



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Application de la théorie de la crédibilité
à la tarification des traités de
réassurance**

Préparé par : **Mlle EL MOUSSAADA Salma**

Sous la direction de : **M. MARRI Fouad (INSEA)**
Mme MRABTI Sabrina (FORSIDES AFRICA)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT - FINANCE

Devant le jury composé de :

- **M. MARRI Fouad (INSEA)**
- **M. BERROUYNE Mustapha (INSEA)**
- **Mme MRABTI Sabrina (FORSIDES AFRICA)**

Juin 2021 / PFE N° 15

Résumé

Dans le cabinet de conseil en actuariat FORSIDES AFRICA, on a l'avantage de prendre en charge diverses missions pour le compte de nos clients (compagnies de réassurance ou d'assurance). J'ai eu pour mission pour le compte d'une compagnie d'assurance, dans un premier temps, d'étudier la rentabilité avant réassurance de la branche Accidents de Travail (AT), de tarifer dans un deuxième temps le traité de réassurance, ensuite appliquer la théorie de la crédibilité pour donner la meilleure estimation de la prime de réassurance, et enfin analyser quelques critères d'optimisation de ce traité.

Par le biais de ce mémoire, nous allons chercher la meilleure estimation de la prime pure à accepter pour le cas du traité que souhaite contracter notre cédante et à apporter un diagnostic à ce traité en étudiant quelques critères qui peuvent aider la compagnie d'assurance à bien désigner son programme de réassurance. Cette étude est primordiale pour que l'assureur ait une visibilité sur les taux de primes attendus pour sa couverture en XS et ainsi pouvoir mieux négocier son contrat.

En effet, l'assureur en cédant une partie de ses risques aura à payer une prime de réassurance. Pour ce faire, on a commencé notre étude par la détermination du taux de prime le plus fiable et convenable à notre historique de sinistralité tout en prenant en compte le profil de risque que présente cette branche. En d'autres termes, notre premier objectif est d'augmenter la fiabilité des taux de primes avancés par les actuaires tarificateurs. Ainsi, on a dû appliquer les méthodes de cotation selon l'expérience (Burning Cost et la méthode probabiliste) et selon l'exposition. À cet effet, on a créé un outil de cotation des traités XS (en excédent de sinistre) en réassurance afin de faciliter les calculs, gagner en termes de temps et diminuer le risque opérationnel qui en découle. Ensuite, on s'est basé sur la théorie de crédibilité pour sortir la meilleure estimation du taux de prime qui calibre entre le taux issu de la méthode selon l'expérience et celui issu de la méthode selon l'exposition. Puis, nous procédons à l'analyse de quelques critères d'optimisation des traités XS. Et finalement, nous présentons l'outil de tarification en XS qu'on a élaboré sur R Shiny.

Ainsi, notre mémoire est réparti en cinq grandes parties.

La première partie est une présentation des éléments fondamentaux de la réassurance et de la cotation, où l'on explicitera les différentes méthodes de tarification selon l'expérience (Burning Cost et probabiliste) et selon l'exposition.

Cette première partie est en fait un préambule de la deuxième partie où l'on appliquera ces différentes méthodes pour un traité XS de priorité 600 000 et de portée 400 000 et on analysera les résultats obtenus.

Ensuite, on présentera dans la troisième partie la théorie de la crédibilité en réassurance en explicitant les modèles Bühlmann et Bühlmann Straub qu'on appliquera à notre base de données pour en déduire la prime de réassurance crédible qui calibre entre celles issues des méthodes selon l'expérience et selon l'exposition.

Puis, dans la quatrième partie, on étudiera deux critères d'optimisation, le premier critère consistant en une approche espérance / variance du gain. Ce critère, stipule qu'en perdant une part du bénéfice on diminue aussi la volatilité du gain et vice versa. Le deuxième critère consiste à calculer la Value at Risk afin d'évaluer l'impact de la réassurance sur les montants que la compagnie d'assurance devra constituer pour honorer ses engagements.

Finalement, dans la cinquième partie, on présentera l'outil de tarification en excédant de sinistre, élaboré sur R Shiny. On distinguera dans cet outil entre la partie lecture et analyse des données, qui nous permettra de distinguer entre les tranches travaillantes et non travaillantes. Par le biais de cette analyse, on choisit la bonne méthode à appliquer. En effet, si la tranche à coter est travaillante, le taux de prime est directement calculé à partir de l'historique des sinistres. En revanche, pour les tranches non travaillantes, les données sont moins conséquentes ce qui rend un taux de prime basé sur l'expérience de sinistralité peu fiable. Ainsi, les actuaires ont recours à une tarification selon l'exposition.

Mots-clés

Accident de travail, Réassurance non proportionnelle, conseil, traité XS, cotation, simulation, crédibilité en réassurance, VaR, méthodes selon l'expérience, méthodes selon l'exposition, MBBEFD, optimisation, modèles Bühlmann, modèles Bühlmann Straub.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- *Mes chers parents,*
- *Mes sœurs, et toute ma famille,*
- *Tout le cadre professoral de l'INSEA.*

Remerciements

Ce rapport est le résultat d'une grande aventure, et il n'aurait pas été réussi sans le concours de nombreuses personnes.

Mes sincères remerciements et mon immense gratitude à mon encadrant interne M. Fouad MARRI pour sa disponibilité, son assimilation des sciences actuarielles, ses conseils pertinents et son suivi et aide tout au long de mon stage.

Madame Sabine MRABTI, en tant que Directrice du cabinet de conseil en actuariat FORSIDES AFRICA, je vous remercie de m'avoir fait rejoindre cette belle équipe. Vos connaissances et expertise en actuariat m'ont aidé tout au long de ce stage à réussir ce travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements au directeur de l'INSEA, M. SKALLI, ainsi qu'à toute l'équipe pédagogique de l'INSEA pour m'avoir transmis leur savoir tout au long de ces trois années de formation.

Je tiens à remercier mes chers parents pour leur soutien perpétuel. À vous, Maman et Papa, qui illuminent ma vie.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Liste des abréviations

XS : excédent de sinistre

AT: Accident de Travail

BC: Burning Cost

IF : Indice de Fisher

CV : Coefficient de variation

LN : Log-Normale

BN : Binomiale Négative

PP : Prime pure

S/P : Sinistres / Primes

SCR : Société Centrale de Réassurance

MBBEFD : Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, et Fermie-Dirac

SMP: Sinistre Maximum Probable

VaR: Value at Risk

Liste des figures

Figure 1 : Principe de la répartition du risque en réassurance.....	19
Figure 2 : Cycles du marché de la réassurance.....	19
Figure 3: La Société Centrale de Réassurance.....	21
Figure 4 : Processus du fonctionnement des compagnies de réassurance.....	24
Figure 5 : Répartition du risque en réassurance proportionnelle.....	26
Figure 6: Traité Quote-Part avec un taux de cession de 30%.....	27
Figure 7 : Traité en Excédent de Plein avec Plein de rétention $R=0.5 M$ et une capacité de 3 pleins $C = 3 \times R = 1.5 M$	28
Figure 8 : répartition du risque en réassurance proportionnelle.....	29
Figure 9 : Traité Excédent de sinistre XS en deux tranches (la 1ère tranche est 1M XS 2M et la 2ème est 3M XS 3M).....	30
Figure 10 : Fonctionnement d'un traité XS par événements.....	31
Figure 11 : Les différents étapes pour ressortir la prime de réassurance.....	33
Figure 12 : Processus de la tarification non paramétrique Burning Cost.....	36
Figure 13 : Processus de la tarification probabiliste.....	39
Figure 14 : Algorithme pour la détermination du taux pur par simulation.....	43
Figure 15 : Exemple de la courbe d'exposition.....	46
Figure 16 : Les courbes d'exposition SWISS RE.....	48
Figure 17 : Analyse descriptive.....	56
Figure 18 : Evolution du ratio S/P par année avec l'axe horizontale d'équation $Y=100$	57
Figure 19 : Evolution de la charge des sinistres au fil des années.....	58
Figure 20: Evolution du nombre de sinistres par année.....	59
Figure 21: Graphe du taux d'inflation marocain entre 2000 et 2019.....	60
Figure 22: illustration des données revalorisées.....	61
Figure 23: Estimation des paramètres de la loi Log-Normale tronquée.....	65
Figure 24 : Adéquation par la loi Log-Normale.....	66
Figure 25: Diagramme QQ-plot.....	68
Figure 26 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov.....	68
Figure 27 : Statistique du test de Fisher.....	71
Figure 28 : Profil du risque de la cédante.....	72
Figure 29 : Estimation des paramètres b et g de la courbe d'exposition.....	73
Figure 30 : les trois zones des tranches d'un XS.....	78
Figure 31 : Illustration du modèle à deux boîtes.....	85
Figure 32 : Démarche bayésienne pour l'estimation de la prime de Bayes.....	86
Figure 33 : Notations du modèle de Bühlmann.....	88
Figure 34 : Notations du modèle de Bühlmann Straub.....	91
Figure 35 : Prime de crédibilité par le modèle de Bühlmann.....	92
Figure 36 : Prime de crédibilité par le modèle de Bühlmann Straub.....	93
Figure 37: Tests de Kolmogorov Smirnov.....	98
Figure 38 : Test de Kolmogorov Smirnov pour valider l'ajustement par la loi Log-Normale.....	98
Figure 39: Statistique du test de Fisher.....	99
Figure 40 : Illustrations du principe de la VaR.....	103
Figure 41 : Interface de l'outil de tarification en réassurance.....	110

Figure 42 : Interface de l'analyse de données de notre outil.....	111
Figure 43 : Interface de la revalorisation des données (sinistres et primes)	113
Figure 44 : Interface d'application de la méthode Burning Cost.....	114
Figure 45 : Interface utilisateur de l'application de la méthode probabiliste	115
Figure 46 : Interface de l'application de la méthode de cotation selon l'exposition	117
Figure 47 : Présentation de l'ensemble des domaines d'expertise de Forsides Africa et les missions dédiées à chacun de ces domaines.....	124

Table des matières

Résumé.....	3
Mots-clés	5
Dédicaces.....	6
Remerciements.....	7
Liste des abréviations.....	8
Liste des figures	9
Introduction	15
PARTIE 1.....	17
Contexte général et tarification en réassurance.....	17
Chapitre 1 : Introduction générale.....	18
1. Fondamentaux de la réassurance :.....	18
1.1. Définitions et principes de la réassurance :.....	18
1.2. Cycles de la réassurance :.....	19
1.3. L'utilité de la réassurance :.....	20
2. Le marché de la réassurance :	21
2.1. Le marché marocain de la réassurance :	21
2.2. Rôle économique de la réassurance :	22
3. Fonctionnement des compagnies de réassurance :.....	23
Chapitre 2 : Les différentes formes de la réassurance.....	25
1. Par critère juridique :.....	25
2. Par critère technique :	26
2.1. Réassurance proportionnelle :	26
2.1.1. Traité Quote-Part (QP) :.....	26
2.1.2. Traité Excédent de Plein (XP) :.....	27
2.2. Réassurance non proportionnelle :	29
2.1.3. Traité Excédent de Sinistre (XS) :.....	29
2.1.4. Stop Loss :.....	31
Chapitre 3 : Tarification en réassurance.....	32
1. Généralités de la tarification :.....	32
1.1. Objectifs de la tarification :.....	32
1.2. La prime de réassurance : Prime pure, prime technique, prime commerciale :	32
2. Analyse des données préalable à la cotation :.....	33
2.1. Branches courtes, branches longues :	34
2.2. Tranches travaillantes, tranches non travaillantes :.....	34

3.	Tarification selon l'expérience :	35
3.1.	Préparation des données : Statistique « AS IF »	35
3.2.	Méthode non paramétrique : Burning Cost	36
3.2.1.	Méthodologie :	37
3.2.2.	Avantages et inconvénients :	37
3.3.	Tarification probabiliste :	38
3.3.1.	Méthodologie :	38
3.3.2.	Modélisation de la fréquence :	40
3.3.3.	Modélisation de la sévérité :	41
3.3.4.	Estimation des paramètres :	41
3.3.5.	Simulations stochastiques :	42
3.3.6.	Avantages et limites de la méthode :	43
4.	Tarification selon l'exposition :	44
4.1.	Profil de risque :	45
4.2.	Fonctionnement des courbes d'exposition :	45
4.2.1.	Formulation et propriétés mathématique des courbes d'exposition :	46
4.2.2.	Courbes MBBEFD :	47
4.3.	Processus de cotation :	48
	Conclusion de la première partie :	50
	PARTIE 2	51
	Application des méthodes de tarification des traités XS	51
	Introduction :	52
	Chapitre 1 : Présentation, analyse et traitement de la base de données	53
1.	Présentation de l'assurance AT (Accident de travail) :	53
2.	Présentation des données	54
3.	Traitement des données	54
4.	Analyse des données	55
	Chapitre 2 : Application des méthodes de cotation selon l'expérience et selon l'exposition	60
1.	Actualisation des données	60
2.	Application de la méthode Burning Cost	61
3.	Application de la méthode probabiliste :	61
3.1.	Choix du seuil de modélisation :	62
3.2.	Modélisation de la sévérité :	65
3.2.1.	Estimation des paramètres :	65
3.2.2.	Analyse graphique :	66
3.2.3.	Tests statistiques d'ajustement :	68

3.3.	Modélisation des fréquences :	69
3.3.1.	Estimation des paramètres :	69
3.3.2.	Tests d'ajustement :	70
3.4.	Modèle retenu :	71
3.5.	Simulations et résultats :	71
4.	Application de la méthode par exposition :	72
4.1.	Analyse du profil de risque de la cédante :	72
4.2.	Application :	72
4.2.1.	Choix de la courbe d'exposition :	73
5.	Résultats et conclusions :	74
	Conclusion de la deuxième partie :	75
	PARTIE 3	76
	Théorie de la crédibilité appliquée à la réassurance	76
	Introduction :	77
	Chapitre 1 : La théorie de la crédibilité	79
1.	Introduction :	79
2.	Théorie de la fluctuation limitée :	80
2.1.	Crédibilité totale :	81
2.2.	Crédibilité partielle :	82
2.3.	Limite de la crédibilité à fluctuation limitée :	83
3.	Crédibilité Bayésienne :	83
3.1.	Terminologie bayésienne :	83
3.1.1.	Information à priori et profil de risque :	83
3.1.2.	Notations bayésiennes :	84
3.1.3.	Primes de Bayes :	86
3.1.4.	Modélisation de l'information a priori :	87
3.2.	Modèle de Bühlmann :	88
3.2.1.	Formules de Bühlmann :	88
3.2.2.	Interprétation du facteur de crédibilité de Bühlmann :	89
3.3.	Modèle de Bühlmann-Straub :	90
	91
	Chapitre 2 : Application de la théorie de la crédibilité à la réassurance	92
1.	Modèle de Bühlmann :	92
2.	Modèle de Bühlmann Straub :	93
	Conclusion de la troisième partie :	94
	PARTIE 4	95

Analyse de quelques critères d'optimisation des traités XS	95
Introduction :	96
1. Critère Espérance/ Variance du Gain :	97
1.1. Modélisation de la charge de l'assureur :	97
1.1.1. Loi de sévérite :	97
1.1.2. Loi de fréquence :	99
1.2. Modélisation du gain de l'assureur :	100
2. La Value At Risk comme mesure de risque :	102
2.1. Définition :	103
2.2. Application :	103
Conclusion de la quatrième partie :	106
PARTIE 5	107
Présentation de l'outil informatique de tarification en excédant de sinistre (XS)	107
Introduction :	108
1. Choix du langage de programmation :	109
2. Présentation de l'application de tarification :	110
2.1. Lecture des données :	110
2.2. Analyse des données :	111
2.3. Statistique As if :	113
2.4. Cotation selon l'expérience :	114
2.4.1. Méthode non paramétrique : Burning Cost	114
2.4.2. Méthode probabiliste :	115
2.5. Cotation selon l'exposition :	116
Conclusion de la cinquième partie :	118
Conclusion générale :	119
Bibliographie	121
Annexes	122

Introduction

L'activité des assurances est dotée de plusieurs risques qu'elle devra bien gérer afin de garantir sa solvabilité et éviter toute éventuelle ruine. Ainsi, pour assurer sa pérennité, elle s'adresse à une ou plusieurs compagnies de réassurance pour se couvrir contre les risques non habituels et ceux qu'elle estime ne pas pouvoir gérer toute seule.

En effet, le recours à la réassurance est primordial puisqu'elle prend en charge une partie des engagements de l'assureur, lui permettant ainsi d'alléger ses responsabilités et stabiliser davantage son résultat.

Dans ce mémoire, nous nous plaçons dans une situation de conseil pour une cédante et plus particulièrement pour son portefeuille de la branche Accident de Travail, afin de l'aider à déterminer la meilleure estimation du taux de prime qu'elle aura à céder à son réassureur. En plus, nous allons analyser quelques critères pour l'aider à mieux choisir son plan de réassurance et de l'optimiser.

Pour ce faire, nous allons procéder en cinq grandes parties.

Dans de la première partie, nous allons introduire l'activité de la réassurance, son utilité et ses différentes formes. Ensuite, nous allons présenter les différentes méthodes de tarification en XS implémentées dans le cadre de ce mémoire (selon l'expérience : Burning Cost et la méthode probabiliste ; et selon l'exposition).

La deuxième partie consistera en un diagnostic du portefeuille Accident de Travail, puis nous procédons à l'application de la cotation d'un traité XS (choix de la cédante) de priorité 600 000 et de portée 400 000 par les différentes méthodes présentées dans la partie précédente.

La troisième partie a pour objectif l'application de la théorie de la crédibilité à la réassurance pour déduire de la prime issue de la cotation par expérience et celle issue de la cotation par exposition une prime pondérée appelée prime crédible.

La quatrième partie vise l'analyse de quelques critères d'optimisation qui seront utiles à l'assureur pour faire son choix de programme de réassurance. En particulier, on traitera le critère espérance / variance du gain de l'assureur et le critère Value at Risk.

La cinquième partie, est une présentation et description détaillée de l'outil de tarification en XS qu'on a créé dans le but de faciliter les calculs et gagner en termes de temps.

Ce mémoire présente des réponses à quelques interrogations de la cédante. La prise de décision finale lui appartient, notre rôle est limité à fournir des réponses en se basant sur les données fournies. A noter que nous ne nous disposons pas de toutes les informations sur la cédante (politique, économique, gestion, business plan...), par conséquent nous ne pouvons pas donner une conclusion globale propre à cette cédante.

PARTIE 1

Contexte général et tarification en réassurance

Chapitre 1 : Introduction générale

1. Fondamentaux de la réassurance :

1.1. Définitions et principes de la réassurance :

La réassurance peut être définie comme l'assurance des compagnies d'assurance. En d'autres termes, la réassurance réfère à un contrat par lequel l'une des parties (le réassureur), appelée le cessionnaire, accepte de prendre en charge, dans des proportions et des conditions bien précises, les conséquences pécuniaires des engagements que l'autre partie (l'assureur), appelée cédante, a contractés vis-à-vis de ses assurés au travers des polices qu'elle a émises.

Tout comme les lignes d'activités assurantielles, celles de la réassurance sont la réassurance vie et non vie. Il est à noter que la différence qui existe entre les compagnies d'assurance et ceux de réassurance figure dans les missions propres à chacune. En effet, l'assurance a comme unique mission la mutualisation des risques alors que la réassurance, en plus de la mutualisation des risques, vise aussi la dispersion du risque.

La réassurance permet aux compagnies d'assurance de transférer une partie ou la totalité de leurs risques et de se prémunir surtout contre la survenance d'événements extrêmes qui pourraient mettre en péril leur solvabilité. La réassurance est principalement concernée par les grands **risques indépendants** (avion, navire, usine, etc.), **les risques émergents** (pollution, atomes, responsabilité civile professionnelle, etc.) et **les risques extrêmes** (catastrophe naturelle, crise politique, défaillance technologique).

