taux de croissance économique à long terme et l'inflation. Il influence le comportement à long terme de la courbe des taux.
- Le paramètre  $\beta_1$  représente le taux d'intérêt à court terme ou le taux zéro-coupon de maturité nulle ( $m = 0$ ). Il est fixé par les autorités monétaires selon les prévisions de croissance économique et d'inflation.

Pour reconstituer la fonction du prix théorique, nous utilisons la relation suivante :

$$\hat{P}_k(t, \theta) = \sum_{m=1}^{\theta[1]+1} CF_k^t(m) \times B_t(m)$$

Les flux de trésorerie sont actualisés en utilisant les prix zéro-coupon :

$$\hat{P}_k(t, \theta) = \sum_{m=1}^{\theta[1]+1} C^k \times B_t(m) + 100 \times B_t(\theta[1] + 1)$$

Avec  $C^k$  le coupon de l'obligation et 100 est la valeur nominale.

Puis, en utilisant les paramètres du modèle de Nelson-Siegel, les flux actualisés deviennent :

$$\hat{P}_k(t, \theta) = \sum_{m=1}^{\theta[1]+1} C^k \times e^{-m(\beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\tau_1} - \beta_2 \exp(-\frac{m}{\tau_1}))} + 100 \times e^{-(\theta[1]+1)(\beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-\frac{\theta[1]+1}{\tau_1})}{\tau_1} - \beta_2 \exp(-\frac{\theta[1]+1}{\tau_1}))}$$

Le prix théorique final est la somme du prix coté et des intérêts courus :

$$\hat{P}_k(t, \theta) = P_k^c(t, \theta) + AC_k^t$$

Pour calibrer les paramètres du modèle de Nelson-Siegel, nous avons utilisé la méthode L-BFGS-B. Cette méthode est appropriée pour minimiser des fonctions avec des contraintes sur les variables, tout en utilisant une mémoire limitée. Les valeurs initiales  $x^{\text{initial}} = (0.02, -0.03, 0.01)$  sont déterminées sur la base des données empiriques des marchés.

## ÉTAPE 2 : SÉLECTION DES PARAMÈTRES OPTIMAUX DU MODÈLE

L'étape suivante consiste à sélectionner les paramètres  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, T_1$  qui minimisent la fonction objective  $H_1(\hat{P})$  tout en respectant les conditions spécifiées. Les paramètres retenus doivent satisfaire les critères suivants :

- **Conditions sur les paramètres** :  $\beta_0 > 0$  et  $\beta_0 + \beta_1 > 0$  ;
- **Minimisation de la Fonction Objective** : Les paramètres sont sélectionnés pour la valeur de  $\theta$  qui donne la valeur la plus faible de  $H_1(\hat{P})$  ;
- **Dédouanement de la Valeur de  $T_1$**  : Une fois les paramètres  $\beta_0, \beta_1$  et  $\beta_2$  sont déterminés pour chaque valeur de  $T_1$ , la valeur optimale de  $T_1$  est celle qui correspond à la plus faible valeur de  $H_1(\hat{P})$ .

Les paramètres  $\beta_0^{\text{opt}}, \beta_1^{\text{opt}}, \beta_2^{\text{opt}}$  et  $T_1^{\text{opt}}$  ainsi obtenus sont les paramètres optimaux du modèle de Nelson-Siegel qu'on note :  $\theta^{\text{opt}}$ .

### 5.1.2 LE MODÈLE DE LARS SVENSSON

Pour estimer les paramètres optimaux du modèle de Svensson présentés auparavant, nous allons suivre une procédure en deux étapes. Dans un premier temps, nous allons fixer  $T_1 = T_1^{NS}$  (du modèle de Nelson Siegel). Ensuite, nous suivons les étapes décrites ci-dessous :

#### ÉTAPE 1 : DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

Cette étape consiste à déterminer  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$  pour chaque valeur de  $T_2$  comprise entre 0 et 30, qui minimisent la fonction objective  $H_1(\hat{P})$  sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} UFR \leq \beta_0 \leq 15 \\ -15 \leq \beta_1 \leq -UFR \\ -30 \leq \beta_2 \leq 30 \\ -30 \leq \beta_3 \leq 30 \end{cases}$$

#### ÉTAPE 2 : CALCUL DU PRIX THÉORIQUE DE L'OBLIGATION

Dans le modèle de Svensson, le prix théorique est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{P}_k(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{\theta[1]+1} CF_k^t(m) \times B_t(m) \\ &= \sum_{m=1}^{\theta[1]+1} C^k \times e^{-m(\beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} - \beta_2 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) - \beta_3 (\frac{m}{\tau_2}) \exp(-\frac{m}{\tau_2})} + 100 \times e^{-(\theta[1]+1)(\beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-\frac{\theta[1]+1}{\tau_1})}{\frac{\theta[1]+1}{\tau_1}} - \beta_2 \exp(-\frac{\theta[1]+1}{\tau_1}) - \beta_3 (\frac{\theta[1]+1}{\tau_2}))} \end{aligned}$$

Le prix théorique final est la somme du prix coté et des intérêts courus :

$$\hat{P}_k(t, \theta) = P_k^c(t, \theta) + AC_k^t$$

#### ÉTAPE 3 : SÉLECTION DES PARAMÈTRES OPTIMAUX DU MODÈLE

La méthode L-BFGS-B nous permet de résoudre le problème d'optimisation, avec comme valeurs initiales les paramètres du modèle de Nelson-Siegel et  $\beta_3 = 0.01$ , soit :

$$\chi^{\text{initiale}} = (\beta_0^{NS}, \beta_1^{NS}, \beta_2^{NS}, 0.01)$$

Enfin, on retient les paramètres de Svensson qui respectent les conditions :  $\beta_0 > 0$  et  $\beta_0 + \beta_1 > 0$  pour la valeur la plus faible de  $H_1(\hat{P})$  et on déduit la valeur  $T_2$  correspondante ;

Les paramètres  $\beta_0^{\text{opt}}, \beta_1^{\text{opt}}, \beta_2^{\text{opt}}, T_1^{NS}, \beta_3^{\text{opt}}, T_2^{\text{opt}}$  ainsi obtenus sont les paramètres optimaux du modèle de Lars Svensson qu'on note :  $\theta^{\text{opt}}$ .

### 5.1.3 LE MODÈLE DE VASICEK-FONG

Pour estimer les paramètres optimaux du modèle de Vasicek-Fong  $\theta^{opt} = (\mu_0^{opt}, \mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \mu_3^{opt})$ , on minimise la quantité  $H_1(\hat{P})$ . On résout le problème d'optimisation aussi par la méthode L-BFGS-B, en choisissant les paramètres du modèle de Svensson avec  $\mu_3 = 0.01$  :

$$\chi^{\text{initiale}} = (\beta_0^S, \beta_1^S, \beta_2^S, \tau_1^S, 0.01)$$

## 5.2 QUALITÉ D'AJUSTEMENT

La qualité de l'ajustement des modèles de construction de courbes des taux sans risque est essentielle afin de retenir le meilleur modèle. On opte pour une approche quantitative qui repose sur le calcul des indicateurs de dispersion pour évaluer la qualité de l'ajustement des modèles. Les principaux indicateurs utilisés sont :

— **Mean Squared Error (MSE)** :

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2$$

— **Root Mean Squared Error (RMSE)** :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2}$$

— **Theil-U Statistic** :

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (\hat{P}^k(t) - P^k(t))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (P^k(t))^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^N (\hat{P}^k(t))^2}}$$

— **Mean Absolute Error (MAE)** :

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta)|$$

— **Mean Absolute Percentage Error (MAPE)** :

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{P^k(t) - \hat{P}^k(t)}{P^k(t)} \right|$$

— **Coefficient de Détermination ( $R^2$ )** :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (P^k(t) - \hat{P}^k(t))^2}{\sum_{k=1}^N (P^k(t) - \bar{P}^k(t))^2}$$

— Critères d'Akaike (AIC) et de Bayes (BIC) :

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

$$BIC = -2\ln(L) + \ln(n)k$$

Avec  $k$  est le nombre de paramètres,  $L$  la fonction de vraisemblance, et  $n$  le nombre d'observations.

**PARTIE 2 : RÉGIME PAR  
RÉPARTITION : ACTUALISATION  
DE L'AUDIT ACTUARIEL DU  
RÉGIME DES PENSIONS GÉRÉ PAR  
UNE CAISSE DE RETRAITE DANS  
LA ZONE CIPRES**

# Introduction

Dans cette partie, nous allons actualiser l'étude actuarielle du régime de sécurité sociale d'une caisse de retraite dans la zone **CIPRES**. Pour réaliser une étude actuarielle précise, nous prendrons comme référence l'année 2022, étant donné que les données les plus récentes dont nous disposons remontent à cette année. Par la suite, nous procéderons à des projections sur un horizon de 50 ans.

Il est à noter que les dernières études actuarielles du régime des pensions pour cette Caisse remontent à 2010 et 2016. Conformément à la recommandation de la Conférence Interafricaine de la Prévoyance Sociale (**CIPRES**), qui préconise un audit actuariel, au minimum, tous les 5 ans, il est impératif de mettre à jour ces modélisations afin de refléter les nombreux changements survenus depuis lors. Nous allons donc réaliser une étude actuarielle du régime actuellement géré par la caisse afin d'actualiser les propositions formulées en 2016.

# Chapitre 1

## FONCTIONNEMENT DÉTAILLÉ DU RÉGIME GÉRÉ PAR LA CAISSE

Une étude actuarielle de qualité suppose une compréhension parfaite du fonctionnement des régimes et de l'institution. C'est la raison pour laquelle nous allons expliciter ci-dessous les détails de fonctionnement du régime de la caisse. Tout d'abord, la caisse africaine avec laquelle nous travaillons, gère les garanties sociales suivantes :

- Pension de vieillesse ;
- Pension d'invalidité (imputable et non imputable au service) ;
- Pension de survie accordée aux veufs, veuves et orphelins ;
- Maintien des allocations familiales, qui sont servies par l'État pendant la période d'activité.

### 1.1 LES RESSOURCES DE LA CAISSE

La caisse finance ses régimes par des cotisations assises sur la masse salariale de la fonction publique, selon les modalités suivantes :

- Une assiette de cotisation correspondant au traitement indiciaire de base à l'exclusion de toute indemnité ;
- Un taux de cotisation de 27% (7% pour la part salariale et 20% pour la part patronale).

### 1.2 SEGMENTATION DE LA POPULATION

La population assurée par la caisse peut être segmentée en 4 groupes, avec leurs hypothèses et dynamiques économiques et sociales propres.

Nous réalisons donc 4 simulations distinctes, dont les résultats sont ensuite sommés. Nous obtenons ainsi des résultats globaux qui tiennent mieux compte des dynamiques internes dif-

férentes pour chacun des segments.

L'intérêt de la segmentation provient également de la lecture des textes régissant la couverture sociale du secteur public, et des différences observées, notamment en ce qui concerne l'âge de départ à la retraite et les avantages accordés selon les corps.

Il a donc été décidé d'un commun accord avec les responsables de la caisse, de segmenter la population assurée comme suit :

- Groupe 1 : fonctionnaires et gardiens des eaux et forêts ;
- Groupe 2 : corps habillés (policiers, douaniers) ;
- Groupe 3 : enseignants du supérieur et magistrats ;
- Groupe 4 : militaires, gendarmes et sapeurs-pompiers.

### 1.3 LES PRESTATIONS SERVIES

Nous allons présenter ci-dessous la pension de vieillesse (l'objet de notre étude) qui est servie aux retraités selon les modalités suivantes :

#### **Conditions d'ouverture du droit :**

- - Âge de mise en retraite : l'âge de départ à la retraite varie entre 50 et 67 ans en fonction des catégories de fonctionnaires ;
- - Durée de service minimale :
  - Pour la pension proportionnelle : 15 ans (sans condition d'âge ou de durée de service pour le décès imputable au service, et pour l'invalidité imputable ou non imputable au service). Les militaires et les gardiens des préfectures peuvent bénéficier d'une pension proportionnelle à l'âge de 33 ans avec 15 ans de service ;
  - Pour la pension d'ancienneté : 30 ans d'annuités liquidables sauf pour les militaires (25 ans). En cas d'invalidité ou de décès imputable au service, la durée de stage minimale est de 15 ans.
- Retraite anticipée : réservée aux groupes des civils et des magistrats/universitaires avec une condition d'âge minimum de 50 ans (pour les femmes ayant élevé 3 enfants vivants au moins, aucune condition d'âge n'est requise) ;

#### **Base de calcul de la pension :**

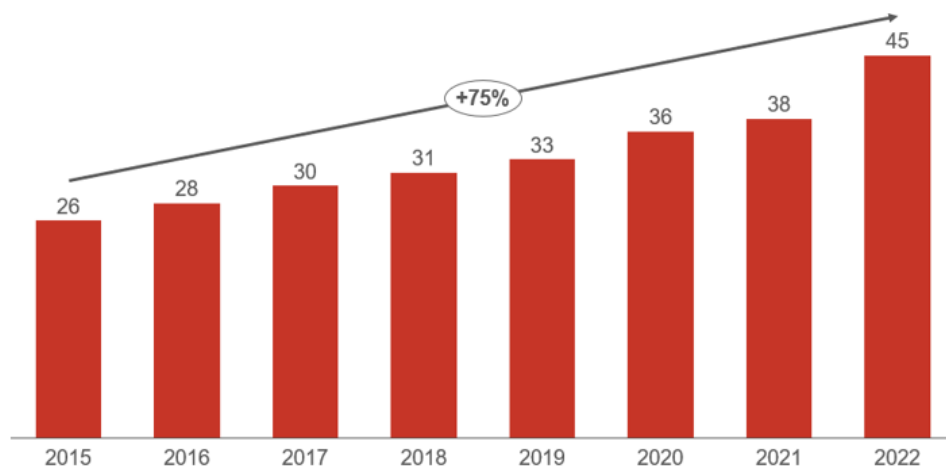
- Salaire de référence : Traitement indiciaire de base au moment du départ à la retraite à l'exclusion de toute indemnité ;
- Rendement des annuités : 2,5% des émoluments de base par annuité liquidable :  
$$Pa = 2,5\% * Sb * N$$
, avec :
  - Pa : la pension annuelle ;
  - Sb : le salaire de base ;
  - N : le nombre d'années de service

- Bonifications d'âge : accordée aux assujettis (civils de la catégorie B et C) au moment du départ anticipé à la retraite pour une période de 5 ans au plus (différentiel âge limite - 55 ans - et âge au moment du départ anticipé - 50 ans au moins) ;
- Bonifications de service réservée aux militaires, policiers et douaniers (accordée à la limite d'âge selon le grade pour les policiers et douaniers) ;
- Bonifications de service réservée aux militaires, policiers et douaniers (accordée à la limite d'âge selon le grade pour les policiers et douaniers) ;
- Bonifications pour validation d'années supérieures : pour les agents permanents ou contractuels de l'administration du pays sous réserve du paiement des retenues pour pension ;
- Majoration pour enfants : servie aux (i) titulaires d'une pension d'ancienneté dont la durée totale est égale au moins à 25 annuités liquidables pour les militaires et à 30 annuités liquidables pour les autres catégories, et (ii) aux titulaires d'une pension d'invalidité imputable au service. Cette majoration est équivalente à 10% de la pension pour 3 enfants âgés de 16 ans ou plus, majorée de 5% par enfant supplémentaire dans la limite de 6 (majoration maximum de 25%). Elle peut être accordée au père ainsi qu'à la mère fonctionnaire.
- Pension maximale : 80% de l'assiette indiciaire, y compris éventuellement toute bonification ; ce plafond est augmenté de la majoration pour enfant sans dépasser l'assiette indiciaire ;
- Pension minimale : l'équivalent de 15 années de service ;
- Revalorisation de la pension : automatique à chaque augmentation de la valeur indiciaire ;
- Remboursement des cotisations si les conditions requises pour l'ouverture du droit à pension ne sont pas remplies.

La caisse servie aussi d'autres types de prestations à savoir la pension d'invalidité, la pension de survivants, les allocations familiales et des prestations relatives à l'action sanitaire et sociale.

### 1.4 ANALYSE DE LA SITUATION COMPTABLE RECENTE DE LA CAISSE

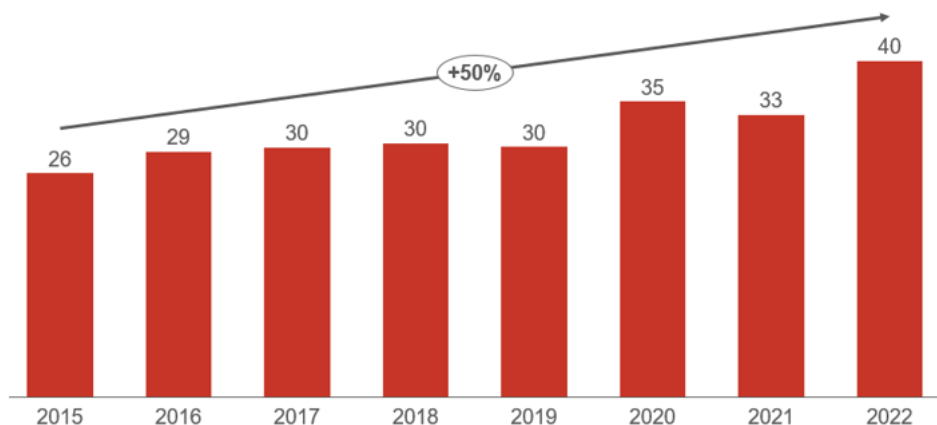
Analyserons tout d'abord la situation comptable actuelle de la caisse pour anticiper son évolution sur les prochaines cinquante années. Cette analyse prendra en compte les flux de cotisations et de prestations du régime de prévoyance sociale, ainsi que les coûts de gestion associés. Tout d'abord, la branche des pensions est de loin la plus importante et représente en 2022 environ 90% des prestations techniques servies par la Caisse. Au cours des 8 dernières années, la caisse a connu une augmentation significative des dépenses techniques. Les pensions servies ont eu une tendance haussière : elles ont augmenté de 75% sur la période, soit un taux de croissance annuel moyen (TCAM) de +9%, en passant de 26 milliards FCFA en 2015 à 5 milliards FCFA en 2022.



Source : Extractions transmises par la caisse

FIGURE 1.1 – Une hausse de 75% des pensions servies par la caisse sur la période 2015-2022 (milliards FCFA)

Quant aux cotisations, elles ont suivi un rythme d'évolution moins accéléré, avec une augmentation de 50% entre 2015 et 2022, soit un TCAM de +6%. En effet, le montant des cotisations est passé de 26 milliards FCFA à 40 milliards FCFA.



Source : Extractions et états financiers transmis par la caisse

FIGURE 1.2 – Les cotisations encaissées par la caisse ont connu une augmentation de +50% sur la période 2015-2022 (milliards FCFA)

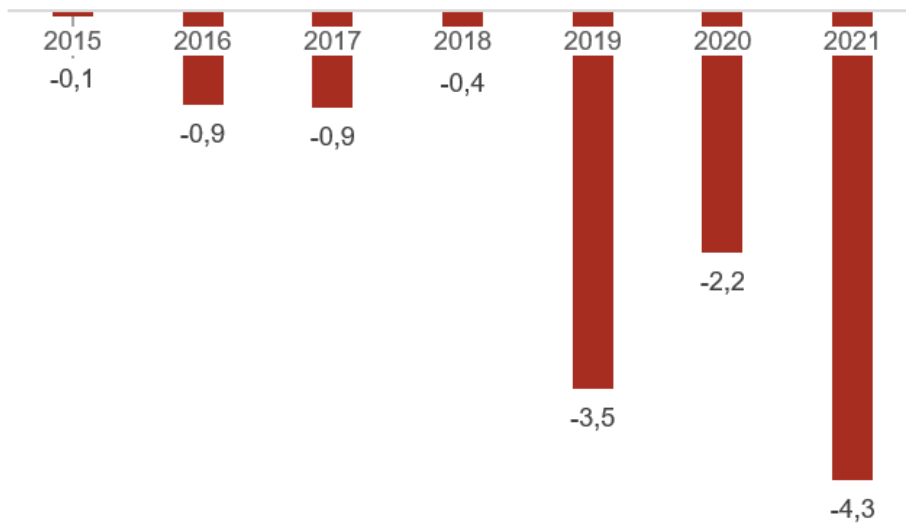
Les tendances qu'affichent les dépenses et les recettes techniques de la branche des pensions se traduisent naturellement par une réduction du solde technique, qui devient déficitaire à partir de 2017 (à hauteur de 343 millions FCFA). Ce déficit continue à se creuser pour atteindre 5,6 milliards FCFA en 2022.



**Source :** extractions transmises par la caisse

FIGURE 1.3 – Le déficit technique de la branche des pensions s’est fortement creusé ces dernière années (milliards FCFA)

Ce déficit est dû aux pensions qui pèsent presque 90% des dépenses techniques de la caisse, et ils ont augmenté à un rythme plus accéléré que celui des cotisations, ce qui a entraîné un creusement du déficit technique de la branche sur les 6 dernières années, et sans subvention de l’Etat, le déficit global de la Caisse est de 4 milliards FCFA en 2021 (milliards FCFA)



**Source :** extractions et états financiers transmis par la caisse

FIGURE 1.4 – Sans subvention, le déficit global de la Caisse atteint 4 milliards FCFA en 2021 (milliards FCFA)

Pour les autres types de prestation, les rentes d'invalidité ont enregistré une augmentation de +24% sur les 8 dernières années, mais les montants correspondants restent négligeables et les allocations familiales ont affiché une baisse de -7%.

# Chapitre 2

## CADRAGE DES SIMULATIONS ACTUARIELLES

### 2.1 ÉTAPES D'UNE ÉTUDE ACTUARIELLE

Une étude actuarielle repose sur une validation rigoureuse des données, essentielle pour garantir la fiabilité des analyses et simulations futures. Cette phase ne se limite pas à évaluer la qualité des données initiales, mais implique principalement la collecte de données fiables là où les sources primaires sont insuffisantes. Elle nécessite également le traitement des anomalies et l'ajustement des valeurs atypiques, grâce à une compréhension des défis spécifiques aux données en contexte similaire. Cette étape déterminante est suivie de la sélection de modèles et hypothèses adaptés aux objectifs de l'étude, structurée autour de quatre étapes clés qu'on détaillera ci-dessous :

#### 2.1.1 ÉTAPE N° 1 : COLLECTE DES DONNÉES

Dans cette étape, l'ensemble des données brutes nécessaires à l'implémentation du logiciel ATLAS© sont collectées auprès des différentes sources potentielles :

- Données de la Caisse de type générationnelles (cotisants, retraités, ...);
- Données de la Caisse de type financières (bilan, compte de résultat, ...);
- Données nationales démographiques, économiques et sociales.

#### 2.1.2 ÉTAPE N° 2 : RETRAITEMENT DES DONNÉES

Les données brutes transmises par les différentes sources présentent en règle générale des aberrations ou des incohérences nécessitant un nettoyage et l'élaboration de filtres et de tris.

Les données obtenues après le nettoyage et le filtrage sont transformés en informations via des traitements statistiques classiques comme la régression linéaire, l'ajustement et le lissage.

### 2.1.3 ÉTAPE N° 3 : HYPOTHÈSES ET OPTIONS DE MODÉLISATION

Les différentes informations obtenues à l'issue de la phase précédente sont combinées entre elles pour concevoir les inputs d'ATLAS©.

### 2.1.4 ÉTAPE N° 4 : LANCEMENT D'ATLAS©

Après la phase d'implémentation du fichier d'inputs, le programme est lancé. À partir du lancement, la phase de tests est réalisée : cohérence (validation de la cohérence et de la fiabilité des résultats) et robustesse (vérification de la robustesse des conclusions aux modifications de paramètres). Ainsi, certaines hypothèses sont revues suite au lancement des modélisations, afin que les résultats soient cohérents avec la réalité.

## 2.2 PRÉSENTATION DES HYPOTHÈSES

Les principales données utilisées pour déterminer les hypothèses macroéconomiques permettant de caler la simulation actuarielle sont issues de plusieurs sources :

- La Direction des Prévisions de la Direction de l'Économie du Ministère de l'Économie et des Finances ;
- L'Institut National de la Statistique du pays concerné ;
- La Banque Mondiale ;
- La Banque Centrale des États de l'Afrique de l'Ouest (**BCEAO**) ;
- Le Fonds Monétaire International.

### 2.2.1 HYPOTHÈSES AU PLAN NATIONAL : ÉCONOMIQUES, DÉMOGRAPHIQUES ET SOCIALES

La simulation des projections nécessite de préciser un certain nombre de paramètres macro-économiques. Les principales hypothèses macroéconomiques qui doivent être formulées concernent l'évolution des grandeurs suivantes sur la période de simulation :

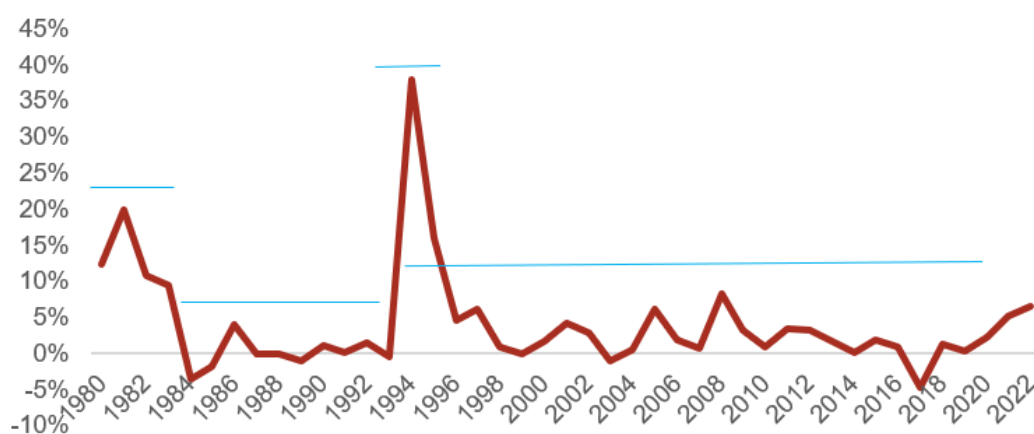
- Le taux de croissance annuel du Produit Intérieur Brut (PIB) réel ;
- Le taux de croissance annuel des prix à la consommation (taux d'inflation) ;
- Le taux de croissance de la population, qui impacte indirectement la taille de l'État et donc la population des cotisants de la caisse ;
- Le taux de croissance des salaires, qui impacte dans un premier temps l'assiette des cotisations, donc les recettes de la Caisse, puis dans un second temps les prestations qui sont une fonction des derniers salaires ;

Afin de définir les hypothèses de l'étude actuarielle des régimes gérés par la caisse, nous souhaitons disposer de données plus anciennes, ce qui a conduit à l'exploitation des données de la Banque Mondiale (BM), du Fonds Monétaire International (FMI) et de l'Institut National de la Statistique du pays.

### 2.2.1.1 LE TAUX D'INFLATION

L'évolution de l'indice des prix à la consommation de 1980 à 2022 est caractérisée par quatre phases :

- La première phase (1980-1983) est une phase de croissance modérée et régulière des prix ;
- La deuxième phase (1983-1993) est une phase de stabilisation durant une dizaine d'années ;
- La troisième phase (1993-1995) est une phase marquée par une explosion des prix, due notamment à la dévaluation du FCFA ; cette forte inflation s'adoucit durant les 15 années suivantes ;
- La quatrième phase (1995-2022) est une phase de croissance croître à un rythme plutôt maîtrisé.



Source : Banque Mondiale, BEAC, FMI, INSEED.

FIGURE 2.1 – Taux d'inflation annuel entre 1980 et 2022

La dynamique du taux d'inflation est rythmée par des évolutions relativement contrastées permettant d'identifier une périodisation. L'ensemble de la période 1980-2022 est en effet caractérisé par un taux d'inflation moyen des prix à la consommation d'environ 3,51%. Elle peut être aisément décomposée en trois sous-périodes identifiées par les lignes bleues horizontales sur le graphique ci-dessus et résumées par le tableau ci-après :

TABLE 2.1 – Périodisation du taux d'inflation

PÉRIODE	MOYENNE TAUX D'INFLATION	ÉCART-TYPE TAUX D'INFLATION
PÉRIODE GLOBALE : 1980 – 2022	4%	7,15%
PALIER 1 : 1980 – 1983	13,19%	4,71%
PALIER 2 : 1983 – 1993	0,89%	3,45%
PALIER 3 : 1993 – 1995	17,88%	19,30%
PALIER 4 : 1995 – 2022	2,89%	3,72%

Le taux d'inflation présente une évolution par palier :

- Le premier palier (1980-1983) est caractérisé par une inflation moyenne de 13,19% ;
- Le second palier (1983-1993) présente une légère évolution du taux d'inflation moyen qui est égal à 0,89% ;
- Le troisième palier (1993-1995) présente une forte volatilité durant la période avec notamment un pic observé en 1994, année de la dévaluation du franc CFA ;
- Le dernier palier (1995-2022) montre un niveau d'inflation moyen avec une valeur de 2,89% ; néanmoins, on note une tendance sinusoïdale avec des enchaînements de phases de croissance et de décroissance.