Le principe de la réassurance est autant simple que celui de l'assurance. En effet, la compagnie d'assurance cède à un ou plusieurs réassureurs un risque aléatoire contre une prime de réassurance correspondante au risque transféré et au mode de transfert prévu dans le contrat de réassurance appelé « **traité** ».

La figure ci-après nous schématise la répartition des risques entre assureur, réassureur et rétrocessionnaire.

D'après cette figure, on comprend qu'un assureur peut transférer son risque à un ou plusieurs réassureurs. En outre, si le réassureur ne souhaite pas assumer la totalité de sa participation au risque, il en rétrocède une partie à un réassureur appelé « **Rétrocessionnaire** ».

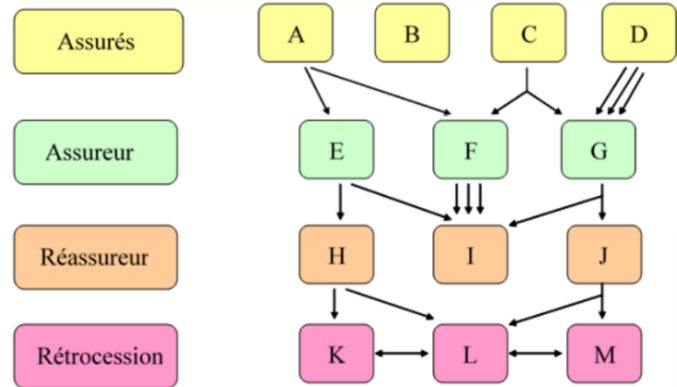


Figure 1 : Principe de la répartition du risque en réassurance

Un des réassureurs est désigné **apériteur (leader)**, c'est celui qui détient la plus grosse part de risque cédé.

1.2.Cycles de la réassurance :

Le marché de la Réassurance suit en général ce que l'on appelle des « **cycles** ». En effet, lorsque les prix sont élevés, l'offre de réassurance croît sur le marché car de plus en plus d'acteurs financiers sont attirés par les rendements élevés du secteur. En contrepartie, la concurrence s'accroît et les prix chutent jusqu'à ce que le secteur ne soit plus rentable. Plusieurs réassureurs sont alors contraints de se retirer ou font faillite, ainsi l'offre de réassurance se contracte et les prix remontent.

Lorsque les **prix** sont **élevés**, on dit que l'on est en « **Hard market** », au contraire, lorsque les **prix** sont **bas**, on dit que l'on est en « **Soft market** ».

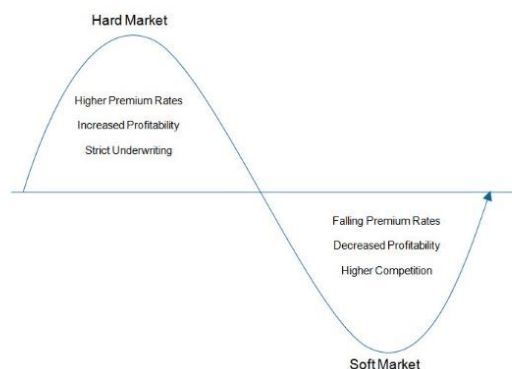


Figure 2 : Cycles du marché de la réassurance

Les cycles des différentes branches de la réassurance ne sont pas forcément corrélés. A titre d'exemple on prend le marché français des risques industriels ; il est entré dans une phase de baisse des prix aux environs des années 2005-2006, alors que le marché de la RC Automobile était encore en phase de durcissement tarifaire avec des hausses de prix supérieures à 20%.

La réassurance **Catastrophes naturelles** présente fortement ce caractère cyclique. Car qui dit catastrophe naturelle dit, sinistres graves qui est synonyme de pertes importantes. Et qui dit pertes importantes dit majoration des primes de réassurance ; d'où le marquage de la fin d'un cycle et le début d'un autre.

1.3.L'utilité de la réassurance :

La réassurance est dorénavant un outil crucial de contrôle et mutualisation des risques encourus par les sociétés d'assurance.

En contractant un traité de réassurance, la cédante ne cherche pas uniquement la mutualisation et la dispersion de ses risques, mais aussi vise d'autres aspects de son activité tels que :

- **Protection financière** : contre la hausse de la charge des sinistres (petits sinistres mais explosion de la charge), les sinistres catastrophiques, individuels graves, et l'anormalité de la fréquence des sinistres.
- **Protection du bilan** : la réassurance offre une protection contre un dérapage éventuel de la sinistralité (en montant ou en nombre) et contre les évènements extrêmes. En plus, elle permet un lissage des engagements et des résultats (équilibre du portefeuille).
- **Réduction de la volatilité du résultat de l'assureur** : qui se manifeste en la diminution du coût de capital (par le biais du lissage des résultats), et la protection du bilan par la prise en charge des variations non attendues de la sinistralité et aussi du risque d'erreur de souscription.
- **Dispersion de risque** : en répartissant le risque encouru avec un ou plusieurs réassureurs.

- **Réduction du SCR** : réduction du besoin en capital en libérant les fonds propres liés à la couverture des risques. La réassurance est ainsi un moyen efficace pour diminuer le niveau du capital économique.
- **Support technique** : conseil sur le choix des tarifs, d'activité, niveaux de risque... il est bien évident que limiter les pertes de l'assureur c'est également limiter les pertes du réassureur.
- **Financement de nouveaux projets** : augmentation de la capacité de souscription, réduction de la marge de solvabilité ainsi on aura des fonds propres supplémentaires pour de nouveaux projets.
- **Impact fiscal** : exonération d'impôts sur les réserves en présence de non-linéarité des barèmes fiscaux.

2. Le marché de la réassurance :

2.1. Le marché marocain de la réassurance :

Le marché marocain de réassurance est partagé entre la Société Centrale de Réassurance (SCR) et les autres réassureurs étrangers. En effet, la SCR intervient sur deux niveaux : d'une part à travers la cession légale et d'une autre par le biais de la cession conventionnelle.



Figure 3: La Société Centrale de Réassurance

La cession légale à la SCR en vertu du Dahir N1-60-085 du 23 Chaoual 1379 (20 avril 1960), porte la législation de cession à cette société d'une part des primes perçues par les organismes d'assurance. La part de cette cession légale est établie à 10% de la prime réalisée pour tout risque souscrit au Maroc.

Les cessions conventionnelles quant à elles, constituent l'activité commerciale de la SCR, et se font à travers les traités et les affaires facultatives.

Les cessions facultatives font généralement l'objet d'affaires importantes surtout lorsqu'il s'agit de grands risques dépassant le plein de souscriptions des traités.

2.2. Rôle économique de la réassurance :

La réassurance assume la fonction sommitale du système assurantiel, équivalent de la banque centrale dans le système bancaire, le « prêteur en dernier ressort ». En effet, le réassureur remplit diverses fonctions, qui toutes contribuent au développement de l'activité d'assurance (vie ou non-vie).

L'intervention de la réassurance n'est pas seulement majeure en cas de catastrophe de grande ampleur ; mais elle s'applique aussi efficacement à chaque entité d'assurance dans son activité quotidienne de prise de risque. La réassurance vise à garantir la solvabilité de l'assureur, et donc sa pérennité. On en déduit immédiatement l'avantage pour le développement économique : les clients, particuliers ou entreprises d'un pays ne sont pas menacés par la faillite d'un acteur de l'assurance imprudent ou mal géré, car il est correctement réassuré. C'est d'ailleurs ce que vérifient les services étatiques de contrôle des assurances.

La réassurance loue des fonds propres aux assureurs. On dit souvent, en termes plus prétentieux, qu'elle donne de la capacité de souscription aux assureurs. Cette fonction d'apport de capacité est également importante pour le développement, car elle permet de compenser l'insuffisance (ou la mauvaise allocation) de l'épargne dans un pays en développement, par l'apport d'épargne étrangère qui est mobilisée à travers les réassureurs, et ce sans peser sur l'endettement des entités ou de l'Etat local. Cela permet, à un niveau macro-économique, de mobiliser l'épargne nationale ou la capacité d'endettement pour d'autres emplois. Cela sous la condition, bien sûr, que les Etats confient aux marchés d'assurance et de réassurance le soin de couvrir les risques.

Le réassureur apporte une aide remarquable à la tarification du risque, puisqu'il fournit la possibilité de diversification (dispersion, mutualisation) du risque que ne pourrait pas réaliser le client assureur par ses propres moyens.

Prêter de la capacité et aider à la tarification font du réassureur le véritable arbitre de l'assurabilité du risque.

Le rôle macro et micro-économique du réassureur est celui qui permet de surmonter un nombre de difficultés de l'assurance dont : risque de solvabilité, insuffisance de capacité, soucis à promouvoir et à tarifier les nouveaux produits, etc.

Pour résumer, on regroupe les principales missions de la réassurance en quelques points:

- Le réassureur est l'assureur en dernier ressort ;
- Le réassureur rend tous les types de risques assurables :
 - Réparation des sinistres de gravité exceptionnelle (Ouragans, cyclones, ...) qui ne sont pas payables par un assureur à taille normale.
 - Couverture des risques atypiques : Participation au développement de l'assurance locale.
- Participation au développement de l'assurance locale : un focus sur le développement du métier d'assurance et transfert d'une partie de gestion de risque finale au réassureur ;
- L'allocation plus optimale des ressources pour les économies fragiles : la réassurance devient un produit important pour assurer même la couverture des économies.

3. Fonctionnement des compagnies de réassurance :

De manière générale, l'assurance et la réassurance sont fondées sur le même principe à savoir la mutualisation. Toutefois, la réassurance se distingue par son caractère international qui fait que celle-ci gagne en termes d'expertise et parvienne à disposer de techniques d'analyse avancées pour participer à de grandes variétés de risques. En outre, le marché de la réassurance est caractérisé par une forte présence des courtiers.

Concernant les intervenants dans le marché de la réassurance, il en existe principalement trois. Les deux premiers sont composés naturellement des compagnies d'**assurance** qui cèdent le risque et les compagnies de **réassurance** qui supportent en partie le risque, et le troisième intervenant est celui qui joue le rôle de **l'intermédiaire**, il s'agit du **courtier de réassurance**.

Les courtiers sont capables d'aller chercher les bons produits de réassurance et de positionner les demandes de contrats de réassurance chez les grands réassureurs. En effet, le courtier de réassurance est considéré comme étant le mandataire de l'assureur. En effet, le courtier apporte son assistance à l'assureur en le conseillant sur son plan de réassurance. D'un autre côté, son rôle d'intermédiation intervient dans le sens où il regroupe et propose un ensemble de réassureurs pour participer à la couverture du risque, où chaque réassureur en assume une partie.

Enfin le courtier est chargé de négocier les conditions de souscription des contrats de réassurance. On résume ceci dans la figure ci-dessous :

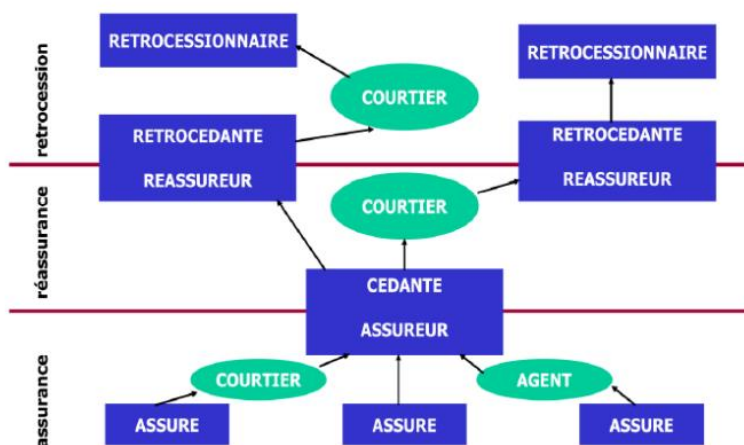


Figure 4 : Processus du fonctionnement des compagnies de réassurance

La notion de rétrocession signifie la réassurance d'une affaire réassurée. En effet, le réassureur peut jouer le rôle de rétrocedant en ayant recours à la rétrocession qui lui permettra de protéger son exposition aux risques.

Chapitre 2 : Les différentes formes de la réassurance

La réassurance peut être classée selon deux critères : Un premier critère juridique décrivant la forme du contrat et un deuxième plutôt technique, définissant les paramètres liés à la rétention.

1. Par critère juridique :

D'un point de vue juridique, la réassurance prend principalement deux formes : une facultative et une autre obligatoire.

La réassurance facultative est considérée comme la plus ancienne forme de réassurance. Se faisant par police, l'assureur est libre de céder une partie ou la totalité d'un risque au réassureur, tandis que ce dernier se réserve le droit de l'accepter ou de le refuser. Cette forme de réassurance couvre généralement :

- Des risques exclus du traité ;
- Des risques exceptionnellement acceptés par la compagnie à titre commercial ;
- Un portefeuille petit ne pouvant pas faire l'objet d'un véritable traité ;
- De grands risques dépassant même la capacité de souscription de la compagnie.

Etant donné que la réassurance facultative s'applique risque par risque, elle présente ainsi l'inconvénient d'engendrer des coûts élevés en matière de gestion.

La réassurance (cession) obligatoire quant à elle, engendre des obligations des deux côtés. D'une part l'assureur s'engage, durant une période donnée, à céder des risques dans une branche clairement définie, d'une autre part le réassureur s'oblige à les accepter et ce dans des conditions déterminées. Le contrat régissant la réassurance obligatoire est appelé traité, celui-ci peut prendre la forme de proportionnel ou non proportionnel.

Enfin, il existe une autre forme de réassurance : facultative/obligatoire (FAC-OB) dans laquelle l'assureur est libre de céder une partie des risques alors que le réassureur est obligé de les accepter, selon des conditions bien définies.

2. Par critère technique :

2.1. Réassurance proportionnelle :

En réassurance proportionnelle, les primes et les sinistres sont partagés proportionnellement entre assureur et réassureur(s).

Les assureurs et les réassureurs sont des partenaires, et ils ont des intérêts communs en ce qui concerne la performance du portefeuille couvert.

La réassurance proportionnelle consiste en la participation proportionnelle du réassureur aux gains (c'est-à-dire les primes) et pertes (c'est-à-dire les sinistres) de la cédante. Et dans le cadre de la réassurance proportionnelle, le réassureur en contrepartie d'une portion ou partie prédéterminée (α) de la prime d'assurance facturée par la cédante (communément désignée par l'abréviation anglaise EPI pour "Estimated Premium Income"), indemnise cette dernière contre une portion déterminée (α) des sinistres couverts par la cédante au titre des polices concernées ; en d'autres termes, le réassureur est amené à payer α du sinistre couvert. Un exemple de la répartition du risque en réassurance proportionnelle est illustré dans la figure ci-dessous.

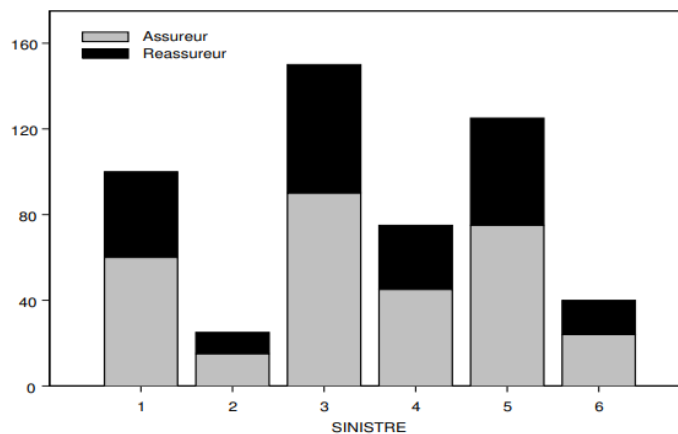


Figure 5 : Répartition du risque en réassurance proportionnelle

2.1.1. Traité Quote-Part (QP) :

Il s'agit de la forme la plus simple et intuitive de réassurance. Pour ce type de traité, on définit ce qu'on appelle un taux de cession $x\%$. Ainsi, le réassureur s'engage à prendre en charge $x\%$ de tous les risques du portefeuille considéré et en contrepartie il reçoit ce même

pourcentage x% de la prime perçue pour ce portefeuille. La figure ci-dessous présente un exemple d'un traité QP de taux de cession 30% , c'est-à-dire que le réassureur prendra en charge 30% des risques et en contrepartie il va recevoir 30% de la prime de ce portefeuille.

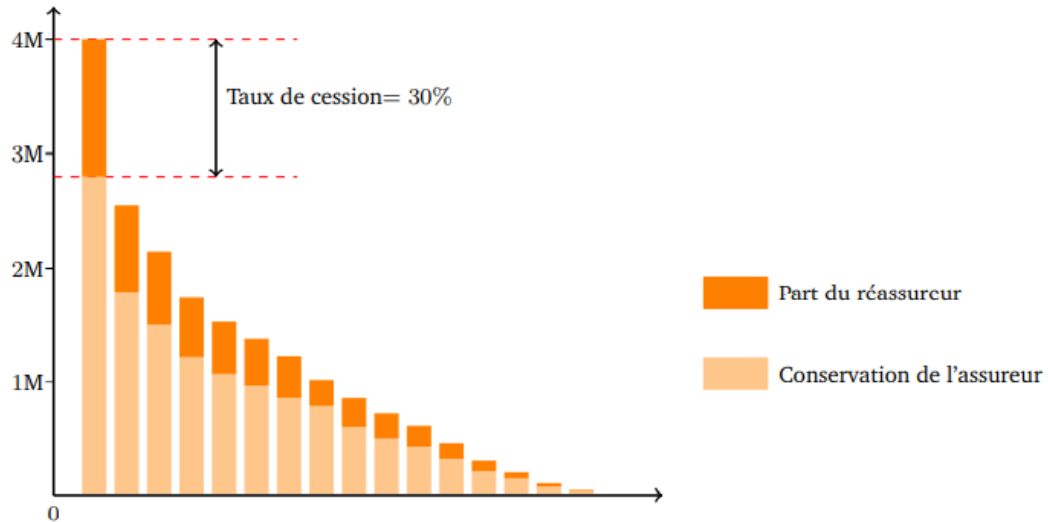


Figure 6: Traité Quote-Part avec un taux de cession de 30%

Ce type de couverture est particulièrement intéressant pour les cédantes ayant un capital insuffisant et souhaitant se développer davantage. En effet, la cédante peut souscrire plus de primes pour le même niveau de capital tout en maintenant sa marge de solvabilité. Cependant, vu que le ratio S/P demeure le même avant et après application du Quote-Part, on constate que ce traité ne permet pas un lissage des résultats au fil du temps. De plus, ce type de traité ne permet pas de se protéger contre la survenance de sinistres extrêmes.

2.1.2. Traité Excédent de Plein (XP) :

Dans le cas du traité précédent QP, le réassureur est impliqué dans tous les sinistres allant des plus petits aux plus extrêmes. Or, cela n'est généralement pas la meilleure stratégie pour la cédante. En effet, les petits risques sont plus fréquents et donc mieux maîtrisés contrairement aux grands risques qui se caractérisent par la rareté et donc sont moins maîtrisés. De plus, ces risques réservent en général la plus grande part de polices du portefeuille de la cédante. D'où, les cédantes préféreront conserver une plus grande partie de la prime (et donc les petits sinistres) et bénéficier d'une protection proportionnelle uniquement pour les risques les plus importants. Ces cédantes souscriront alors un traité en Excédent de Plein.