Pour la suite de notre étude, nous supposerons pour les simulations que le taux d'inflation pourra être stabilisé durablement à une valeur de 2% (moyenne des taux sur les 20 dernières années), ce qui constitue une hypothèse prudente.

### 2.2.1.2 TAUX DE CROISSANCE DU PIB

Dans le cadre de l'étude actuarielle, nous sommes amenées à projeter les cotisations et les prestations, sur des décennies futures. L'horizon de ces projections est tel que les grandeurs en question vont connaître des évolutions considérables, atteignant alors des niveaux incomparables avec la situation actuelle. Nous allons rapporter ces grandeurs à la richesse nationale, c'est-à-dire au PIB afin de pouvoir visualiser l'évolution.

Afin de définir les hypothèses de l'étude actuarielle de la caisse, nous avons comparé les données concernant les taux de croissance du PIB provenant de la base de données de la Banque Mondiale, du FMI et de l'INSEED, nous avons remarqué qu'ils oscillent entre -15% et 14%. À noter que cette approche ne vise pas à évaluer la qualité des statistiques des différentes sources, mais de disposer d'une série de PIB réel permettant une évaluation raisonnable du taux de croissance tendanciel de l'économie du pays. Nous avons remarqué une concordance forte des données des trois sources choisies, nous allons retenir pour le cadrage la moyenne des trois séries : la Banque Mondiale, le FMI et l'INSEED. Et pour une meilleure évaluation du taux de croissance, nous allons segmenter le taux de croissance par moyenne périodique. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

TABLE 2.2 – Taux de croissance annuel moyen par période

PÉRIODES	TAUX DE CROISSANCE ANNUEL MOYEN
5 DERNIÈRES ANNÉES	+4,54%
10 DERNIÈRES ANNÉES	+5,04%
15 DERNIÈRES ANNÉES	+5,27%
20 DERNIÈRES ANNÉES	+4,08%
25 DERNIÈRES ANNÉES	+3,81%
30 DERNIÈRES ANNÉES	+3,89%

Que l'on considère le court, le moyen ou le long terme, les différents indicateurs figurant

dans le tableau ci-dessus convergent.

L'économie du pays semble durablement installée sur un rythme de croissance compris entre +3,81% et +5,27% par an. Il serait optimiste et peu prudent d'anticiper, sur la période de simulation, un taux de croissance moyen de l'ordre de +5% par an, à l'instar de la moyenne sur les 10 dernières années.

Pour cela, nous allons adopter, pour les simulations actuarielles l'hypothèse « intermédiaire » d'un taux de croissance du PIB réel de +4% qui correspond au taux de croissance moyen sur les deux dernières décennies.

### 2.2.1.3 HYPOTHESES DEMOGRAPHIQUES

Le cadrage démographique permet de fixer les hypothèses, pour la période 2022-2072, relatives à la démographie de la population du pays dont dépend plus ou moins directement la population assujettie au régime géré par la caisse.

#### PROJECTION DE LA POPULATION DU PAYS

Les projections démographiques de l'ONU indiquent que la population du pays devrait passer de 8 millions aujourd'hui à environ 21 millions en 2072 (Annexe : Projections démographiques du pays par l'ONU)

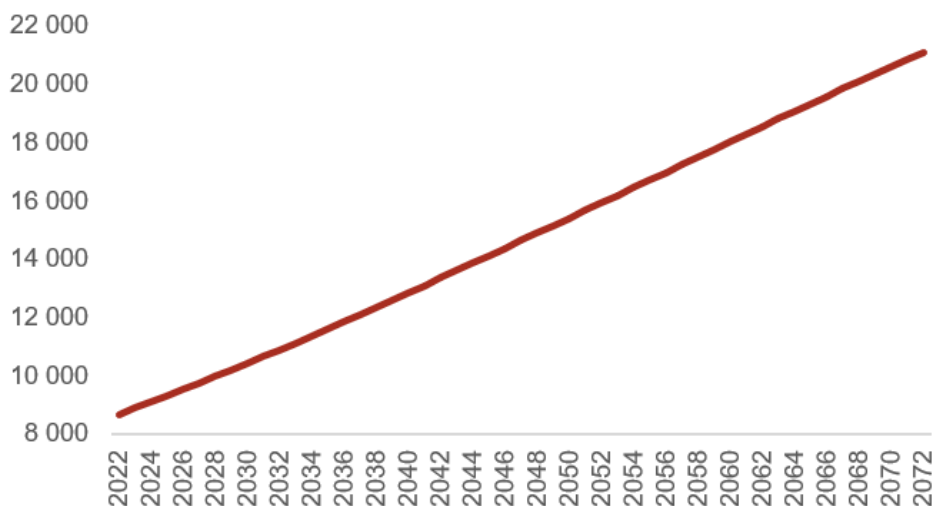
Le taux de croissance démographique varie selon différentes périodes, comme en témoigne le tableau ci-dessous :

TABLE 2.3 – Taux de croissance moyen sur les différentes périodes

PERIODE	TAUX DE CROISSANCE MOYEN
COURT TERME (2022 – 2027)	2,34%
MOYEN TERME (2022 – 2032)	2,29%
LONG TERME (2022 – 2042)	2,18%
TRES LONG TERME (2022 – 2072)	1,79%

Sur les cinq prochaines années, la population du pays aurait une croissance annuelle moyenne de 2,34% ; ce taux s'établit à 2,29% si l'on considère le moyen terme (2022-2032) alors qu'il ne serait que de 1,79% si on considérait les 50 prochaines années 2022-2072.

Les graphiques ci-dessous présentent la projection de la population du pays et le taux de croissance démographique du pays sur les cinquante prochaines années, qui sont retenues comme hypothèses de projections.

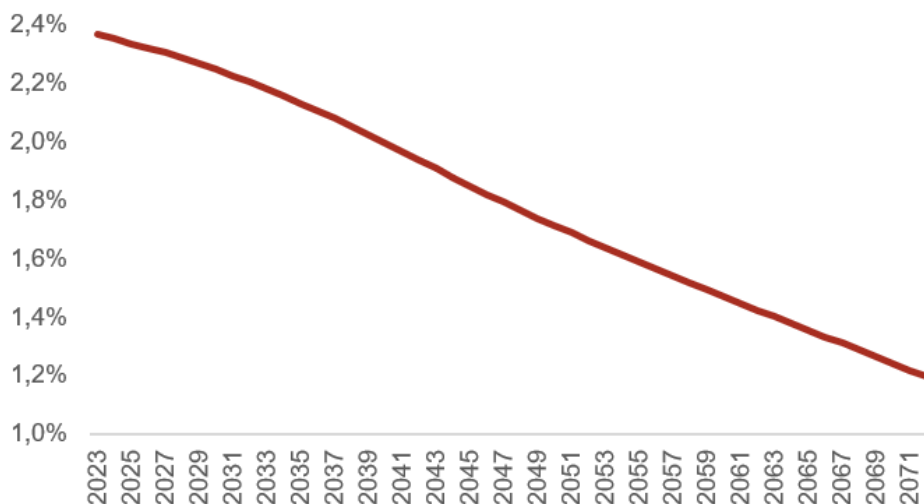


Source : données ONU.

FIGURE 2.2 – Projection de la population du pays en milliers (2022-2072)

Présentons maintenant le taux de croissance démographique au cours des 50 prochaines années :

$$\text{Taux de croissance démographique} = \frac{P(t) - P(t-1)}{P(t-1)} \times 100$$



Source : données ONU.

FIGURE 2.3 – Taux de croissance démographique (2022-2072)

On constate que le taux de croissance démographique entre 2022 et 2072 a tendance à la baisse. Il diminue de façon régulière sur cette période de 50 ans. Il commencera à environ

2,4% en 2023 et décroîtra progressivement jusqu'à atteindre environ 1,2% en 2072. Cette tendance décroissante peut suggérer plusieurs dynamiques démographiques sous-jacentes, telles que :

- Diminution du taux de natalité ;
- Augmentation du taux de mortalité ;
- Modifications des schémas migratoires (diminution de l'immigration nette ou une augmentation de l'émigration).

**TABLE DE MORTALITÉ ET ESPÉRANCE DE VIE :**

Nous allons s'appuyer sur les données de l'espérance de vie par tranches de 10 ans de l'ONU. Pour le pays dont nous ferons l'étude, sur les 50 prochaines années, l'espérance de vie à 60 ans, tous sexes confondus, augmenterait d'environ 2 ans (1,6 pour les hommes et 2 ans pour les femmes), soit 0,4 an tous les 10 ans.

TABLE 2.4 – Projections de l'espérance de vie à la naissance au pays

	<b>2020-2030</b>	<b>2030-2040</b>	<b>2040-2050</b>	<b>2050-2060</b>	<b>2060-2070</b>
<b>HOMMES</b>	15,1	15,5	15,9	16,3	16,7
<b>FEMMES</b>	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0

Source : <http://esa.un.org/unpd/wpp/>

Nous avons choisi d'inclure dans notre analyse les tables de mortalité de l'ONU/OMS, établies à partir d'enquêtes démographiques nationales, du décompte des décès dans les ménages collectés lors des opérations de recensement, ainsi que d'estimations directes basées sur la survie de la population, obtenues lors des enquêtes. En plus de ces données, les tables tiennent compte de l'impact des grandes pandémies (sida, tuberculose, paludisme, etc.).

Les coefficients de mortalité implémentés pour l'année de base et pour l'année finale sont synthétisés ci-après.

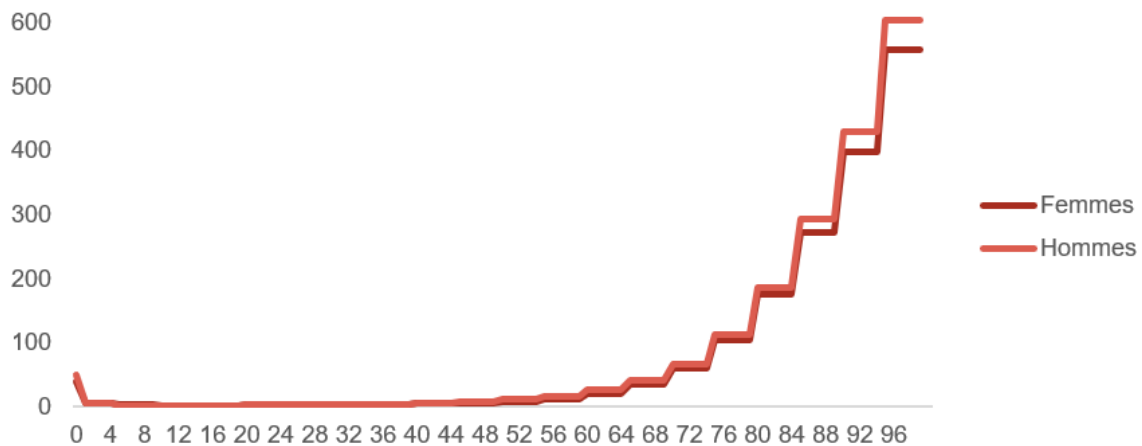


FIGURE 2.4 – Mortalité par âge en 2020 (par 1.000 individus)

Source : <http://esa.un.org/unpd/wpp/>

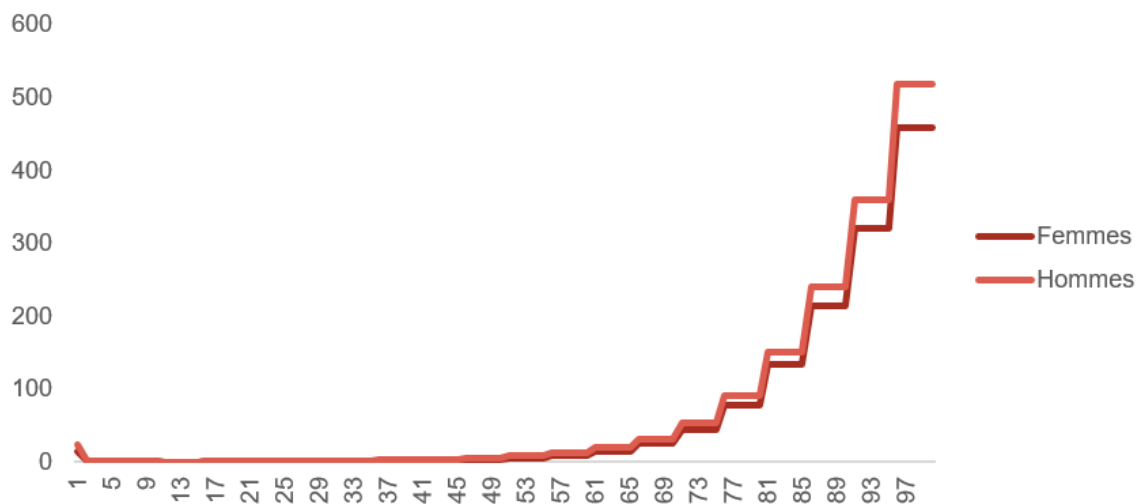


FIGURE 2.5 – Mortalité par âge en 2065 (par 1.000 individus)

Source : <http://esa.un.org/unpd/wpp/>

## 2.2.2 HYPOTHÈSES SUR LA CROISSANCE DES EFFECTIFS ET DES REVENUS DES COTISANTS

### 2.2.2.1 ÉVOLUTION DES EFFECTIFS DES COTISANTS

Pour estimer le nombre de cotisants, il convient d'estimer le taux de cotisation par rapport à la population du pays, en se basant sur les données fournies par l'ONU.

Lors de la première évaluation actuarielle en 2010, la population des cotisants à la caisse a été scindée en 4 groupes homogènes comme nous avons présentés au début. Nous observons une quasi-stabilité de la proportion des cotisants de chaque groupe par rapport à la population nationale au cours des 5 dernières années de l'étude.

TABLE 2.5 – La proportion des cotisants par rapport à la population nationale est quasi-stable sur les 5 dernières années de l'étude pour les 4 groupes

	2018	2019	2020	2021	2022	MOYENNE 2018-2022
COTISANTS G1	40.778	39.415	40.282	41.159	45.121	41.351
G1/POPULATION NATIONALE	0,52%	0,49%	0,49%	0,49%	0,52%	0,50%
COTISANTS G2	4.076	4.166	5.006	5.524	5.401	4.835
G2/POPULATION NATIONALE	0,05%	0,05%	0,06%	0,07%	0,06%	0,06%
COTISANTS G3	500	504	489	479	546	504
G3/POPULATION NATIONALE	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
COTISANTS G4	14.527	16.364	16.271	16.226	16.497	15.977
G4/POPULATION NATIONALE	0,18%	0,20%	0,20%	0,19%	0,19%	0,19%
TOTAL COTISANTS	59.881	60.449	62.048	63.388	67.565	62.632
TOTAL COTISANTS / POPULATION NATIONALE	0,76%	0,75%	0,75%	0,75%	0,78%	0,76%

Sur les dernières décennies, l'évolution des effectifs de fonctionnaires a été marquée par deux phénomènes principaux :

- Une politique d'ajustement structurel comprenant un gel des recrutements et des incitations au départ anticipé à la retraite, toutes administrations confondues ;
- La reprise des recrutements depuis 10 ans, pour combler les manques d'effectifs de fonctionnaires dans certains corps.

Ainsi, à l'avenir, on peut supposer les hypothèses suivantes sur l'effectif des fonctionnaires :

- Recrutement de fonctionnaires en fonction de l'augmentation de la population : besoin d'adapter les services de police, santé, éducation au nombre d'habitants ;
- Une incitation au départ dans certaines administrations centrales, en lien avec le besoin de renouvellement des effectifs et de la modernisation des outils de gestion.

Dans le cadre des études prospectives à horizon 2072, la démarche adoptée est la suivante :

- Une augmentation prévisible des effectifs de la fonction publique en fonction de l'évolution de la population nationale ;
- Mais une proportion de fonctionnaires, par rapport à la population totale, plus faible qu'aujourd'hui pour tenir compte de la poursuite de l'effort de modernisation des processus et outils de travail, et de la baisse relative de la proportion de fonctionnaires en conséquence ;
- Un test de sensibilité crucial sur cette hypothèse, pour déterminer un intervalle de confiance pour les projections financières.

Nous retenons pour l'étude un effectif de fonctionnaires en proportion de la population nationale de 0,78% pour tout l'horizon de simulation.

En appliquant ces taux à la population des cotisants (tous groupes confondus), celle-ci passe de 67.565 en 2022 à 164.256 en 2072, enregistrant ainsi un TCAM de +1,74%. Nous supposons que les effectifs des 4 groupes connaîtront une évolution similaire et afficheront un TCAM de +1,74% sur l’horizon de simulation.

### 2.2.2.2 EVOLUTION DE LA PRODUCTIVITE ET DES SALAIRES

La rémunération des fonctionnaires est composée du traitement indiciaire (l’assiette de cotisation), de la sujétion et des indemnités diverses.

L’évolution annuelle de la valeur du point d’indice nominal a atteint une moyenne de 1,30% entre 1980 et 2022. Or, l’évolution des salaires du secteur privé qui résulte du calcul sur la base des indicateurs relatifs à la démographie et l’économie du pays, est différente :

- En considérant un partage de la valeur ajoutée et un taux de chômage constants, le taux de croissance des salaires réels  $T_{SR}$  est directement donné par le taux de croissance du PIB,  $T_{PIB}$ , et le taux de croissance démographique,  $T_D$ .

$$T_{SR} = T_{PIB} - T_D$$

Avec un TCAM de la population de 2,75% et un TCAM du PIB de 2,63% entre 1980 et 2022, le taux de croissance des salaires réels sur cette période s’élève à -0,12%.

- Le taux de croissance des salaires nominaux ( $T_{SN}$ ) de l’année 1980 est alors obtenu en ajoutant simplement au taux de croissance des salaires réels ( $T_{SR} = -0,12\%$ ), le TCAM du taux d’inflation entre 1980 et 2022 ( $T_P = 3,5\%$ ) selon la formule :

$$T_{SN} = T_{SR} + T_P$$

Un rapide calcul permet ainsi d’obtenir un taux de croissance des salaires nominaux évalué à 3,38% sur l’horizon de simulation.

Ainsi, le  $T_{SN}$  est environ 3 fois plus élevé que l’évolution annuelle de la valeur du point d’indice nominal, nous obtenons un ratio :

$$Ratio = \frac{T_{SN}}{EIN} = \frac{3,38\%}{1,30\%} = 2,6$$

Avec :  $EIN$  l’évolution annuelle de la valeur du point d’indice nominal. Donc, nous allons maintenir ce ratio (2,6) pour l’horizon de la simulation.

Ainsi, sous l’hypothèse d’un taux de croissance démographique de +1,79% et d’un taux de croissance du PIB réel de +4% annuel sur le long terme, le taux de croissance des salaires réels serait de +2,17% annuel pour les secteurs publics comme privés.

Avec une inflation de 2%, le taux de croissance des salaires nominaux s'établit à +4,2% annuel pour les secteurs publics comme privés. En ce qui concerne uniquement le secteur public, nous supposons alors que l'évolution de la valeur du point d'indice nominal atteindra +1,62% sur l'horizon de simulation (4,2% / 2,6).

Notons qu'en plus de l'évolution du point d'indice de 1,3% par an en moyenne sur la période de 1980 à 2022, il y a eu des changements au niveau de la grille des salaires qui doivent être pris en compte également dans les facteurs d'augmentation des salaires. Ce deuxième impact ne peut pas être mesuré mais il laisse penser que l'hypothèse de +1,62% par an est sous-évaluée puisque basée uniquement sur la revalorisation du point d'indice. Nous retenons ainsi pour hypothèse un taux de +2% par an de croissance des salaires nominaux des agents de l'État, qui est en phase avec l'hypothèse d'inflation.

### 2.2.3 RÉSUMÉ DES HYPOTHÈSES DE CADRAGE ÉCONOMIQUE ET DÉMOGRAPHIQUE

Les hypothèses du cadrage économique et démographique sont résumées dans le tableau ci-dessous :

TABLE 2.6 – Résumé des hypothèses de cadrage économique et démographique

HYPOTHESES	VALEUR 2020-2070
TAUX D'INFLATION	+2%/an
TAUX DE CROISSANCE DU PIB REEL	+4%/an
TAUX DE CROISSANCE DES SALAIRES	+2%/an
TAUX DE CROISSANCE DES EFFECTIFS DE COTISANTS	Un TCAM de +1,74% sur l'horizon de simulation.
TAUX DE CROISSANCE DEMOGRAPHIQUE NATIONAL	+2,34%/an sur le court terme, +2,29%/an sur le moyen terme, +2,18%/an sur le long terme et 1,79%/an sur le très long terme
MORTALITE ET ESPERANCE DE VIE	Tables ONU

### 2.2.4 DONNÉES ET HYPOTHÈSES SPÉCIFIQUES À LA CAISSE

#### 2.2.4.1 POPULATION DE COTISANTS

Les prévisions d'évolution des cotisations et prestations du régime géré par la caisse nécessitent de connaître certaines caractéristiques de la population cotisante.

La projection des cotisations repose à la fois sur une composante démographique (projection de la population de cotisants par âge et par sexe) et sur une composante financière (projection des revenus de cotisants par classe d'âge et par sexe).

La projection de la population cotisante assujettie au régime de la caisse sur l'horizon de simulation nécessite l'obtention de la population cotisante de base par classe d'âge et par sexe :

- Les flux entrants de nouveaux cotisants sont calculés à partir du taux de croissance de la population de cotisants et de la ventilation des nouvelles entrées par classe d'âge et par sexe ;
- Les flux sortants sont les suivants :
  - Les décès en activité qui sont calculés à partir des tables de mortalité par sexe ;
  - Les départs en retraite qui sont chiffrés à partir des probabilités de départs en retraite par sexe.

Le cadrage démographique de la caisse nécessite de déterminer les caractéristiques de la population immatriculée de la Caisse.

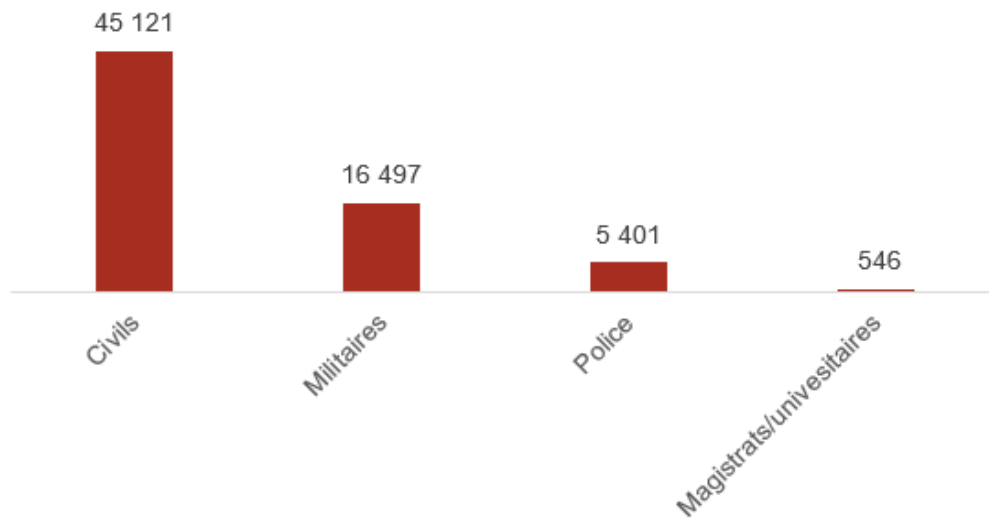
Les données des populations immatriculées et salariées ont été obtenues à partir de requêtes informatiques sur le système d'information de la caisse.

### **STOCK INITIAL DE COTISANTS :**

La population d'actifs cotisants pour l'année de base a été extraite des données 2022, retraitées et réparties par âge et par sexe, et par groupe.

Sur la base des fichiers fournis par la caisse, et leur retraitement, nous avons reconstitué la population d'immatriculés.

Comme présenté dans la figure ci-dessous, les groupes des fonctionnaires civils (G1) et militaires (G4) sont prépondérants, les autres groupes étant marginaux. Cependant, les réglementations régissant leurs statuts étant très différente et l'enjeu de leur réforme étant différent de celui des groupes principaux, il était utile de les modéliser séparément.



**Source :** données transmises par la caisse

FIGURE 2.6 – Répartition des effectifs de cotisants par groupe (2022)

### DISTRIBUTION DES NOUVEAUX COTISANTS PAR AGE ET SEXE

L'effectif des nouveaux cotisants est déterminé en se référant à l'année de recrutement.

Les nouveaux cotisants affiliés au régime chaque année sont distribués par âge et sexe selon la distribution moyenne observée :

- Sur les 5 dernières années (de 2018 à 2022) pour les groupes G1 et G4 ;
- Sur 2018 et 2019 pour le groupe G2 (pas de recrutement depuis 2020) ;
- Sur la période de 2018 à 2020 pour le groupe G3 (pas de recrutement depuis 2021).

Ainsi, nous retenons ces distributions moyennes pour les simulations. Les distributions retenues pour les deux principaux groupes sont les suivantes :

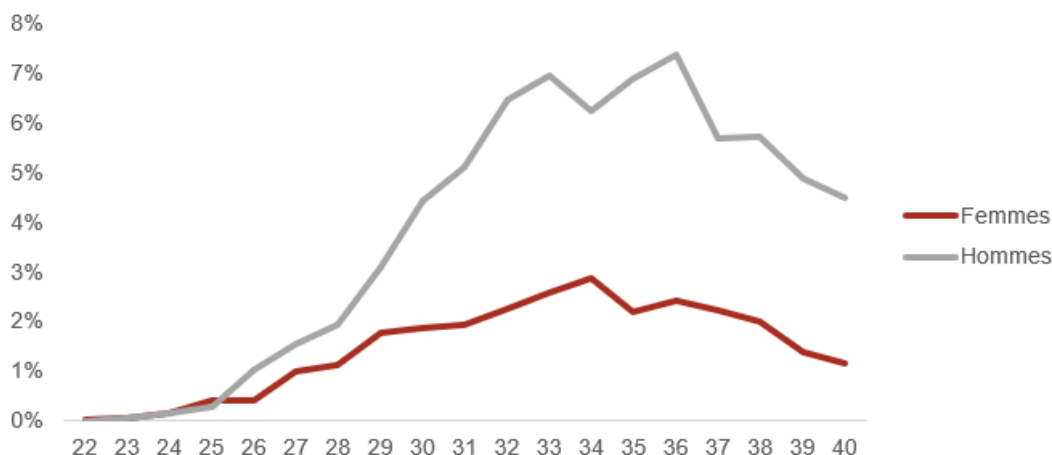


FIGURE 2.7 – Hypothèse de distribution par âge et sexe des nouveaux cotisants (G1 - civils)

Il ressort des analyses que pour le groupe G1, les femmes ne représentent que 9,3% des nouveaux cotisants sur la période de 2018 et 2022.

Dans ce cadre, nous retenons pour hypothèse une distribution en ligne avec la réalité des années passées telle que décrite ci-dessus pour chaque groupe.

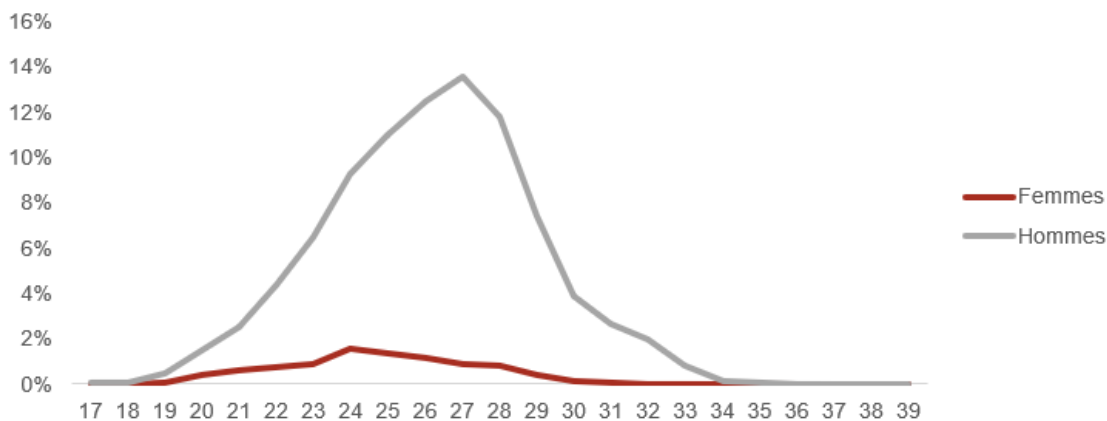


FIGURE 2.8 – Hypothèse de distribution par âge et sexe des nouveaux cotisants G4 - militaires

#### 2.2.4.2 SALAIRES ET PROFILS DE CARRIERE

Les projections des revenus des cotisants de la caisse reposent sur deux principaux facteurs :

- L'augmentation générale des salaires d'une (hypothèse formulée dans le cadrage macroéconomique) ;

- L’augmentation des salaires liée à l’âge et à l’évolution hiérarchique : Les profils salariaux sont déterminés en fonction de l’âge et de la progression de carrière, exprimés en pourcentage du salaire moyen des hommes de 20 ans. Ces profils indiquent les variations de salaire selon l’âge des travailleurs, basés sur les données fournies par la caisse.