Pour un Excédent de Plein, contrairement au Quote-Part, le taux de cession est défini **pour chaque police** selon la formule suivante :

$$x_i = \min \left\{ \max \left\{ \frac{S_i - R}{S_i}, 0 \right\}; \frac{C}{S_i} \right\}$$

Où,

- S_i représente la somme assurée totale pour une police i ;
- R est appelé le « Plein de rétention », et il représente le montant maximal que la cédante souhaite payer par sinistre ;
- C est appelé « Capacité de l'Excédent de Plein », il est défini par le nombre de pleins.

Ainsi, en analysant les composantes de ce taux de cession, on a :

- **Si** $S_i < R \Rightarrow x_i = 0$, **alors** la cédante conserve entièrement le risque i ;
- **Si** $R < S_i \leq C \Rightarrow x_i = \frac{S_i - R}{S_i} \%$, **alors** la cédante cède $x_i = \frac{S_i - R}{S_i} \%$ au réassureur ;
- **Si** $S_i > C \Rightarrow x_i = \frac{C}{S_i} \%$, **alors** la cédante cède $x_i = \frac{C}{S_i} \%$ au réassureur.

La figure suivante présente un exemple d'un XP de rétention $R=0.5$ M et une capacité de 3 pleins $C = 3 \times R = 1.5$ M :

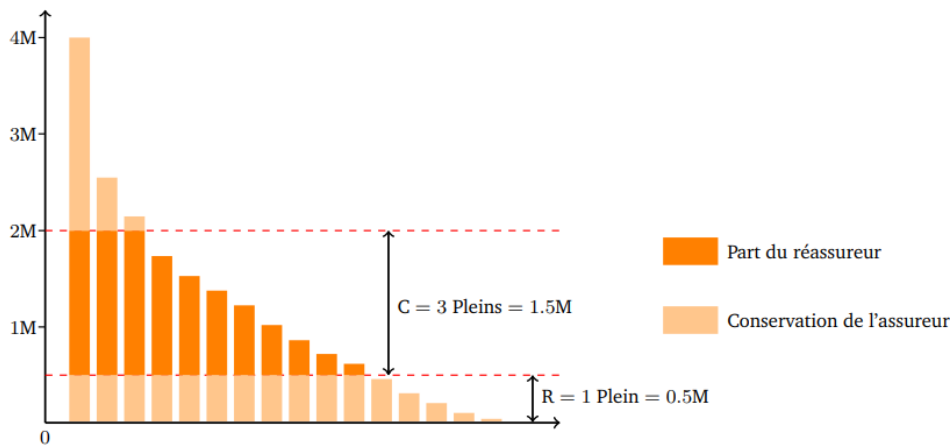


Figure 7 : Traité en Excédent de Plein avec Plein de rétention $R=0.5$ M et une capacité de 3 pleins $C = 3 \times R = 1.5$ M

2.2. Réassurance non proportionnelle :

Dans cette forme de réassurance, le traité est défini par une franchise (appelé aussi Priorité) et une portée délimitant l'engagement du réassureur. A vrai dire, celui-ci intervient lorsque le montant du sinistre dépasse la franchise (Priorité) dans la limite de la valeur de la portée. En revanche, le réassureur encaisse une prime pour faire face au risque qu'il prend en charge. Le sort de la cédante et du réassureur sont beaucoup moins liés, ainsi au cours d'une année, les résultats de l'assureur et du réassureur ne sont pas forcément liés.

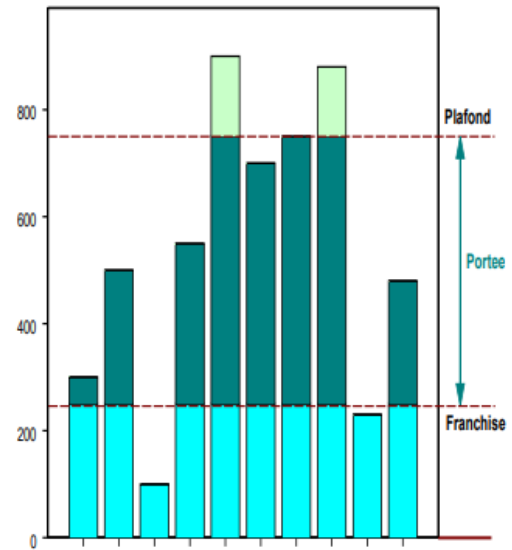


Figure 8 : répartition du risque en réassurance proportionnelle

En résumé, un traité de réassurance non proportionnelle est défini par :

- Une priorité (la franchise).
- Une portée (engagement du traité).
- Un plafond (la limite de souscription) = priorité + portée.

Les formes de réassurance non proportionnelle sont utilisées aussi bien par les assureurs et les réassureurs afin d'équilibrer les souscriptions portant sur des polices pour lesquelles il est difficile d'apprécier leurs limites d'engagement. Dans la plupart des couvertures où les risques sont d'une grande importance, chaque couverture est découpée en plusieurs tranches qui feront l'objet de plusieurs traités.

2.1.3. Traité Excédent de Sinistre (XS) :

Un traité en Excédent de Sinistre (en abréviation « traité XS ») peut être découpé en plusieurs tranches, comme il se peut qu'il ne comporte qu'une seule tranche. Les priorités et portées des différentes tranches sont définies contractuellement. En pratique, on écrit les tranches de réassurance de la façon suivante : **portée XS priorité**.

Si on suppose que X est le montant d'un sinistre couvert par un traité XS à une tranche et que S est le sinistre à la charge du réassureur, on a :

$$S = \min \{ \max \{ (X - \text{Priorité}), 0 \}; \text{Portée} \}$$

La figure ci-dessous nous illustre le cas d'un traité XS en deux tranches.

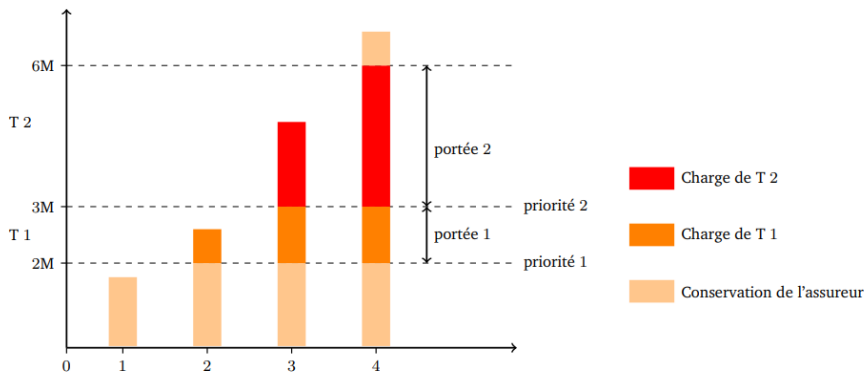


Figure 9 : Traité Excédent de sinistre XS en deux tranches (la 1ère tranche est 1M XS 2M et la 2ème est 3M XS 6M)

Dans le cas où un événement touche un nombre important de polices dans le portefeuille d'une cédante mais qu'aucun des sinistres occasionnés ne dépasse la priorité définie contractuellement ; le réassureur dans ce cas ne va rien payer et toute la sinistralité sera à la charge de la cédante. Afin de ne pas laisser la cédante à découvert dans ce genre de situation, plusieurs modes de fonctionnement ont été définis pour un XS :

- **Par risque** : le traité XS par risque s'applique à chaque sinistre survenant durant la période de couverture.
- **Par événement** : le traité XS dans ce cas s'applique au montant cumulé de tous les sinistres causés par un même événement. Il faut signaler que la définition de l'événement doit être stipulée au préalable dans le contrat afin d'éviter tout litige. (voir figure ci-dessous).
- **Par risque et par événement** : dans ce cas, la cédante est couverte pour tout type de sinistre, événementiel ou individuel

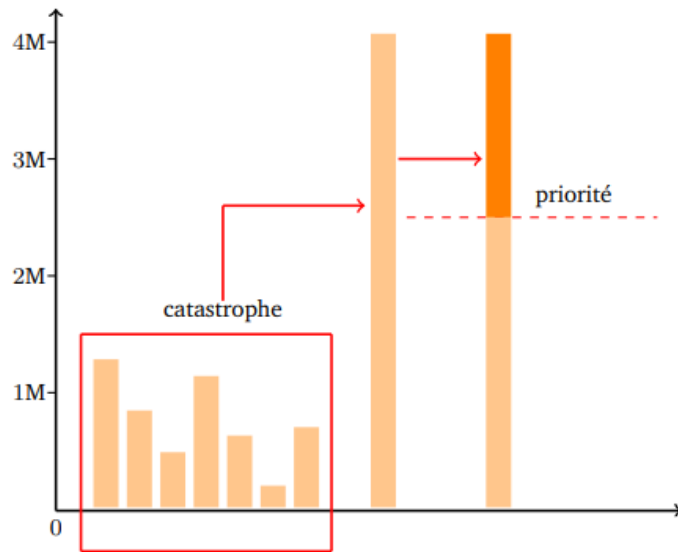


Figure 10 : Fonctionnement d'un traité XS par événements

2.1.4. Stop Loss :

Dans certains cas, notamment pour des risques à caractère cyclique et localisés géographiquement, le traité XS que ça soit par risque, par événement, ou par risque et par événement ne permet pas de protéger le résultat de la cédante. En effet, pour ce type de risque c'est plus la fréquence qui constitue un danger pour le résultat d'une compagnie d'assurance. D'où la nécessité du traité en excédent de perte annuelle plus communément appelé **Stop-Loss**. Grâce à ce traité les cédantes sont plus en mesure de protéger leurs ratios S/P et ainsi assurer leurs solvabilités.

Le fonctionnement d'un Stop-Loss est semblable à celui d'un Excédent de Sinistre, la seule différence figure dans le fait que les limites du traité ne sont pas exprimées sous la forme de montants mais plutôt sous forme de rapports sinistres sur primes (S/P).

Soient $(X_i)_{i=1...n}$ les sinistres de la cédante durant la période de couverture, P la somme des primes acquises par la cédante et S le sinistre à charge du réassureur, on a donc la formulation mathématique d'un Stop Loss:

$$S = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\sum X_i}{P} - \text{Priorité}, 0 \right\}, \text{Portée} \right\} * P$$

Où, la **priorité** et la **portée** sont exprimées en %.

Chapitre 3 : Tarification en réassurance

Dans la suite de ce mémoire, nous avons pour mission d'analyser le portefeuille accidents de travail d'une cédante et d'en étudier le traité de réassurance.

Nous présenterons dans ce chapitre les différentes étapes du processus de cotation. Grâce auxquelles nous pourrons aborder sereinement la suite du mémoire. En outre, dans cette partie, nous nous intéressons exclusivement aux traités en excédent de sinistre (XS). De ce fait, nous n'abordons pas la tarification des traités proportionnels qui est assez différente puisqu'elle ne se traduit pas par un calcul de prime mais par un calcul de rentabilité.

1. Généralités de la tarification :

1.1.Objectifs de la tarification :

Effectuer une cotation c'est attribuer un prix à un programme de réassurance. C'est dans cette optique qu'avant toute souscription, l'assureur est amené à faire sa propre tarification afin d'apporter son propre jugement vis-à-vis de l'acceptation ou non d'un éventuel traité. En effet, cette opération lui permet d'apprécier les coûts engendrés par le contrat et d'évaluer dans quelle mesure ce dernier lui apportera des résultats équilibrés compte tenu du tarif qu'il devrait céder. Enfin, la tarification donnera la possibilité à l'assureur de négocier les tarifs en cas de divergences significatives des résultats de cotation apportée par chacune des parties.

1.2.La prime de réassurance : Prime pure, prime technique, prime commerciale :

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse à la détermination de la prime pure qui n'est autre que l'espérance de sinistralité attendue par le réassureur. Toutefois, la prime effectivement versée par la cédante au réassureur est la prime commerciale ou prime de réassurance.

Comme pour le cas de l'assurance, la prime pure de réassurance est calculée sur la base d'une espérance des engagements futurs du réassureur, conditionnés par les niveaux de franchise et portées définis dans le traité.

Toutefois le réassureur majore la prime pure par des chargements afin de faire face aux éventuels écarts de sinistralités pouvant nuire à son résultat. De plus, on rajoute d'autres

chargements destinés à couvrir divers frais pour former la prime commerciale. Ces chargements et frais sont :

- **Le chargement de sécurité** : il permet au réassureur de se protéger contre la volatilité de la sinistralité. Il est fonction de la variance de la charge de la tranche considérée. Ajouté à la prime pure, il donne la prime sécurisée.
- **Les frais de gestion** : ils servent à rémunérer les employés de la compagnie de réassurance. Ils sont composés d'une partie fixe et d'une partie variable proportionnelle à la prime commerciale.
- **Les frais de courtage** : ils servent à rémunérer le courtier de réassurance. Ils sont généralement exprimés en pourcentage de la prime commerciale.
- **Le coût du capital** : il permet de rémunérer l'actionnaire.

Ainsi, le processus permettant d'aboutir à la prime pure est le suivant :

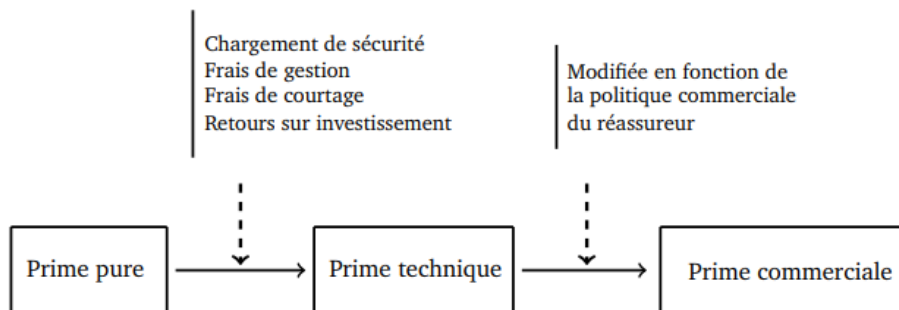


Figure 11 : Les différents étapes pour ressortir la prime de réassurance

2. Analyse des données préalable à la cotation :

Pour mener à bien cette cotation, chaque actuaire doit tirer parti au maximum de toute l'information qui lui est transmise. En effet, contrairement à l'assurance où l'actuaire dispose d'une large quantité d'informations par client qu'il doit segmenter pour construire son tarif, la quantité d'information disponible en réassurance est restreinte ce qui laisse une grande place à l'incertitude.

2.1. Branches courtes, branches longues :

En réassurance, on distingue entre deux types de branches : Les branches à **développement court** dites « **short-tail** » et les branches à **développement long** dites « **long-tail** ». (On abrègera les appellations en branches courtes et branches longues par la suite). Cette distinction relève du temps nécessaire pour acquérir une évaluation correcte des montants de sinistres. En effet, certains sinistres peuvent être réglés et donc évalués très rapidement, alors que d'autres prennent très longtemps pour être réglés. La branche incendie, par exemple, est une branche courte alors que la branche Accident de Travail (AT) est une branche longue. Par exemple, il est évident que le « coût » d'un dommage corporel d'une victime d'accident de travail est plus difficile à apprécier que celui d'un incendie de maison, tout simplement parce qu'on devra attendre que l'état de la victime se stabilise pour pouvoir évaluer le coût de cet accident.

Lorsque l'on effectue une cotation, on est amené d'abord à choisir un **horizon de modélisation** c'est-à-dire une longueur d'historique. C'est à partir de cet historique que nous allons modéliser la sinistralité future de la cédante. Bien évidemment, l'horizon choisi ne sera pas le même pour une branche longue et pour une branche courte. En général, l'horizon de modélisation porte sur dix années en long et cinq années en court.

2.2. Tranches travaillantes, tranches non travaillantes :

De même pour les tranches, les actuaires en réassurance distinguent entre deux types de tranches : **travaillantes et non travaillantes**. On dit qu'une tranche est travaillante si elle est fortement sinistrée.

Cette définition étant vague et difficile à appliquer en pratique car ne définit par un seuil à partir duquel on considère qu'une tranche est fortement sinistrée. Ainsi, dans la suite de ce mémoire on va considérer qu'une tranche est travaillante si le nombre moyen de sinistres touchant annuellement la tranche est strictement supérieur à un et si le pourcentage de portée atteinte est strictement supérieur à 80%.

Le pourcentage de portée atteinte désigne le ratio suivant :

$$Ratio_k = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (X_{k,i})}{Portée}$$

Où, $(X_{k,i})_{i=1,\dots,n}$ représente les n montants des sinistres à charge de la $k^{\text{ème}}$ tranche.

3. Tarification selon l'expérience :

La méthode de tarification par l'expérience est basée sur la sinistralité observée dans le passé afin de prédire la sinistralité future potentielle.

3.1. Préparation des données : Statistique « AS IF »

Afin d'approcher au mieux le comportement du portefeuille traité, dans notre cas il s'agit de la branche Accident de Travail, on aura recours à l'observation de la sinistralité passée, c'est-à-dire d'un historique sinistre. En effet, la détermination de la prime se basera sur cet historique sinistre, dans une logique qui présume que la sinistralité future est expliquée par celle du passé.

Cependant, la donnée historique ne peut être utilisée dans son état brut sans pour autant lui apporter des corrections qui visent à l'accommoder aux conditions économiques de l'année de cotation. Cette correction s'appelle la création de la statistique « As If », et ça consiste à modifier les données de la cédante pour constituer des données comparables à l'année de cotation.

Les coûts des sinistres ainsi que les primes sont impactés par l'évolution économique et l'inflation.

- **Revalorisation des sinistres :**

L'évolution économique et l'inflation ont certainement un impact sur le coût des sinistres. En effet, on ne peut pas considérer qu'un sinistre de 800 000 MAD en 2002 est comparable à un sinistre de 800 000 MAD en 2020.

La formulation mathématique de la revalorisation d'un sinistre de l'année k vue l'année de cotation n est donnée par :

$$S_k^n = S_k \times \frac{I_n}{I_k}$$

Avec :

I_k est l'indice d'inflation de l'année k ;

S_k est la valeur d'un sinistre de l'année k .

S_k^n est la valeur « as if » d'un sinistre de l'année k vue l'année de cotation n .

- **Revalorisation des primes :**

Les primes de la cédante peuvent être indexées de la même manière que les sinistres. Ainsi, la valeur « as if » de la prime de l'année k vue l'année de cotation n est donnée par :

$$P_k^n = P_k \times \frac{I_n}{I_k}$$

Avec :

P_k est la valeur d'un sinistre de l'année k .

Dans ce qui suit, nous tâcherons de présenter deux méthodes de tarification selon l'expérience. Une non paramétrique appelée Burning Cost et une autre probabiliste s'appuyant sur un modèle aléatoire.

3.2.Méthode non paramétrique : Burning Cost

La méthode « **Burning Cost** » permet de calculer un montant de prime à partir de l'historique des sinistres individuels, en tenant compte des principaux facteurs susceptibles d'influencer la sinistralité.

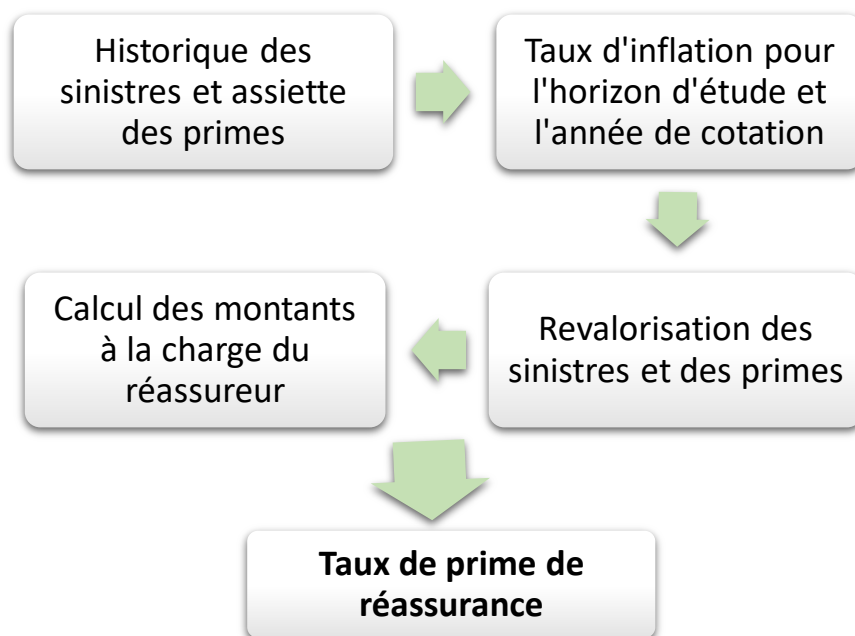


Figure 12 : Processus de la tarification non paramétrique Burning Cost

L'application de cette méthode est simplement décomposée en 3 étapes :

- 1- Création de la statistique « As If » ;
- 2- Cotation de taux pur ;
- 3- Cotation de taux commercial.

3.2.1. Méthodologie :

Cette méthode dite empirique est basée sur la sinistralité passée et convient pour les tranches travaillantes. Elle est l'un des moyens les plus simples de tarification.

Le Burning Cost est le ratio entre le montant de pertes à charge de la tranche et les primes perçues par l'assureur. Il s'agit de la quantité :

$$BC = \frac{\text{coût des sinistres pris en charge par le réassureur}}{\text{Total des primes perçues}}$$

Soient X_i^n , C_i^n , P_i^n les valeurs « as if » de l'année i vu l'année de cotation n respectivement de la perte, de la charge de la tranche XS considérée et de la prime directe.

On a :

$$C_i^n = \min \{ \max \{ X_i^n - \text{Priorité} \}, \text{Portée} \}$$

Ainsi, d'après la définition ci-dessus, l'estimateur du taux de prime BC est :

$$\widehat{BC} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_i^n}{\sum_{i=0}^{n-1} P_i^n}$$

Ce taux de prime Burning Cost n'est rien d'autre que le taux de cession en primes de la réassurance XS pour l'année de cotation trouvé par la méthode Burning Cost.

3.2.2. Avantages et inconvénients :

Les atouts principaux de cette méthode sont sa simplicité, sa rapidité de mise en place et sa faible consommation de ressources. Elle permet d'utiliser l'historique de la cédante et est une bonne méthode pour obtenir une estimation du risque. En effet, elle donne un taux fiable et

crédible lorsque les tranches tarifées sont travaillantes, c'est-à-dire lorsqu'il y a une large quantité de sinistres qui traversent la tranche régulièrement chaque année.

Cependant, elle possède de nombreux inconvénients :

- Suppose une structure du portefeuille inchangée dans le temps.

En effet, comme nous n'utilisons que l'historique de la sinistralité passée, elle est représentative de l'exposition du passé. En cas d'évolution du portefeuille, ces données passées ne sont plus représentatives de la structure qui peut avoir été déformée, par exemple si la cédante décide de changer de politique de souscription, de souscrire des risques plus lourds, et qu'elle s'expose à de l'antisélection,

- Nécessite beaucoup de données afin de mesurer avec fiabilité la sinistralité attendue, et donc ne peut fonctionner que dans une tranche sévèrement touchée, générant une forte incertitude statistique
- Donne un BC nul dans une tranche jamais touchée (tranches non travaillantes), alors que le risque est réel.

3.3. Tarification probabiliste :

Un portefeuille de réassurance est caractérisé par deux composantes, le nombre de sinistres par année, aussi appelé fréquence (notée N) et le coût de chaque sinistre individuel, aussi appelé la sévérité (X_i étant le $i^{\text{ème}}$ sinistre).

3.3.1. Méthodologie :

La méthode probabiliste de tarification est basée sur la modélisation de la fréquence des sinistres et leurs sévérités à partir des données dont on dispose ; et utiliser ensuite ces modèles pour tarifier des tranches où l'on ne dispose que de peu d'information.

Notons qu'on est en train d'appliquer la méthode de tarification probabiliste à un traité de réassurance *Portée (C) XS Priorité (P)*.

Dans ce qui suit, on note :

- N : variable aléatoire du nombre des sinistres durant une année donnée ;

- X_i : variable aléatoire réelle représentant le montant du sinistre individuel ;
- $Y_i = f(X_i)$: variable aléatoire réelle montant du sinistre individuel à la charge du réassureur ;

Avec :

- f fonction de compensation du traité XS, donnée par :

$$f(X_i) = \min(C, \max(0, X_i - P))$$

$$f(X_i) = C \mathbf{1}_{X_i > C+P} + (X_i - P) \mathbf{1}_{P \leq X_i \leq C+P}$$

- $S = \sum_{i=1}^N Y_i$: variable aléatoire réelle montant total annuel à la charge du réassureur.

Dans le cadre de cette méthode, on va supposer que les X_i sont indépendantes identiquement distribuées (i.i.d), et que les variables $(X_i)_{i=1, \dots, N}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Après l'établissement du cadre de cette méthode probabiliste, on peut procéder aux différentes étapes à suivre afin d'aboutir au taux pur.

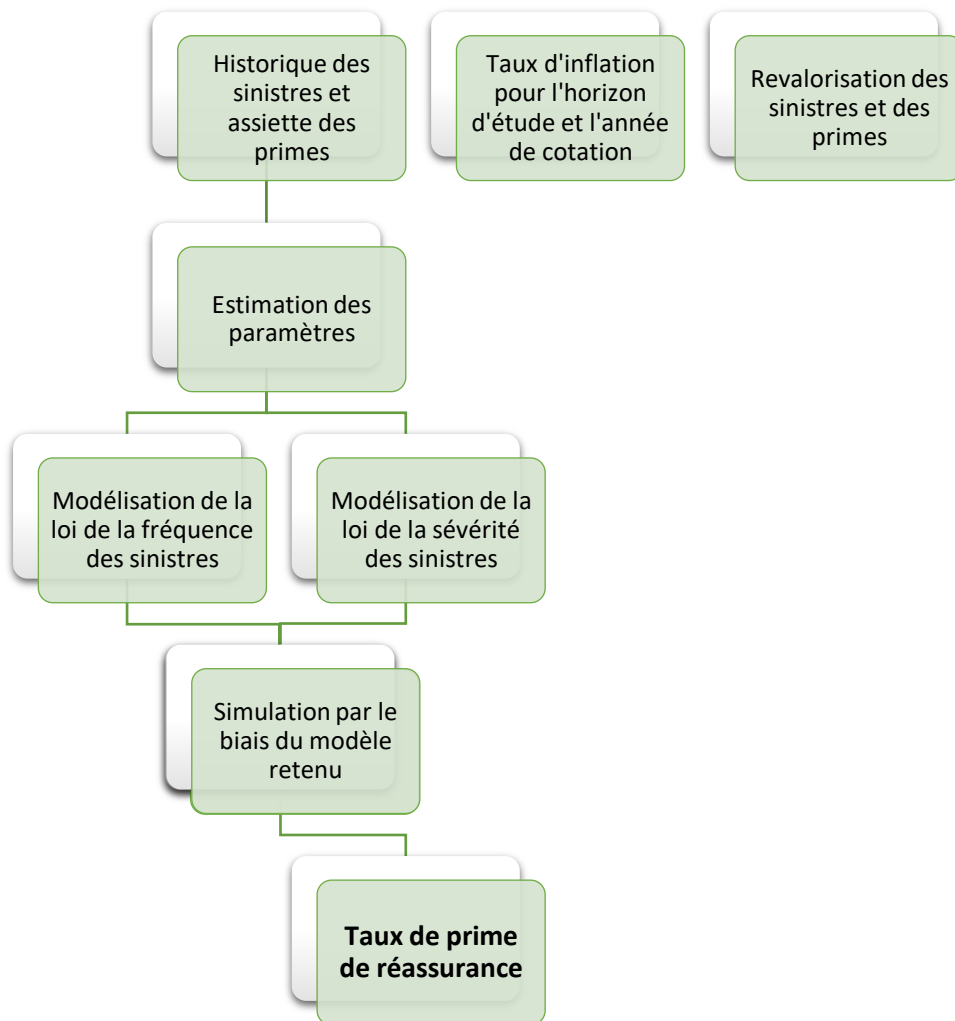


Figure 13 : Processus de la tarification probabiliste

Comme indiqué sur la figure, l'application de cette méthode se compose de 3 étapes :

- **Étape 1 :** Création d'une statistique as if ;
- **Étape 2 :** Modélisation de la loi de fréquence (nombre de sinistres) et de la loi de sévérité (montants des sinistres) ;
- **Étape 3 :** Cotation de la prime de réassurance.

Comme il s'agit d'une méthode de tarification selon l'expérience, on commence naturellement par la création de la statistique « AS IF ». Le processus à suivre pour la revalorisation des données de la cédante est explicité dans la partie 3.1.

Ensuite, après avoir redresser nos données, on passe à la modélisation des lois de la fréquence (nombre de sinistres) et de la sévérité (montants des sinistres). Pour ce faire, on test plusieurs lois pour la fréquence (Poisson, et Binomiale Négative) et pour la sévérité (Pareto, Log Normale), puis on estime pour ces lois les paramètres associés par la méthode du maximum de vraisemblance. Ensuite, on s'appuie sur des tests d'adéquation (le test de Kolmogrov Smirnov pour la sévérité et le test de sur-dispersion pour la fréquence) pour choisir la distribution probabiliste la plus adéquate à nos données.

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques lois usuelles couramment utilisées en réassurance pour modéliser la fréquence et la sévérité.

3.3.2. Modélisation de la fréquence :

Il faut d'abord redresser les données avant de procéder à la modélisation. En effet, ce redressement (via la statistique « As If ») permet de suivre l'évolution du portefeuille c'est-à-dire s'il grandit, la fréquence sera nécessairement plus élevée tandis que s'il diminue, la fréquence diminuera aussi ; d'où l'importance de ce redressement.

Les lois de fréquence de sinistre les plus usuelles sont la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

Vous trouverez dans l'annexe 2 les caractéristiques de ces deux lois.

3.3.3. Modélisation de la sévérité :

Pour la modélisation de la sévérité des sinistres, on utilise le plus souvent : les lois Pareto et Log-Normale.

Ces lois ont la caractéristique d'avoir une queue de distribution « lourde », c'est-à-dire qui tient compte de la possibilité d'événements rares et coûteux. En réassurance non-proportionnelle, la couverture commençant uniquement à partir de la priorité, les cédantes ne communiquent souvent que les sinistres proches ou supérieurs à celle-ci. Ceci signifie que les données transmises aux réassureurs sont des données tronquées à gauche. Ainsi, en prenant ceci en compte, on travaille le plus souvent avec la loi de Pareto car elle présente une propriété non vérifiée pour la plupart des distributions qui est le fait qu'une loi de Pareto tronquée à gauche demeure une loi de Pareto.

Vous trouverez dans l'annexe 3 les caractéristiques de ces deux lois.

3.3.4. Estimation des paramètres :

L'estimation des paramètres est faite par la méthode de maximum de vraisemblance (MLE : Maximum Likelihood Estimation).

➤ **Rappel sur la méthode de maximum de Vraisemblance :**

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de densité $f(x, \theta)$. On définit la fonction de vraisemblance comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance est le θ^{MV} qui résout le système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_{\theta^{MV}} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right)_{\theta^{MV}} < 0 \end{cases}$$

On note que dans nos applications numériques, on utilisera les données revalorisées par la statistique AS IF.

On note : $\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Ainsi, les estimateurs des paramètres pour chacune des lois sont :

- Poisson : $\hat{\lambda} = \hat{m}$
- Binomiale négative : $\hat{p} = \frac{\hat{m}}{\hat{m} + \hat{r}}$

Avec \hat{r} est l'unique solution de $H(r) = n * \log\left(\frac{r}{r + \hat{m}}\right) + \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \geq 1\}} \left(\frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r + X_i - 1}\right) = 0$

Et la condition $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^2 > \hat{m}$ doit être vérifiée.

- Pareto :

$$\begin{cases} \hat{t} = \min_{i \in [1, n]}(x_i) \\ \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} - \frac{1}{\ln(\hat{t})} \end{cases}$$

- Log-Normale :

$$\begin{cases} \hat{t} = \min_{i \in [1, n]}(x_i) \\ \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right) \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right)\right)^2} \end{cases}$$

3.3.5. Simulations stochastiques :

On pouvait autrefois utiliser l'algorithme de Panjer mais maintenant, compte tenu de la vitesse de calcul des ordinateurs, il est sans conteste beaucoup plus simple d'utiliser la simulation pour faire une cotation.

Pour simplifier davantage ce processus, nous supposons que nous avons sélectionné les lois Poisson et Pareto.

L'algorithme ci-dessous décrit la façon selon laquelle nous simulons la fréquence (modélisée par une loi de Poisson de paramètre θ), la sévérité (modélisée par une loi de Pareto de paramètre α au seuil λ) pour obtenir le taux pur pour une tranche de réassurance **l XS d**.

L'algorithme de simulation se résume en 3 étapes :

- Générer un nombre de sinistres pour l'année ;
- Générer les montants de sinistres correspondants ;
- Calculer la charge XS.

```
Entrée : l xs d, EPI, Poisson( $\theta$ ), Pareto( $\alpha, a$ ).
Sortie : le taux pur de la tranche cotée.

for i ← 1, ..., n
.      N = rpoiss(1,  $\theta$ )
.      if N = 0 then
.          Si = 0
.      else
.          v = rpareto(N,  $\alpha, a$ )
.          for j ← 1, ..., N
.              wj = min(max(0, vj + a - d), l)
.          end for
.          Si = sum(wj)
.      end if
end for
```

Figure 14 : Algorithme pour la détermination du taux pur par simulation

A la fin de la simulation, il suffit de calculer la moyenne de la charge XS ainsi que celle du nombre de sinistres sur l'ensemble des années simulées afin d'obtenir la prime pure du traité.

$$\text{Prime Pure} = E(X_i^{\text{Réass}}) * E(N)$$

3.3.6. Avantages et limites de la méthode :

Parmi les avantages de la méthode probabiliste, on trouve :

- Elle permet de tenir compte de l'historique tout en ayant une approche paramétrique des risques, chose qui permet d'effectuer des tests de sensibilités sur les paramètres des distributions ;

- Elle utilise tous les sinistres et permet de tarifier toutes tranches.

Parmi les limites de la méthode, on trouve :

- Elle suppose l'indépendance entre le nombre de sinistres et leur montant sachant que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans la réalité ;
- Dans certains cas, les actuaires sont confrontés au problème de manque de données historiques, chose qui peut nuire à la crédibilité des résultats de la modélisation.

La méthode probabiliste permet de tarifier n'importe quel programme, à condition de disposer d'un historique de sinistralité suffisamment conséquent et représentatif de ce que la sinistralité future devrait être. Néanmoins, il est courant de faire face à des cédantes qui débutent et ne disposent donc pas encore de statistiques sur leur portefeuille, à des cédantes qui ont modifié radicalement la structure de leur portefeuille rendant ainsi leurs statistiques non représentatives, ou encore à des cédantes dont la qualité des données historiques est très mauvaise.

4. Tarification selon l'exposition :

Lorsque la tarification basée sur l'expérience ne peut pas être appliquée par manque ou non disponibilité des données représentatives de sinistres ; Nous procédons dans ce cas à la tarification par exposition.

La tarification selon l'exposition repose sur la composition du portefeuille de la cédante c'est-à-dire son profil de risque. Plus particulièrement, on se sert des sommes assurées pour déduire un taux de dommage d'un sinistre qui correspond au rapport entre **le coût d'un sinistre** et **la somme assurée**. En outre, on aura recours à ce qu'on appelle des « **courbes d'exposition** » qui selon le taux de dommages d'une part de sinistres associent un pourcentage de la charge de sinistre totale de l'assureur. Ce même pourcentage est ensuite appliqué à l'assiette des primes de l'assureur impactant la prime pure cédée au réassureur. On détaillera encore plus ce processus dans la suite de cette partie.

4.1. Profil de risque :

Afin de faire une cotation selon l'expérience, on reçoit de la part de la cédante un profil de risque qui se compose généralement des bandes et pour chaque bande on a le nombre de risque, les sommes assurées (ou le sinistre maximum possible SMP), et les primes.

En s'appuyant sur ces données, nous pourrions déterminer le tarif (la prime divisée par la somme assurée totale) et les sommes assurées moyennes. Parfois, les sommes assurées moyennes sont remplacées par les Probable Maximum Loss (PML), ou perte maximum probable. Cette dernière représente non pas la valeur assurée mais la perte maximale la plus probable.

4.2. Fonctionnement des courbes d'exposition :

Une courbe d'exposition peut être définie comme une courbe qui donne la part de prime nécessaire à la couverture d'un risque, en fonction du degré de dommage maximal que l'on couvre. On note que le taux de dommage est le rapport entre **le coût d'un sinistre** et **la somme assurée**.

Autrement, elles présentent la probabilité pour qu'un sinistre coûte moins que $x\%$ de la somme assurée.

Comme l'on est dans le cadre d'un traité de réassurance **XS**, alors nous nous intéressons à la part de sinistralité dépassant la priorité. Ainsi, la limite x n'est autre que le rapport entre la Priorité la somme assurée ou le SMP.

Pour mieux comprendre ce que représente une courbe d'exposition, voici un exemple :

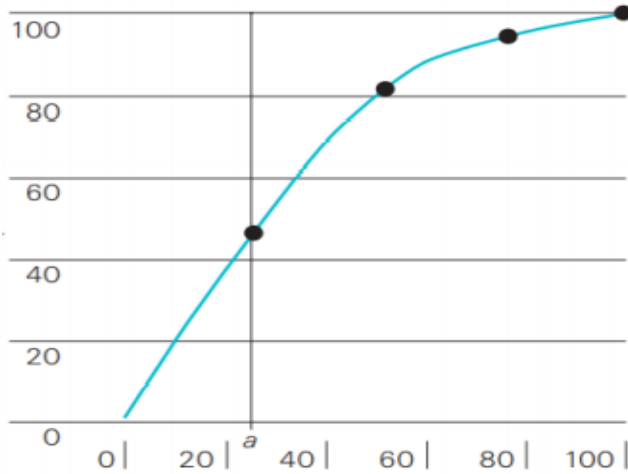


Figure 15 : Exemple de la courbe d'exposition

Sur cette courbe, et comme l'on a défini ces courbes, on trouve en abscisse **le degré de dommage**, exprimé en pourcentage de la somme assurée. Et en ordonnée, nous avons la probabilité pour qu'un sinistre coûte moins que le taux de dommage de la somme assurée, exprimée en pourcentage aussi.

La lecture de cette courbe est assez simple. Ainsi, on peut lire ici que pour couvrir les sinistres limités à **a % de degré de dommage**, il faut environ **50 % de la prime**.

4.2.1. Formulation et propriétés mathématique des courbes d'exposition :

Notons Y la variable aléatoire représentant le sinistre lié à un risque de valeur assurée M . Le degré de dommage X est défini par le rapport Y/M . On se positionne toujours dans le cas d'un traité XS , et on suppose que D est la priorité de ce programme de réassurance, et on définit ainsi le rapport $d = D/M$. Alors, la courbe d'exposition G est définie comme le **rapport** entre **la prime nécessaire à l'assureur pour couvrir les sinistres limités à D , et la prime totale** :

$$G(d) = \frac{E[\min(d, X)]}{E[\min(1, X)]} = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x)) dx}{\int_0^1 (1 - F_X(x)) dx}$$

Où F_X désigne la fonction de répartition du degré de dommage X .