Nous retenons, pour les projections les profils salariaux de l’année 2022, avec pour référence les salaires moyens annuels suivants (2022) :

- G1 (homme âgé de 23 ans) : 1.513.930 FCFA ;
- G2 (homme âgé de 21 ans) : 699.984 FCFA ;
- G3 (homme âgé de 32 ans) : 3.207.900 FCFA ;
- G4 (homme âgé de 20 ans) : 66.378 FCFA.

Les salaires des fonctionnaires sont indexés sur une grille indiciaire, assurant une stabilité relative par rapport au secteur privé.

Les données sont lissées pour exclure les valeurs aberrantes et les taux hypothétiques sont appliqués aux salaires lors du passage d’une cohorte à l’âge supérieur.

Les profils salariaux pour les deux principaux groupes sont présentés ci-dessous :

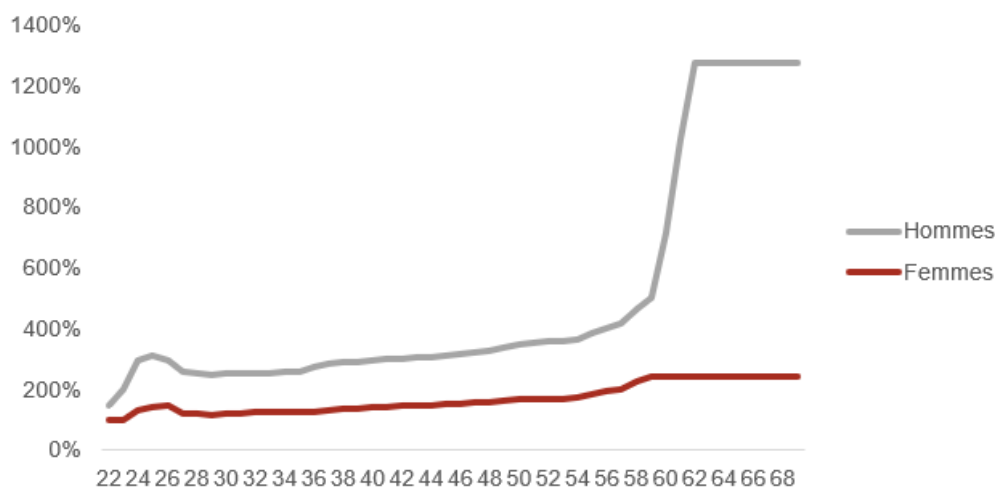


FIGURE 2.9 – Profil salarial par âge et par sexe (G1 – civils)

On observe dans le graphique que les salaires des hommes augmentent progressivement avec l’âge, avec une hausse marquée autour de 60 ans due aux primes de fin de carrière et aux indemnités de départ à la retraite. En revanche, les salaires des femmes augmentent de manière plus stable et modérée. Cette différence reflète les disparités salariales entre hommes et femmes et l’impact des avantages de fin de carrière sur les salaires des hommes à l’approche de la retraite.

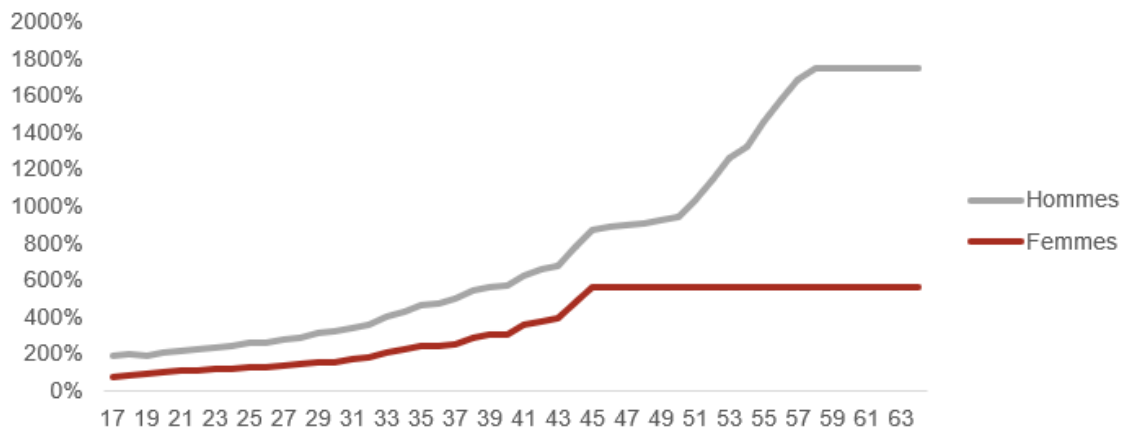


FIGURE 2.10 – Profil salarial par âge et par sexe (G4 - militaires)

On constate ici que les salaires des hommes augmentent progressivement avec l'âge, atteignant un pic significatif autour de 60 ans en raison des primes de fin de carrière et des indemnités de départ à la retraite et aussi une augmentation significative dans les dernières années de carrière. Les salaires des femmes augmentent d'une manière plus modérée et se stabilisent à la fin, et ils sont moins inférieurs que ceux des hommes.

### 2.2.4.3 POPULATION DE BENEFICIAIRES

La caisse gère le régime des pensions pour les fonctionnaires de l'État, les magistrats, les corps habillés, et les militaires. Ces bénéficiaires ont également droit aux allocations familiales en complément des pensions. Le régime de pensions comprend :

- La pension de vieillesse : d'ancienneté et proportionnelle ;
- La pension d'invalidité : imputable et non imputable au service ;
- La pension de réversion : versée aux ayants droit des fonctionnaires décédés.

En cas d'invalidité imputable au service pour les fonctionnaires hors militaires, la Direction Nationale des Assurances prend en charge le service d'une rente, financée par une cotisation versée par le budget de l'État.

Les pensions comprennent :

- Les années de service effectives (années cotisées) ;
- Une bonification de service pour certains groupes (les militaires, policiers, douane et femmes fonctionnaires ayant élevé des enfants) ;
- Une validation des années d'études supérieures sous condition de paiement d'une retenue pour pension.

Les bénéficiaires de prestations incluent :

- Les retraités fonctionnaires.

- Les veuves et veufs des fonctionnaires décédés.
- Les orphelins des fonctionnaires décédés.
- Les fonctionnaires bénéficiant d'une rente d'invalidité.

Pour les projections suivantes, seul l'effectif des bénéficiaires vivants au 31 décembre 2022 a été retenu.

TABLE 2.7 – Effectifs des bénéficiaires de la caisse en 2022

	PV	INVALIDITÉ IMPUTABLE AU SERVICE	CONJOINTS SURVIVANTS	ORPHELINS	TOTAL
G1	16.494	4	4.443	4.771	25.712
G2	1.139	7	258	277	1.681
G3	352	0	224	240	816
G4	7.331	139	1.428	3.215	7.470
TOTAL	25.316	150	6.353	8.503	35.679

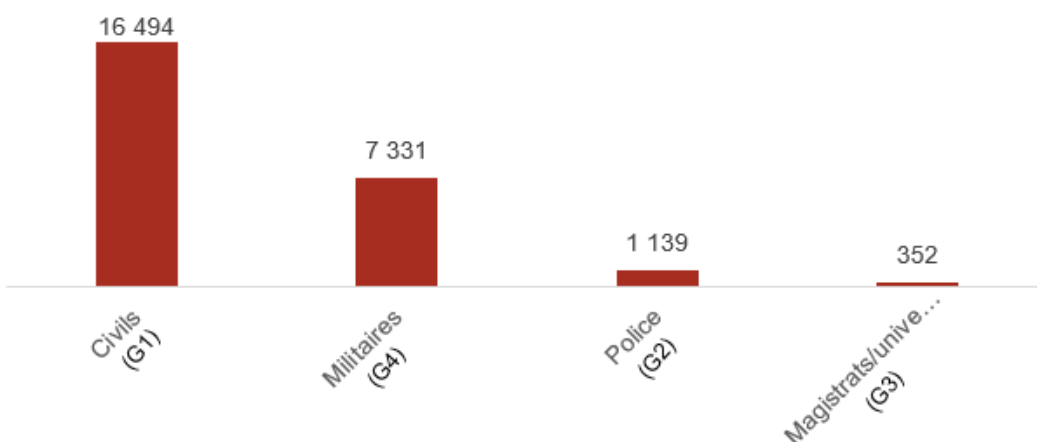
Source : données transmises par la caisse

#### 2.2.4.4 STOCK INITIAL DE RETRAITES

La population de retraités pour l'année de base a été extraite des données 2022, retraitées, et réparties par âge et par sexe.

Pour les projections de l'effectif des bénéficiaires de pension, il n'a été retenu que ceux qui, au 31 décembre 2022, continuent à percevoir une pension. Les retraités décédés au cours de l'année n'ont pas été retenus.

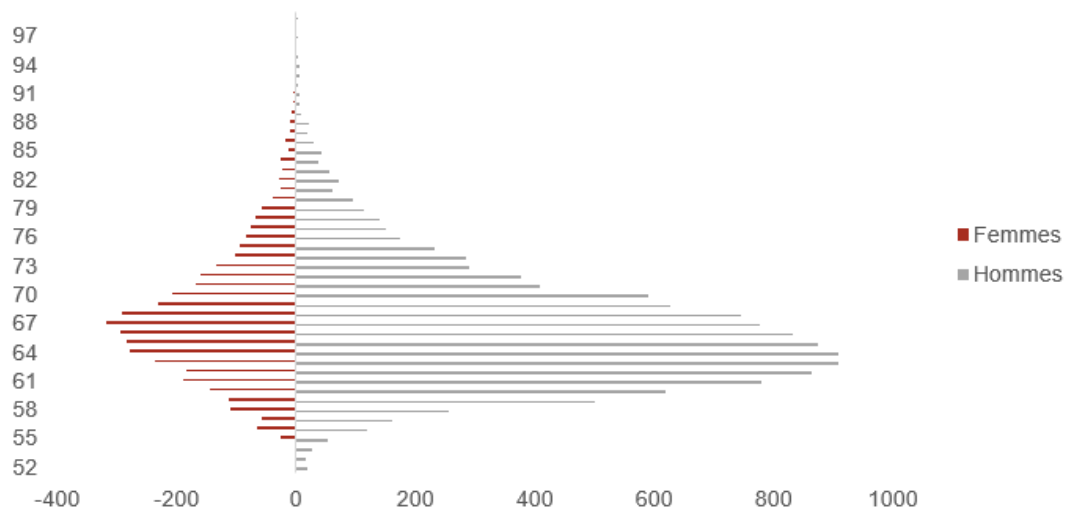
Après le tri et le classement, nous obtenons l'effectif des pensionnés par groupe. Comme présenté dans la figure ci-dessous, les groupes G1 et G4 sont prépondérants, les autres groupes étant marginaux.



Source : données transmises par la caisse

FIGURE 2.11 – Répartition des effectifs de retraités par groupe (2022)

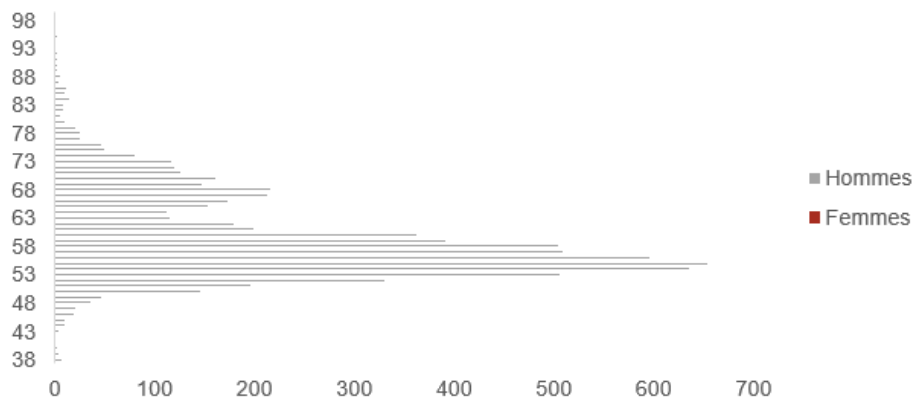
Pour les deux segments principaux, civils et militaires, nous représentons la distribution de la population par âge et par sexe du stock de retraités ci-dessous :



Source : données transmises par la caisse

FIGURE 2.12 – Pyramide des âges des retraités du G1 (civils) de la caisse (2022)

La Pyramide des âges du groupe G1 (civils) montre une forte concentration de l'effectif entre 60 et 65 ans, en ligne avec la forte progression du nombre de retraités ces dernières années.



Source : données transmises par la caisse

FIGURE 2.13 – Pyramide des âges des retraités du G4 (militaires) de la caisse (2022)

Le constat est le même pour les militaires. En effet, avec une forte concentration de l'effectif entre 50 ans et 60 ans (l'âge légal de départ à la retraite pour plusieurs catégories).

### 2.2.5 LES PROBABILITÉS DE DÉPART EN RETRAITE

La probabilité de départ en retraite par classe d'âge et par sexe est calculée selon la formule suivante :

$$Pr(N, a, s) = \frac{Nr(N, a, s)}{C(N, a, s)}$$

Avec :

- **Pr** : la probabilité de départ à la retraite ;
- **Nr** : le nombre de personnes qui partent en retraite ;
- **C** : les cotisants ;
- **A** : l'âge ;
- **S** : le sexe.

En ce qui concerne les tables de probabilités de départ en retraite (par âge, sexe, et par année), nous avons constaté que de nombreux dossiers de 2022 n'ont pas été déposés, et certains sont incomplets. Par conséquent, les pensions relatives à ces dossiers n'ont pas été liquidées.

Ainsi nous retenons comme hypothèse les probabilités suivantes :

- La moyenne de probabilité de départ à la retraite entre 2019 et 2021 pour les groupes G1, G2 et G3 ;
- S'agissant du groupe G4, nous retenons la moyenne des années 2018, 2019 et 2021 car le nombre des nouveaux retraités en 2020 n'est que de 10, contre une moyenne de 382 sur les trois années 2018, 2019 et 2021. Et comme il n'y a actuellement aucune femme militaire retraitée, nous retenons ainsi les probabilités des retraités hommes pour les deux sexes.

Les probabilités de départ à la retraite retenues pour les projections des deux principaux groupes sont ainsi présentées comme suit :

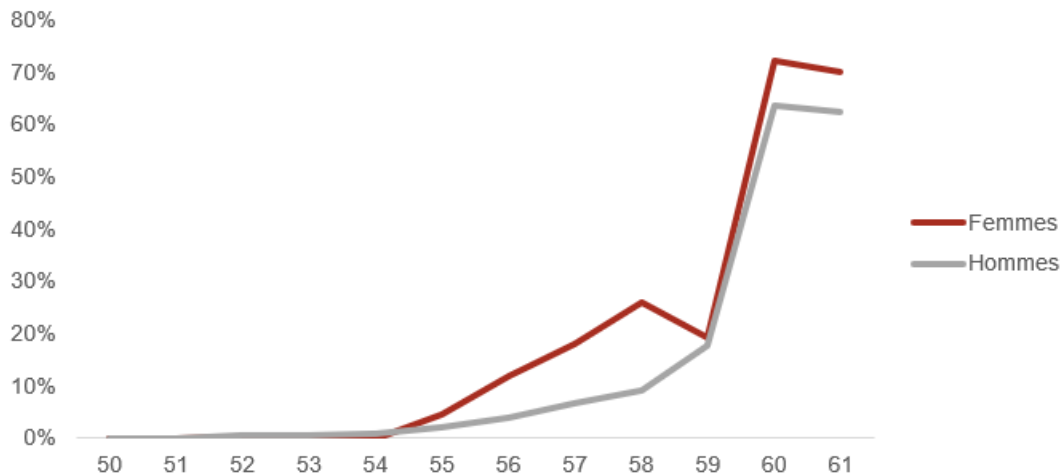


FIGURE 2.14 – Hypothèse de probabilités de départ en retraite par âge et sexe (G1 - civils)

Nous constatons que les femmes ont une probabilité plus élevée de partir à la retraite entre 55 et 60 ans par rapport aux hommes.

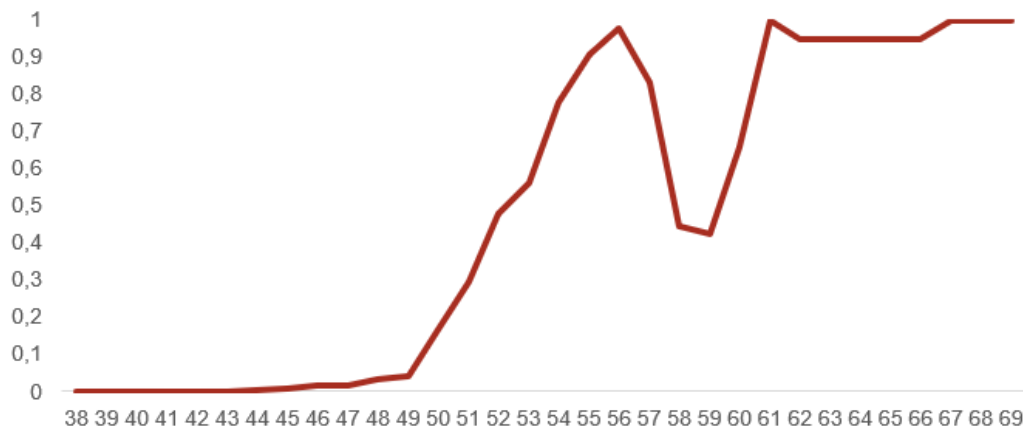


FIGURE 2.15 – Hypothèse de probabilités de départ en retraite par âge (G4 - militaires)

On observe une augmentation significative des probabilités de départ à la retraite à partir de 49 ans, atteignant un pic vers 55 ans, où la probabilité est proche de 1.

## 2.2.6 STOCK DE PENSIONS SERVIES POUR L'ANNÉE DE BASE DE PROJECTIONS

Dans cette partie, nous allons présenter la distribution moyenne des pensions par classe d'âge et par sexe autour de la moyenne en 2022. Les valeurs aberrantes ont été éliminées.

Après le retraitement des données, nous observons que pour tous les âges compris entre 60 ans et 90 ans du G1 (civils), les pensions perçues par les hommes sont légèrement supérieures à celles des femmes. Concernant la répartition par âge, les retraités âgés de 60 à 67 ans bénéficient des pensions moyennes les plus importantes pouvant atteindre plus de 130% pour les hommes et de 120% pour les femmes.

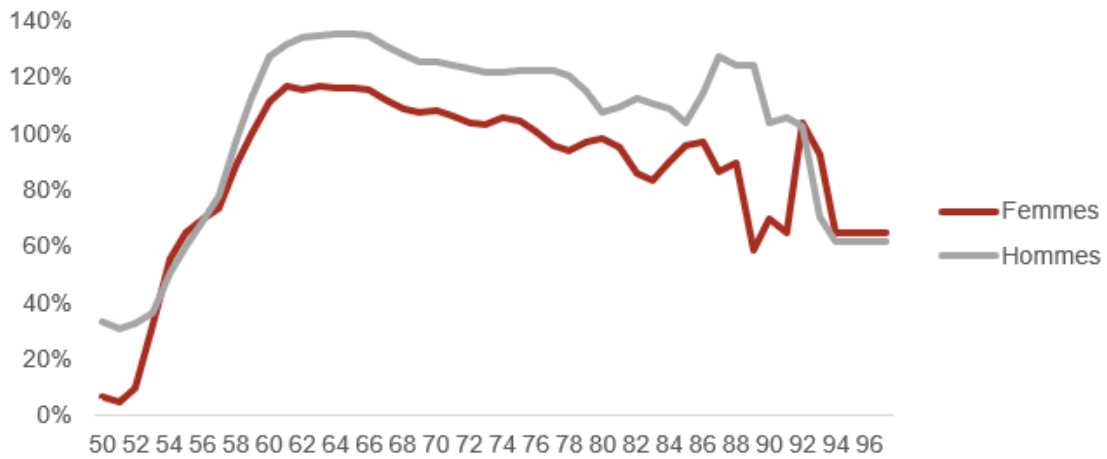


FIGURE 2.16 – Distribution des pensions de retraite moyennes par âge et par sexe (G1 - civils)

S'agissant des militaires, les pensions moyennes les plus élevées sont celles des catégories d'âge de 51 ans à 64 ans, et de 79 ans à 85 ans.

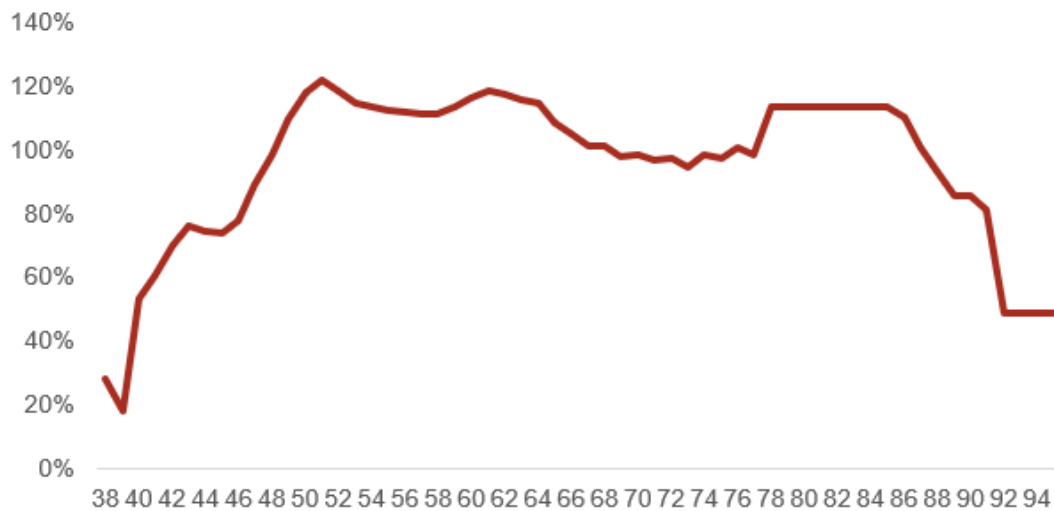


FIGURE 2.17 – Distribution des pensions de retraite moyennes par âge (Hommes G4 - militaires)

## 2.2.7 HYPOTHÈSES SUR LA GESTION ADMINISTRATIVE ET FINANCIÈRE

### TAUX DE RECOUVREMENT DES PRESTATIONS

Pour la détermination du taux de recouvrement, nous nous focalisons uniquement sur les cotisations encaissées et les pensions dues au cours de l'année considérée. Dans ce contexte, nous utilisons la formule suivante :

$$\text{Taux de recouvrement} = \frac{\text{Cotisation encaissées}}{\text{Pensions dues}} \times 100$$

TABLE 2.8 – Taux de recouvrement entre 2017 et 2020 (montants en milliards FCFA)

ANNEE	2017	2018	2019	2020	2021	2022	MOYENNE
TAUX DE RECOUVREMENT	73,9%	94,3%	92%	95%	90%	88%	88,9%

Source : Direction de Recouvrement

En ne tenant compte que des cotisations de l'année encaissée, les données transmises par la Direction de recouvrement font apparaître une moyenne du taux de recouvrement de 88,9% entre 2017 et 2022.

Notons que ce taux est faible par rapport à la norme au sein des caisses de sécurité sociale qui gèrent des régimes de fonctionnaires où le taux de recouvrement peut atteindre 100%.

En effet, le problème concerne les cas des nouveaux recrutés et les avancements dans la hiérarchie : l'information parvient à la Caisse tardivement, souvent deux années après les faits, et par conséquent, les recrutés en 2019, par exemple, ne figurent dans les fichiers qu'à compter de l'année 2021.

Cependant, les données de base correspondent aux salaires réellement déclarés et perçus, nous retenons ainsi un taux de recouvrement de 100% pour tout l'horizon de simulation.

#### 2.2.7.1 FRAIS DE GESTION, AUTRES CHARGES ET PRODUITS NON TECHNIQUES

Pour déterminer les frais de gestion, que nous devons fixer obligatoirement dans notre analyse, nous avons calculé leur proportion par rapport aux cotisations totales. Les frais de gestion et autres charges non techniques ne sont pas répartis par groupe dans les états financiers. Nous avons donc utilisé les pensions de vieillesse et les cotisations de 2022 pour estimer la part de chaque groupe, ce qui a donné : 74% pour G1, 4% pour G2 et G3, et 18% pour G4.

En moyenne, les frais de gestion et autres charges sur les cinq dernières années ont été calculés pour chaque groupe en fonction de ces poids. Bien que ces taux semblent faibles à long terme, en tenant compte des futurs projets de la Caisse, nous les avons majorés de 1% pour mieux refléter la réalité. Les taux utilisés pour la modélisation sont présentés dans le tableau ci-dessous.

TABLE 2.9 – Proportion des frais de gestion sur les cotisations

	<b>G1</b>	<b>G2</b>	<b>G3</b>	<b>G4</b>
FRAIS DE GESTION / COTISATIONS	4,32%	3,81%	4,46%	4,91%

TABLE 2.10 – Proportion des autres charges non techniques sur les prestations de vieillesse

	<b>G1</b>	<b>G2</b>	<b>G3</b>	<b>G4</b>
AUTRES CHARGES NON TECHNIQUES / PV	2,09%	2,64%	2,00%	1,78%

TABLE 2.11 – Proportion des autres produits non techniques sur les cotisations

	<b>G1</b>	<b>G2</b>	<b>G3</b>	<b>G4</b>
PRODUITS NON TECHNIQUES / COTISATIONS	2,0%	1,7%	2,1%	2,3%

### 2.2.7.2 TAUX DE RENDEMENT DES PLACEMENTS

Le taux de rendement des placements mesure l'efficacité et la performance des investissements en termes de revenus générés par rapport à la valeur initiale investie. Si nous ne considérons que les réserves que la Caisse avait placées (données transmises par la Direction Financière et Comptable), nous obtenons un taux de rendement de 5,8% en 2022.

TABLE 2.12 – Taux de rendement des placements sur les 3 dernières années (montants en millions)

	<b>2020</b>	<b>2021</b>	<b>2022</b>
INTERET DES COMPTES BANCAIRES	1.072	1.199	1.212
CAPITAL DAT	16.465	18.180	2.0657
REVENUS DES TITRES DE PLACEMENT	33	32	13
CAPITAL EN DEBUT D'EXERCICE	286	282	306
TAUX DE RENDEMENT	6,6%	6,7%	5,8%

Source : Direction Financière et Comptable de la caisse

Cependant, ce taux ne reflète pas fidèlement la réalité, car la Caisse ne place qu'une partie de ses réserves. Ainsi, en rapportant les produits financiers au total des réserves (71 milliards FCFA), nous obtenons un taux de rendement relativement faible (1,55% en 2020 et 1,73% en 2021). La moyenne de ce rapport sur la période 2020-2022 est de 1,64%. Pour les projections, nous retenons une hypothèse de taux de 2%, en phase avec l'hypothèse d'inflation. Par convention comptable, nous appliquons également ce taux en cas d'endettement de la Caisse.

## Chapitre 3

# SYNTHÈSE DES SIMULATIONS ET RAISONS DE LA CRISE

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats sur un horizon de 50 ans, nous constatons que c'est l'horizon adéquat pour disposer d'une vision prospective sur des régimes de long terme. Les valeurs financières présentées sont toutes exprimées en francs CFA constants de 2022.

Il est important de noter que la méthode de calcul de la pension, au moment de la liquidation, diffère en pratique des dispositions prévues par les textes. Par conséquent, nous allons simuler à la fois un "statu quo réglementaire" et un "statu quo pratique" afin que la caisse dispose des projections de son régime selon deux scénarios : (i) en pratique actuelle et (ii) dans le cas où la pratique s'adapte à la législation.

### 3.1 FORTE CROISSANCE DES PRESTATIONS

#### 3.1.1 L'ÉVOLUTION DE LA POPULATION DES ASSURÉS

Commençons tout d'abord par l'analyse des populations de cotisants et de bénéficiaires de pensions servies par la caisse.

Sur l'horizon de simulation (50 ans), nous anticipons que le nombre total de cotisants passe de 67.565 en 2022 à 164.256 en 2072, soit une augmentation de 143% sur la période (avec un taux de croissance annuel moyen de 1,74%).

S'agissant du nombre de retraités sur la même période, nos projections confirment une évolution de 222%. En effet, il passe de 25.316 en 2022 à 81.527 retraités en 2072 (avec un taux de croissance annuel moyen de 2,4%, supérieur à celui de la population des cotisants).

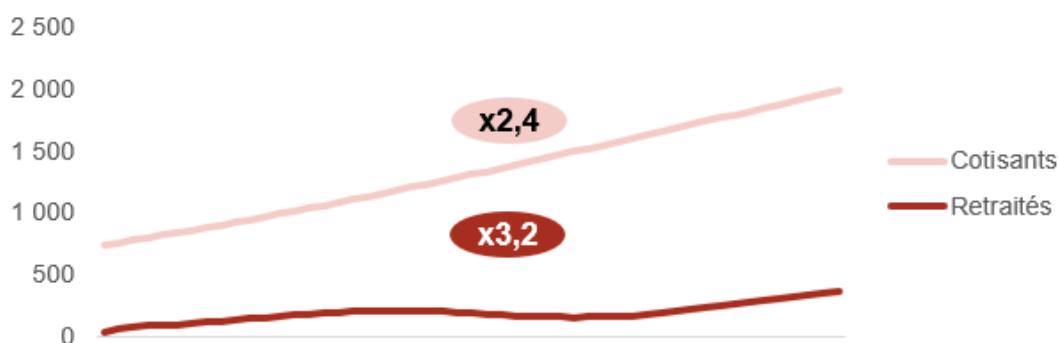


FIGURE 3.1 – Croissance des Retraités et des Cotisants sur l’Horizon de Simulation

On voit bien dans le graphique ci-dessus que l’effectif des retraités augmente plus rapidement que la base de cotisants de la caisse, ce qui laisse présager des difficultés croissantes en termes de financement du régime des pensions.

### 3.1.2 IMPACT DE LA CONFORMITÉ À LA RÉGLEMENTATION SUR LES RÉSULTATS DE LA CAISSE

La dynamique différente de l’évolution du nombre de retraités et de celle du nombre de cotisants se traduit naturellement dans la situation comptable de la caisse durant les 50 prochaines années. Si aucune réforme n’intervient :

- les prestations passeront de 46 milliards FCFA en 2022 à 236 milliards FCFA en 2072 (augmentation de +410%) ;
- les cotisations, passeront de 40 milliards FCFA à 103 milliards FCFA sur la même période (augmentation de +159%).

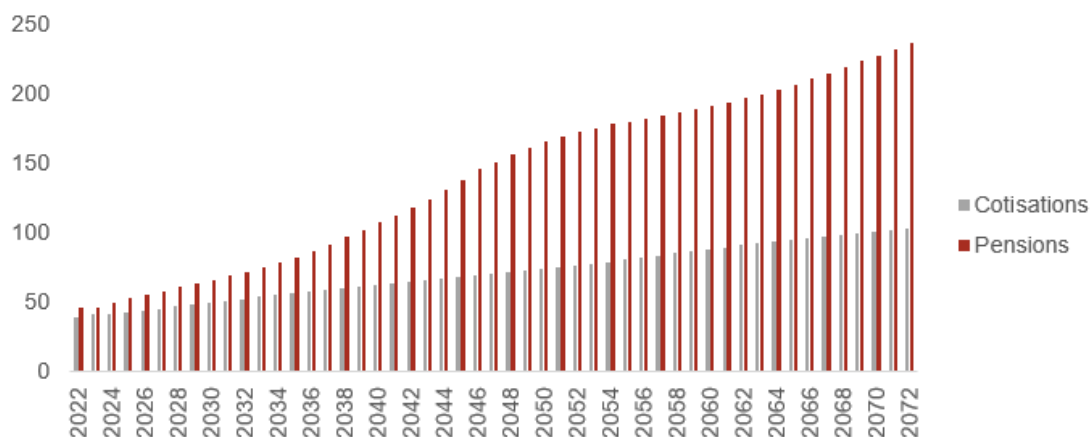


FIGURE 3.2 – Une dynamique importante des prestations par rapport aux cotisations (milliards FCFA constants de 2022)

Ces évolutions vont conduire à une évolution défavorable du rapport « pensions / cotisations » sur l’horizon de projections.

Cela se voit clairement qu’on on projette le solde technique, il y a un déficit qui est en voie de s’aggraver. Il est important de souligner que la principale cause de ce problème futur réside déjà dans la situation actuelle.

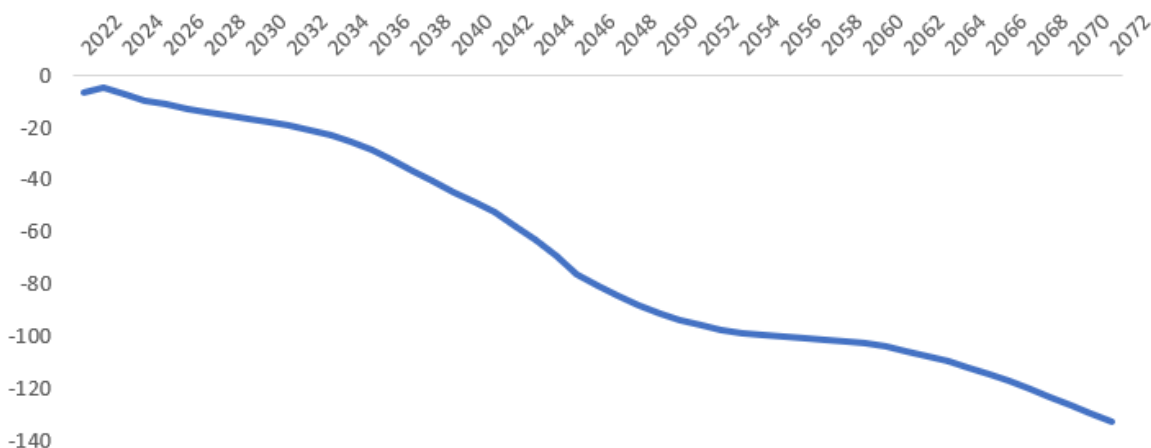


FIGURE 3.3 – Un solde technique déficitaire sur tout l’horizon de projection (milliards FCFA constants de 2022)

### DU SOLDE TECHNIQUE AU SOLDE GLOBAL

Pour passer du résultat technique au résultat global, deux éléments doivent être ajoutés :

- D'un côté, les réserves financières qui génèrent des produits financiers qui améliorent la situation, ainsi que les produits non techniques ;
- D'un autre côté, la gestion du régime qui implique un niveau de charges administratives.
- Le solde global correspond donc à la différence entre les cotisations augmentées des produits financiers et des produits non techniques, et les prestations augmentées des frais de gestion et des autres charges non techniques.

Pour les frais de gestion : s'ils demeurent modestes, ils passeront de 1,7 milliard FCFA en 2022 à 4,5 milliards FCFA en 2072 (multiplication par 3). Pour les autres charges non techniques, elles continueront à augmenter et atteindront 4,3 milliards FCFA en 2072 (un taux de croissance de 477% par rapport à l'année 2020). Ainsi, on atteint un déficit global net de 116 milliards FCFA en 2050, et de 209 milliards FCFA en 2072.

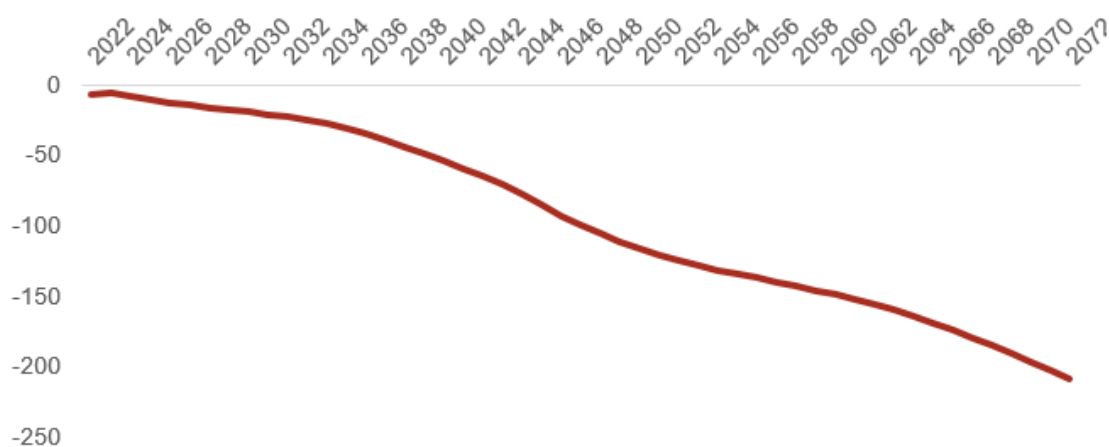


FIGURE 3.4 – Un solde global déficitaire sur les 50 prochaines années (milliards FCFA constants de 2022)

Les résultats et le graphique précédents fournissent une information essentielle sur l'ampleur du déficit en francs CFA à moyen et long terme, il convient alors de rapporter cette information au PIB.

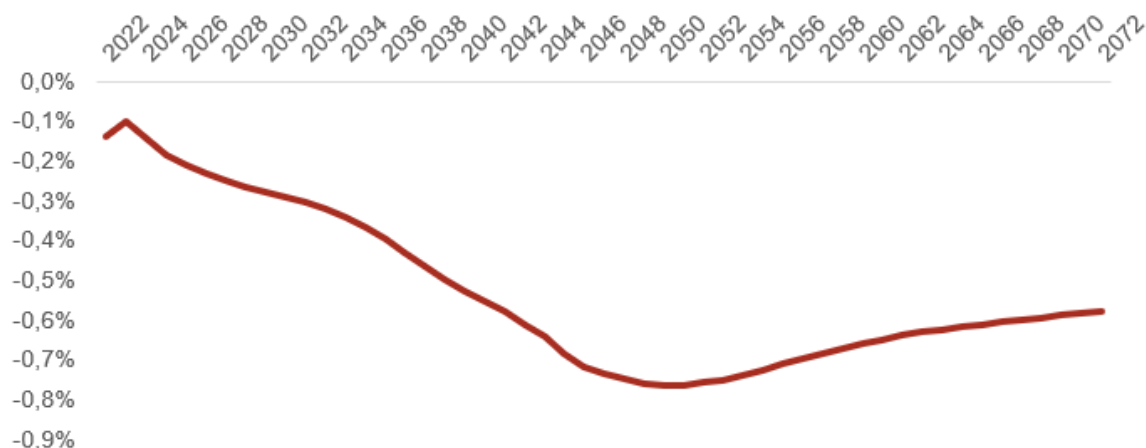


FIGURE 3.5 – Un solde global déficitaire atteignant une part importante du PIB

On constate que le solde global laisse place à un déficit qui se creuse jusqu'à atteindre un maximum de 0,8% du PIB en 2050. Cette part baisserait progressivement pour atteindre 0,6% en 2072.

### 3.1.3 TAUX DE COTISATION POUR ASSURER L'ÉQUILIBRE TECHNIQUE

Le taux de cotisation est un paramètre important qui permet d'assurer l'équilibre technique d'un régime de retraite en faisant face aux déficits croissants sans toucher aux prestations.

Après avoir projeté le taux de cotisation, on constate que s'il a été ajusté chaque année pour assurer l'équilibre technique de la branche retraite, il serait largement supérieur au taux actuel de 27%, il atteindrait jusqu'à 62% en 2072.

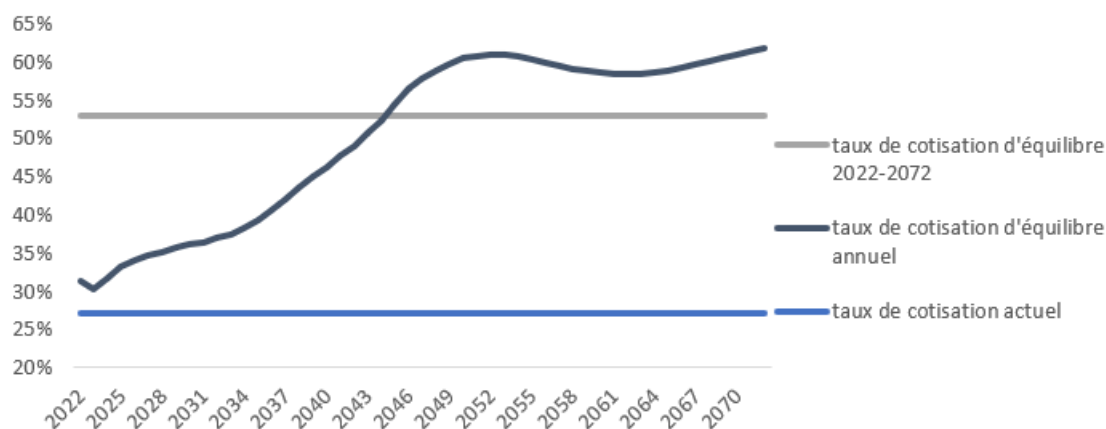


FIGURE 3.6 – Le taux de cotisation d'équilibre annuel atteint jusqu'à 62%

D'après la figure ci-dessus, on remarque que le taux de cotisation d'équilibre constant sur les 50 prochaines années s'établit à 53%, soit le double du taux de cotisation fixé actuellement par la législation.

Donc une augmentation du taux de cotisation est nécessaire pour assurer l'équilibre technique du régime jusqu'en 2072. Mais cette modification serait très difficilement acceptable aussi bien par les assurés que par les employeurs.

### 3.1.4 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL DE PENSION UTILISÉE EN PRATIQUE

Selon la réglementation en vigueur, le salaire de référence correspond à la valeur de l'indice initial de la catégorie à laquelle appartient le fonctionnaire. Cependant, dans la pratique, le calcul de la pension tient compte des divers changements de grille survenus tout au long de la carrière du fonctionnaire. La pension totale est alors composée d'autant de tranches de pension que de grilles indiciaires et ou de valeurs du point d'indice.

Cette méthode de calcul de la pension entraîne des résultats différents par rapport au statu quo « réglementaire », dans lequel nous appliquons le mode de calcul défini par les textes. C'est pourquoi nous simulons ci-après le « statu quo pratique », qui tient compte de la méthode appliquée par la caisse.

Étant donné l'impossibilité de simuler des cas individuels, nous considérons que cette méthode de calcul équivaut à prendre en compte une période de 15 années de salaires pour le calcul de la pension.

Cette approche de calcul conduit systématiquement à une baisse des prestations par rapport à la méthode réglementaire : 107 milliards FCFA contre 166 milliards FCFA en 2050, et 153 milliards FCFA contre 236 milliards FCFA en 2072.

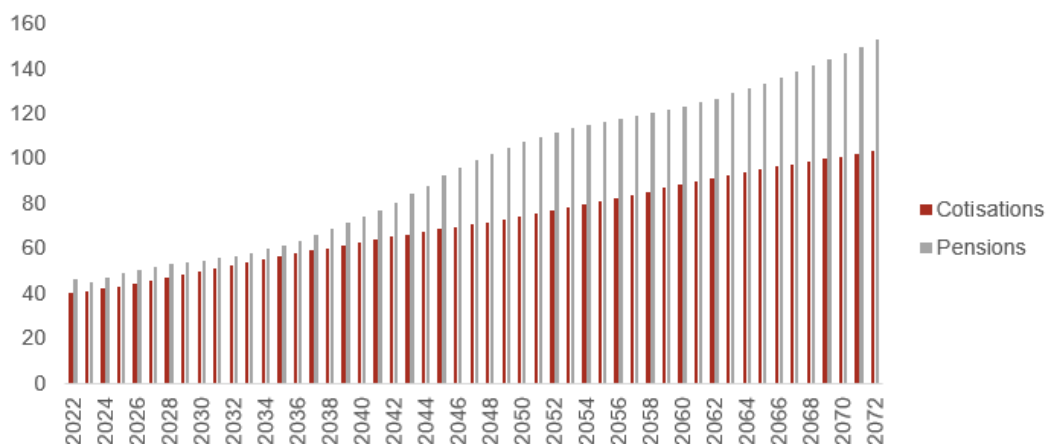


FIGURE 3.7 – Montant des prestations plus faible que dans le statu quo réglementaire, mais important par rapport aux cotisations (milliards FCFA constants de 2022)

Les prestations représenteront ainsi une part importante des cotisations qui ne cessera d’augmenter sur l’horizon de simulation pour atteindre 148% en 2072 (contre 230% dans le statu quo réglementaire).

Après calcul du rapport « prestations/cotisations », nous constatons qu’il augmentera considérablement sur l’horizon de simulation.

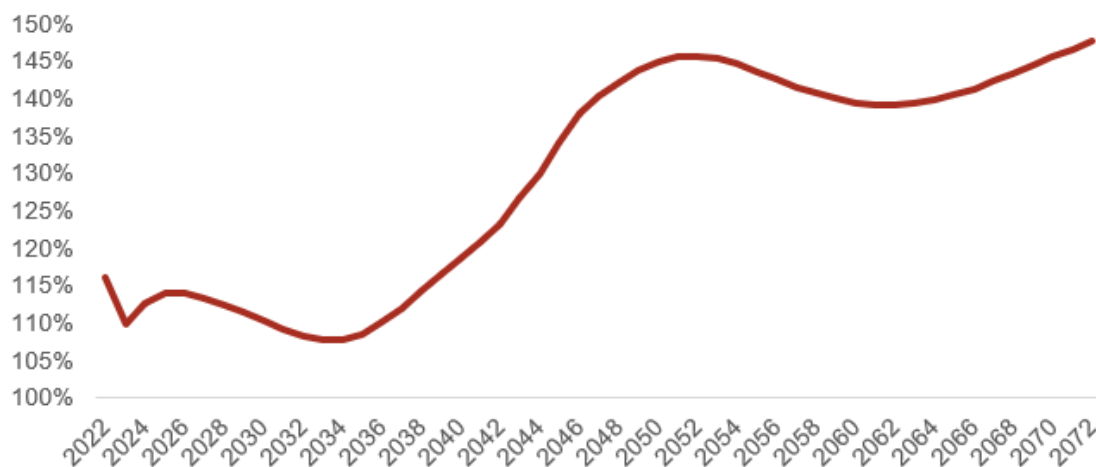


FIGURE 3.8 – Présentation du rapport « prestations/cotisations »

Quant au déficit technique, il est réduit par rapport au statu quo réglementaire sur l’horizon de simulation, mais reste tout de même important : 49 milliards FCFA en pratique contre 133 milliards FCFA dans le statu quo réglementaire en 2072.

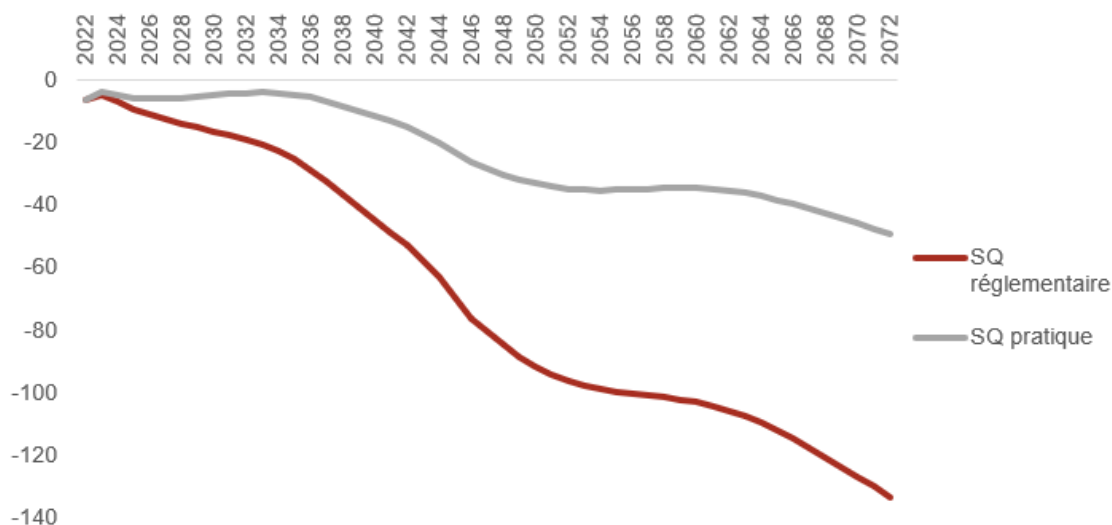


FIGURE 3.9 – Présentation du déficit technique (milliards FCFA constants de 2022)

Le constat est le même pour le solde global qui s'élève à 79 milliards FCFA en 2072, contre 209 milliards FCFA dans le statu quo réglementaire.

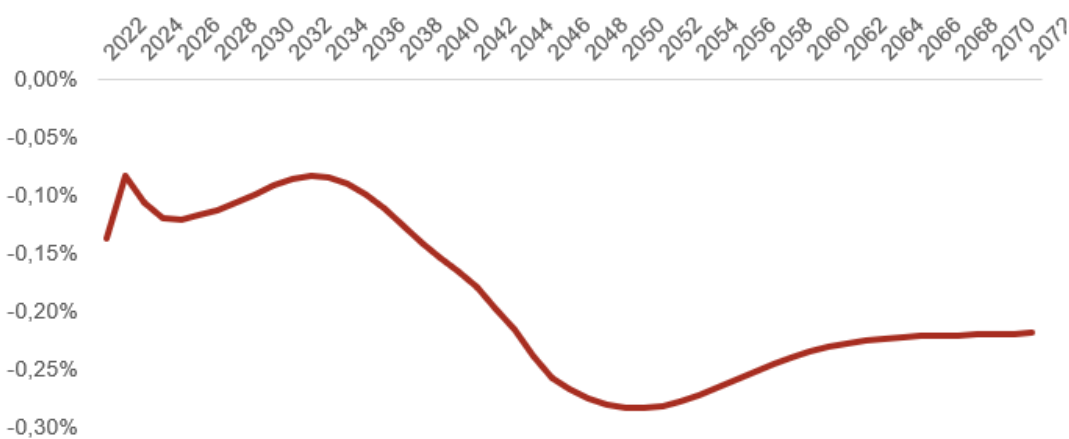


FIGURE 3.10 – Le solde global de la caisse représentera un maximum de 0,3% du PIB du pays en 2050

Pour le ratio du solde global de la Caisse sur les cotisations, il est d'environ 77% si la méthode de calcul pratique est appliquée alors qu'il atteint jusqu'à 202% dans le statu quo réglementaire.

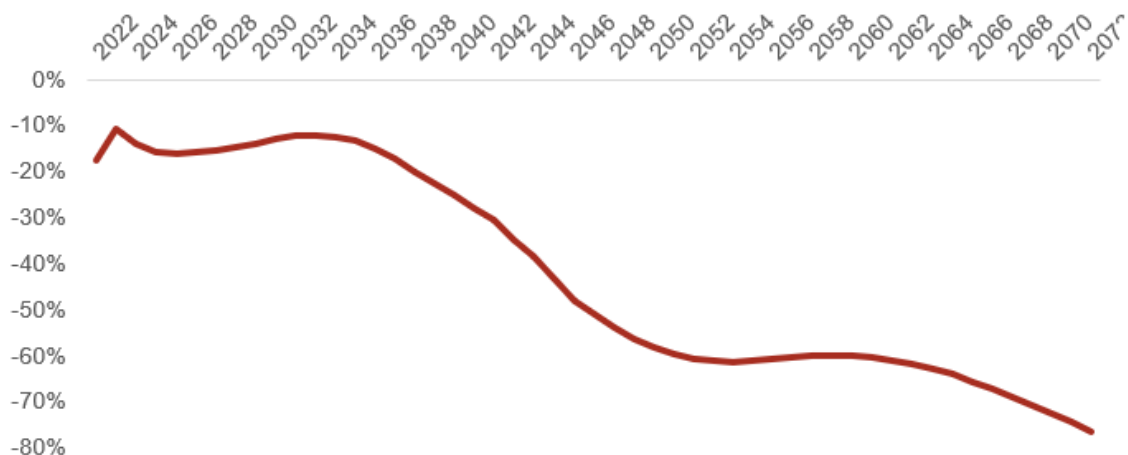


FIGURE 3.11 – Présentation du ratio « solde global/cotisations » en 2072

Le solde global cumulé, quant à lui, reste déficitaire sur l’horizon de simulation ; le déficit augmente de manière exponentielle pour atteindre 1.295 milliards FCFA en 2072. Cependant, malgré sa forte augmentation, il reste relativement faible par rapport à ce qui est prévu en statu quo réglementaire (3.640 FCFA).

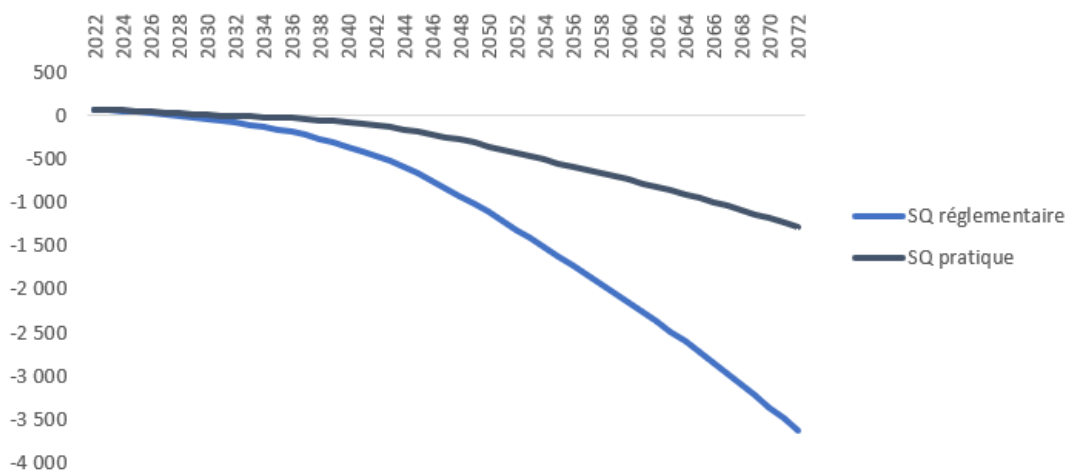


FIGURE 3.12 – Le déficit global cumulé augmentera fortement sur les 50 prochaines années (milliards FCFA constants de 2022)

Naturellement, le taux de cotisation d’équilibre est plus faible que dans le statu quo réglementaire : alors que le taux d’équilibre annuel requis pour équilibrer le régime en statu quo réglementaire est de 53%, celui-ci s’établit à 36% dans le statu quo pratique. S’agissant du taux de cotisation d’équilibre annuel, celui-ci atteint un maximum de 40% en 2072 en pratique, contre 62% dans le statu quo réglementaire. En somme, les taux d’équilibre restent élevés par rapport au taux de cotisation actuel.

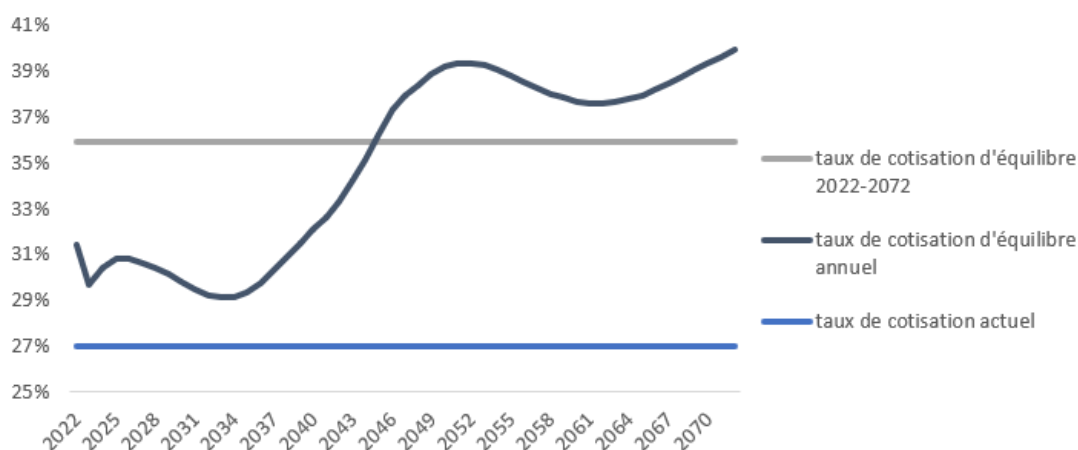


FIGURE 3.13 – Les taux de cotisation d'équilibre sont largement supérieurs au taux de cotisation actuel

## 3.2 LES RAISONS DE LA CRISE

Dans cette partie, nous allons identifier et analyser les facteurs qui contribuent à l'aggravation des déficits prévus de la Caisse. Ces facteurs sont variés, englobant à la fois les dynamiques démographiques et un mauvais paramétrage du système, ainsi que les biais classiques des régimes par répartition à prestations définies, souvent trop « généreux » dans leur structure.

### 3.2.1 IMPACT STRUCTUREL DES DYNAMIQUES DÉMOGRAPHIQUES SUR L'ÉQUILIBRE DE LA BRANCHE DES PENSIONS

#### PREMIER EFFET : RISQUE DE LONGÉVITÉ

Le risque de longévité vise un allongement progressif de la longévité des retraités donc de la durée du versement des pensions de retraite. Ce risque très progressif, donc il est nécessaire de le prendre en considération. De plus, les calculs de l'ONU ont montré que l'espérance de vie à l'âge de 60 ans au pays va passer de 15 ans pour les hommes et 15,9 ans pour les femmes en 2020 à respectivement 17 ans et 18,5 ans en 2070.