G étant la courbe d'exposition, on peut l'interpréter comme la portion de prime pure nécessaire pour couvrir la part des sinistres tronquée au degré de dommage d . De plus, on peut déterminer la fonction de répartition du risque à partir de sa courbe d'exposition :

$$F_X = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 1 - \frac{G'(d)}{G'(0)} & \text{si } 0 \leq d < 1 \end{cases}$$

Tel que :

- $G'(0) = \frac{1}{E(X)}$ et $F_X(0) = 0$

• **Propriétés mathématiques des courbes d'exposition :**

- Elles sont croissantes et concaves ;
- Elles passent par l'origine et franchissent le point (1; 1), c'est-à-dire que pour un taux de dommage égale à 1 la sinistralité est totale et inversement pour un taux de dommage nul on ne constate pas de sinistralité ;
- Plus la courbe est proche de la diagonale, plus la distribution sous-jacente contient des sinistres avec destruction totale. Et, inversement, plus elle s'éloigne, plus la distribution sous-jacente contient des sinistres à taux de dommage faibles.

4.2.2. Courbes MBBEFD :

Les courbes d'exposition les plus utilisées sont les courbes « **Swiss Re** » développées par Peter Gasser dans les années 60. Or, parfois ces courbes ne correspondaient pas aux risques que les actuaires souhaitaient modéliser. Ainsi, en 1997, Stefan Bernegger a effectué une approximation des courbes de Swiss Re à l'aide d'une famille de courbes (**famille paramétrique des courbes d'exposition**) ne dépendant que d'un seul paramètre. En jouant sur ce paramètre, on peut donc obtenir **un nombre infini de courbes**.

La formulation mathématique référant à cette famille paramétrique des courbes d'exposition est donnée par :

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(g)} & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(1 + (g - 1) \times x)}{\ln(g)} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{1 - b^x}{1 - b} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g - 1) \times b + (1 - g)b^x}{1 - b}\right)}{\ln(g \times b)} & b > 0, b \neq 1, b * g \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases}$$

Où, les paramètres b et g peuvent s'exprimer en fonction d'un unique paramètre c comme suit:

$$b(c) = e^{3.1 - 0.15(1+c)} \text{ et } g(c) = e^{(0.78 + 0.12c)}$$

Ainsi, inversement si l'on souhaite à partir de cette famille paramétrique retrouver les courbes Swiss Re, il suffit de remplacer c par $\{1,5; 2,0 ; 3,0 ; 4,0\}$ pour obtenir respectivement les **avec les courbes Swiss Re** $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$.

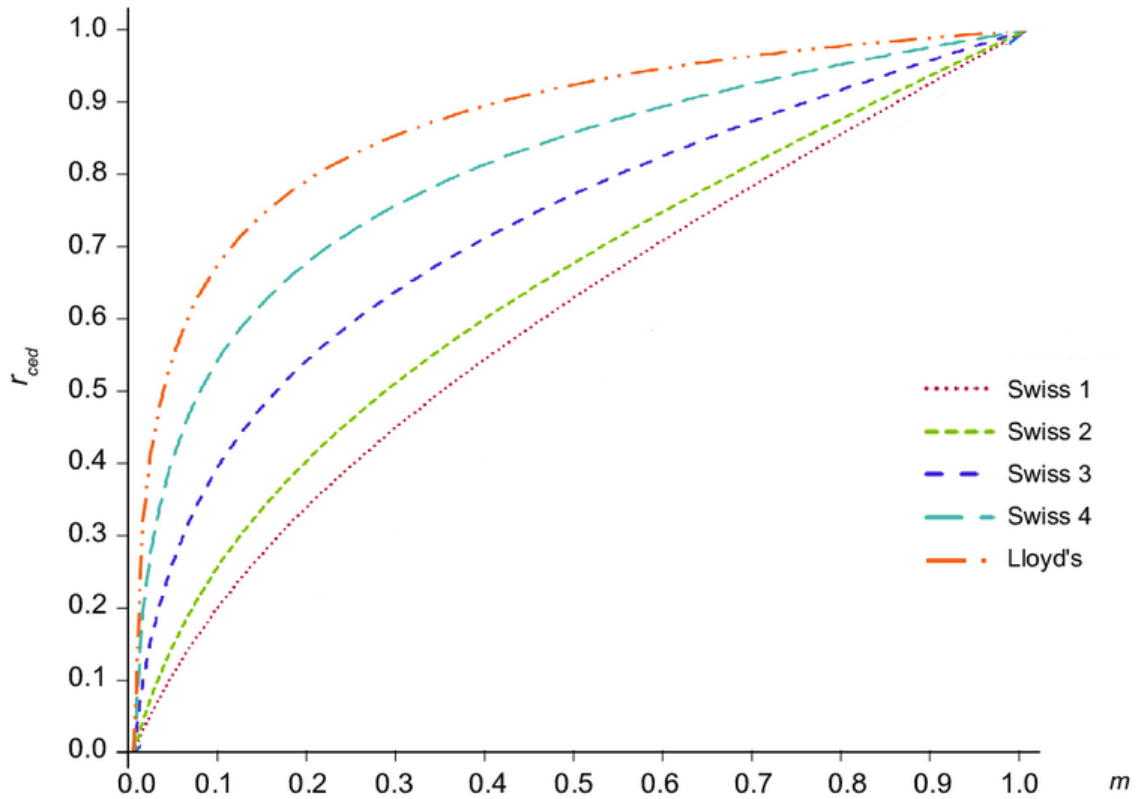


Figure 16 : Les courbes d'exposition SWISS RE

4.3.Processus de cotation :

Ces courbes vont nous permettre de mettre en place la tarification à l'exposition. On désire tarifier à l'exposition un traité C *xs* D , de limite $L = C + D$. Pour ce faire, on va s'appuyer sur le profil de l'année T de la cédante et calculer pour chaque bande b_T :

- $r_{b_T} = \min\left(1, \frac{D}{ASI_{b_T}}\right)$ désignant le taux de dommage minimum
- $s_{b_T} = \min\left(1, \frac{L}{ASI_{b_T}}\right)$ désignant le taux de dommage maximum

Où, ASI réfère à la somme assurée moyenne.

Ainsi, à partir de la courbe d'exposition on retrouve les conservations du réassureur qui sont donnée par :

$$\textbf{Conservation Réassureur pour une bande } b_T = G_{b_T}(s_{b_T}) - G_{b_T}(r_{b_T})$$

D'où, on déduit la prime totale nécessaire pour couvrir notre traité **C xs D** :

$$P = \sum_{b_T=1, \dots, N} (G_{b_T}(s_{b_T}) - G_{b_T}(r_{b_T})) * P_{b_T}$$

Tel que :

- N est le nombre de bandes b_T
- P_{b_T} est la prime pour chaque bandes b_T

Conclusion de la première partie :

Après la présentation du contexte globale de la réassurance, son utilité et son fonctionnement ; on a abordé les différentes méthodes de tarification selon l'expérience et selon l'exposition tout en explicitant les étapes à suivre pour effectuer la cotation ainsi que les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes.

Toutes ces méthodes de tarifications sont applicables soit à partir du profil de risque, soit à partir de l'expérience individuelle de la cédante considérée. Mais la détermination de la méthode de tarification appropriée dépend, avant tout, des informations disponibles, ainsi que des lignes d'activité et couvertures concernées.

Sur la base des données fournies par la cédante pour son portefeuille de la branche Accident de Travail, nous allons effectuer un diagnostic et appliquer les différentes méthodes explicitées dans cette partie pour en déduire des conclusions.

PARTIE 2

Application des méthodes de tarification des traités XS

Introduction :

Ayant assimilé la théorie de la cotation en expérience et en exposition, nous allons procéder à l'application de ces méthodes sur nos données de la branche AT.

Dans ce chapitre, on se place en 2019 (Année de cotation) et on cherche à déterminer le taux de prime pour la branche Accident de travail, dans le cas d'un traité 400 000 XS 600 000 (donnée de la cédante).

Comme l'on est dans le cas d'une branche à développement long, on a choisi de travailler avec une base de données qui s'étale sur 10 ans allant de 2008 à 2018. Tous les sinistres traités dans le cadre de notre étude sont clôturés, ce qui permet d'éviter des erreurs de modélisation.

Pendant cette longue durée d'observation, on doit prendre en considération les évolutions économiques dans la cotation et ce en actualisant les données (primes et coûts des sinistres). Ainsi, les taux d'inflation retenus et utilisés dans cette partie sont issus des publications de la banque mondiale pour actualiser les données de chacun des exercices passés. Ce taux représente l'évolution moyenne des salaires et on remarque que les sinistres évoluent de la même manière que les salaires.

Grâce au long historique de sinistralité, on peut appliquer les méthodes de tarification selon l'expérience (la méthode de « Burning Cost » et la méthode probabiliste). En plus, ayant le profil de risque de notre cédante, on est en mesure d'appliquer aussi la méthode de tarification selon l'exposition.

Avant de déterminer les taux de primes par ces méthodes, il est fort nécessaire de procéder à une analyse et un traitement de nos données pour mieux les assimiler.

Chapitre 1 : Présentation, analyse et traitement de la base de données

1. Présentation de l'assurance AT (Accident de travail) :

D'après la fédération marocaine des sociétés d'assurances et de réassurance, il s'agit d'une assurance obligatoire à souscrire, depuis novembre 2002, pour tous les employeurs soumis aux dispositions du Dahir du 27 Juillet 1972 relatif au régime de sécurité sociale. Et aussi pour les collectivités locales et les établissements publics ne relevant pas de la fonction publique ou du régime de sécurité sociale.

C'est une assurance à vocation sociale. Son but est d'assurer à la victime un complément de revenu pour compenser la perte de salaire due à l'incapacité physique au travail et pour couvrir les frais médicaux, pharmaceutiques et d'hospitalisation qui résultent de cet accident. Et en cas d'un décès de l'employé, elle garantit aux ayant droits une source de revenu.

L'assurance accident du travail est une assurance de responsabilité souscrite par l'employeur au profit de ses employés pour les couvrir contre les risques qu'ils encourent en exerçant leur activité professionnelle.

On qualifie d'accident du travail tout accident dont est victime un employé par le fait ou à l'occasion du travail, même si l'accident résulte d'un cas de force majeure.

L'AT comprend aussi les accidents de trajet entre le domicile et le lieu du travail en plus des accidents survenus au cours d'un déplacement professionnel ou ce qu'on appelle généralement les accidents de mission.

Les prestations garanties par cette branche incluent :

- **Frais des soins** : ça regroupe les frais médicaux et pharmaceutiques ainsi que les frais d'appareillage et de prothèse, l'assistance d'une tierce personne pour les besoins de la vie courante et aussi les frais funéraires en cas de décès.
- **Indemnités journalières** : c'est égal aux deux tiers de la rémunération quotidienne à compter du premier jour qui suit la date d'accident ou de la révélation de la maladie professionnelle.

- **Indemnité pour Incapacité Physique Permanente (IPP)** : on distingue entre deux types d'indemnité, la première est sous forme d'un capital en cas d'IPP inférieure à 10% et la deuxième est sous forme d'une rente viagère en cas d'IPP supérieure ou égale à 10%.

2. Présentation des données

La base de données sinistre qui nous a été communiquée contient l'ensemble des informations nécessaires pour étudier la sinistralité du portefeuille AT (numéro du sinistre, date de survenance du sinistre, date de saisie du sinistre, type du sinistre etc.) et englobe toutes les données relatives aux contrats assurés (prime, branche d'activité, etc.). Pour des raisons de confidentialité, nous n'afficherons dans ce mémoire que quelques résultats. Nous ne gardons pour notre étude que quatre variables : numéro de contrat, exercice, numéro de sinistre et le montant de la charge.

On note que dans la base de données qu'on a en main, les sinistres sont clos et que les charges (représentées par la variable cout) sont les charges à l'ultime.

En plus, on nous a communiqué aussi la base production. Dans le cadre de notre étude, nous utilisons le montant de la prime pour chaque contrat, la date d'effet et échéance du contrat et le numéro de contrat.

3. Traitement des données

La première étape était la vérification de la pertinence des données par rapport à notre étude et le traitement des anomalies. En général, pour les branches à développement long (comme c'est le cas pour l'AT) un horizon de 10 ans est largement suffisant. Ainsi, nous nous contentons des sinistres qui ont eu lieu entre 2008 et 2018, ainsi on a un horizon de 10 ans.

On note que tous ces sinistres ont été clôturés.

Pour traiter nos données, nous avons d'abord regroupé les règlements et les réserves par date d'exercice et par numéro de contrat.

Ensuite, nous avons calculé les primes acquises à partir des primes émises en calculant le nombre de jours entre la date d'effet du contrat et celle de fin d'exercice. Ainsi, on procède au calcul de la prime acquise par la formule suivante :

$$\text{Prime acquise} = \text{Nombre de jours} * \frac{\text{Prime émise}}{365,25}$$

Par la suite, nous procédons au regroupement des primes acquises par année d'exercice et par numéro de contrat.

Enfin, nous fusionnons nos nouvelles bases production et sinistres par numéro de contrat et par exercice pour réaliser une base complète qui va nous servir de base pour la modélisation de la charge de réassurance.

Avant de procéder à l'analyse descriptive de notre base de données, on rajoute quelques variables qui nous seront utiles pour la suite.

Pour chaque contrat, on calcule selon les années **le résultat chargé et non chargé** par :

$$\text{Résultat chargé} = \text{Prime acquise} - (\text{cout} + f_g \times \text{Prime acquise})$$

$$\text{Résultat non chargé} = \text{Prime acquise} - \text{cout}$$

Où :

- **cout** est le cout du sinistre ;
- **f_g** sont les frais de gestion. On prend des frais de gestion de 30% (données cédantes).

4. Analyse des données

On effectue a priori une analyse descriptive de nos données pour la branche AT.

On sait que la branche AT est travaillante, mais on souhaite le prouver par les définitions élaborées dans la première partie de ce mémoire. À partir des deux valeurs ci-dessus on pourra valider l'hypothèse que la branche étudiée est travaillante :

- Le nombre moyen de sinistres touchant annuellement la tranche **(2138)** qui est strictement supérieur à un (1).

- Le pourcentage de portée atteinte (**101.245%**) qui est supérieur à 80%.

Donc, on peut conclure, d'après la définition d'une tranche travaillante explicitée dans la première partie du mémoire que la branche AT est effectivement une tranche travaillante. D'où la possibilité d'appliquer les méthodes de tarification par expérience.

Tout d'abord, on effectue une analyse descriptive de notre base de données afin de prévisualiser et comprendre notre sinistralité. Pour ce faire, on affiche le *Summary* des montants des sinistres, qui nous donne la description statistique de cette dernière. Il s'agit de 6 valeurs descriptive de la variable en question :

Le minimum (-44 869), **le maximum** (40 497 993), **premier quartile** (3 080), **la médiane** (18 084), **la moyenne** (130 599), et **le troisième quartile** (59 898).

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-44869	3080	18084	130599	59898	40497993

Figure 17 : Analyse descriptive

D'après ces résultats, on remarque une forte volatilité de la charge des sinistres au sein de ce portefeuille. En plus, on constate que 75% des sinistres sont inférieurs à 59 898 et vu que la moyenne est de 130 599, alors elles sont inférieures aussi à la moyenne. Ainsi, on peut dire que le contrat de réassurance ne sera applicable que pour une partie du 25% des sinistres restants. D'où, l'assureur gardera une grande partie de sa sinistralité, ceci peut être expliqué par le fait qu'il ne souhaite céder que les sinistres qu'il estime difficile à gérer. On note que, certes la partie cédée ne semble pas grande par rapport aux sinistres de la cédante, cependant elle permettra d'alléger les engagements de l'assureur à l'indemnisation de ses clients et ainsi améliorer son résultat et sa rentabilité.

Par ailleurs, on remarque que le montant maximal des sinistres est une valeur extrêmement élevée. On s'intéresse particulièrement à l'analyse de ce sinistre, en filtrant sur notre base de données on trouve qu'il a eu lieu en 2014, et qu'il relève de l'activité « MINES ET INDUSTRIE CHIMIQUE ». Cette activité est réputée d'avoir des conséquences de santé graves et chroniques pour ses ouvriers, ce qui explique bel et bien le cout élevé obtenu. Pour le cas de ce sinistre, l'assureur gardera à lui-même la plus grande partie de ce montant mais il aura l'aide du réassureur à l'indemnisation de ce sinistre ce qui est certainement mieux.

En plus, sur cet horizon de 10 ans, on a un ratio S/P de 130% d'où la conclusion que cette activité est déficitaire car le ratio est supérieur à 100%. Ensuite, on est amené à voir si c'est le cas seulement pour cette sous activité de MINES ET INDUSTRIE ou si c'est le cas pour toute l'activité ; pour ce faire on ressort le S/P de l'activité globale, on trouve un S/P de 102% (>100%) ainsi toute l'activité est déficitaire. Cette conclusion est prévisible car l'activité en question engendre des sinistres très graves.

Naturellement afin de diminuer nos pertes et améliorer nos résultats on est intrigué à éliminer cette activité étant donné qu'elle présente un mauvais risque. Cependant, on ne peut parvenir à une telle décision qu'après l'analyse des S/P des différentes activités de notre portefeuille.

Ainsi, on calcul les ratios S/P des différentes activité sur un horizon de 10 ans. On trouve que le déficit est partout dans notre portefeuille puisque presque toutes les autres activités présentent un ratio S/P supérieur à 1. D'où l'élimination des mauvais risques n'est pas une solution envisageable et ainsi on conclut quant à la nécessité de souscrire un contrat de réassurance.

Ensuite, on dresse les graphes des ratios S/P et des charges de sinistres par année d'exercice qui nous donne une image globale de la rentabilité de la cédante.

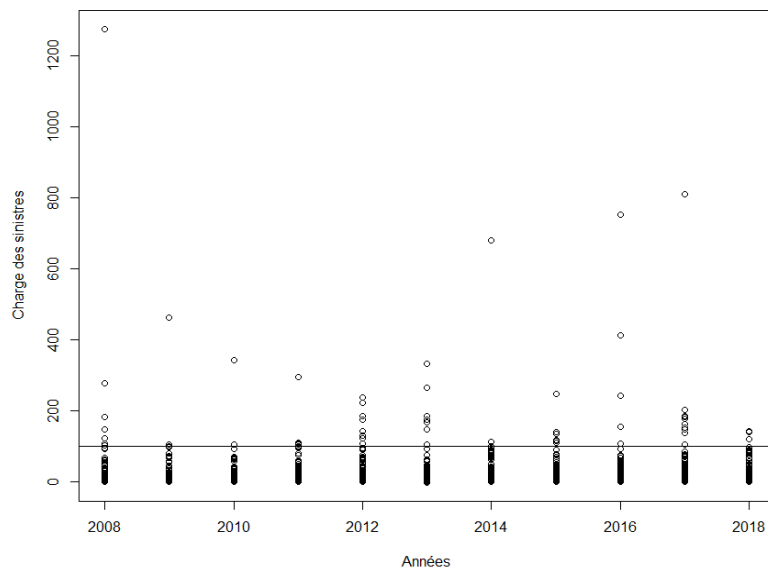


Figure 18 : Evolution du ratio S/P par année avec l'axe horizontale d'équation Y=100

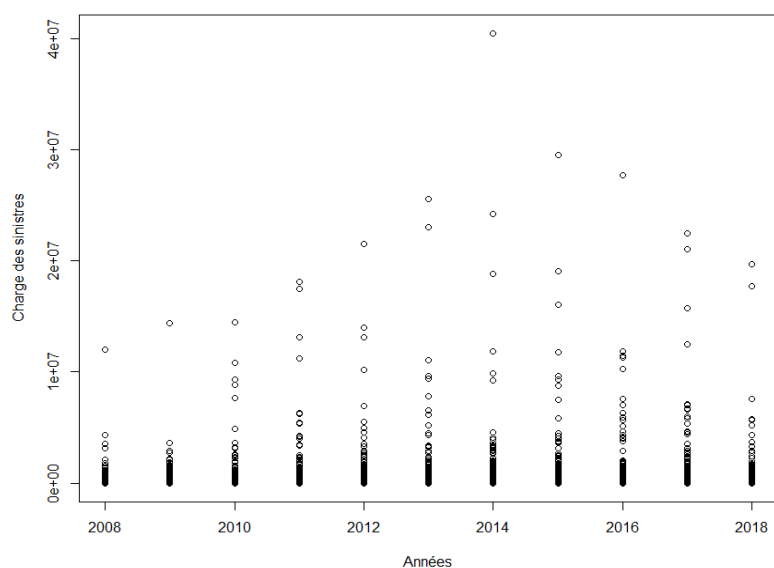


Figure 19 : Evolution de la charge des sinistres au fil des années

D'après le premier graphe on peut constater que la proportion des ratios S/P qui dépassent 100% est grande chose qui était prévisible étant donnée l'analyse effectuée ci-dessous.