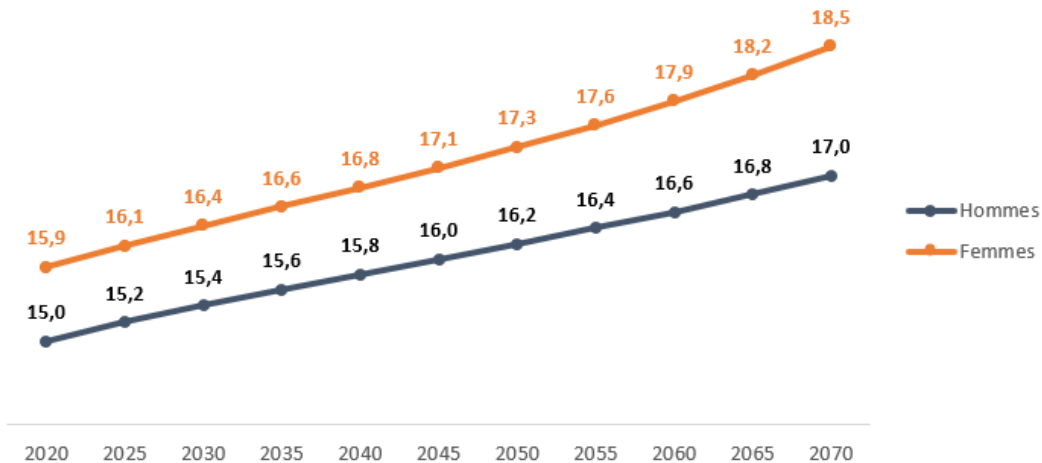


FIGURE 3.14 – Présentation de l'espérance de vie à la retraite

On remarque que l'écart entre le délai pendant lequel la caisse sert effectivement les pensions et le délai de récupération (délai sur la base duquel les cotisations ont été effectivement calculées) ne cesse de se creuser, augmentant avec lui le déficit.

### SECOND EFFET : HAUSSE DU NOMBRE DE DEPARTS A LA RETRAITE

Le flux de retraités dans un système de retraite par répartition prend de nombreuses années à se stabiliser. Lors de la mise en place d'un régime, les actifs plus âgés, en raison de la durée minimale de cotisation requise, ne sont pas incités à y cotiser. L'extension de la couverture se concentre donc principalement sur les classes d'âge inférieures à 50 ans. Dans les premières années, le flux de retraités sera proche de zéro. Pendant les dix années suivantes, seules quelques générations (selon la date d'entrée en cotisation) prendront leur retraite. Il faudra ensuite environ trente ans pour que le flux de nouveaux retraités se stabilise.

L'examen de la pyramide des âges des cotisants de la caisse permet de bien mesurer le phénomène :



Source : extractions transmises par la caisse

FIGURE 3.15 – Pyramide des Âges des Immatriculés et Augmentation Prévue du Flux de Nouveaux Retraités (2021)

On remarque que les fonctionnaires proches de la retraite (entre 55 et 60 ans) sont en moyenne 777 par génération actuellement. Ceci signifie qu'il y aura environ 777 départs en retraite par an dans les toutes prochaines années. Mais pour les générations actuellement actives (ex : entre 40 et 45 ans) les cohortes sont beaucoup plus nombreuses : 2.031 en moyenne. Ceci signifie qu'il y aura environ 2.031 départs en retraite par an dans 15 à 20 ans, soit deux fois plus que dans les 5 prochaines années.

### TROISIEME EFFET : RÉDUCTION DU RATIO COTISANTS-RETRAITÉS

Si le nombre de cotisants à la caisse augmente sur l'horizon de projection, c'est dans une bien moindre mesure que le nombre de retraités (la croissance du nombre de retraités est plus importante que celle des cotisants). La conséquence de cette situation est que le nombre d'affiliés pour un retraité (« ratio de dépendance démographique ») va fortement diminuer :

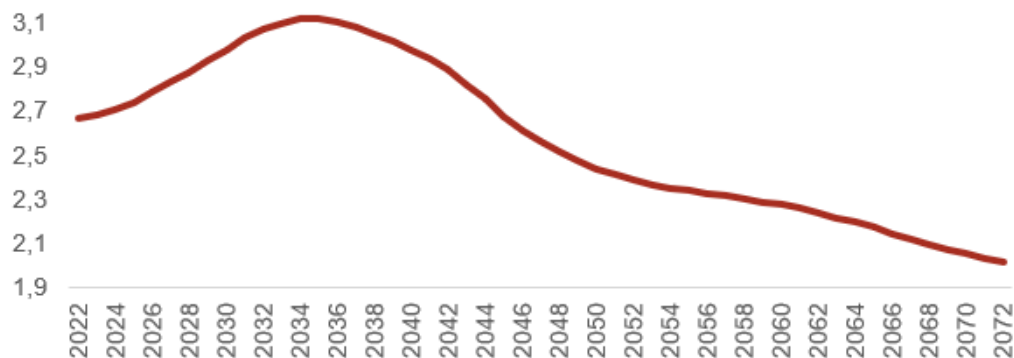


FIGURE 3.16 – Le ratio cotisants-retraités en diminution progressive sur les prochaines années

Donc, il y aura plus de pensionnés à prendre en charge et, en même temps, moins de travailleurs cotisants : En 2022, la caisse « dispose » de 2,7 cotisants pour couvrir les besoins d'un retraité, elle ne disposera que de 2 cotisants pour un pensionné en 2072.

### 3.2.2 INCOHÉRENCES DANS LA PARAMÉTRISATION DU RÉGIME DE LA CAISSE

La principale raison de la crise financière dans le futur du régime de retraite de la caisse se trouve dans les paramètres de son fonctionnement.

L'équilibre financier de la caisse ne peut être atteint que si les cotisations perçues soient égales à la valeur de toutes les mensualités de pensions versées jusqu'au décès du dernier bénéficiaire de la pension de réversion (l'équation d'équilibre actuarielle présentée dans la première partie).

Pour bien appréhender ce mauvais paramétrage, nous allons analyser plusieurs indicateurs, ces derniers sont calculés sur la base d'un profil moyen qui prend en compte l'effet de la productivité et de l'ancienneté pour calculer le taux de croissance du salaire, ainsi que le coût de la réversion s'agissant du TRI. Les hypothèses prises pour l'ensemble des caisses sont les suivantes : (i) un taux de croissance des salaires de 2%, (ii) une durée de carrière de 30 ans, (iii) un taux de revalorisation de 2% ; une durée de perception de la pension de 16 ans, une durée de réversion de 10 ans.

#### 3.2.2.1 LE TAUX DE RENDEMENT INTERNE

Le calcul du taux de rendement interne (TRI) d'un régime permet de mesurer s'il a un bon paramétrage, le TRI est le taux d'actualisation égalisant les cotisations et les retraites versées tout au long de la vie d'un individu. Ce taux dépend de plusieurs facteurs, comme le taux de cotisation, le nombre de salaires pris en compte, le profil salarial, l'âge de départ à la retraite, le taux d'annuité, la revalorisation des pensions, la table de mortalité.

Si un régime présente un TRI très élevé, cela signifie que l'adhésion au régime est très rentable pour ses bénéficiaires mais donc que, symétriquement, le régime est très, voire trop, généreux.

Dans le cas de notre caisse, le TRI ressort à environ 6,7% : en moyenne pour les affiliés, la caisse s'assimile donc à une Caisse d'épargne qui servirait un taux de rendement réel (net de l'inflation) de 6,7%, ce qui la place parmi les caisses du secteur public les plus généreuses.

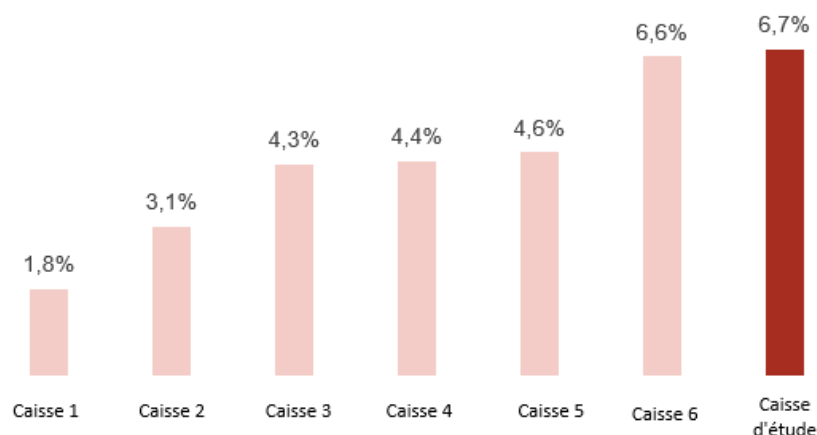


FIGURE 3.17 – Taux de rendement interne particulièrement élevé par rapport à d'autres caisses dans l'Afrique francophone

Cependant, nous devons comparer cet indicateur à un indicateur de rendement du pays, notamment le taux de croissance : si le régime de la caisse donne aux assurés un TRI supérieur au taux de croissance de l'économie du pays, cela signifie que le régime accapare une partie de la croissance et, symétriquement, que d'autres secteurs sont privés d'une partie de croissance à laquelle ils auraient droit. Or le taux de croissance de l'économie du pays a été en moyenne de 4% sur les 20 dernières années, donc nous avons fait l'hypothèse, dans les projections, d'un taux de croissance moyen de 4% pour le futur.

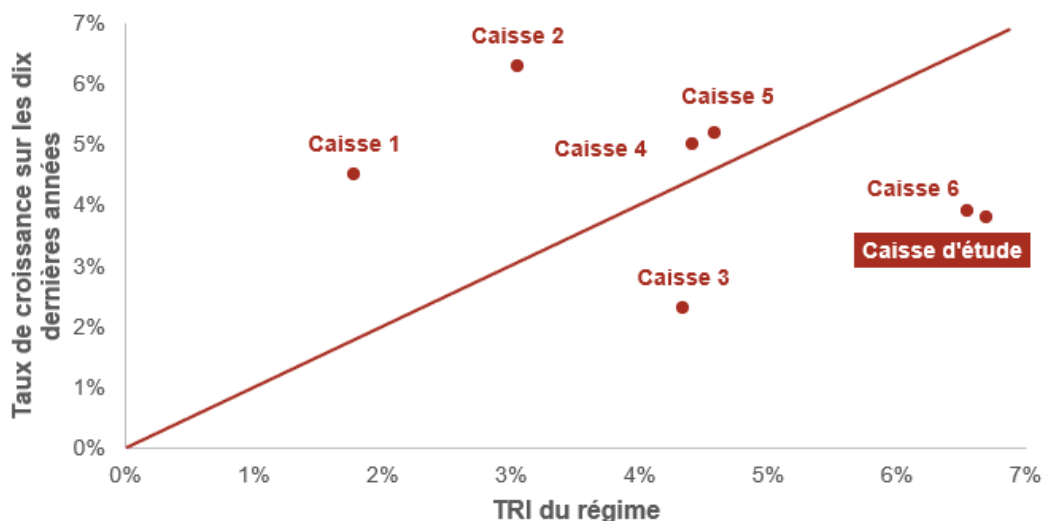


FIGURE 3.18 – Un TRI élevé par rapport au niveau de PIB à la caisse

Ce déséquilibre a pu être dissimulé jusqu'à présent grâce au nombre important de fonctionnaires. Cependant, avec l'arrivée à maturité des engagements pris et la stabilité des

cotisations, la générosité du régime devient évidente, menant à un déficit. Un tel rendement n'est donc pas soutenable dans un système de répartition sans engendrer des problèmes économiques et sociaux majeurs.

### 3.2.2.2 LE DÉLAI DE RÉCUPÉRATION

Une autre approche consiste à calculer le « délai de récupération », indicateur qui mesure la période au bout de laquelle un retraité a récupéré, par le montant cumulé de ses pensions, les cotisations qu'il a versées au régime tout au long de sa période d'activité.

Lorsque ce délai est inférieur à la durée moyenne estimée de la période de retraite (la période entre la liquidation et le décès du retraité ou de ses survivants), l'adhérent a plus retiré du régime qu'il n'y a contribué. Un jour ou l'autre, cette situation conduit à un déficit qui révèle la situation excessivement généreuse du régime.

Le délai de récupération moyen du régime de retraite de la caisse est de 7,1 années : ainsi, les retraités qui vivent plus de 7,1 ans après leur départ en retraite sont à la charge du régime.

Ces délais sont à comparer à l'espérance de vie au départ en retraite qui est de 15,5 ans dans le pays étudié (15 ans pour les hommes et 16 ans pour les femmes).

La conclusion est que les pensionnés vivent en moyenne 8,4 ans aux dépenses de la caisse sans avoir cotisé.

Présentons ensuite le délai de récupération de la caisse en la comparant par rapport à d'autres régimes du continent dédiés au secteur public.

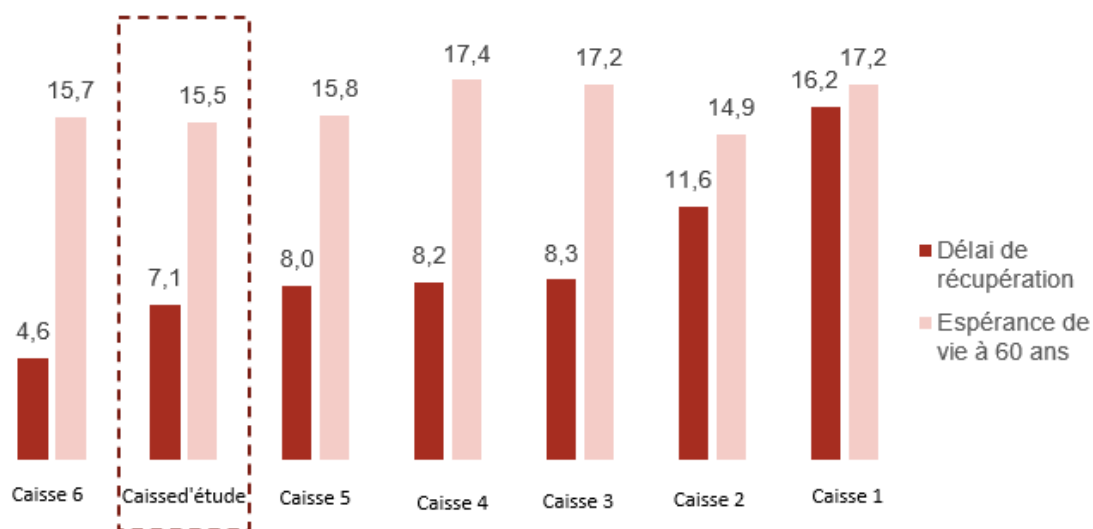


FIGURE 3.19 – Un délai de récupération parmi les plus faible

### 3.2.2.3 LE TAUX DE RÉCUPÉRATION

Il est également possible de calculer le taux de récupération qui indique le nombre de fois que la totalité des cotisations a été récupérée sous forme de pensions tout au long de la période de retraite, donc lorsque cet indicateur est supérieur à 1, le retraité récupère plus que ce qu'il a versé :

$$\text{taux de récupération} = \frac{\sum_{x1}^w \text{pensions reçues}}{\sum_{x1}^{xr-1} \text{cotisations versées}} \times 100$$

Après calcul, ce taux est de 284 pour la caisse, ce qui signifie qu'on récupère 184% de plus que ce que l'on a cotisé au cours de sa carrière !

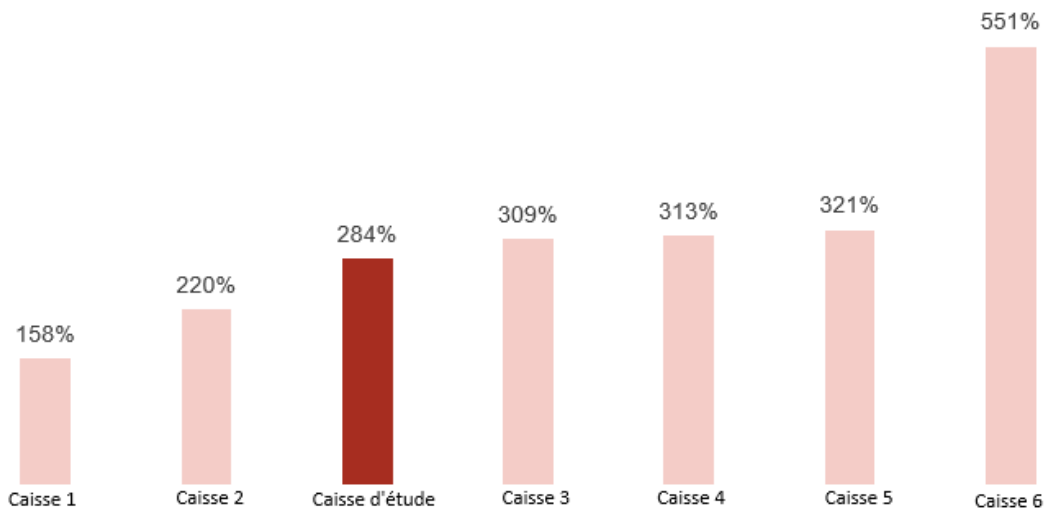


FIGURE 3.20 – Présentation du taux de récupération dans plusieurs caisses

# Chapitre 4

## LES RÉFORMES NÉCESSAIRES POUR ASSURER L'AVENIR DU RÉGIME DE LA CAISSE

Dans le chapitre précédent, nous avons longuement détaillé les raisons du déséquilibre du régime, qui doit conduire impérativement à entreprendre, dès que possible, une réforme des paramètres.

Deux types de réformes sont recommandés :

- Certaines prestations sans lien avec le risque vieillesse à transférer au budget de l'État ;
- Diverses autres réformes paramétriques, qui doivent combiner le plus grand nombre possible de paramètres, afin d'étaler l'effort sur le plus grand nombre et de le rendre ainsi supportable pour chacun.

### 4.1 RÉFORMES PARAMÉTRIQUES SUGGÉRÉES

Avant de proposer des « bouquets » de réformes, il est essentiel d'identifier les paramètres susceptibles d'être modifiés et de déterminer lesquels auront l'impact le plus positif sur la réduction du déficit à long terme de la caisse. Nous allons supposer que les bonifications ont déjà été retirées du budget de la caisse et que toutes les projections que nous allons présenter se réfèrent au solde global de la caisse.

#### 4.1.1 RÉDUCTION DU TAUX D'ANNUITÉ

Le taux d'annuité de 2,5% appliqué à la caisse est élevé par rapport au taux appliqué par les autres caisses voisines. Ainsi, ce paramètre doit impérativement être inclus dans le processus de la réforme. Il existe deux modalités de mise en œuvre :

- La première, que l'on qualifiera d'application « dure », consiste à appliquer la mesure pas uniquement sur les futures liquidations mais sur toutes les annuités déjà validées

à la date d’entrée en application de la réforme. Les nouveaux taux d’annuité s’appliqueraient également pour les pensions des retraités qui sont partis à la retraite avant la réforme ;

- La seconde modalité, plus favorable aux actifs, consiste à n’appliquer la mesure que sur les droits acquis postérieurement à la réforme (seuls les taux des années futures sont modifiés).

Nous implémentons la réforme suivante : diminution du taux d’annuité de 2,5% à 2% sans effet rétroactif sur les droits acquis.

### 4.1.2 ÉLARGISSEMENT DE L’ASSIETTE DE COTISATION À LA SUJÉTION

Plutôt que d’augmenter le taux de cotisation, une façon équivalente consiste à augmenter les recettes est d’élargir l’assiette de cotisation. Nous avons implémenté l’application de l’élargissement de l’assiette de cotisation à la sujétion (20% du traitement indiciaire), en plus de l’assiette actuelle du seul traitement indiciaire.

### 4.1.3 AUGMENTATION DU NOMBRE D’ANNÉES PRISES EN COMPTE POUR LE CALCUL DE LA PENSION

Le fait de prendre en compte uniquement le dernier salaire pour le calcul de la pension, comme dans le cas de la caisse d’étude, crée une déconnexion entre les cotisations et les prestations. C’est pourquoi de nombreux régimes de retraite sur le continent entreprennent des réformes visant à élargir la période de référence pour inclure les derniers salaires plutôt que se limiter au dernier. Dans ce cadre, la caisse devrait, elle aussi, suivre ce « vent » de réforme en faisant une :

- Augmentation de la base salariale aux 5 derniers salaires dans le bouquet B1 ;
- Augmentation de la base salariale aux 15 derniers salaires dans le bouquet B2l.

### 4.1.4 AUTRES INDEX POSSIBLES POUR LA REVALORISATION DES PENSIONS

Une fois liquidées, les pensions doivent être régulièrement revalorisées. Plusieurs options sont possibles, entre l’indexation sur les prix ou sur les salaires (bruts). D’autres options, intermédiaires, consistent en une indexation sur les salaires nets ou sur une combinaison de taux divers (par exemple inflation, taux d’augmentation du PIB, ...).

La législation la plus dure consiste en une indexation sur les prix. Elle assure un strict maintien du pouvoir d’achat des retraités. Un autre mode d’indexation qui est en apparence plus favorable consiste à se baser sur l’évolution des salaires. Le statu quo consiste en une indexation stricte des pensions sur les salaires nominaux. Nous implémentons la réforme suivante : indexation sur la valeur minimale entre l’inflation et l’évolution des salaires nominaux.

## **4.2 LA BONNE RÉFORME : COMBINER TOUS LES PARAMÈTRES DANS DES BOUQUETS**

### **4.2.1 LES BOUQUETS DE RÉFORMES RECOMMANDÉS, SELON LEUR FAISABILITÉ ET LEUR EFFICACITÉ**

En pratique, il est impossible de faire porter sur un seul paramètre le poids du rééquilibrage du régime, car cela reviendrait à une réforme trop radicale et déséquilibrée. C'est à cette raison que nous allons « panacher » les réformes de tous les paramètres, en demandant à chacun de contribuer à l'effort global. Ce panachage a d'ailleurs un mérite induit, qui est de mieux équilibrer le poids de la réforme entre tous les adhérents du régime : jeunes et vieux, actifs et retraités, hommes et femmes, salariés modestes et hauts salaires, etc.

Le fait que le déficit du régime soit plus sensible à certains paramètres qu'à d'autres nous conduit à privilégier certaines réformes par rapport à d'autres. Cependant, le critère de l'efficacité financière n'est pas le seul : par exemple, il est certain que l'augmentation des cotisations constitue une mesure très efficace pour réduire le déficit, mais son « coût » politique et social est considérable. Il est donc nécessaire d'appréhender les différentes réformes en tenant compte à la fois de l'efficacité financière dans la réduction du déficit et de la faisabilité politique et sociale.

Nous présentons ci-dessous un schéma qui montre chaque option de réforme sur une matrice prenant en compte à la fois leur efficacité et leur faisabilité politique et sociale afin que nous obtenons une vision claire sur les paramètres qui peuvent le plus contribuer au rééquilibrage du régime de retraite de la caisse.

## CHAPITRE 4. LES RÉFORMES NÉCESSAIRES POUR ASSURER L'AVENIR DU RÉGIME DE LA CAISSE

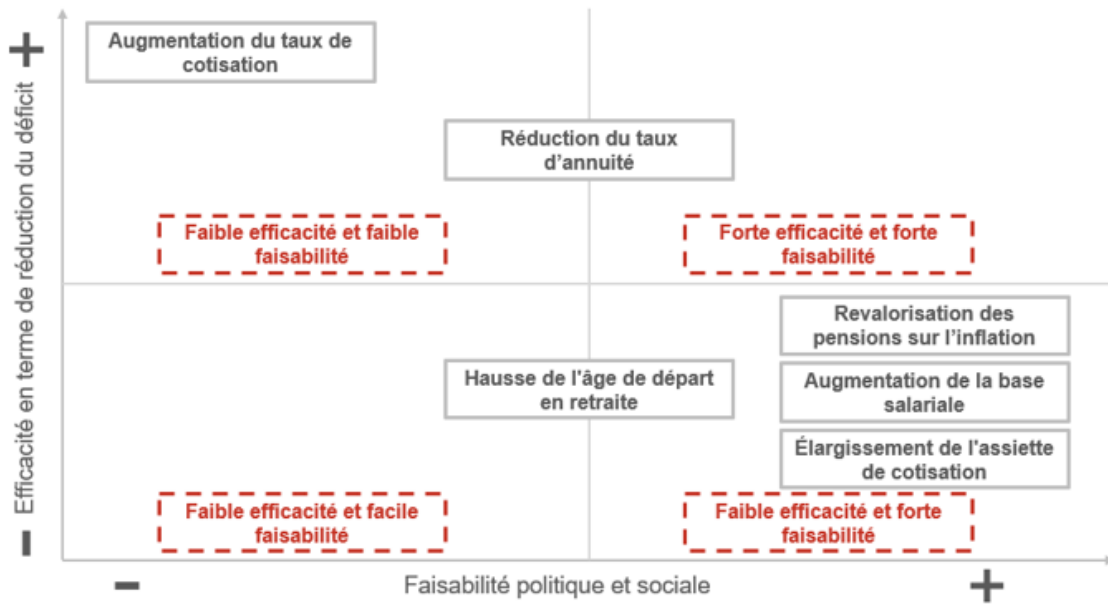


FIGURE 4.1 – Une efficacité et une faisabilité plus ou moins importante de la réforme selon le paramètre considéré

Sur cette base, nous avons pu constituer deux bouquets de réforme qui sont présentés en détail ci-après.

## CHAPITRE 4. LES RÉFORMES NÉCESSAIRES POUR ASSURER L'AVENIR DU RÉGIME DE LA CAISSE

TABLE 4.1 – Récapitulatif des bouquets de réforme paramétrique

	<b>SQ RÉGLEMEN- TAIRE</b>	<b>SQ PRATIQUE</b>	<b>BOUQUET 1</b>	<b>BOUQUET 2</b>
<b>BONIFICATIONS D'ÂGE</b>	Accordée aux fonctionnaires civils de catégorie B et C au moment d'un départ anticipé à la retraite pour une période de 5 ans	Idem	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État
<b>BONIFICATIONS DE SERVICE</b>	2 à 5 ans selon le grade, pour les militaires 15 premières années puis 1/6 des annuités acquises	Idem	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État
<b>BONIFICATIONS ET MAJORATIONS POUR ENFANTS</b>	Bonification aux femmes d'un an par enfant (max 6 enfants) + majoration mère et père de 10% pour 3 enfants puis 5% par enfant (25% max = 6 enfants)	Idem	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État	Supprimée ou coût transféré au budget de l'État
<b>ASSIETTE DE COTISATION</b>	Salaire de base	Idem	Salaire de base + sujétion (+20%)	Salaire de base + sujétion (+20%)
<b>TAUX D'ANNUITÉ</b>	2,5% avec un maximum de 80% (100% max avec majoration enfants)	Idem	2% par an plafonné à 70%	2% par an plafonné à 70%
<b>SALAIRE DE RÉFÉRENCE POUR LE CALCUL DE LA PENSION</b>	Dernier salaire	La pension totale est composée d'autant de tranches de pensions que de périodes de référence. La valeur du point d'indice durant la carrière de l'assuré	Les 5 derniers salaires	Les 15 derniers salaires

### 4.2.2 ANALYSE DES 2 BOUQUETS DE RÉFORME PROPOSÉS :

Dans la situation actuelle, tout déficit est financé par l'État seul à travers les subventions d'équilibre. Ceci traduit une générosité intrinsèque excessive du régime. Dans le cadre des réformes paramétriques proposées, la charge d'assurer l'équilibre du régime sera répartie entre l'État et les cotisants (à travers l'augmentation des cotisations) et sur les retraités (à travers des révisions moins avantageuses des modalités de calcul des prestations, notamment la baisse du taux d'annuité). La générosité du régime sera ainsi revue à la baisse.

- Le premier bouquet simulé prend en compte les exigences de faisabilité sociale de la réforme (suppression - ou transfert au budget de l'État - des bonifications, baisse du taux d'annuité, élargissement de l'assiette de cotisation et revalorisation des pensions sur le minimum de l'inflation et de l'augmentation des salaires), mais ne prend en

compte que les 5 derniers salaires pour le calcul de la pension. Ainsi, ce bouquet ne permet pas de rétablir l'équilibre bien qu'il exige un taux de cotisation d'équilibre inférieur par rapport au statu quo réglementaire : 33,6% contre 53%.

- Le bouquet 2, que nous avons recommandé, va plus loin : il s'agirait, en plus des mesures du bouquet 1, de calculer la pension sur la base des 15 derniers salaires. Le coût de la réforme pèserait donc de manière équilibrée sur les cotisants et les retraités. Contrairement au premier bouquet, le B2 est équilibré financièrement et permet donc de tenir les engagements promis aux cotisants. Ainsi, même s'il est plus modeste en termes de promesses, il permet de tenir ces promesses. Mieux vaut une promesse raisonnable que l'on tient... qu'une promesse inconsidérée que l'on ne tient pas !

Bien que plus rigoureux, avec un taux d'annuité de 2% (au lieu de 2,5%), avec un maximum de 70% (au lieu de 80%), ce bouquet propose d'élargir de 20% l'assiette de cotisation (coûteux pour le régime) pour que la pension soit plus élevée que si son assiette de calcul ne tenait pas compte de la sujétion (environ 20% du traitement indiciaire versé comme rémunération complémentaire).