Par le biais du deuxième graphe, on est amené à confirmer nos affirmations vis-à-vis la sinistralité de la branche AT en main. En effet, cette figure nous montre que cette branche est fortement sinistrée d'où le recours à la réassurance est le bon choix pour que cette cédante assure sa solvabilité.

On conclut que le traité XS qu'on cherche à appliquer et coter va englober tout le portefeuille et ne se limitera pas à une activité donnée.

On peut aussi ressortir le graphe de l'évolution du nombre des sinistres dans l'horizon de notre étude (2008 – 2018) :

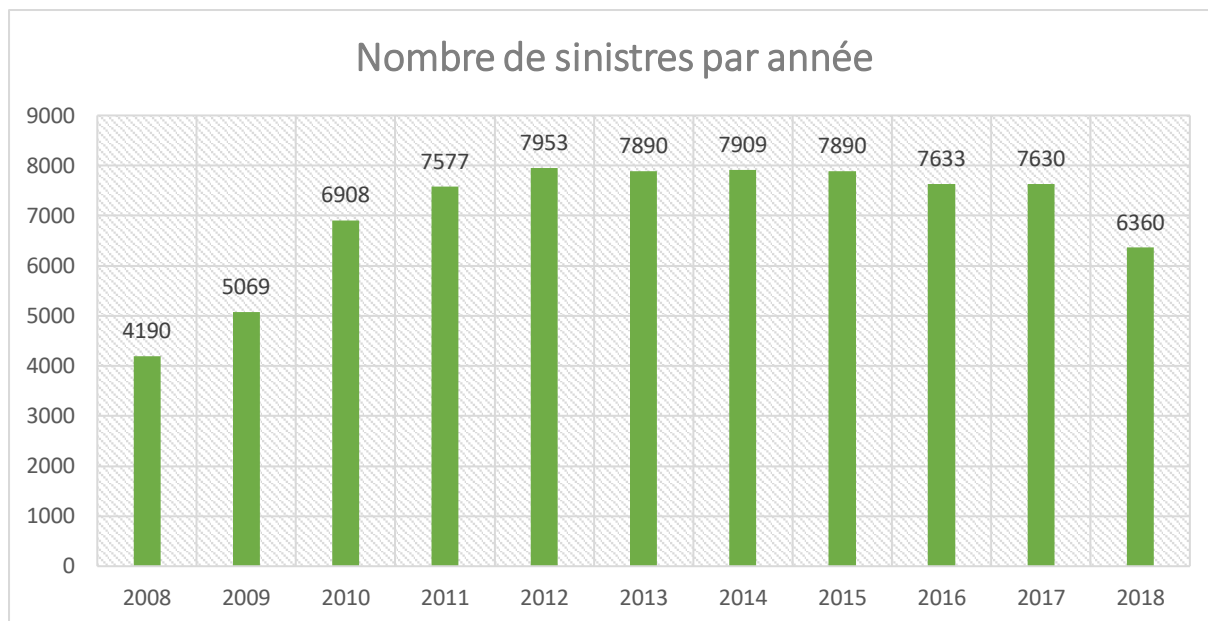


Figure 20: Evolution du nombre de sinistres par année

Nous constatons que le nombre de sinistres est assez régulier pendant notre période d'étude. Avec un pic de sinistralité lors de 2012 (en termes du nombre ou ce qu'on appelle la fréquence).

Chapitre 2 : Application des méthodes de cotation selon l'expérience et selon l'exposition

1. Actualisation des données

Comme détaillé dans la première partie, avant de procéder à la cotation, c'est-à-dire au calcul du taux de prime de réassurance on est amené à effectuer une revalorisation de nos données (sinistres et primes) pour que les données soient comparables entre elles peu importe l'année de survenance. Pour ce faire, on se base sur les taux d'inflation prescrites dans l'archive de la banque mondiale.

On visualise un graphe récapitulatif de l'évolution de l'indice d'inflation du Maroc entre 2008 et 2018.

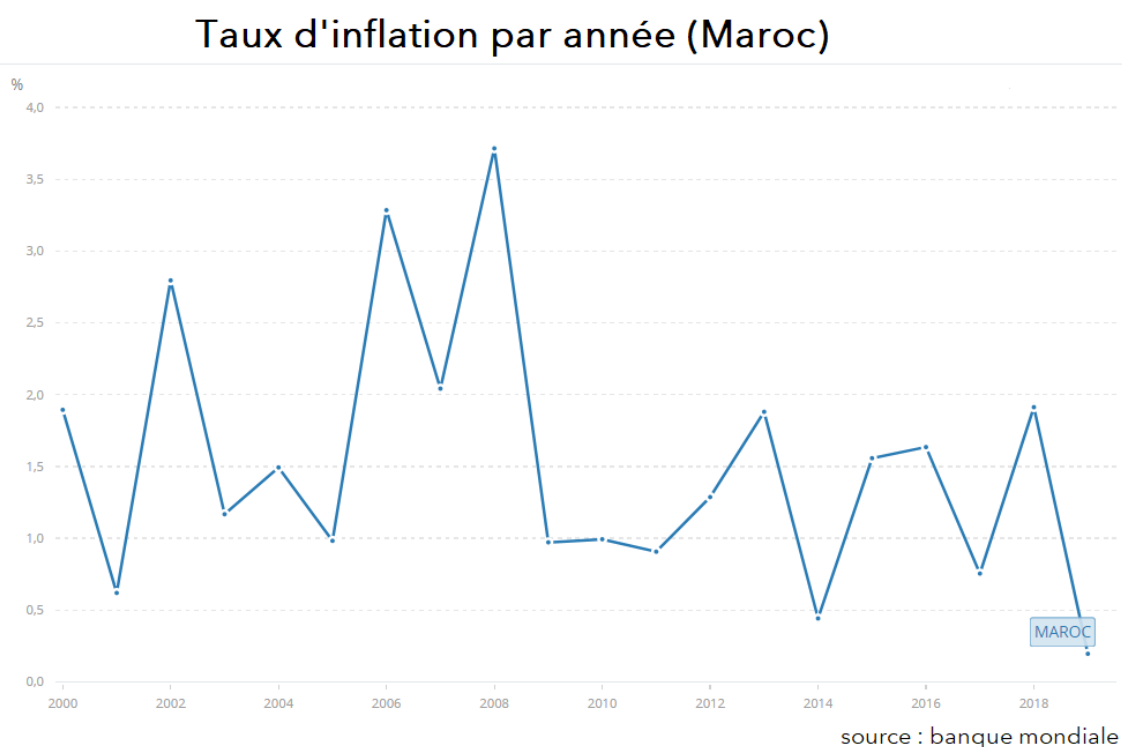


Figure 21: Graphe du taux d'inflation marocain entre 2000 et 2019

Ainsi, en se basant sur les taux d'inflation figurant dans le graphe ci-dessous, on effectue notre revalorisation et on calcule la statistique AS IF.

Pour l'année de cotation 2019, on a un indice d'inflation de 0,196%. Ainsi, l'application de la revalorisation des sinistres ainsi que des primes donne les résultats illustrés sur le tableau ci-dessous :

	Année	Sn	Pn
1	2008	3208.49098250336	49266.9193333333
2	2008	8783.06864064603	112033.0773333333
3	2008	282.683176312248	2234.52702222222
4	2008	241.372812920592	1672.20448888889
5	2008	68.8506056527591	1351.05195555556
6	2008	550.066218034993	5841.65586666667
7	2008	1431.09017496635	1124.22551111111
8	2008	38486.80269179	216696.909644444
9	2008	18934.2331090175	112419.354133333
10	2008	7558.8468371467	80518.8536444444

Figure 22: illustration des données revalorisées

2. Application de la méthode Burning Cost

Pour chaque coût de sinistre revalorisé, on calcule la part à la charge du réassureur en appliquant le traité **400 000 XS 600 000** qu'on notera dans ce qui suit **traité_1**.

Ensuite, on calcule la somme de ces charges qu'on divise par la somme des primes pour obtenir notre taux de prime Burning Cost.

On obtient, pour nos données et pour le **traité_1** un taux Burning Cost égale à :

$$6,460911\%$$

Le taux Burning Cost diminue avec l'augmentation de la priorité, car plus celle-ci est grande, moins de sinistres l'assureur aura à céder, c'est-à-dire qu'il gardera plus de risque à sa charge. En revanche, le réassureur n'aura à indemniser que peu de sinistres et par conséquent le tarif diminuera. Ainsi en variant la priorité, par exemple en l'augmentant on aura un taux de prime plus élevé que celui obtenu et vice versa.

3. Application de la méthode probabiliste :

En tant que cédante, les données que nous allons transmettre aux réassureurs ne reflètent pas l'historique complet de sinistralité. En effet, les sinistralités transmises sont tronquées à gauche, cette troncature diffère d'un assureur à un autre, mais généralement toutes les cédantes choisissent comme seuil de troncature 75% de la priorité du traité en question.

Dans notre cas, on cherchera le seuil le mieux adapté, qui permettra au réassureur la modélisation des données transmises.

On note que, les données utilisées pour l'application de cette méthode sont les données revalorisées puisqu'il s'agit d'une méthode de tarification selon l'expérience.

3.1.Choix du seuil de modélisation :

Afin de mener l'étude de la sévérité, nous allons varier les seuils de modélisation qu'on notera S_0 , et nous allons tester l'adéquation de nos données à certaines lois fréquemment utilisées en réassurance, notamment : Log Normale, Pareto, Exponentielle, Gamma et Weibull.

En effet, S_0 désigne le seuil optimal à partir duquel on aura la courbe estimée la mieux adaptée aux données de sinistres, c'est-à-dire que la troncature en place ne va conserver que les données donnant la meilleure adéquation. Pour choisir le bon seuil, nous allons nous baser sur un critère qui minimise le plus la distance de Kolmogorov. Pour ce faire, nous illustrons dans un tableau diverses combinaisons seuils/lois où nous calculons la distance de Kolmogorov correspondante.

Voici les résultats obtenus :

Pour $S_0 = 50\% \times \text{Priorité} = 300\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  Rslt_montant
D = 0.091317, p-value = 0.06441
alternative hypothesis: two-sided
>
> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  Rslt_montant
D = 0.13362, p-value = 0.001278
alternative hypothesis: two-sided
>
> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  Rslt_montant
D = 0.44018, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
>
> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  Rslt_montant
D = 0.082478, p-value = 0.1213
alternative hypothesis: two-sided
```

Pour $S_0 = 55\% \times \text{Priorité} = 330\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.10292, p-value = 0.0451
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.12927, p-value = 0.005046
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.45445, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.085765, p-value = 0.1436
alternative hypothesis: two-sided
```

Pour $S_0 = 60\% \times \text{Priorité} = 360\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.11037, p-value = 0.03958
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.1326, p-value = 0.006953
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.46955, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.098356, p-value = 0.08875
alternative hypothesis: two-sided
```

Pour $S_0 = 65\% \times \text{Priorité} = 390\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.11227, p-value = 0.05864
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.1326, p-value = 0.01455
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.48492, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.10455, p-value = 0.09369
alternative hypothesis: two-sided
```

Pour $S_0 = 70\% \times \text{Priorité} = 420\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.12023, p-value = 0.05087
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.13219, p-value = 0.02362
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.49447, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.1103, p-value = 0.09096
alternative hypothesis: two-sided
```

Pour $S_0 = 75\% \times \text{Priorité} = 450\,000$, on a :

```
> ks.test(Rslt_montant, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.12603, p-value = 0.05349
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.13324, p-value = 0.03492
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.50455, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(Rslt_montant, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Rslt_montant
D = 0.11476, p-value = 0.09928
alternative hypothesis: two-sided
```

D'après les résultats obtenus sur R et illustrés sur les figures ci-dessous, on remarque que la loi **Log Normale** est la plus adaptée pour modéliser la sévérité. En effet, elle minimise la distance de Kolmogorov pour notre *traité_1* : 400 000 XS 600 000.

Par suite, pour le *traité_1*, le seuil optimal est **50% de la Priorité**, c'est-à-dire de l'ordre de $S_0 = 300\,000$.

3.2. Modélisation de la sévérité :

Dans la suite, on s'intéresse en premier lieu à la modélisation de la sévérité. En général, on trouve que certaines distributions sont plus utilisées que d'autres, notamment la distribution de Pareto et Log-Normale. Les raisons derrière la popularité de ces deux lois sont évoquées dans la première partie de ce mémoire.

En recherchant notre seuil de modélisation, on a trouvé que c'est la loi Log Normale qui minimise (peu importe le seuil) la distance de Kolmogorov Smirnov. Ainsi, dans la suite, nous allons vérifier si l'ajustement par la loi log normal tronquée est effectivement validé par les tests statistiques.

Pour ce faire, on commence par estimer les paramètres de la loi Log Normale.

3.2.1. Estimation des paramètres :

On rappelle que les estimateurs des paramètres par la méthode du Maximum de Vraisemblance pour la loi Log-Normale sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t} = \min_{i \in [1, n]}(x_i) \\ \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{t}\right) \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{x_i}{t}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{t}\right)\right)^2} \end{array} \right.$$

Ainsi, par une application sur nos données de la charge dépassant le seuil de modélisation, on obtient :

```
> mean_LN
  meanlog
13.09915
> sd_LN
  sdlog
0.3327125
> min(Rslt_montant)
[1] 300034.2
```

Figure 23: Estimation des paramètres de la loi Log-Normale tronquée

Par les notations évoquées ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} \hat{t} = 300\,034,2 \\ \hat{\mu} = 13,09915 \\ \hat{\sigma} = 0,3327125 \end{cases}$$

3.2.2. Analyse graphique :

Avant de procéder aux tests statistiques, on commence par une analyse graphique par la méthode de la fonction de répartition et la méthode quantile-quantile plot.

- **Principe de la méthode de la fonction de répartition :**

C'est une méthode usuelle utilisée dans le cas des données quantitatives continues. Elle permet de juger de l'adéquation de la loi d'une variable X (dans notre cas il s'agit du vecteur des sévérités) avec une certaine loi L (la loi qu'on cherche à tester est la loi Log-Normale).

Elle consiste à tracer le graphe de la fonction de répartition empirique. Puis on superpose le graphe de la fonction de répartition associée à la loi Log-Normal en estimant les paramètres inconnus de celle-ci.

Nous appliquons cette méthode sur nos données et voici le graphe que l'on obtient :

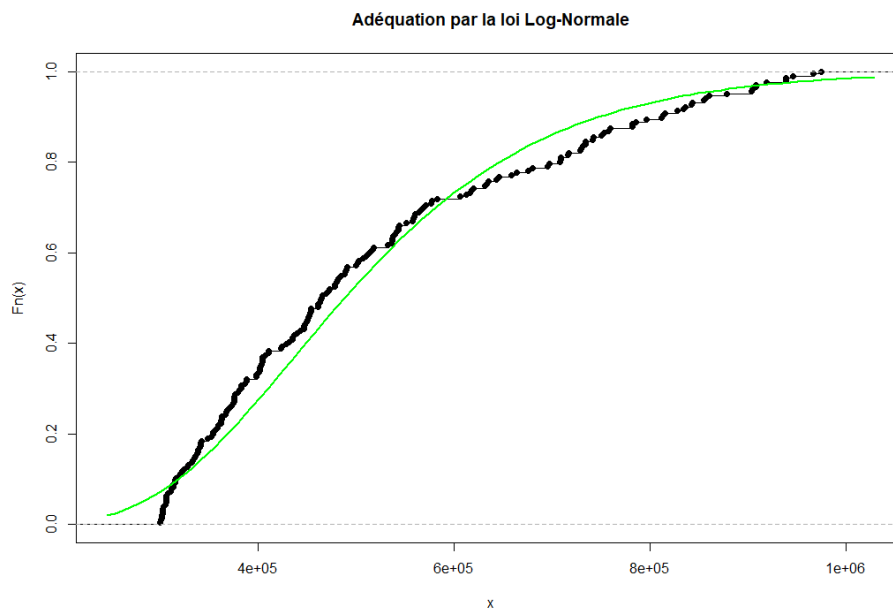


Figure 24 : Adéquation par la loi Log-Normale

- **Principe de la méthode du QQ-plot :**

Cette méthode consiste en une comparaison des quantiles empiriques et des quantiles théoriques. Soit $F(x) = P(X \leq x)$ la fonction de répartition de X et x_p le quantile d'ordre p définie par : $x_p = \inf\{x \in R; F(x) \geq p\}$.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les données rangées par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ Alors on peut écrire la fonction de répartition comme :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{k}{n} & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, k = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Si on considère (p_1, p_2, \dots, p_n) une suite strictement croissante de n réels vérifiant $p_k \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$ de sorte que :

$$\inf\{x \in R; F_n(x) \geq p_k\} = x_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Alors, on nomme **QQ-plot** le nuage de points N dans le repère orthonormé (O, I, J) défini par :

$$N = (x_{p_1}, x_1), (x_{p_2}, x_2), \dots, (x_{p_n}, x_n)$$

Si X suit la loi L , alors les données font que F_n est une bonne estimation de F et, a fortiori, x_k doit bien estimer x_{p_k} , c'est-à-dire : $x_k \approx x_{p_k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$; les points du nuage N doivent être proche de la **droite diagonale** d'équation : $y = x$.

Nous appliquons cette méthode sur nos données et voici le graphe que l'on obtient :

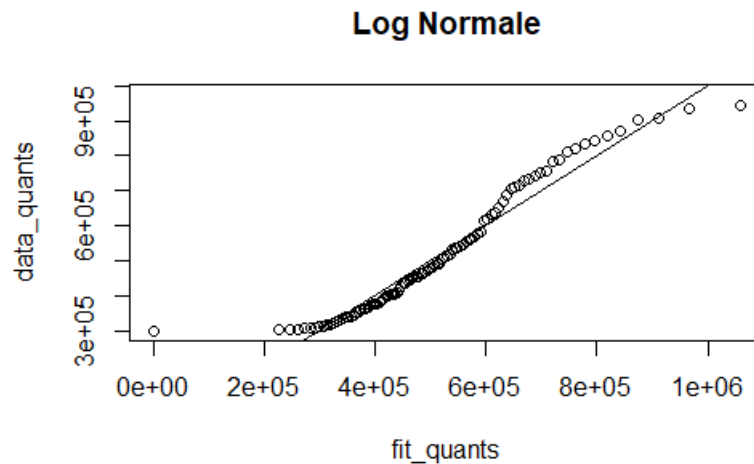


Figure 25: Diagramme QQ-plot

D'après ces deux graphiques, on remarque que l'ajustement par la loi Log Normale bien, (alignement sur la première bissectrice dans le qq-plot et un écart minime dans le graphe des fonctions de répartition).

Ainsi, afin de valider l'ajustement par la loi Log Normale, on procède aux tests statistiques.

3.2.3. Tests statistiques d'ajustement :

Test de Kolmogorov Smirnov :

```
one-sample kolmogorov-smirnov test
data: Rslt_montant
D = 0.082478, p-value = 0.1213
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 26 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov Smirnov est un test non paramétrique basé sur la distance maximale entre une fonction de répartition théorique (entièrement déterminée par les valeurs de ses paramètres) et la fonction de répartition empirique de l'échantillon.

D'après le tableau ci-dessus, on a une p-value > 5%. Ainsi, on accepte l'hypothèse nulle qui stipule que notre échantillon suit une loi Log Normale de paramètres :

$$\text{LN}(300\,034,2 ; 13,09915 ; 0,3327125).$$

3.3. Modélisation des fréquences :

Dans un deuxième temps, on passe à la modélisation de la fréquence. Pour ce faire, on regroupe par année, toutes les lignes indiquant un cout de sinistres supérieur au seuil prédéfini. Ensuite, on se trouve avec un tableau contenant le nombre de sinistres dépassant la tranche pour chaque année entre 2008 et 2018.

Années	Nombre de sinistres
2008	64
2009	507
2010	548
2011	749
2012	795
2013	764
2014	1041
2015	577
2016	749
2017	690
2018	593

Ensuite, on cherchera le modèle le plus adéquat à la distribution des fréquences de sinistre obtenus. Comme explicité dans la première partie de ce mémoire, les lois les plus utilisées pour modéliser la fréquence sont la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative. Ainsi, dans la suite nous allons estimer les paramètres de ces deux lois et puis passer aux tests d'ajustement pour en déduire celle qui s'adapte le mieux à nos données.

3.3.1. Estimation des paramètres :

On rappelle que l'estimation des paramètres est faite par le biais de la méthode du Maximum de Vraisemblance.

Si l'on note X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors on a les estimateurs des paramètres suivants :

- Pour la loi de Poisson : $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- Pour la loi Binomiale Négative : $\hat{p} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{r}}$

Où, \hat{r} est l'unique solution de :

$$H(r) = n * \log\left(\frac{r}{r + \hat{m}}\right) + \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \geq 1\}} \left(\frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r + X_i - 1}\right) = 0$$

Et la condition $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^2 > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ doit être vérifiée.

Par une application sur notre outil, on obtient les estimateurs suivants :

- **Poisson : $\hat{\lambda} = 643,3636$**
- **Binomiale négative : $\begin{cases} \hat{r} = 3,538513 \\ \hat{p} = 0,01681023 \end{cases}$**

3.3.2. Tests d'ajustement :

On passe, maintenant aux tests statistiques afin de déterminer laquelle des deux lois est la plus convenable.

Afin de pouvoir retenir le modèle le plus adéquat, on se basera sur le test de dispersion de Fisher.

➤ Test de dispersion de Fisher :

Soit N la fréquence des sinistres. On test :

$$\begin{aligned} H_0 : E[N] &= V[N] \\ &\textbf{contre} \\ H_1 : E[N] &< V[N] \end{aligned}$$

C'est-à-dire, on cherche l'existence ou pas d'une sur-dispersion.

La statistique du test est donnée par :

$$T = \frac{n-1}{n} \times \frac{s^2}{\bar{N}}$$

Où, \bar{N} , s^2 et n sont respectivement la moyenne, la variance empirique de la variable fréquence N et le nombre d'observations de N.

L'indice de Fisher est donné par : $n \times T$. Or, sous H_0 , l'indice de Fisher suit asymptotiquement une loi Khi-deux à n-1 degrés de liberté.

Nous calculons l'indice de Fisher afin de le comparer au quantile 95% de la loi Khi-deux à 10 degrés de liberté et voici les résultats obtenus :

```
> N*T
[1] 917.7493
> qchisq(.95,N-1)
[1] 18.30704
```

Figure 27 : Statistique du test de Fisher

On compare l'indice de Fisher obtenu avec le quantile 95% de la loi Khi-deux à 10 degrés de libertés qui est de l'ordre de 18,31. Ainsi comme l'on a un indice de Fisher (**917,7493**) est supérieur à **18,31** alors on rejette H_0 qui stipule que l'échantillon suit une loi de Poisson.

Finalement, on peut conclure quant à l'existence d'une sur-dispersion et ainsi on en déduit que la fréquence des sinistres suit une loi Binomiale Négative de paramètres :

$$\mathbf{BN(3,538513 ; 0,01681023)}$$

3.4.Modèle retenu :

On conclut d'après les résultats obtenus par les tests statistiques que le modèle retenu pour l'ajustement de la fréquence et la sévérité est :

$$\begin{cases} X \sim \mathbf{LN(300\ 034, 2 ; 13, 09915 ; 0, 3327125)} \\ N \sim \mathbf{BN(3, 538513 ; 0, 01681023)} \end{cases}$$

3.5.Simulations et résultats :

Passons maintenant à la détermination de la prime pure qui n'est autre que l'espérance de la charge annuelle du réassureur :

$$PP = E(S) = E(N) * E(X^r)$$

Avec X^r est la charge du réassureur.

Après avoir validé les distributions de la fréquence et la sévérité, on procède à une simulation stochastique telle que présentée dans la première partie de ce mémoire.

En appliquant l’algorithme de simulation sur R, on obtient une moyenne empirique de la charge nette du réassureur, qu’on divisera par l’assiette des primes revalorisées afin d’obtenir un taux de prime :

$$0,04410743 = 4,4107\%.$$

4. Application de la méthode par exposition :

4.1. Analyse du profil de risque de la cédante :

Le profil du risque de la cédante est présenté sur la base du nom de l’activité assurée et non pas les masses salariales car l’information n’est ni fiable ni disponible pour tous les assurés. Ainsi, on se retrouve avec un profil de risque donnant pour chaque activité le nombre de polices, la somme assurée, et la prime correspondante.

	NOM_act	Nombre.de.num_cote	Somme.de.Somme_cout	Somme.de.Somme_prime_acq
	0	32	4519171	1190366.612
12 CHAUFFEURS	54851-A-50/49940-A-50/59343-A-50/59344-A/48220-A-50/52263-A-50/53298-A-50/60353-A-50/60354-A/54850-A-50/52	1	26520	24906.863
	ADMINISTRATION ECONOMIQUE ET SOCIALE__TRAVAIL, SERVICES SOCIAUX	1	20000	2559.206
	AGRICULTURE (LABROCULTURE ET MARAICHÈRES)	1	18704	6035.613
	AGRICULTURE (TARIF A L'HECTARE)	1	20000	7872.000
	AGRICULTURE (TARIF A L'HECTARE)__CULTURE, JARDINS POTAGERS	2	100955	242857.110

Figure 28 : Profil du risque de la cédante

En analysant la sinistralité par activité, on remarque que les ratios S/P sont supérieurs à 100% sur plusieurs activités ce qui nous mène à la même conclusion ci-haut que la sinistralité est dispersée tout au long du portefeuille.

4.2. Application :

La cotation selon l’exposition est relativement simple. On cherche d’abord la courbe d’exposition qui modélise le mieux nos données ensuite on cherche les rapports de la priorité et la limite sur la somme assurée moyenne (c’est la somme assurée divisée par le nombre de police correspondant) en les limitant à 1 ; puis on calcule par le biais de la courbe choisie la conservation du réassureur pour chaque activité. Cette conservation du réassureur n’est autre que la différence des deux rapports spécifiés ci-dessous appliquée à la courbe d’exposition.

4.2.1. Choix de la courbe d'exposition :

On rappelle que la fonction de la famille paramétrique des courbes d'exposition (MBBEFD) est donnée par :

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(g)} & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(1 + (g-1) \times x)}{\ln(g)} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{1 - b^x}{1 - b} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g-1) \times b + (1-g)b^x}{1-b}\right)}{\ln(g \times b)} & b > 0, b \neq 1, b * g \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases}$$

Alors, notre objectif est de trouver les paramètres b et g.

L'estimation de ces deux paramètres sera faite par la méthode du Maximum de vraisemblance. Grâce à l'instruction fitDR du package « mbbefd » qui est implémenté sur R.

Pour ce faire, on commence par calculer le taux de destruction qu'on cherchera à modéliser par une des courbes MBBEFD. Ce taux n'est autre que le rapport de la charge d'un sinistre d'une activité sur la somme assurée totale.

Par application sur R, on trouve :

```
Fitting of the distribution ' MBBEFD ' by maximum likelihood
Parameters:
  estimate Std. Error
g  2718.945         NA
b 420736.755         NA
```

Figure 29 : Estimation des paramètres b et g de la courbe d'exposition

Ainsi, en remplaçant ces paramètres dans la fonction $G_{b,g}(x)$ on calculera pour chaque activité $G_{b,g}\left(\frac{600\,000}{SMP_i}\right)$ et $G_{b,g}\left(\frac{1\,000\,000}{SMP_i}\right)$ pour ensuite en déduire la conservation du réassureur donnée par $G_{b,g}\left(\frac{1\,000\,000}{SMP_i}\right) - G_{b,g}\left(\frac{600\,000}{SMP_i}\right)$.

Où SMP_i est la somme assurée correspondante à l'activité i.

Ensuite, afin d'obtenir la prime qui doit revenir au Réassureur pour chaque activité, il suffit de multiplier la conservation du réassureur par la prime correspondante et enfin on somme le vecteur obtenu pour obtenir la prime pure du traité 400 000 XS 600 000.

$$PP = 148\,206\,642$$

On en déduit que le taux de prime de réassurance est :

$$\text{Taux de prime} = 0.04678581 = 4.678581\%$$

5. Résultats et conclusions :

On rappelle qu'on a obtenu, par la méthode par expérience probabiliste, un taux de prime de 4,4107% qui n'est pas très loin de celui obtenu par la méthode Burning Cost. Et, selon la méthode par exposition on trouve un taux de prime 4,678581%.

En comparant la part de sinistralité à la charge du réassureur à la prime qu'il obtient en contrepartie, on a :

	Prime de réassurance	Charge de réassurance
Burning Cost	39 396 042, 32	599 542 728
Méthode Probabiliste	26 894 678, 45	599 542 728
Méthode par exposition	148 206 642	847 000 000

On remarque que les charges du réassureur issus des méthodes selon l'expérience sont inférieures que ceux par exposition.

Ainsi, si la cédante a pour objectif de céder le plus de sinistralité alors elle est en mesure de choisir la méthode selon l'exposition et en contrepartie elle aura à payer un taux de prime un peu plus élevée. En revanche, si son but est de minimiser le taux de prime qu'elle aura à céder alors elle devra se pencher vers la méthode probabiliste (qu'on appellera dans la suite de ce mémoire méthode selon l'expérience).

La cédante, afin de parvenir à une décision finale, elle devra prendre en compte d'autres facteurs (stratégiques, commerciales, économiques...) pour arrêter son choix sur la cotation la plus intéressante pour elle.

Conclusion de la deuxième partie :

Dans cette partie, on a réussi à coter pour la branche Accident de travail, un traité 400 000 XS 600 000 par les différentes méthodes de cotation (par expérience et par exposition). Tout d'abord, d'après nos analyses, on a constaté que le portefeuille qu'on a en main est fortement sinistré et qu'il est déficitaire sur plusieurs activités d'où l'on a justifié le besoin du recours à la réassurance.

Ensuite, à partir de l'historique de sinistralité et des taux d'inflation du Maroc de l'horizon 2008-2018, nous avons élaboré les revalorisations des charges des sinistres et des primes. Puis, on en a déduit les taux de primes issus des méthodes de cotation selon l'expérience. En effet, on a tardé sur la méthode probabiliste où l'on a cherché le seuil de modélisation convenable par le biais de la minimisation de la distance de Kolmogorov Smirnov, puis on a procédé à la modélisation de la sévérité et ensuite la fréquence et comme résultat on a retenu le modèle (Log-Normale et Binomiale Négative). Finalement, par une simulation de ce modèle on a obtenu un taux de prime de 4,4107% ; ce taux n'est pas très loin de celui obtenu par la méthode Burning Cost. Ensuite, on a enchaîné avec la méthode selon l'exposition, où l'on a commencé par justifier notre choix de la courbe d'exposition **MBBEFD** et on y applique le traité XS. On obtient un taux de prime 4,678581%.

La cédante est face à deux cas de figure : si elle souhaite céder une grande part de sinistralité par le biais de ce traité, alors elle est en mesure de choisir la méthode selon l'exposition mais en contrepartie elle aura à payer un taux de prime un peu plus élevée. En revanche, si son but est de minimiser le taux de prime qu'elle aura à céder alors elle devra se pencher vers la méthode probabiliste. On note qu'en pratique, ce choix n'est pas limité à la minimisation de la prime à céder mais il dépend aussi d'autres critères (économique, relationnelle...)

Or, d'après l'étude théorique dans la première partie, on peut conclure quant aux limitations de chacune de ces méthodes, ainsi aucune n'est parfaite d'où l'idée de combiner entre les deux pour en tirer une prime crédible. C'est dans cette optique que nous allons présenter dans la troisième partie de ce mémoire la théorie de la crédibilité qui permet d'associer un prix de réassurance sur base expérience et sur base exposition.

PARTIE 3

Théorie de la crédibilité appliquée à la réassurance

Introduction :

A présent, nous avons réussi la tarification des traités en excédent de sinistre. Ainsi, nous pouvons expliquer dorénavant la deuxième finalité de ce mémoire.

Quelquefois, la tranche du traité XS que l'on cherche à tarifer n'est pas assez sinistrée pour que la prime de réassurance obtenue par les méthodes de tarification décrites dans les chapitres précédents soit suffisamment précise et fiable. Cela est commun pour les tranches hautes mais peut également arriver pour les tranches basses dans le cas des affaires nouvelles. L'idée principale de ce mémoire est d'augmenter la fiabilité de la prime de réassurance en pondérant la prime selon l'expérience et la prime selon l'exposition.

$$\begin{aligned} & \textbf{Prime de crédibilité} \\ & = \\ & \mathbf{z} \times \textbf{Prime selon l'expérience} \\ & + \\ & (\mathbf{1} - \mathbf{z}) \times \textbf{Prime selon l'exposition} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ alors l'information obtenue à partir de l'expérience de la cédante est jugée non fiable et donc il faut tenir compte uniquement des résultats selon l'exposition de la cédante au risque. Et si $\mathbf{z} = \mathbf{1}$, alors l'historique de sinistralité est suffisamment conséquent pour juger que l'expérience passée de la cédante est parfaitement fiable ; et donc on peut se contenter de la prime selon l'expérience.

On comprend donc que c'est le facteur \mathbf{z} qui est le déterminant de la prime de crédibilité. Ainsi, on se penche sur la méthodologie de détermination de ce facteur \mathbf{z} . Il est intéressant de noter quelques critères qui sont naturels dans ce processus :

- Plus l'expérience d'une cédante est grande, plus elle paraît crédible.
- Certaines cédantes ont des résultats plus stables que d'autres et doivent donc être d'avantage crédibilisés.

Généralement, on peut distinguer entre trois zones des tranches d'un traité XS :

- **Les tranches basses.**

Ils réfèrent aux tranches travaillantes. Ces tranches sont suffisamment sinistrées pour qu'une cotation par la méthode du Burning Cost soit fiable. Par conséquent,

si l'on applique les modèles de crédibilité qui seront développés dans la suite à ces tranches, nous allons obtenir un facteur de crédibilité qui est $z = 1$.

- **Les tranches médianes.**

Ils sont des tranches non travaillantes néanmoins ils présentent une sinistralité non nulle. Dans ce cas, il peut être très intéressant de pondérer le taux obtenu selon l'expérience et un taux selon l'exposition.

- **Les tranches hautes.**

Pour les tranches les plus hautes des programmes de réassurance, notamment les tranches illimitées, la crédibilité n'est pas d'un grand secours puisque à la fois les primes selon l'expérience et l'exposition sont beaucoup trop imprécises pour gagner en précision par leur combinaison.

On note que l'on n'observe pas systématiquement ce découpage pour chaque traité. Ainsi, on pourra dans certains cas trouver que toutes les tranches d'un traité XS sont travaillantes ou inversement non travaillantes.

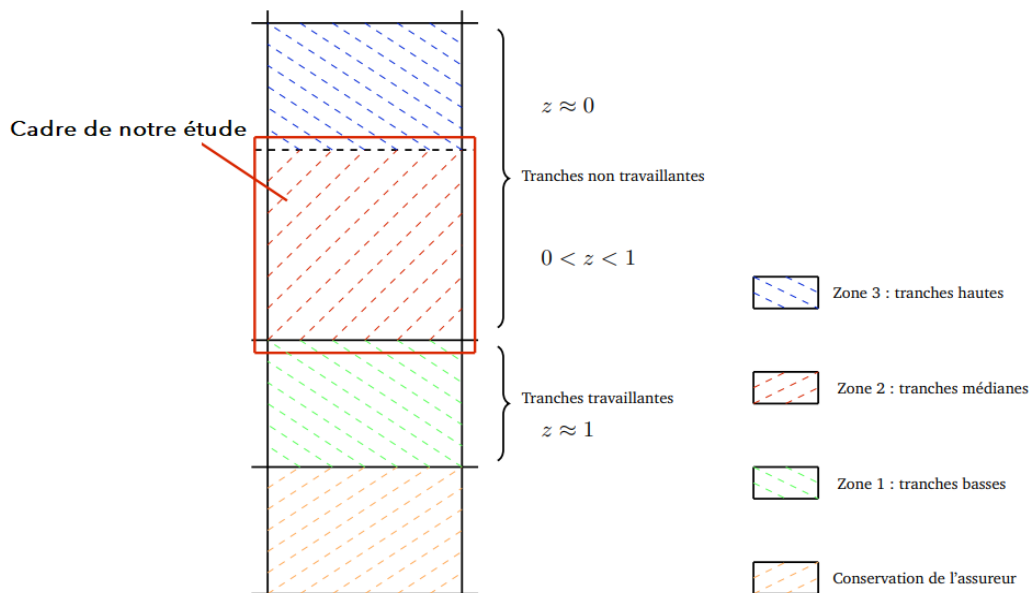


Figure 30 : les trois zones des tranches d'un XS

Ainsi, d'après la division des tranches d'un XS, il est naturel que notre cadre d'étude se pointe sur les tranches médianes vu qu'elles sont celles qui présentent un véritable intérêt à la théorie de la crédibilité.

Chapitre 1 : La théorie de la crédibilité

1. Introduction :

Certes la théorie de la crédibilité s'étend naturellement à la réassurance, néanmoins ce n'est pas au sein de cette activité qu'elle a vu le jour et s'est développée. Le début de cette théorie appartient à l'assurance directe et plus précisément c'est dans la branche responsabilité civile que cette théorie a trouvé le meilleur terrain de développement.

La tarification en assurance, ainsi qu'en réassurance, vise à assurer la stabilité financière, à savoir estimer les coûts potentiels que la compagnie devra provisionner pour les sinistres de son portefeuille. Elle doit aussi mutualiser le risque, c'est-à-dire partager le risque entre les différents assurés. Un assureur qui voudrait faire une répartition égalitaire du risque de son portefeuille proposera la même prime pour tous ses assurés. Ainsi, chacun paierait une prime qui est reflète et est issue de l'expérience de l'ensemble du groupe. Néanmoins, une telle méthode de tarification ne serait pas équitable parce qu'elle ne prendrait pas en compte des caractéristiques propres à chaque assuré. Par exemple, en assurance accidents de travail, de telles caractéristiques comprennent la masse salariale, l'activité de l'entreprise assurée... Or, on ne peut pas observer certaines caractéristiques du risque et c'est là où réside la difficulté de déterminer une prime communiquant l'exact potentiel de pertes d'un assuré. Par conséquent, l'assureur tarificateur propose de trouver un compromis entre ces deux extrêmes, c'est-à-dire une prime en fonction des caractéristiques individuelles de l'assuré et également de celles de l'ensemble du groupe. C'est cette idée qui est à la base de la théorie de la crédibilité.

$$\begin{aligned} & \textit{Prime de crédibilité} \\ & = \\ & z \times \textit{Prime selon l'expérience} \\ & + \\ & (1 - z) \times \textit{Prime selon l'exposition} \end{aligned}$$

Le facteur z est appelé facteur de crédibilité.