Le graphique suivant indique l'impact de chacun des bouquets sur le solde global de la caisse :

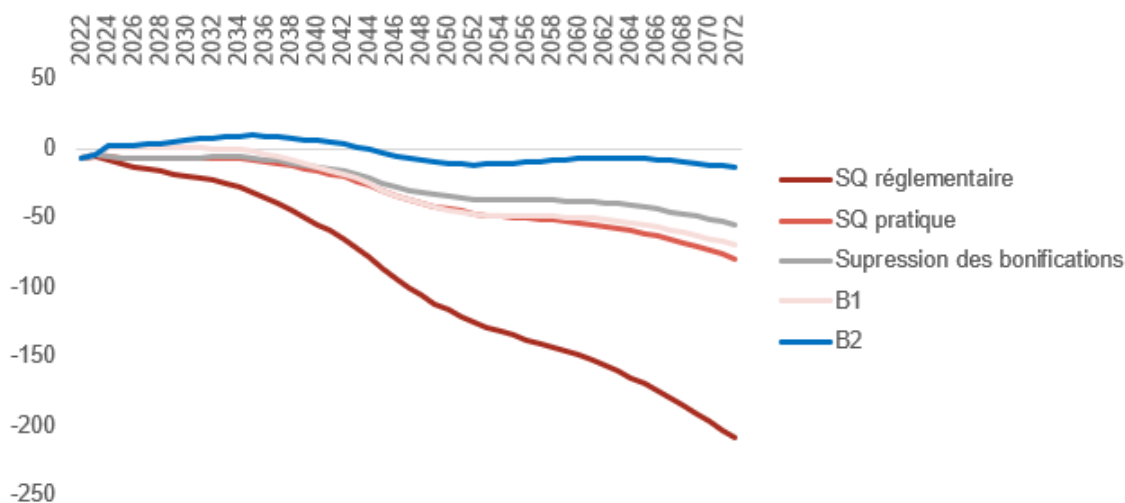


FIGURE 4.2 – Présentations du déficit pour les différents bouquets de réformes sur tout l'horizon de simulation (milliards FCFA constants)

On constate que le Bouquet 2 permet d'assurer des tendances équilibrées sur l'horizon de la simulation. Bien qu'il pourrait y avoir de légers déficits à certaines périodes, il demeure globalement équilibré. En effet, les périodes d'excédents (ou de « vache grasse ») permettraient de couvrir les périodes de « vache maigre ». Ces excédents constituent une réserve financière qui peut être utilisée pour compenser les déficits temporaires et couvrir les besoins lors des périodes difficiles.

## 4.3 POUR ALLER AU-DELA DES REFORMES PARAMÉTRIQUES

### 4.3.1 L'INTRODUCTION D'UN RÉGIME DE RETRAITE COMPLÉMENTAIRE OBLIGATOIRE EN CAPITALISATION

Le niveau actuel des pensions de retraite versées par la caisse est largement insuffisant pour sauvegarder le niveau de vie des assurés lors de leur vieillesse, ainsi que pour leurs ayants droit.

Les réformes paramétriques inéluctables pour sauver le régime de ses déficits programmés vont incontestablement aggraver ce constat.

Par ailleurs, il n'existe pas actuellement de plafond des salaires soumis à cotisation. Nous tenons à souligner ici les nombreux inconvénients de cet état de fait, qui se révèle dangereux, et propose une méthode alternative qui pourrait maintenir ses avantages sociaux pour la population, et financiers pour la caisse, tout en remédiant aux divers effets pervers de la mesure.

Parmi les effets néfastes de l'absence de plafond de l'assiette soumis à cotisations, nous pouvons citer :

- Les redistributions inverses : en général, dans les régimes applicables à tous les niveaux de revenus, les petits salaires financent les grosses pensions ;
- Les objectifs sociaux et financiers différents selon les niveaux de revenus, principalement la lutte contre la pauvreté pour un premier étage, et la sauvegarde du niveau de vie pour les étages supérieurs. D'où la nécessité de régimes séparés avec un mode de fonctionnement, un paramétrage (et notamment un rendement) et une gouvernance (notamment un pilotage) différents et indépendants. On pourrait ainsi imaginer un régime de base fortement redistributif pour les revenus les plus faibles, et plus contributif pour les revenus les plus élevés, c'est-à-dire où les prestations seront plus directement proportionnelles aux contributions au régime (le besoin de mutualisation se réduisant au fur et à mesure que le revenu augmente).

De plus, la mise en place d'un régime complémentaire obligatoire (par capitalisation) est une solution alternative au relèvement du plafond pour conserver ses avantages sans souffrir de ses inconvénients. Le dispositif de retraite complémentaire pourrait satisfaire à la fois un objectif social (améliorer le taux de remplacement) et un objectif économique (faire participer la retraite au développement économique du pays).

### 4.3.2 CONSTRUIRE DE VÉRITABLES BRANCHES PRÉSTATIONS FAMILIALES ET ACCIDENTS DU TRAVAIL

La philosophie ou la pratique de la protection sociale du secteur public appliquée dans la quasi-totalité des pays francophones est que l'employeur (l'État) prend en charge tout ce

qui a trait au remplacement de salaire (indemnités de maladie de courte ou de longue durée ainsi que celles se rapportant aux ATMP) ou considéré comme supplément de salaire (les allocations familiales). Pour les rentes, en cas d'accident de travail ou de maladie professionnelle, si l'affilié peut continuer à exercer son activité, aucune rente n'est servie ; elle ne sera servie qu'au moment du départ à la retraite.

### **Conclusion :**

Après avoir examiné la soutenabilité de l'évolution de la situation financière d'un régime en répartition à prestations définies dans une caisse de la zone CIPRES, prise comme exemple pour l'étude, il apparaît que plusieurs autres caisses dans des situations similaires devront également envisager des réformes paramétriques. Ces réformes pourraient inclure la diminution du taux d'annuité, l'augmentation du taux de cotisation ou de l'âge de la retraite, entre autres. Cependant, ces mesures tendent à rendre l'organisme excédentaire uniquement sur une période limitée.

Conscients de ces problématiques, les pays de la zone CIPRES se préparent à mettre en place un second pilier, à savoir un régime de retraite complémentaire obligatoire financé par capitalisation. Ce second pilier vise à améliorer les revenus des retraités et, in fine, à trouver de nouveaux modes de financement pour la retraite nationale. Cependant il est lié à des facteurs de risque économiques et financiers.

# PARTIE 3 :CONCEPTION D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES APPLIQUÉ AU DÉVELOPPEMENT DE LA ZONE CIPRES

# Introduction

Dans cette partie, nous nous focaliserons sur la **conception d'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE)**, un outil crucial pour projeter les facteurs de risque économiques et financiers, ce qui est essentiel pour le pilotage technique de l'activité d'assurance, notamment en matière d'évaluation des provisions économiques, d'allocation stratégique des actifs et de gestion des risques financiers. Cependant, les modèles de GSE couramment utilisés rencontrent des difficultés d'application en Afrique subsaharienne francophone, à cause de l'insuffisance ou de l'absence de données.

Le taux d'intérêt est un élément crucial du GSE qui peut être appréhendé par la courbe des taux, mais cette dernière est inexister dans la zone CIPRES d'après plusieurs publications. Donc dans un premier chapitre, nous allons **modéliser la courbe des taux sans risque** en Afrique subsaharienne francophone en utilisant les modèles présentés dans la partie théorique.

Et dans un second chapitre, nous nous intéresserons au **développement d'outils financiers** pour le développement de la zone CIPRES par le biais de la construction du GSE afin de fournir une base solide pour la prise de décisions stratégiques et d'**améliorer la résilience financière des régimes de retraite complémentaire obligatoires financés par capitalisation** dans la zone CIPRES.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous allons voir dans un **exemple l'impact du GSE sur la valeur des engagements d'un régime de retraite en capitalisation à prestations définies (DB)** en comparant la charge financière et les provisions avec l'application du GSE et sans l'application du GSE.

# Chapitre 1

## MODÉLISATION DE LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE EN AFRIQUE SUBSAHARIENNE FRANCOPHONE

### Introduction

La courbe des taux, élément essentiel dans l'économie de chaque pays. Mais malheureusement, inexistante dans plusieurs espaces économiques africains. Pour la zone étudiée, il n'existe pas de courbe des taux de référence, ce qui freine le développement économique des pays dans cette zone. C'est à cette raison que plusieurs recherches ont été menées pour tenter de combler ce vide.

Dans ce chapitre, nous allons explorer et comparer les différentes méthodes de construction des courbes des taux sans risque pour les marchés de l'UEMOA, de la CEMAC et de la CIPRES.

Pour réaliser cela, nous allons aborder les modèles de création des courbes de taux zéro-coupon, ainsi que sur les techniques d'interpolation et d'extrapolation de ces taux pour les maturités non observées.

Notons que l'analyse des taux d'intérêt dans la zone CIPRES nous permet de les classer en deux grandes catégories :

- Les taux d'intérêt à court terme, qui proviennent principalement des marchés monétaire et interbancaire ;
- Et les taux d'intérêt à long terme, issus du marché financier régional.

Selon la littérature, ces taux peuvent être divisés en deux types : les taux dits « sans risque » et les taux dits « avec risque ». En générale, nous utilisons la courbe des taux sans risque afin d'illustrer l'évolution de ces taux.

## 1.1 MODÉLISATION DE LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTÉRÊT

Dans cette partie, nous allons construire une courbe des taux sans risque adaptée à la zone CIPRES, à partir des obligations d'État de la bourse régionale des valeurs mobilières.

### 1.1.1 PRÉSENTATION DES DONNÉES

Les données présentes sont ceux qui ont été déjà récupérés de la Société d'Intermédiation et de Gestion (SIG) de la Société Ivoirienne de Banque (SIB) et les obligations d'État de la Bourse régionale des valeurs mobilières.

Pour établir notre base de données, nous avons suivi plusieurs étapes méthodiques, en commençant par la sélection des obligations d'États. Ensuite, nous avons calculé les intérêts courus, les prix de marché, les durées de vie résiduelle et les maturités (en années) de ces obligations. La base de données finale inclut les informations suivantes :

- **Code de l'obligation** : Chaque obligation d'un État est identifiée par un symbole unique. Par exemple, les obligations ivoiriennes et sénégalaises sont respectivement identifiées par les codes TPCI et EOS, suivis d'un chiffre.
- **Dates clés** : Cela comprend les dates de cotation, d'émission, de jouissance et de maturité des obligations.
- **Prix** : Les prix cotés et de marché de l'obligation qui est la somme du prix coté et de l'intérêt couru.
- **Taux coupon** : Le taux d'intérêt annuel versé par l'obligation.
- **Intérêts courus** : Les intérêts accumulés depuis la dernière date de jouissance.
- **Durée de vie résiduelle de l'obligation** : C'est la différence entre les dates de maturité et de cotation.
- **Maturité de l'obligation** : C'est la différence entre les dates de maturité et d'émission, exprimée en années.

### 1.1.2 MÉTHODOLOGIE DE CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX POUR LA ZONE CIPRES

La construction d'une courbe des taux sans risque dans la zone CIPRES est complexe en raison de la diversité des espaces économiques qu'elle regroupe. Seul l'UEMOA dispose d'un marché financier suffisamment développé pour faciliter la construction d'une courbe des taux spot. C'est à ces raison que nous allons suivre la méthodologie suivante :

- **Courbe des Taux ZC de l'UEMOA** : Nous commencerons par construire la courbe des taux zéro-coupon pour l'UEMOA, en exploitant son marché financier.

- **Ajustement pour la CEMAC** : Ensuite, nous ajusterons cette courbe des taux de l'UEMOA en utilisant :
  - Les données récentes d'un émetteur de référence de la CEMAC, en particulier le pays avec le meilleur « rating » des agences de notation.
  - Les hypothèses dérivées de la politique monétaire de la CEMAC.
- Construction de la courbe des taux zéro-coupon pour la CIPRES :  
 Pour obtenir la courbe des taux ZC de la CIPRES, nous utiliserons une combinaison linéaire des courbes des taux de l'UEMOA et de la CEMAC comme suit :

$$R_t^{CIPRES}(m) = \alpha_1 R_t^{UEMOA}(m) + \alpha_2 R_t^{CEMAC}(m)$$

Avec :  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Nous proposons que les pondérations  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soient déterminées en respectant la relation suivante, basée sur les travaux de Dhaene<sup>1</sup> :

$$\alpha_1 = \frac{F_{R_t^{UEMOA}}^{-1}(p)}{F_{R_t^{UEMOA} + R_t^{CEMAC}}^{-1}(p)} = \frac{\text{VaR}_p(R_t^{UEMOA})}{\text{VaR}_p(R_t^{UEMOA} + R_t^{CEMAC})} \quad (**)$$

Avec :  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  et  $p \in [0, 1]$

Cela montre que l'estimation des pondérations pour la courbe des taux de la CIPRES se base sur le poids du quantile de chaque variable  $R_t^{UEMOA}$  et  $R_t^{CEMAC}$  par rapport au quantile agrégé de ces deux variables. Traditionnellement, le calcul de la Value at Risk (VaR) nécessite de connaître la distribution de la variable. Cependant, il est difficile de déterminer leur distribution dans ce cas, et aussi la distribution de leur somme.

Pour surmonter cette difficulté, nous avons adopté une approche non paramétrique, décrite par Hyndman et Fan (1996)<sup>2</sup>. Cette méthode est mise en œuvre dans le logiciel R via la commande « quantile ». Nous avons choisi d'utiliser un quantile avec un seuil de 0,5% conformément aux recommandations de Planchet et Therond (2007)<sup>3</sup>.

## 1.1.3 RÉSULTATS DES MODÈLES

### 1.1.3.1 COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE L'UEMOA

Pour la même date de cotation, les hypothèses retenues sont les suivantes :

- **UFR** : 6,2
- **Taux court terme** ( $\delta$ ) : 2,5%, qui correspond au taux de refinancement des banques auprès de la banque centrale.
- **Calibrage du modèle** :

---

1. Dhaene J., Tsanakas A., Valdez E.A., Vanduffel S. (2012) : Optimal capital allocation principle. Journal of Risk and Insurance, 79 (1), P.1-28.

2. Hyndman, R. J., Fan, Y. (1996) : Sample quantiles in statistical packages. American Statistician, 50, 361–365.

3. Planchet F., Théron P.E. (2007) : Pilotage technique d'un régime de rentes viagères. Paris : Economica.

Dans le tableau qui suit, nous allons présenter les valeurs des paramètres obtenues à partir des modèles de Nelson-Siegel et Lars Svensson pour la zone UEMOA :

TABLE 1.1 – Paramètres des modèles de Nelson-Siegel et Svensson

Paramètres	NELSON-SIEGEL (%)	SVENSSON (%)
$\beta_0$	6,2	6,2
$\beta_1$	-5,62	-3,7
$\beta_2$	3,814	3,148
$\beta_3$	ND	-4,237
$\tau_1$	1	1
$\tau_2$	ND	0,3

► **Qualité d'ajustement :**

Pour évaluer le risque d'estimation du modèle de l'UEMOA, nous utiliserons deux indicateurs : le Theil-U-Statistic et le Mean Absolute Percentage Error (MAPE), que nous avons présentés dans la section théorique.

TABLE 1.2 – Statistiques des modèles de Nelson-Siegel et Svensson

Statistiques	NELSON-SIEGEL (%)	SVENSSON (%)
THEIL U-STATISTIC	0,717	0,716
MAPE	1,206	1,204

On remarque que le modèle de Svensson est le mieux adapté aux données de l'UEMOA.

Présentons ensuite l'évolution de la courbe des taux sans risque le l'UEMOA dans la même date de cotation :

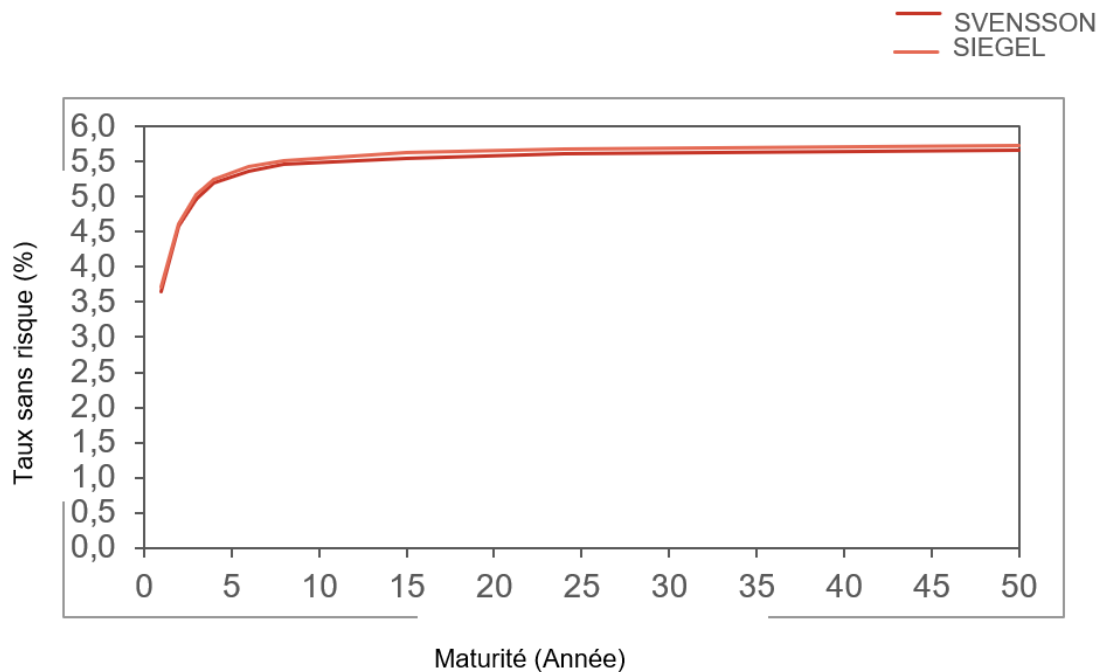


FIGURE 1.1 – Évolution de la courbe des taux de la zone UEMOA pour les deux modèles

### 1.1.3.2 COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE LA CEMAC

Cette zone dispose d'un marché financier qui n'est ni intégré ni suffisamment développé, donc il est difficile de construire une courbe des taux pour cette zone. Et pour remédier à ce problème, nous proposons de construire cette courbe en ajustant simultanément les données financières du marché boursier secondaire de l'UEMOA avec la situation économique de la zone CEMAC, ainsi que les données d'un émetteur de référence (à la même date de cotation).

Dans ce cadre, choisissons le Cameroun comme émetteur de référence, car c'est le pays moteur de la zone CEMAC et il présente un bon profil de risque.

Les hypothèses que nous allons poser sont les suivantes :

- **UFR** : 4,8 %;
- **Taux court terme ( $\delta$ )** : 2,45 %.

► **Calibrage du modèle :**

Le calibrage du modèle pour la zone CEMAC est effectué en utilisant les données de l'UEMOA car l'objectif est de proposer une courbe des taux spécifique à la zone CEMAC en prenant en compte le comportement des agents privés de l'UEMOA face à la situation économique et monétaire de la CEMAC. En d'autres termes, cette courbe reflète la réaction des investisseurs face au contexte économique et social de la CEMAC. Nous obtenons les paramètres suivants :

# CHAPITRE 1. MODÉLISATION DE LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE EN AFRIQUE SUBSAHARIENNE FRANCOPHONE

TABLE 1.3 – : Estimation des paramètres des modèles pour la même date de cotation (CEMAC)

Paramètres	NELSON-SIEGEL (%)	SVENSSON (%)
$\beta_0$	4,8	4,8
$\beta_1$	-4,39	-2,3
$\beta_2$	9,618	9,122
$\beta_3$	ND	-4,469
$\tau_1$	1,7	1,7
$\tau_2$	ND	0,6

► **Mesure du risque d'ajustement :**

TABLE 1.4 – : Indicateurs de mesure de la qualité d'ajustement

Statistiques	NELSON-SIEGEL (%)	SVENSSON (%)
Theil-U-Statistic	0,632	0,628
MAPE	1,0313	1,0312

On constate que les deux modèles montrent des performances très similaires en termes de précision des prévisions et d'ajustement aux données. Donc ils sont tout aussi efficaces pour modéliser la courbe des taux sans risque de la CEMAC. Cependant, le modèle de Svensson a une légère supériorité en termes de précision, bien que cette différence soit marginale.

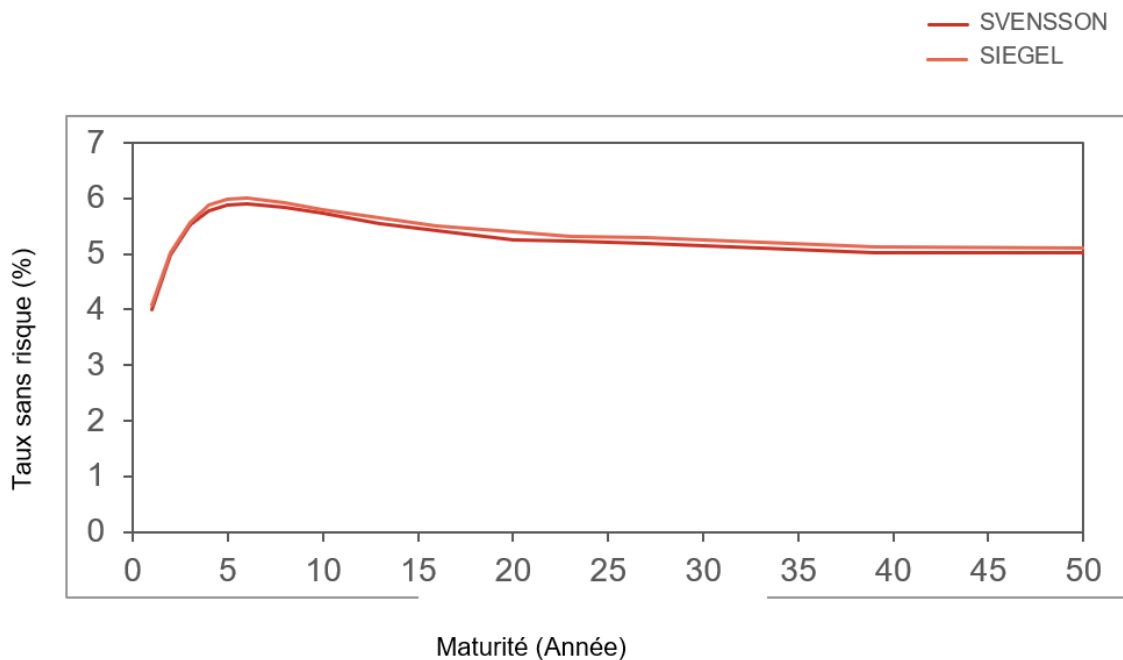


FIGURE 1.2 – Évolution de la courbe des taux de la zone CEMAC pour les deux modèles

### 1.1.3.3 CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE DE LA CIPRES

Pour construire la courbe des taux sans risque de la zone CIPRES, nous retenons le modèle de SVENSSON pour les zones UEMOA et CEMAC. Après, nous déterminerons les taux zéro-coupons de la zone CIPRES. En outre, l'estimation des pondérations se fera à partir de la relation (\*\*), nous obtenons :  $\alpha_1 = 0,52$  et  $\alpha_2 = 0,48$

► **Évolution des taux zéro-coupon :**

TABLE 1.5 – Valeurs des taux zéro coupon sur 15 ans pour les 3 zones

Zone / Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0 UEMOA (%)	3.54	4.93	5.46	5.69	5.81	5.88	5.93	5.96	5.99	6.03	6.01	6.04	6.05	6.06	6.07
1 CEMAC (%)	3.56	4.86	5.58	5.98	5.96	5.90	5.82	5.74	5.66	5.59	5.53	5.48	5.43	5.39	5.39
2 CIPRES (%)	3.55	4.90	5.52	5.79	5.89	5.91	5.89	5.87	5.85	5.82	5.80	5.78	5.76	5.74	5.75

► **Analyse comparative des Courbes des taux sans risque :**

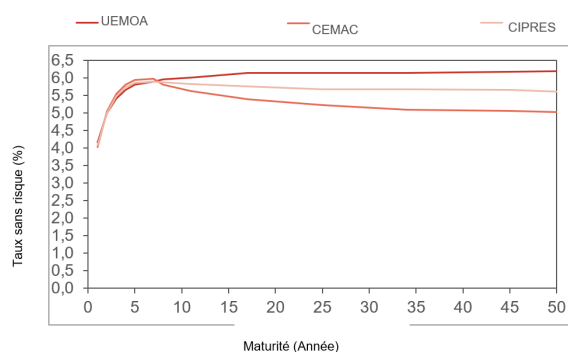


FIGURE 1.3 – Représentation des courbe des taux sans risque pour l'UEMOA, la CEMAC et la CIPRES

On remarque que la courbe des taux de la CEMAC atteint son sommet à la maturité de 5 ans et diminue progressivement par la suite, contrairement à celle de l'UEMOA qui est strictement croissante. Cette situation s'explique par le fait que le dernier point de référence observé sur le marché de la CEMAC est de 5 ans, ce qui représente le dernier point liquide (LLP). En revanche, dans la zone UEMOA, ce point est de 10 ans.

Le manque d'information au-delà de 5 ans implique une extrapolation de la courbe de la CEMAC à cette maturité, ce qui peut expliquer la baisse observée. Cette baisse peut aussi s'expliquer par le taux d'UFR de 4,8%, inférieur au taux observé à la maturité de 5 ans.

Sur le plan économique, la courbe des taux de l'UEMOA reflète les performances économiques actuelles de cette zone et respecte la théorie des anticipations de la structure par terme des taux d'intérêt, où l'émetteur de l'obligation paie plus cher lorsque la maturité est lointaine. Pour la CEMAC, la courbe des taux suggère que les investisseurs préfèrent placer

leurs liquidités sur le moyen terme, en raison des incertitudes économiques.

Nous pouvons démontrer empiriquement que la courbe des taux sans risque de la zone CIPRES peut être obtenue en utilisant les modèles de NELSON SIEGEL et SVENSSON, sous les hypothèses suivantes :

$$UFR_{CIPRES} = 0,52 \times UFR_{UEMOA} + 0,48 \times UFR_{CEMAC} = 5,528\%$$

$$\delta_{CIPRES} = 0,52 \times \delta_{UEMOA} + 0,48 \times \delta_{CEMAC} = 2,476\%$$

## 1.2 ANALYSE DE LA SENSIBILITÉ

Les courbes des taux sont sensibles à la date de cotation, le modèle de taux utilisé et les hypothèses intervenant dans l'ajustement des modèles. Dans ce qui suit, nous allons nous placer à une date de cotation afin d'étudier l'impact des hypothèses sur la trajectoire de la courbe des taux.

### 1.2.1 SENSIBILITÉ DE LA COURBE DES TAUX AUX HYPOTHÈSES

À une date de cotation, le choix des hypothèses influence le comportement de la courbe des taux sans risque. Les hypothèses posées doivent nous aider pour obtenir une courbe des taux qui reflète la réalité de son espace économique. Ils concernent principalement l'évolution des taux long et court terme ainsi que les bornes associées aux paramètres des modèles de taux. Si nous supposons que les taux long et court convergent respectivement vers 7% et 0 % et que les bornes des paramètres restent inchangées, nous pouvons observer un déplacement de la courbe des taux vers le haut. Illustrons cela par le graphique suivant :

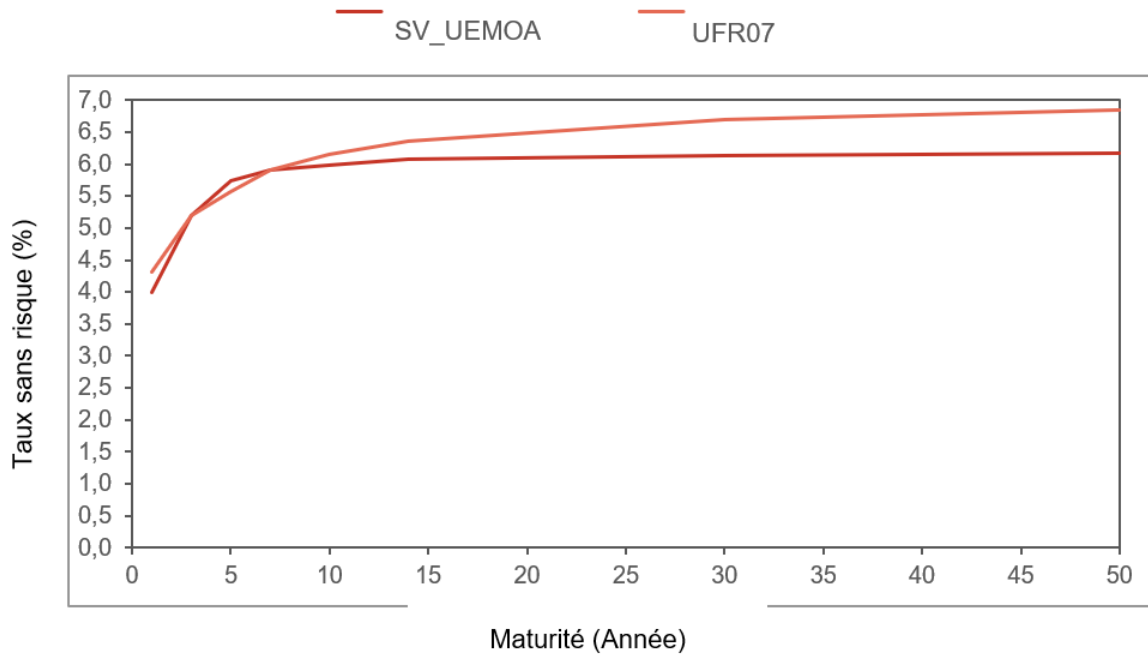


FIGURE 1.4 – Sensibilité de la courbe des taux UEMOA au changement des taux long et court dans le modèle de Svensson

Supposons si nous ne supposons pas de borne précise, c'est-à-dire que nous admettons que les paramètres du modèle varient entre  $+\infty$  et  $-\infty$ , nous obtenons le résultat suivant :

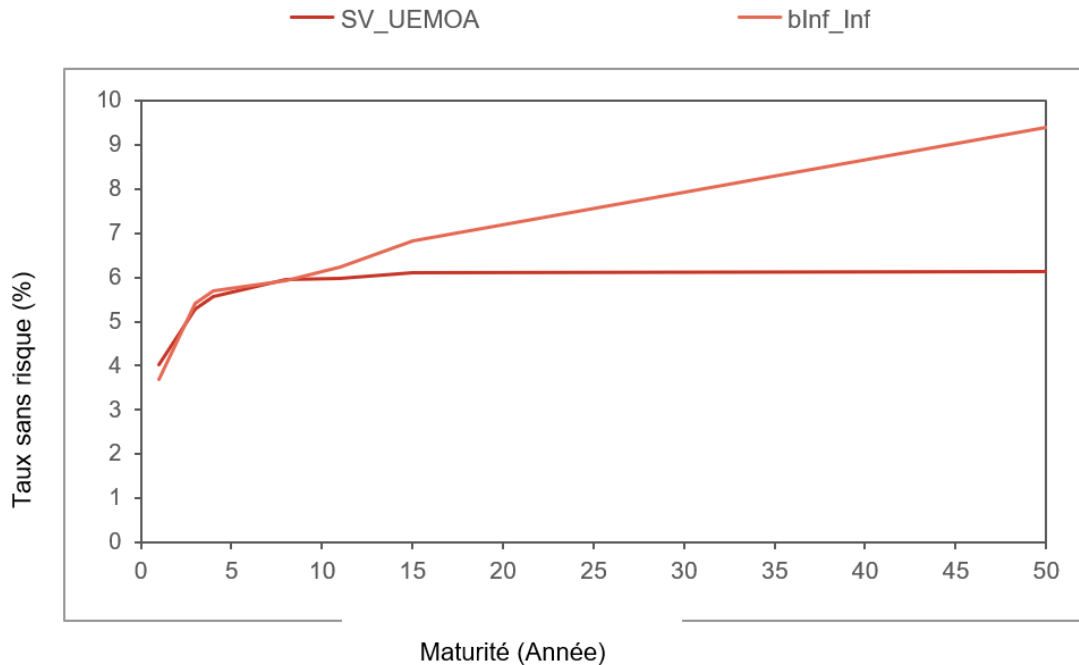


FIGURE 1.5 – Sensibilité de la courbe des taux UEMOA au changement des bornes des paramètres dans le modèle de Svensson

Nous remarquons alors que la courbe des taux est très sensible aux paramètres de construction, il y a un déplacement parallèle de la courbe vers le haut ou vers le bas suite à la modification des bornes des paramètres. Donc il faut accorder une attention aux choix des paramètres de construction pour ne pas proposer des taux qui ne reflètent pas la réalité économique.

## Conclusion

Il est évident que la courbe des taux joue un rôle crucial dans le développement économique des pays de la zone CIPRES. D'ailleurs, le développement d'une économie repose sur plusieurs piliers, dont le développement des infrastructures et des entreprises, soutenu par des politiques monétaires et budgétaires efficaces. Les budgets nationaux, financés par des ressources intérieures et extérieures, sont souvent soutenus par la mobilisation de ressources sur les marchés financiers. La courbe des taux zéro-coupon, en offrant une vision précise du coût réel de l'emprunt à différentes dates, est essentielle pour optimiser cette mobilisation de ressources. Sans cette courbe, les coûts d'emprunt peuvent être excessifs, compromettant la solvabilité des pays et entravant leur développement à long terme.

En outre, la courbe des taux est un outil analytique précieux pour les politiques économiques. Par exemple, une hausse des taux d'intérêt à court terme par les autorités monétaires peut ralentir l'économie.

Ainsi, l'évolution future des taux d'intérêt, la crédibilité de la politique monétaire, et les anticipations de change sont des aspects clés influencés par la courbe des taux, soulignant son importance pour le développement économique des pays de la zone CIPRES.

## Chapitre 2

# DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

Dans ce chapitre, nous allons développer un générateur de scénarios économiques (**GSE**) spécifique à la zone CIPRES.

Selon Planchet, Théron, et Kamega : « Un scénario économique correspond à une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt ». En d'autres termes, un générateur de scénarios économiques est un outil développé, servant à réaliser des projections dans une optique de gestion des risques.

En effet, un générateur de scénarios incorpore les évolutions futures d'un ensemble de variables tel que l'inflation, les taux d'intérêts, le prix des actions, permettant ainsi de mettre en place une stratégie de gestion efficace pour faire face aux situations critiques.

Nous allons donc proposer une démarche de conception adaptée au contexte spécifique de notre zone d'étude, la CIPRES. Cette démarche doit répondre aux défis de données (qui sont insuffisantes en Afrique subsaharienne francophone).

Pour ce faire, nous allons commencer par mettre en exergue la structure du GSE. Ensuite, nous détaillerons la spécification, le calibrage et la génération des scénarios pour chaque modèle de GSE. Enfin, nous appliquerons le GSE pour étudier le risque de défaut implicite des États de la zone CIPRES, dans un contexte de notation en monnaie locale et de mise en œuvre des dispositifs Bâle II/III.

## 2.1 CONCEPTION D'UN GSE POUR LA ZONE CIPRES

Dans cette section, nous allons présenter une démarche de conception d'un GSE adapté au contexte de la zone CIPRES car les modèles rencontrés en littérature sont applicables difficilement en Afrique subsaharienne francophone, et cela à cause du manque de données. Donc nous allons spécifier en premier lieu les modèles à retenir après les avoir analysés. Ensuite, nous procéderons au calibrage des modèles sélectionnés. Enfin, nous allons générer des trajectoires des variables du GSE.

### 2.1.1 VUE D'ENSEMBLE DU GSE

À cause de l'absence de plusieurs données, nous sommes mis dans une situation défavorable, car on se trouve incapable de d'appliquer certains modèles stochastiques rencontrés dans la littérature. Donc nous allons concevoir un générateur de scénarios économiques qui répondra aux besoins actuels de la zone CIPRES à partir des informations dont nous disposons. Ce GSE est composé de plusieurs variables comme les taux d'intérêt réels et nominaux, l'indice des prix à la consommation, l'écart des taux, l'inflation anticipée, les rendements des obligations de société, des actions, du monétaire, le taux de chômage, etc. Mais il repose principalement sur les deux premières variables motrices. Ces dernières permettent de déterminer les autres variables.

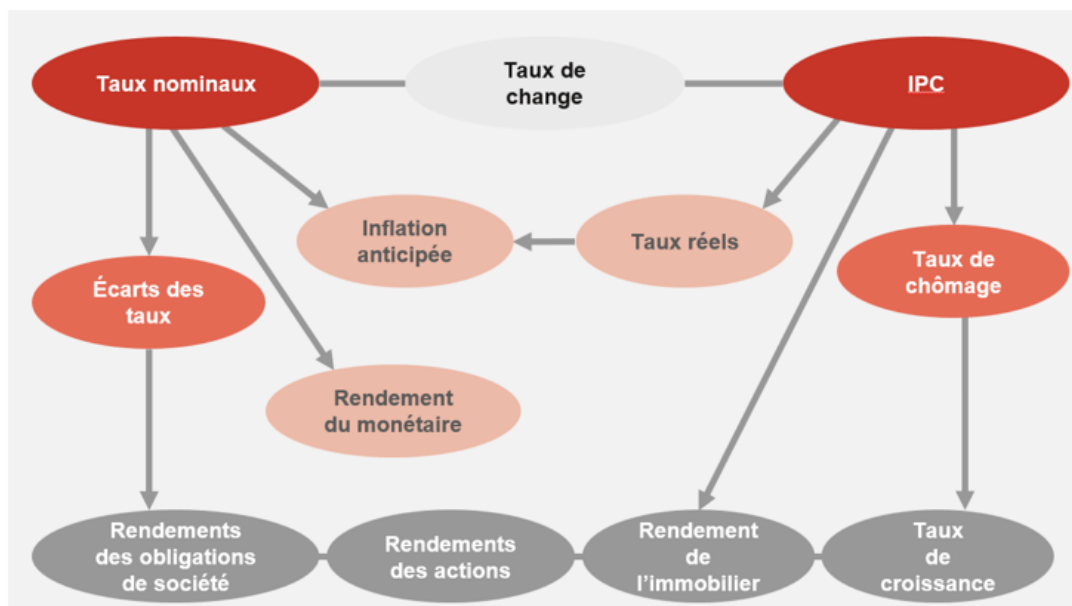


FIGURE 2.1 – Structure du GSE proposé adapté à la CIPRES

## 2.1.2 SPÉCIFICATION ET CALIBRAGE DES MODÈLES DU GSE

Dans cette section, nous allons examiner les différentes variables du GSE. Nous commencerons par spécifier ces modèles. Ensuite, nous estimerons les paramètres pour mieux comprendre la dynamique des variables économiques et financières.

### 2.1.2.1 INDICE DES PRIX À LA CONSOMMATION (IPC)

L'IPC permet d'estimer l'évolution moyenne des prix des biens et services consommés par les ménages entre deux périodes données. Son évolution peut dépendre de plusieurs facteurs selon le modèle choisi :

- **Modèle de WILKIE** : L'IPC évolue selon l'IPC de la période précédente et le taux d'inflation instantané.
- **Modèle de BRENNAN et XIA** : L'IPC est représenté par un processus de diffusion avec un taux d'inflation instantané.
- **Modèles de HIBBERT et al., AHLGRIM et al.** : Utilisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser le taux d'inflation instantané.
- **Modèle de HULL et WHITE** : Modèle à deux facteurs, sans indications spécifiques sur l'IPC.

#### Modélisation choisie :

Pour la zone CIPRES, nous choisissons le processus d'**Ornstein-Uhlenbeck** pour modéliser le taux d'inflation instantané et adoptons le modèle de **WILKIE** pour l'IPC. Les données utilisées proviennent de la Banque Centrale des États de l'Afrique de l'Ouest (BCEAO).

La relation entre l'IPC et le taux d'inflation instantané est donnée par :

$$IPC_t = IPC_{t-1} \times \exp(q_t)$$

Avec IPC l'indice des prix à la consommation, ici pour l'instant  $t$  et  $t-1$  et  $q_t$  le taux d'inflation instantané à la date  $t$ .

- ▶  $q_t$  suit un processus d'**ORNSTEIN-UHLENBECK** (en temps continu) que nous présentons par :

$$dq_t = \kappa_q(\mu_q - q_t)dt + \sigma_q dB_q$$

Avec :

- ▶  $\kappa_q$  : la vitesse de retour à la moyenne ;
- ▶  $\mu_q$  : le taux moyen ;
- ▶  $\sigma_q$  : la volatilité.

**Discrétisation du processus :**

Nous allons opter pour une discrétisation exacte suivant Planchet et al. (2009), pour cela considérons  $\Delta t$  comme le pas de la simulation, donc pour  $q_t$ , nous obtenons :

$$q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q \Delta t} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q \Delta t}) + \epsilon_{q,t} \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q \Delta t}}{2\kappa_q}}$$

Avec des données à fréquence annuelle ( $\Delta t = 1$ ), l'équation devient :

$$q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) + \epsilon_{q,t} \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}}$$

Et cette expression peut être réécrite sous une forme linéaire :

$$q_{t+1} = \alpha_q + \beta_q q_t + \epsilon_{q,t}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) \\ \beta_q &= e^{-\kappa_q} \\ \epsilon_{q,t} &= \epsilon_q \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \end{aligned}$$

► **Estimation des paramètres :**

Ensuite, nous réalisons une régression linéaire simple afin d'estimer les paramètres :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_q &= e^{-\kappa_q} \\ \hat{\alpha}_q &= \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) \\ \epsilon_{q,t} &= \epsilon_q \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

- La vitesse de retour à la moyenne :  $\kappa_q = -\ln(\hat{\beta}_q)$
- Le taux d'inflation moyen :  $\mu_q = \frac{\hat{\alpha}_q}{1 - \hat{\beta}_q}$
- L'écart-type de l'erreur  $\sigma_t^q$  est égal à l'écart-type de l'erreur du modèle estimé, ajusté par le facteur :

$$\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \times \epsilon_q$$

Sur les données obtenues, qui couvrent une période d'environ 40 ans, nous avons obtenu les valeurs suivantes :

Paramètres	Valeurs	Intitulé
$\kappa_q$	0,76	Vitesse de retour à la moyenne
$\mu_q$	0,05	Taux d'inflation moyen
$\sigma_q$	0,07	Écart type de l'erreur

Calculons maintenant les différents indicateurs pour apprécier la qualité du modèle :

Test	Résultat	Interprétation
$R^2$ ajusté	0,5	Pouvoir explicatif du modèle : 50%
Fisher	$P = 0,00159$	Modèle global significatif
STUDENT (constante)	$P = 0,01421$	Constante significative
STUDENT (variable)	$P = 0,00159$	Coefficient de la variable significatif
Moyenne résidus	$5,67 \times 10^{-20}$	Moyenne des résidus considérée nulle
BREUSCH-GODFREY	$P = 0,4161$	Absence d'auto-corrélation d'ordre 1
ARCH(1)	$P = 0,88$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
JARQUE-BERA	$P < 2,2 \times 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus : Non vérifiée

### 2.1.2.2 TAUX D'INTÉRÊT NOMINAUX

Les taux d'intérêt nominaux reflètent la situation économique et monétaire, traduisant la perception à long terme des investisseurs concernant le contexte macroéconomique. Selon Fisher, ces taux sur le marché financier montrent les anticipations des agents privés sur la croissance réelle de l'économie et l'inflation future.

Dans la zone CIPRES, les marchés financiers **ne fournissent pas en temps réel les rendements des titres en circulation**, mais nous disposons des **prix des obligations et des intérêts courus à chaque date de cotation**. Cette situation nous conduit à utiliser une approche par les prix plutôt que par les rendements.

Les résultats d'une analyse sur les taux d'intérêt nous a pousser à retenir le modèle de **Nelson Siegel** pour **simuler les taux d'intérêt nominaux dans notre GSE**. Dans ce modèle, le taux forward instantané est formulé comme suit :

$$f_t^{nom}(m) = \beta_0^{nom} + \beta_1^{nom} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) + \beta_2^{nom} \left(\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right)$$

Ce qui donne une expression explicite des taux d'intérêt nominaux :

$$R_t^{nom}(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{nom}(u) du$$

$$= \beta_0^{nom} + (\beta_1^{nom} + \beta_2^{nom}) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{nom}}} \right] - \beta_2^{nom} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right)$$

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

Pour utiliser ce modèle, il est nécessaire d'estimer un vecteur de paramètres  $\beta_0^{nom}, \beta_1^{nom}, \beta_2^{nom}, \tau_1^{nom}$ . Le calibrage du modèle nécessite de faire varier  $\tau_1^{nom}$ , les autres paramètres du modèle de Nelson Siegel sont estimés en minimisant l'écart au carré entre les prix théoriques et observés. Le choix des paramètres finaux respecte les propriétés principales du modèle, à savoir  $\beta_0^{nom} > 0$  et  $\beta_0^{nom} + \beta_1^{nom} > 0$ .

La valeur finale des paramètres est celle qui minimise l'erreur au carré.

Les résultats du calibrage en respectant les propriétés du modèle sont :

Paramètres	Valeurs
$\beta_0^{nom}$	6,2
$\beta_1^{nom}$	-3,7
$\beta_2^{nom}$	-1,85
$\tau_1^{nom}$	0,6

Nous évaluons après la qualité du modèle des taux nominaux en mesurant le risque d'estimation à l'aide de deux indicateurs : le Theil-U-Statistic et le MAPE.

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	0,9%	1,5%

### 2.1.2.3 TAUX D'INTÉRÊT RÉELS

La modélisation de la courbe des taux réels de la zone CIPRES est similaire à celle des taux nominaux, mais en excluant l'inflation anticipée des taux d'intérêt nominaux. En pratique, cela implique de formuler des hypothèses sur l'évolution probable de l'inflation lors du calibrage des prix des obligations gouvernementales.

Dans leur ouvrage, Deacon et al. (2004) montrent que le prix d'une obligation réelle indexée sur l'inflation peut être exprimé de la manière suivante :

$$\hat{P}_k^{real}(t, \theta) = \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{real}(t, m) \times B^{real}(t, m)$$

$$= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{real} \prod_{i=1}^m (1 + q_i)}{(1 + r_m)^m \prod_{i=1}^m (1 + q_i)} + \frac{FV^{real} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1 + q_i)}{(1 + r_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1 + q_i)}$$

Avec :

- $[\theta] + 1$  : le nombre de versements des cash-flows
- $C^{real}$  : la valeur du coupon réel versée
- $FV^{real}$  : la valeur de remboursement de l'obligation réelle indexée sur l'inflation
- $q_i = \frac{IPC_i - IPC_{i-1}}{IPC_{i-1}}$  ou  $\pi_i = \log\left(\frac{IPC_i}{IPC_{i-1}}\right)$  : l'inflation observée à la date  $i$
- $r_m$  : le taux d'intérêt réel à la maturité  $m$

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

En nous basant sur cette relation, nous pouvons réécrire la fonction de prix théorique nominale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\hat{P}_k^{nom}(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{nom}(t, m) \times B^{nom}(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom}}{(1+y_m)m} + \frac{FV^{nom}}{(1+y_{[\theta]+1})^{[\theta]+1}} \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom} \prod_{i=1}^m (1+q_i)}{(1+r_m)m \prod_{i=1}^m (1+q_i)} + \frac{FV^{nom} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+q_i)}{(1+r_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+q_i)}\end{aligned}$$

Avec :

- $C^{nom} = C^{real} \prod_{i=1}^m (1+q_i)$  : la valeur du coupon nominal versée
- $FV^{nom} = FV^{real} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+q_i)$  : la valeur de remboursement de l'obligation nominale.

L'expression finale du taux forward réel instantané se présente comme suit :

$$f_t^{real}(m) = \beta_0^{real} + \beta_1^{real} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) + \beta_2^{real} \left(\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right)$$

Donc, nous obtenons les taux d'intérêt réels en intégrant les taux forward réels :

$$\begin{aligned}r_t(m) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{real}(u) du \\ &= \beta_0^{real} + (\beta_1^{real} + \beta_2^{real}) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{real}}} \right] - \beta_2^{real} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right)\end{aligned}$$

Donc, nous devons estimer :  $\beta_0^{real}, \beta_1^{real}, \beta_2^{real}, \tau_1^{real}$

Tel que :  $\beta_0^{real}$  c'est le taux réel long terme et  $\beta_1^{real}$  la différence entre le taux court réel et le taux long réel.

Notons que l'expression du prix théorique ci-dessus permet d'obtenir des taux d'intérêt réels en fonction de l'évolution future de l'inflation. Dans ce contexte, deux cas de figures peuvent être étudiés :

- Fixer  $q_i$  sur toute la durée de vie restante de l'obligation. Le choix de  $q_i$  doit être précis et nécessite une approche experte. Nous proposons de le calibrer sur l'objectif cible de l'inflation fixé par l'autorité monétaire, soit  $q_i = 2\%$  dans la zone CIPRES.

Ainsi, le prix théorique s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{P}_k^{nom}(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{CF_k^{nom}(t, m)}{(1+y_m^{nom})^m} \times B^{nom}(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom}}{(1+y_m^{nom})^m \prod_{i=1}^m (1+q_i)} + \frac{FV^{nom}}{(1+y_{[\theta]+1}^{nom})^{[\theta]+1} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+q_i)}\end{aligned}$$

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

En minimisant l'écart au carré entre les prix théoriques et ceux observés sur le marché financier régional, on obtient :

Paramètres	Valeurs
$\beta_0^{real}$	4,2
$\beta_1^{real}$	-3,5
$\beta_2^{real}$	-1,8
$\tau_1^{real}$	0,6

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	0,92 %	1,3 %

Pour le second cas, nous prévoyons l'évolution probable de l'inflation en utilisant le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK. Cela permet de retrouver la dynamique de  $q_i$ , alignée avec la durée de vie des obligations gouvernementales, nous obtenons :

Paramètres	Valeurs
$\beta_0^{real}$	3,9
$\beta_1^{real}$	-3,5
$\beta_2^{real}$	-0,03
$\tau_1^{real}$	1,2

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE (%)
NELSON SIEGEL	1,1 %	1,2 %

### 2.1.2.4 ÉCART DE TAUX

Pour observer les écarts de taux sur les obligations de société, nous nous basons sur les travaux de GBONGUE<sup>4</sup>. La construction de la courbe des écarts de taux dépend de l'inclusion de la variable CS : écart de taux dans la modélisation des prix des obligations de société, cette variable peut être considérée comme exogène ou endogène du modèle. Dans le contexte de la zone CIPRES, nous considérons CS comme variable endogène du modèle, la structure par terme des écarts de taux est déduite alors du processus de modélisation du prix des obligations de société. Nous proposons le modèle de prix suivant :

$$\hat{P}_k^{corp}(t, \theta) = \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{corp}(t, m) \times B^{corp}(t, m)$$

$$= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{corp}}{(1 + csm)} \frac{1}{(1 + ysm)^m} + \frac{FV^{corp}}{(1 + ysm)^{[\theta]+1}} \frac{1}{(1 + csm)^{[\theta]+1}}$$

Les coupons versés et la valeur nominale des obligations de société sont notés respectivement  $C^{corp}$  et  $FV^{corp}$ . Les taux d'intérêt nominaux et les écarts de taux à maturité  $mmm$  sont

notés  $ym$  et  $csm$ .  $csm$  est la variable inconnue dans la fonction mathématique du prix des obligations de société. Cet écart sera modélisé en utilisant le modèle de NELSON SIEGEL. Le taux à terme instantané des écarts de taux est exprimé comme suit :

$$f_t^{cs}(m) = \beta_0^{cs} + \beta_1^{cs} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2^{cs} \left(\frac{m}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$$

Par intégration des taux à terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_t^{cs}(m) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{cs}(u) du \\ &= \beta_0^{cs} + (\beta_1^{cs} + \beta_2^{cs}) \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)\right] - \beta_2^{cs} \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \end{aligned}$$

L'utilisation de ce modèle nécessite d'estimer quatre paramètres. Le processus de calibration suit la même logique que pour les taux réels et nominaux, mais minimise les prix des obligations de société. Les résultats de la calibration sont présentés ci-dessous :

$$\beta_0^{cs}, \beta_1^{cs}, \beta_2^{cs}, \tau_1^{cs}$$

Paramètres	Valeurs
$\beta_0^{cs}$	1,5
$\beta_1^{cs}$	-1,2
$\beta_2^{cs}$	-1,5
$\tau_1^{cs}$	30

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	1,5 %	2,5 %

### 2.1.2.5 RENDEMENT DES ACTIONS

Pour projeter le rendement des actions, nous utilisons le modèle de Black et Scholes. La modélisation se concentre sur l'excès de rendement via un changement de régime. Le rendement de l'action à la date  $t$  est la somme du taux d'intérêt réel, de l'inflation, et de l'excès de rendement. L'excès de rendement suit une distribution normale dont les paramètres dépendent du régime en cours.

$$\begin{aligned} s_t &= y_t + x_t \\ &= r_t + q_t + x_t \\ \ln x_t \mid \rho_t &\sim \mathcal{N}(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}) \end{aligned}$$

---

4. Apport de la courbe des taux sans risque au développement de l'assurance dans la zone CIMA. L'assureur Africain, n°102.

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

---

Dans le contexte de la CIPRES, nous nous intéresserons au modèle de Black et Scholes et à un modèle stochastique à volatilité, défini par :

$$\begin{aligned} ds_t &= \mu_t dt + \sigma_t \epsilon_t \\ d \ln \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \\ \mu_t &= A + B \mu_{t-1} \\ \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Pour prévoir le rendement des indices BRVM, nous utiliserons l'indice BRVM10 qui reflète l'évolution des dix actions les plus liquides et l'indice BRVM composite qui couvre l'ensemble des actions du marché. Les indices sectoriels incluent industrie, services, finance, transport, etc.

Pour modéliser le rendement, nous commençons par l'indice BRVM10, suivi de l'indice BRVM composite, à l'aide d'un modèle linéaire et de la copule de Clayton. Les données utilisées couvrent une période de 15 ans.

Le calibrage du modèle de Black et Scholes pour l'indice BRVM10 donne les paramètres suivants :

Paramètres	Valeurs
$\mu^{BS}$	0,0003
$\sigma^{BS}$	0,2

Le calibrage du modèle stochastique à volatilité fournit les paramètres suivants :

Paramètres	Valeurs
A	0,00032
B	0,0243
$\alpha_0$	-0,0048
$\alpha_1$	0,999

Concernant l'indice BRVM composite, il évolue le plus souvent dans le même sens que l'indice BRVM 10. Pour cela, nous allons spécifier la relation linéaire existante entre les rendements, ce qui mène à la modélisation suivante :

$$R_t^C = \phi_0 + \phi_1 R_{t-1}^C + \phi_2 R_{t-1}^{10} + \epsilon_t \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Les erreurs du modèle  $\epsilon_t$  suivent une loi normale centrée réduite et peuvent être représentées de la manière suivante :

$$\epsilon_t = \mathcal{N}^{-1}(u_t), u_t \in [0, 1]$$

Le calibrage du modèle linéaire aboutit au tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeurs
$\phi_0$	0,00015
$\phi_1$	0,022
$\phi_2$	0,71

CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

Test	Résultat	Interprétation
$R^2$ ajusté	0,72	Pouvoir explicatif du modèle : 72%
Fisher	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Modèle global significatif
STUDENT (constante)	$P = 0,03578$	Constante significative
STUDENT (variable $1_{2gs1}$ )	$P = 0,00684$	Coefficient de la variable 1 significatif
STUDENT (variable $2_{gs1}$ )	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Coefficient de la variable 2 significatif
Moyenne résidus	$-1,13 \cdot 10^{-20}$	Moyenne des résidus considérée nulle
BREUSCH-GODFREY	$P = 1,88 \cdot 10^{-10}$	Présence d'auto-corrélation d'ordre 1
ARCH (1)	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Présence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
JARQUE-BERA	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus : Non vérifiée

Pour simuler les rendements de l'indice BRVM composite, nous prenons en compte la dépendance entre les indices boursiers BRVM 10 et composite, avec des taux de Kendall et Spearman de 82% et 93,33%. Nous utilisons la copule de Clayton pour modéliser cette dépendance, calibrée via la méthode du pseudo-maximum de vraisemblance avec le package "copula" sous R. Le paramètre de la copule est  $\theta = 9,088$ .

### 2.1.2.6 RENDEMENT DE L'IMMOBILIER

Dans la zone CIPRES, l'immobilier est un actif clé pour les assureurs, mais sa projection est souvent difficile en raison de données limitées et confidentielles. Pour modéliser les rendements de l'immobilier, nous choisissons le modèle d'Ahlgren et al. (2005) basé sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, sans inclure l'inflation :

$$dr_{et} = \kappa_{re}(\mu_{re} - r_{et})dt + \sigma_{re}dB_{re_t}$$

Avec :

- $\kappa_{re}$  : vitesse de retour à la moyenne.
- $\mu_{re}$  : rendement moyen de l'immobilier.
- $\sigma_{re}$  : écart-type de l'erreur.

Pour calibrer ce modèle, nous avons utilisé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est décrit comme suit :

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t, \quad X_0 = x_0$$

Ce processus possède une densité conditionnelle dont l'espérance et la variance sont :

$$E_0(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t}$$

$$Var_0(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2(1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}$$

En posant :

$$\kappa_{re} = \theta_2 \quad \text{et} \quad \mu_{re} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

L'espérance et la variance conditionnelles du rendement immobilier deviennent :

$$E_{\theta}(r_{e_t}|r_{e_0}) = \mu_{re} + (r_{e_0} - \mu_{re})e^{-\kappa_{re}t}$$

$$Var_{\theta}(r_{e_t}|r_{e_0}) = \frac{\sigma_{re}^2(1 - e^{-2\kappa_{re}t})}{2\kappa_{re}}$$

Ces expressions permettent de calibrer le modèle immobilier et de déterminer les paramètres inconnus, à savoir la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité :

$$\kappa_{re} = \frac{1}{t} \log \left( \frac{E_{\theta}(r_{e_t}|r_{e_0}) - \mu_{re}}{r_{e_0} - \mu_{re}} \right)$$

$$\sigma_{re} = \sqrt{\frac{Var_{\theta}(r_{e_t}|r_{e_0}) \times 2\kappa_{re}}{1 - e^{-2\kappa_{re}t}}}$$

Les résultats obtenus sont :

	Paramètres	Intitulé	Valeurs
	$\kappa_{re}$	Vitesse de retour à la moyenne	0,69
[H]	$\mu_{re}$	Taux de rendement moyen de l'immobilier	0,15
	$\sigma_{re}$	Écart type de l'erreur	0,07

### 2.1.2.7 RENDEMENT DU MONÉTAIRE

Le rendement du monétaire est considéré comme un actif sans risque. Nous l'assimilons aux dépôts à terme (DAT) des banques commerciales. Dans la zone CIPRES, le taux de rémunération de ces dépôts est supérieur au taux de l'épargne, fixé à 3,5 %.

Pour notre étude, nous supposons que le rendement du monétaire correspond au taux  $r$  observé sur la courbe des taux nominaux de la zone CIPRES.

La dynamique du monétaire  $M_t$  est décrite par

$$\frac{dM_t}{M_t} = r dt$$

Ce qui conduit à :

$$M_{t+\Delta t} = M_t \exp(r\Delta t)$$

Cette formule permet de modéliser l'évolution du monétaire en fonction du taux  $r$ .

### 2.1.2.8 RENDEMENT DES OBLIGATIONS DE SOCIETE

Pour estimer le rendement des obligations de société, deux méthodes peuvent être réalisées :

- La première méthode est indirecte, elle déduit le rendement à partir des écarts des taux et des taux nominaux.

→ La seconde méthode, directe, estime directement une courbe des taux des entreprises sans se référer aux écarts des taux. Cette courbe est construite de la même manière que celle des taux sans risque.

Pour déterminer cette courbe, nous utilisons le modèle de NELSON SIEGEL pour harmoniser l'estimation :

$$f_t^{ent}(m) = \beta_0^{ent} + \beta_1^{ent} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) + \beta_2^{ent} \left(\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right)$$

Les rendements des obligations de société sont calculés comme suit :

$$R_t^{ent}(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{ent}(u) du = \beta_0^{ent} + (\beta_1^{ent} + \beta_2^{ent}) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right)}{m/\tau_1^{ent}} \right] - \beta_2^{ent} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right)$$

Les paramètres sont obtenus en minimisant l'écart au carré entre les prix théoriques et observés des entreprises :

$$\min_{\beta_0^{ent}, \beta_1^{ent}, \beta_2^{ent}, \tau_1^{ent}} \sum_{k=1}^N (P_k^{th}(t, \theta) - P_k^{obs}(t))^2$$

Les valeurs obtenues sont :

Paramètres	Valeurs
$\beta_0^{ent}$	7
$\beta_1^{ent}$	-3.5
$\beta_2^{ent}$	-0.0215
$\tau_1^{ent}$	2.5

La mesure de la qualité d'ajustement du modèle nous donne :

Statistiques	Valeurs(%)
THEIL-U-STATISTIC	1.6
MAPE	2.8

## 2.2 ANALYSE DES TRAJECTOIRES DES VARIABLES

La projection des trajectoires des variables du GSE, notamment pour l'inflation, doit intégrer les avis d'experts. Nous avons simulé le modèle sur 13 ans, en tenant compte des prévisions de l'autorité monétaire. Celle-ci prévoit une inflation moyenne modérée en 2021 et 2022, avec une estimation de 1,1% en 2021, proche de 2020, et une accélération à 1,8% en 2022. Basée sur ces informations, la trajectoire de l'inflation est présentée ci-dessous.

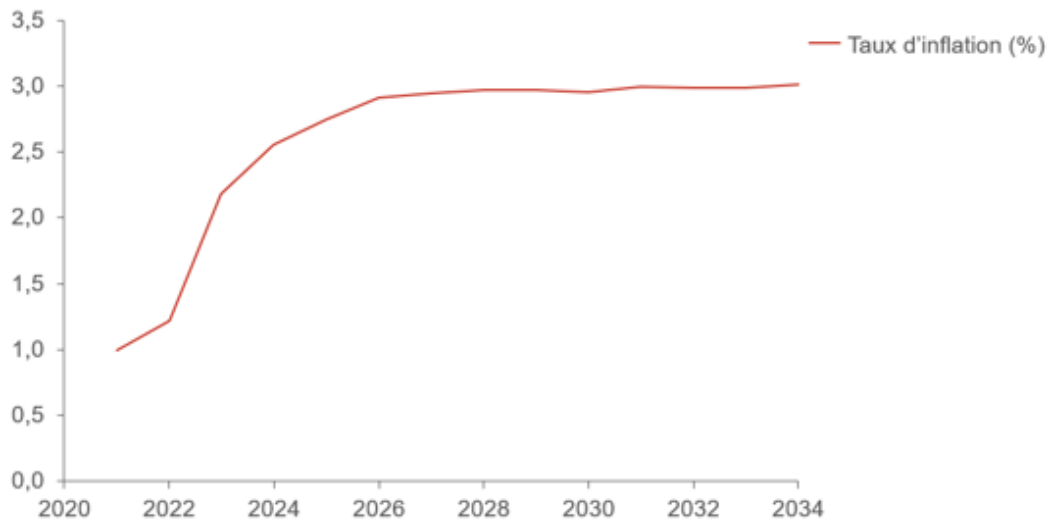


FIGURE 2.2 – Évolution probable de l'inflation

Les taux d'intérêt nominaux sont appréhendés par la courbe des taux au 28/11/2022. Cette courbe croissante, conforme à la théorie des anticipations (HICKS, 1946), converge vers 6,2%.

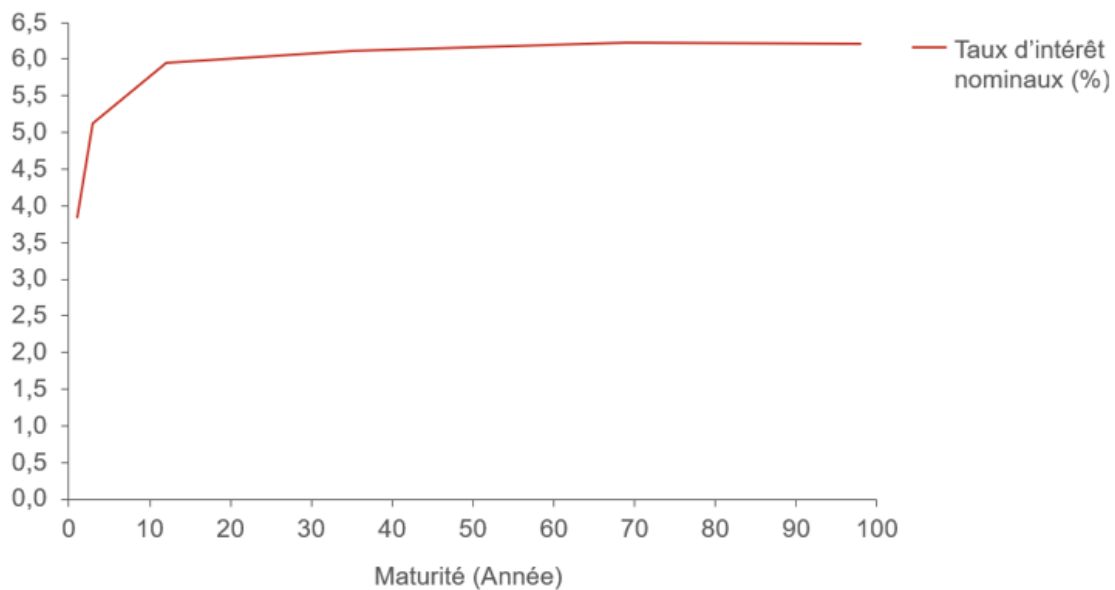


FIGURE 2.3 – Évolution des taux d'intérêt nominaux

Les taux d'intérêt réels sont obtenus à partir des taux nominaux et de l'inflation anticipée. Avec une inflation constante de 2% pendant la durée de vie des obligations en circulation

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

sur la BRVM, la courbe des taux réels converge vers 4,2%. Si l'inflation n'est pas constante, la courbe des taux réels converge aussi vers 4,2%, mais la courbe initiale (en orange) est au-dessus de la seconde (en rouge), comme illustré ci-dessous :

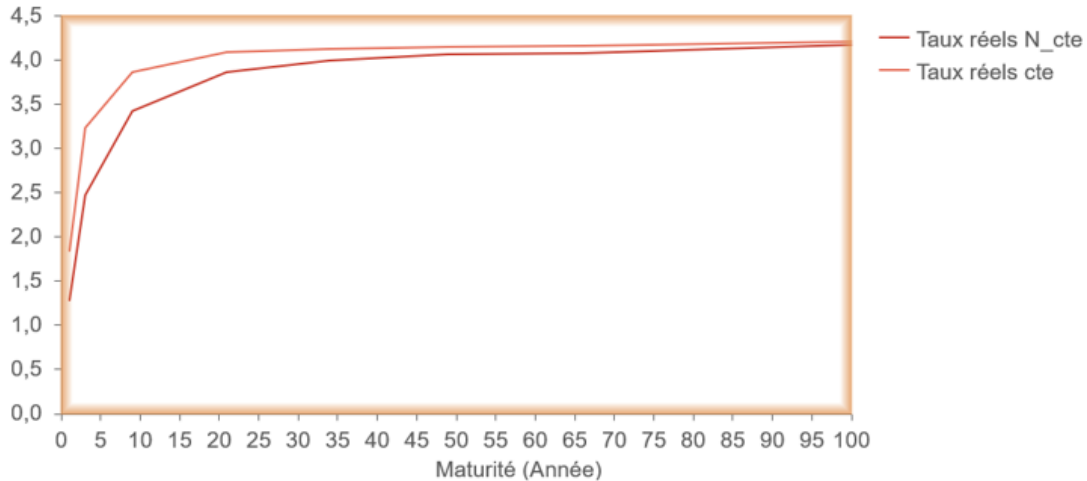


FIGURE 2.4 – Évolution des taux d'intérêt réels

Les écarts de taux représentent la prime de risque de l'émetteur. Pour les entreprises, la courbe des écarts de taux (issue de la méthode indirecte) diminue légèrement pour les maturités de 1 à 8 ans, puis augmente à partir de 9 ans et converge vers 1,5%. Le graphique ci-dessous illustre cette évolution.

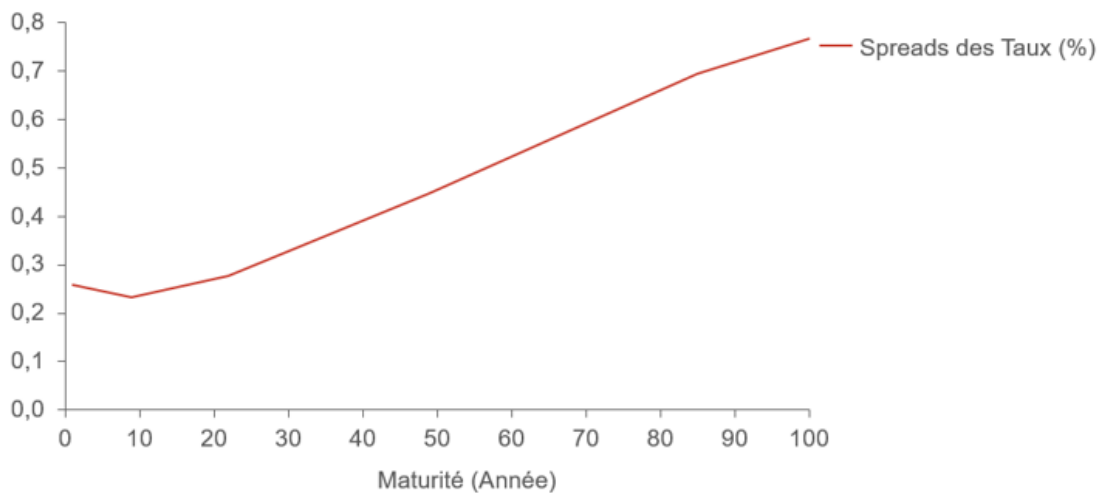


FIGURE 2.5 – Allure de la courbe des écarts de taux issue de la méthode indirecte

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

Par ailleurs, comme mentionné précédemment, les écarts de taux peuvent également être déterminés par la méthode directe. Pour illustrer ces deux méthodes simultanément, nous les présenterons dans le graphique ci-dessous :

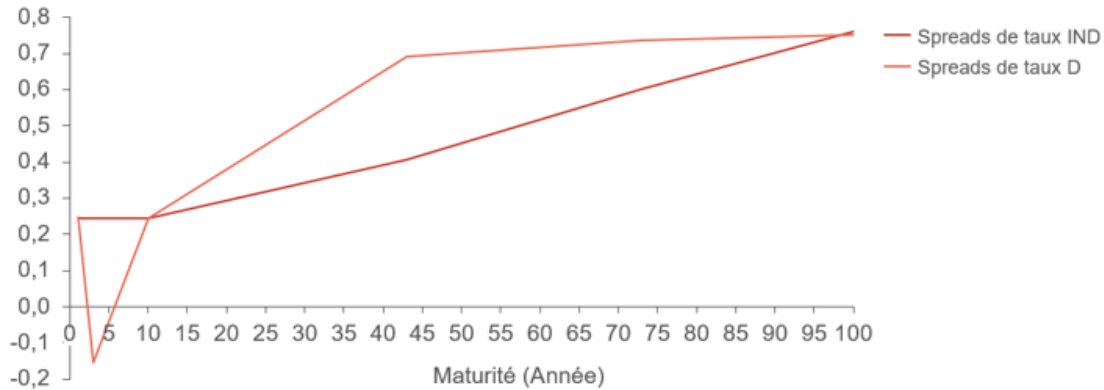


FIGURE 2.6 – Comparaison des écarts de taux issus des deux méthodes

Le graphique ci-dessous montre une différence entre les courbes des écarts de taux selon la méthode de calcul utilisée. En pratique, il est difficile de déterminer ces écarts par la méthode directe, car elle ne suit aucune logique financière. Ainsi, nous recommandons l'utilisation de la méthode indirecte pour la détermination des écarts de taux, comme illustré en rouge sur le graphique.

Les rendements des obligations des entreprises peuvent être obtenus par les méthodes directe et indirecte, en sommant les taux sans risque et les écarts de taux. La courbe des écarts de taux converge vers 7%. Dans notre contexte, nous retenons la méthode indirecte.

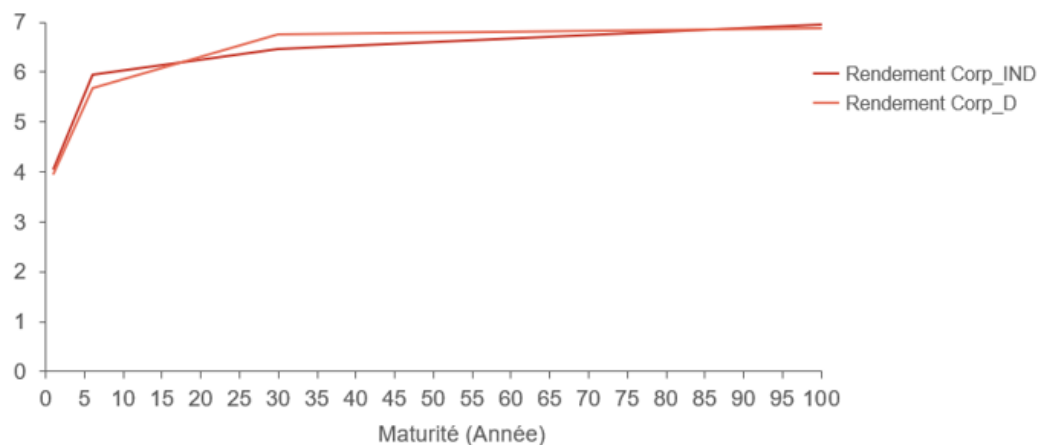


FIGURE 2.7 – Comparaison des écarts de taux issus des deux méthodes

## CHAPITRE 2. DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE PROJECTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES POUR LA ZONE CIPRES

Pour l'immobilier, nous considérons un rendement initial  $re_0 = 10\%$ , et après simulation nous obtenons :

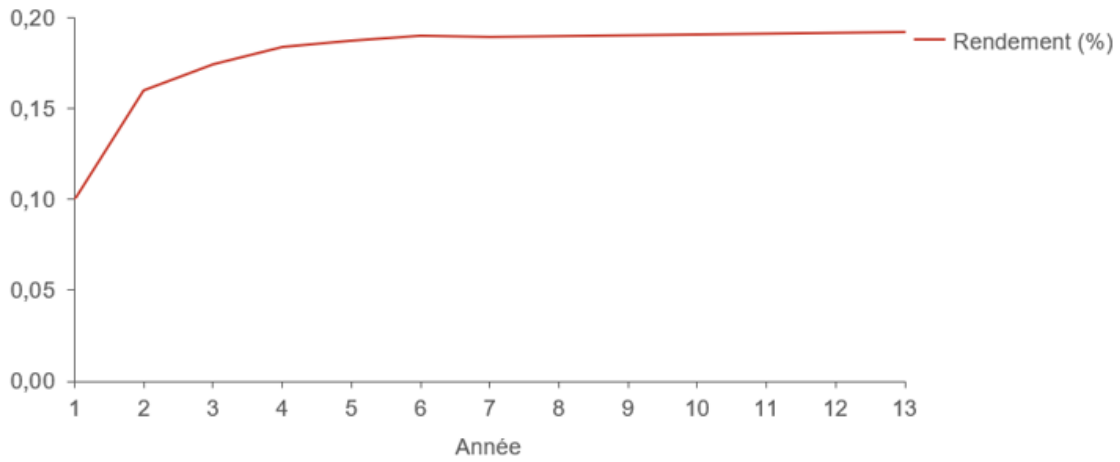


FIGURE 2.8 – Évolution probable du rendement de l'immobilier

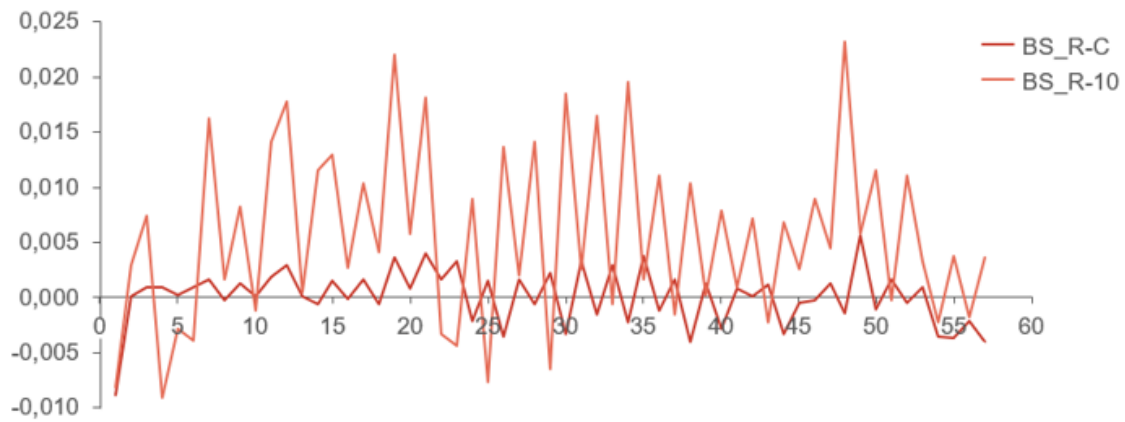


FIGURE 2.9 – Évolution des indices BRVM 10 et composite dans le modèle de Black Scholes

# Chapitre 3

## APPLICATION DU GSE AUX RÉGIMES DE RETRAITE

Nous avons vu dans ce qui précède que le Générateur de Scénarios Économiques est un outil puissant qui permet de produire des projections économiques variées et réalistes. Cela est applicable aussi à la retraite.

Dans ce chapitre, nous allons **utiliser le GSE pour évaluer les provisions pour retraite**. En suivant les recommandations du système comptable de l'OHADA (une organisation regroupant plusieurs pays africains, dont l'objectif est d'harmoniser et de simplifier les processus liés aux affaires), les entreprises peuvent utiliser les scénarios économiques générés par le GSE pour mieux anticiper les variations des taux d'intérêt, de l'inflation et d'autres paramètres économiques. Cette approche améliore la précision des évaluations financières et aide à déterminer les provisions pour retraite de manière plus exacte.

### 3.1 VALEUR ÉCONOMIQUE DES PROVISIONS

Les provisions pour retraite sont des flux financiers aléatoires qui nécessitent une valorisation basée sur des méthodes d'évaluation financière. Pour cela, nous considérons une série de flux financiers aux dates  $t_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). La valeur économique de ces flux est :

$$VE = \sum_{j=1}^n P(0, t_j) \times F_j$$

Tel que :

- $F_j$  est le flux financier versé à la date  $t_j$
- $P(0, t_j)$  est le prix zéro-coupon déterminé à la date d'évaluation ( $t=0$ )

La valeur actuelle de l'engagement de retraite pour un individu  $i$ , supporté par l'entreprise, se calcule comme suit :

$$VA^i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 + R(0, t_j))^j} \times \tilde{F}_{t_j}^i$$

Où  $\tilde{F}_{t_j}^i$  est le flux de prestation aléatoire de l'individu  $i$  à la date  $t_j$  et  $R(0, t_j)$  est le taux sans risque à la maturité  $t_j$ .

La valeur actuelle probable de l'engagement de retraite, notée  $VAP^i$ , est l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $VA^i$ , conditionnée par l'information disponible  $S_0$  à la date d'évaluation :

$$VAP^i = E(VA^i | S_0) = \sum_{j=1}^n E\left(\frac{1}{(1 + R(0, t_j))^j} \times E(\tilde{F}_{t_j}^i | S_0)\right)$$

La charge financière totale de l'entreprise au titre de la retraite,  $L_0$ , est la somme des VAP individuelles de l'ensemble des salariés. Pour une entreprise avec  $J$  employés,  $L_0$  se calcule comme suit :

$$L_0 = \sum_{i=1}^J VAP^i$$

## 3.2 APPLICATION DU GSE AUX RÉGIMES DE RETRAITE

Pour illustrer le modèle, prenons un échantillon aléatoire de dix salariés d'une entreprise dans la zone CIPRES dont les informations sont résumées dans le tableau suivant :

TABLE 3.1 – Échantillon aléatoire des salariés

Identifiant	Date de naissance	Date embauche	Sexe	Profil	Salaire	Statut	Nombre de droits terme
1	19/04/1990	01/07/2014	M	0	250 000	CDI	8,5
2	20/04/1986	02/07/2006	F	1	350 000	CDI	8,5
3	21/04/1976	02/12/2001	M	3	550 000	CDI	8,5
4	22/04/1981	02/12/2003	M	2	450 000	CDI	8,5
5	23/04/1971	02/12/1989	F	4	650 000	CDI	8,5
6	24/04/1956	02/12/1991	M	6	1 050 000	CDI	8,5
7	25/04/1959	02/12/1993	M	5	850 000	CDI	8,5
8	26/04/1964	02/12/1992	F	7	1 250 000	CDI	8,5
9	27/04/1961	02/12/1986	M	9	2 050 000	CDI	8,5
10	28/04/1952	02/12/1988	F	8	1 550 000	CDI	8,5

TABLE 3.2 – Présentation des hypothèses démographiques et financières

Libellé	Hypothèses constantes	Hypothèses non constantes
Mortalité	CIMA F	CIMA F
Départ	2 %	Table de départ
Taux d'actualisation	3,5 %	Courbe des taux au 20/06/2017
Taux de progression des salaires	2 %	Courbe de progression des salaires
Âge de départ à la retraite	60 ans	60 ans
Rendement des actifs	6 %	6 %

Pour évaluer l'impact du GSE, nous déterminons la valeur des provisions pour retraite sous diverses hypothèses : constantes et non constantes (application du GSE).

TABLE 3.3 – Estimation de la charge financière totale et des provisions pour retraite

	Hypothèses constantes	Hypothèses non constantes
Charge financière totale	4 923 568 FCFA	4 461 661 FCFA
Provisions pour retraite	3 812 456 FCFA	3 592 639 FCFA

À partir de cet exemple, nous pouvons remarquer que la valeur des provisions pour retraite dans le cas d'hypothèses constantes est supérieure à la provision de référence (hypothèses non constantes), soit un écart de presque **6%**. Nous pouvons déduire que l'utilisation du GSE permet d'affiner la valeur des provisions pour retraite, dans une logique « *best estimate* », ce qui en fin de compte permet de protéger l'assureur contre le risque de **surprovisionnement**.

Dans ce contexte, on constate que l'application du GSE permet d'obtenir une estimation précise et robuste des engagements financiers liés aux régimes de retraite, répondant ainsi aux objectifs des régulateurs.

## Conclusion

La conception d'un Générateur de Scénarios Économiques représente un défi et une opportunité majeure pour les pays de la zone CIPRES. Ce projet vise à fournir une base pour des projections économiques réalistes et pertinentes, cruciales pour la gestion des risques financiers et le développement stratégique des systèmes de retraite.

Dans cette partie, nous avons mis en lumière l'importance de la courbe des taux sans risque, qui reste un outil essentiel pour évaluer les coûts d'emprunt et optimiser la mobilisation des ressources sur les marchés financiers. En construisant des courbes adaptées pour les zones UEMOA et CEMAC, et en les combinant pour la zone CIPRES, nous avons pu créer un modèle cohérent malgré les défis posés par le manque de données disponibles.

Le GSE conçu offre une structure robuste pour anticiper les scénarios économiques futurs, permettant ainsi une gestion plus fine des risques et des provisions pour les régimes de retraite. L'application pratique du GSE a démontré son potentiel à améliorer la précision des évaluations financières, offrant une meilleure protection contre le surprovisionnement.

# Conclusion générale

Au terme de notre mémoire, il est évident que les systèmes de retraite de la zone CIPRES sont confrontés à des défis majeurs. Les contraintes économiques, les fluctuations démographiques et les restrictions budgétaires soulèvent des questions cruciales sur la viabilité de ces systèmes. Cette région doit faire face à une population vieillissante, des taux de cotisation souvent insuffisants, et une gestion des fonds de retraite qui nécessite des réformes profondes. L'analyse de l'historique de la population assurée montre que ces régimes de retraite sont particulièrement touchés par le risque de longévité et l'augmentation du nombre de départs à la retraite, entre autres facteurs.

Le principal problème identifié est le mauvais paramétrage des régimes. C'est pourquoi la CIPRES exige une étude actuarielle tous les cinq ans pour réviser ces paramètres. Dans notre audit, nous avons posé les hypothèses nécessaires en tenant compte de la situation de la caisse, qu'elles soient économiques, démographiques ou sociales. Après avoir effectué les simulations, nous avons présenté les raisons de la crise et proposé des réformes pour assurer l'avenir du régime de la caisse. En jouant sur plusieurs paramètres, nous avons élaboré deux bouquets de réformes optimales, prenant en compte tous les aspects sociaux et économiques. Ces réformes concernent les paramètres des régimes, mais une autre approche consiste à créer de nouvelles branches et à mettre en place des régimes complémentaires individuels.

Nous avons également exploré la conception d'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE) spécifique pour la zone CIPRES, dans le but d'améliorer le contexte des retraites dans cette région. Pour concevoir des pratiques adaptées, il est essentiel d'étudier le cadre économique de la zone. Nous avons commencé par la modélisation de la courbe des taux sans risque en Afrique subsaharienne francophone, puis développé un modèle de projection des scénarios économiques. Cette approche a impliqué l'analyse des hypothèses utilisées, des méthodologies de construction et d'analyse, ainsi que des résultats obtenus, en choisissant des modélisations adaptées aux données disponibles dans la zone. Enfin, nous avons démontré l'application du GSE aux régimes de retraite en montrant son impact sur les provisions d'un échantillon de salariés.

En conclusion, ce rapport offre une vision claire et approfondie des défis et des solutions possibles pour les systèmes de retraite dans la zone CIPRES, en combinant des analyses théoriques, actuarielles et économiques pour proposer des réformes durables et adaptés.

# Bibliographie

- DEVOLDER, P. (2022), « Prévoyance et assurance de groupe »
- BAKASS, P. (2022), « Méthodes de Projections Démographiques »
- Thierry Roncalli, La structure par terme des zéro coupon : Modélisation et implémentation numérique.
- Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. (2005) : Modeling Financial Scenarios – A Framework for the Actuarial Profession. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 177-238. <http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>
- Ayrmic Kamega, Introduction aux générateurs de scénarios économiques, 2015.
- Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. (2008) : A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators. Variance.
- Gbongué F., Planchet F. (2015f) : Analyse comparative des modèles de construction d'une courbe de taux sans risque dans la zone CIPRES. Bulletin Français d'Actuariat
- Adeosun M. E., Edeki S. O., Ugbebor O. O. (2015) : Stochastic Analysis of Stock Market Price Models : A Case Study of the Nigerian Stock Exchange (NSE), WSEAS Transactions on Systems.
- Gbongué F. (2015e) : Un modèle de projection des taux sans risque dans la zone CIPRES. Financial Afrik.
- Bolder D., Stréliski D. (1999) : Yield Curve Modeling at the Bank of Canada. Rapport
- Yacoub TOURE, Mise en œuvre d'un Générateur de Scénarios Économiques au sein d'une institution de prévoyance, Mémoire ISFA.
- <https://lacipres.org/>
- <https://www.cleiss.fr/>