Il existe principalement trois branches de la théorie de la crédibilité : **la théorie de la fluctuation limitée, la crédibilité bayésienne et la crédibilité des "incertitudes"**.

En 1914, *Arthur H. Mowbray* a fondé **la théorie de la fluctuation limitée** qu'on appelle aussi la crédibilité "américaine". D'après cette théorie, le facteur de crédibilité est vu comme

le niveau de confiance à accorder à l'expérience moyenne d'un assuré. En général, plus le nombre d'observations qu'on a sur cette expérience est grand, plus on la considère crédible.

Plus tard, en 1945, *Arthur L. Bailey* implante les bases d'une nouvelle théorie, **la crédibilité des moindres carrés** aussi appelée crédibilité "européenne". Cette approche cherche une estimation de la réelle valeur de la prime et ce en minimisant l'erreur entre l'estimation et la vraie valeur. Les travaux de *Bühlmann* et *Bühlmann-Straub* à la fin des années 1960 sont développés dans le cadre bayésien et se basent principalement sur ceux d'Arthur L. Bailey.

Ensuite, en 1975, *Jewell* développe le modèle hiérarchique. Ce modèle est une généralisation des modèles de crédibilité de *Bühlmann* et *Bühlmann-Straub*.

Enfin, *Joseph A. Boor*, en 1992, présente **la crédibilité des "incertitudes"**. Cette approche développe une nouvelle manière pour calculer le facteur de crédibilité. Elle se base sur les incertitudes relatives aux erreurs provenant de la détermination de la prime individuelle et de la prime collective.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons brièvement la théorie de la fluctuation limitée avant de nous concentrer sur la crédibilité bayésienne et celle hiérarchisée. La crédibilité des "incertitudes" et son application à la réassurance ne figureront pas dans ce mémoire.

2. Théorie de la fluctuation limitée :

La théorie de la crédibilité à fluctuation limitée a vu le jour en 1910 lorsque le constructeur automobile *General Motors* qui était **assuré** chez *AllState* pour les **accidents de travail** remarqua que sa prime d'expérience était sensiblement inférieure à la prime réclamée à l'ensemble des entreprises assurées. *General Motors* par conséquent réclame un tarif basé sur sa propre sinistralité et non celle de l'ensemble des sociétés assurées. Pour répondre à cette question, *A.H. Mowbray* proposa alors un critère fondé sur la taille du portefeuille et créa par suite la théorie de la fluctuation limitée.

Les travaux de *Mowbray*, en 1914, s'intéressaient principalement aux conditions nécessaires pour accorder une pleine crédibilité à l'expérience d'un assuré (c'est-à-dire le cas où $z = 1$). En particulier, il propose une formule qui donne le nombre de périodes d'observation nécessaires pour que z , le facteur de crédibilité, soit égal à 1. Par la suite, *Albert*

W. Whitney, en 1918, élargie les travaux de Mowbray à la crédibilité partielle (cas où $z \in]0; 1[$).

2.1.Crédibilité totale :

On note :

- N : la variable aléatoire décrivant le nombre de sinistre durant une année donnée,
- (X_i) avec $i = 1, \dots, N$: les coûts des sinistres survenus durant cette même année,
- $S = \sum_{i=1}^N X_i$: le coût total de ces sinistres.

On suppose de plus que :

- N est de loi de Poisson de paramètre λ
- (X_i) sont i.i.d de moyenne μ et de variance σ^2 et sont indépendantes de N .

On en déduit que :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{\infty} E(S|N = i)P(N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i E(X) P(N = i) = E(X)E(N) = \lambda\mu$$

$$V(S) = E[V(S|N)] + V[E(S|N)] = E(N) V(X) + E(X)^2 V(N) = \lambda(\sigma^2 + \mu^2)$$

Comme dénoté précédemment, la théorie de la fluctuation limitée consiste à fixer à priori deux constantes c et ε de telle façon que l'on accorde à l'assuré une crédibilité totale si :

$$P\left(\frac{|S - E[S]|}{E[S]} \geq c\right) \leq \varepsilon$$

Autrement dit, on accorde une crédibilité totale à l'assuré si la probabilité que la charge de sinistre s'éloigne de la moyenne est assez faible.

D'après le théorème central-limite, pour un nombre assez grand d'observations, nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$P\left(\frac{|S - E[S]|}{E[S]} \geq c\right) \leq \varepsilon \Leftrightarrow P\left(\frac{|S - E[S]|}{\sqrt{V[S]}} \geq \frac{c E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right) \leq \varepsilon$$

$$\frac{|S - E[S]|}{\sqrt{V[S]}} \sim \mathfrak{N}(0,1)$$

Et par conséquence, on a :

$$P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{V[S]}} \leq -\frac{c E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, si l'on note $z_{\varepsilon/2} = F^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ le quantile à $\frac{\varepsilon}{2}\%$ de la loi normale centrée réduite, on trouve que :

$$-\frac{c E[S]}{\sqrt{V[S]}} \leq z_{\varepsilon/2}$$

D'où :

$$-\frac{c \lambda \mu}{\sqrt{\lambda (\sigma^2 + \mu^2)}} \leq z_{\varepsilon/2}$$

Et finalement, on en déduit :

$$\lambda \geq \lambda_{min}$$

Avec : $\lambda_{min} = \frac{z_{\varepsilon/2}^2}{c^2} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right)$ qui désigne le nombre minimum de sinistres espérés pour la prochaine période afin de pouvoir appliquer la crédibilité totale.

En plus, il est possible de déterminer, en utilisant la théorie de la fluctuation limitée, le nombre minimum d'années nécessaires pour pouvoir tarifer un assuré sur la base de sa propre sinistralité.

2.2.Crédibilité partielle :

Lors de la quête d'équité, on peut faire face à un contrat qui se trouve sous le seuil de crédibilité totale. Dans ce cas, il faut tenir compte de l'expérience individuelle de l'assuré et pondérer la prime d'expérience et la prime collective. Plusieurs formules différentes ont été proposées pour le facteur z .

En suivant le même raisonnement que pour la crédibilité totale, on est amené à déterminer le facteur de crédibilité tel que :

$$P\left(\frac{|S - E[S]|}{E[S]} z \geq c\right) \leq \varepsilon$$

Ainsi, de la même manière que précédemment, on obtient :

$$z \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{min}}}$$

De son côté, Whitney a élaboré une formule portant sur le nombre d'années d'observation. Ainsi, le facteur de crédibilité de *Whitney* est déterminé par la racine carré du ratio du nombre de périodes d'observations n et du nombre de périodes nécessaires pour accorder une crédibilité complète n_0 , soit :

$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{n}{n_0}} & \text{si } n \leq n_0 \\ z = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3.Limite de la crédibilité à fluctuation limitée :

La théorie de la fluctuation limitée est très facile et simple à mettre en œuvre néanmoins elle présente de nombreuses limites. Tout d'abord, on note que son inconvénient majeur est qu'elle se base sur l'approximation central-limite. Or, on sait que cette approximation ne peut être utilisée que si le nombre de sinistres est assez important, chose qui n'est pas nécessairement vraie en réassurance du fait que l'on dispose en réassurance que d'un nombre limité de données. *Stéphane Bonche* a utilisé la crédibilité à fluctuation limitée pour obtenir un critère permettant de choisir entre une cotation Burning Cost et une cotation paramétrique. Néanmoins, les résultats obtenus restent bien souvent non réalistes. Concernant notre étude, nous n'allons pas appliquer cette théorie dans ce mémoire.

3. Crédibilité Bayésienne :

3.1.Terminologie bayésienne :

3.1.1. Information à priori et profil de risque :

En sciences actuarielles, on désigne par une cotation en assurance ou en réassurance un problème mathématique mais bien évidemment elle réfère à plus que ça. En s'appuyant sur les mathématiques seules on ne peut pas aboutir à un tarif fiable. En effet, les informations sur les assurés sont limitées et celles dont l'on dispose doivent être utilisées avec prudence. L'actuaire tarificateur est donc amené à élaborer des hypothèses, émettre des jugements, et faire des suppositions a priori. D'où l'intérêt que présente l'utilisation des statistiques bayésiennes en

tarification. En outre, les données qu'on peut réellement qualifier de fiables sont les statistiques de sinistralité, malgré le fait que pour les branches longues, l'actuaire ne dispose en général que des estimations des montants finaux. Les choses sont encore plus compliquées en réassurance où les actuaires sont face au problème de la rareté des données.

Ainsi, malgré le fait que le risque soit modélisable, l'assureur n'a souvent qu'une vague idée du niveau de pertes que représente un contrat et surtout un nouveau contrat. En gros, il n'a qu'une perception a priori, perception qu'il a obtenue à partir des variables de tarification. En effet, à partir de ces variables il mène une répartition des contrats du portefeuille d'une compagnie d'assurance ou de réassurance en classes, où les contrats d'une même classe ont un niveau de risque relativement semblable. Ainsi, à titre d'exemple, les deux variables de tarification les plus utilisées par les réassureurs, sont **la branche** et **le type de traité**. Néanmoins, chaque contrat possède des caractéristiques propres que l'on ne peut ni observer ni quantifier, des caractéristiques qui le distinguent des autres contrats d'une même classe. Pour modéliser ces différences, on suppose que chaque contrat est caractérisé par un paramètre (ou profil) de risque qui lui est propre.

3.1.2. Notations bayésiennes :

On note :

- N_j : Le nombre de sinistres engendrés par un assuré particulier durant l'année j ;
- X_j : La charge agrégée de sinistres correspondante.

On suppose que cet assuré possède un profil de risque θ qui prend ses valeurs dans Θ . Dans le cas d'un portefeuille réellement homogène Θ devrait être réduit à un singleton.

L'assureur ne connaît pas la valeur du paramètre de risque θ de l'assuré, mais il dispose d'informations sur la classe à laquelle appartient cet assuré. Ainsi, à partir de l'information disponible ainsi que l'incertitude portant sur θ on cherchera une loi de probabilité sur θ , dite **loi a priori**, de densité $u(\theta)$. Cela revient à supposer que θ est distribuée selon $u(\theta)$ avant que X ne soit générée selon $f(X|\theta = \theta)$.

Où :

- $X = (X_1, \dots, X_n)'$ Représente l'historique de sinistralité disponible
- n est le nombre d'années d'observation.

La distribution U de dérivée u est appelée fonction de structure du portefeuille.

Soit \mathbf{x} une réalisation de \mathbf{X} , et on note $L(x; \theta)$ la densité conditionnelle de X sachant $\theta = \theta$, la formule de Bayes permet de calculer $u(\theta|x)$, la densité **de la loi dite a posteriori**, représentant l'incertitude portant sur θ après avoir observé \mathbf{x} .

On a :

$$u(\theta|x) = \frac{u(\theta) L(x; \theta)}{u(x)}$$

Ainsi, on peut dire que $u(\theta|x)$ est proportionnel à $u(\theta) L(x; \theta)$. En effet, on constate que l'approche bayésienne réalise l'actualisation de l'information a priori par l'observation \mathbf{x} , au travers de $u(\theta|x)$.

La situation peut être résumée par un modèle à deux boîtes. La première boîte représente le collectif de risques dont on sélectionne un élément θ qui conditionne le contenu de la deuxième boîte dans laquelle on tire les variables X_1, X_2, \dots

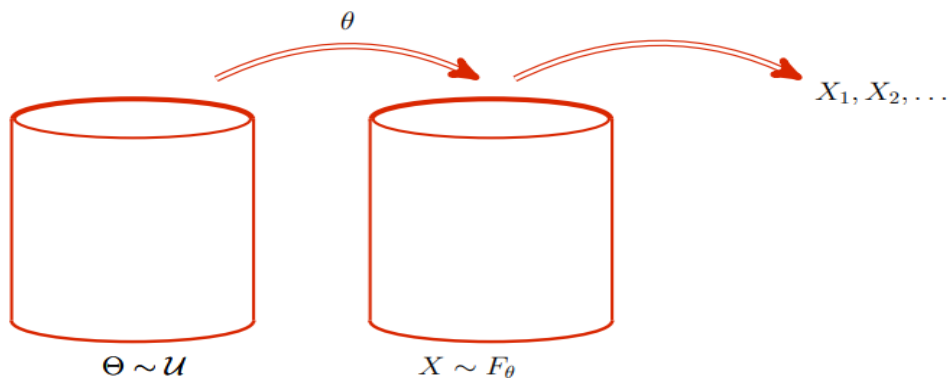


Figure 31 : Illustration du modèle à deux boîtes

De plus, on suppose que conditionnellement à $\theta = \theta$, les variables aléatoires X_1, X_2, \dots sont i.i.d de fonction de répartition F_θ .

Maintenant, nous procédons aux définitions mathématiques de la prime individuelle et prime collective :

- On définit la prime individuelle par la variable $\pi(\theta) = E(X_{n+1}|\theta)$
- On définit la prime collective par la variable $\pi_0 = E(\pi(\theta)) = \int \pi(\theta) d\theta$

Le but de l'actuaire tarificateur est de trouver pour chaque contrat caractérisé par le paramètre de risque θ le meilleur estimateur $\widehat{\pi(\theta)}$ de la prime individuelle.

3.1.3. Primes de Bayes :

La prime de Bayes est définie par l'espérance à posteriori de $\pi(\theta)$:

$$p^{Bayes} = \widehat{\pi(\theta)} = E(\pi(\theta)|\mathbf{X})$$

Où, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ est le vecteur aléatoire représentant l'historique de sinistralité de l'assuré considéré.

Théorème 1 : Au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne, $\widehat{\pi(\theta)}$ est le meilleur estimateur de $\pi(\theta)$.

On présente ci-dessous un schéma résumant la démarche bayésienne :

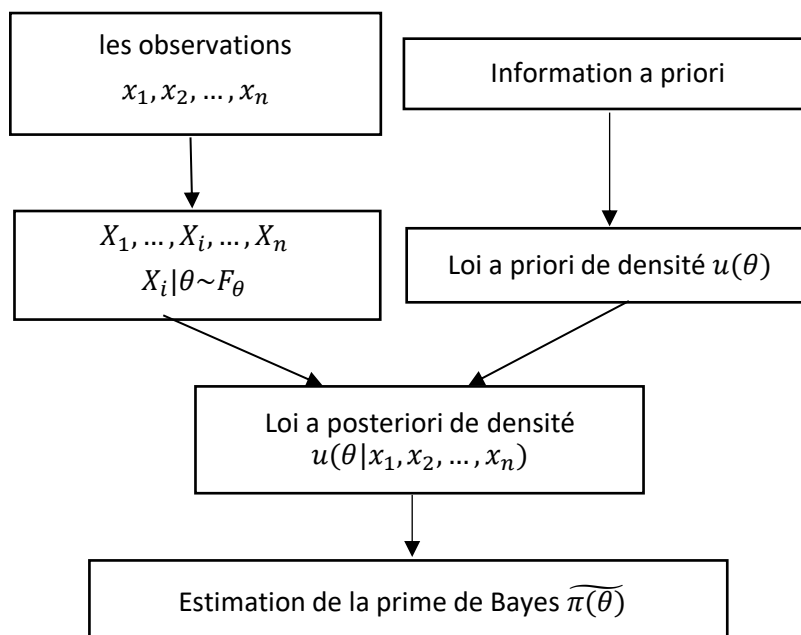


Figure 32 : Démarche bayésienne pour l'estimation de la prime de Bayes.

3.1.4. Modélisation de l'information a priori :

Comme le précise le schéma précédent, afin de déterminer la prime de Bayes, on doit d'abord spécifier la loi conditionnelle F_θ des charges agrégées de sinistres et la distribution à priori U . Il est généralement difficile de choisir la loi à priori, d'où la difficulté majeure de l'approche bayésienne. En effet, l'interprétation de l'information a priori disponible n'est souvent pas assez précise pour conduire à la détermination d'une seule et unique loi. En pratique, le choix de la loi à priori inclut une part d'aléatoire. Généralement, on a recours à des lois usuelles (tel que : loi normale, loi gamma, . . .) ou à des lois qu'on appelle lois conjuguées pour une raison qu'on expliquera en précisant la définition de ce que sont les lois conjuguées. Ainsi, on utilisera l'information a priori afin de déterminer les paramètres de la loi a priori appelés **hyperparamètres**.

On note :

- $F = \{F_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ la famille des distributions possibles
- $U = \{U_\gamma(\theta) \mid \gamma \in \Gamma\}$ la famille des fonctions de structure.

Idéalement, les familles U et F devraient être choisies de manière à ce que la prime de Bayes puisse s'exprimer analytiquement.

Définition 2 : (Famille de distributions conjuguées).

La famille U est conjuguée à la famille F si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute réalisation \mathbf{x} du vecteur des observations \mathbf{X} , il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que pour tout $\theta \in \Theta$:

$$U_\gamma(\theta | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = U_{\gamma'}(\theta)$$

L'avantage que présente l'utilisation des familles de distributions conjuguées réside dans le fait que la distribution a posteriori obtenue pour une période peut être utilisée comme a priori de la période suivante. Nous appellerons les règles permettant de passer de la distribution a priori à la distribution a posteriori des formules de mise à jour.

3.2. Modèle de Bühlmann :

Notre objectif est toujours le calcul de la prime de crédibilité, c'est-à-dire le meilleur estimateur de $\pi(\theta)$ qui s'exprime par une combinaison convexe de la prime d'expérience et de la prime d'exposition. Or, comme la prime de Bayes, $\widehat{\pi(\theta)}$ est le meilleur estimateur de $\pi(\theta)$ (lorsque la qualité des estimateurs est évaluée par l'erreur quadratique moyenne), il est intéressant que ces deux primes coïncident. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, la prime de Bayes n'est une prime de crédibilité que dans certains cas. L'idée d'Hans Bühlmann est de forcer la **prime bayésienne** à être **linéaire** et d'obtenir une expression simple pour le facteur de crédibilité.

3.2.1. Formules de Bühlmann :

On considère un portefeuille constitué de I risques similaires.

On note :

- $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})'$ le vecteur des observations associé au risque i
- Et θ_i son profil de risque.

On a :

Variables non observables	Observations				
	1	...	k	...	n
θ_1	X_{11}	...	X_{1k}	...	X_{1n}
\vdots	\vdots				\vdots
θ_i	X_{i1}	...	X_{ik}	...	X_{in}
\vdots	\vdots				\vdots
θ_I	X_{I1}	...	X_{Ik}	...	X_{In}

Figure 33 : Notations du modèle de Bühlmann

On cherche à trouver, pour chaque risque individuel i , un estimateur de la prime individuelle $\pi(\theta_i)$. Bühlmann restreint son cadre de travail à la classe des estimateurs qui sont linéaires en les observations, $(X_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq I \\ 1 \leq j \leq n}}$.

On va montrer par la suite que le meilleur estimateur linéaire en les observations est une prime de crédibilité.

Dans le modèle de Bühlmann, on se place dans le cadre où les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- H_1 :

Les variables X_{ij} ($j = 1, \dots, n$) sont conditionnellement à $\theta_i = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels suivants :

$$\pi(\theta_i) = E(X_{ij}|\theta_i)$$

$$\sigma^2(\theta_i) = Var(X_{ij}|\theta_i)$$

- H_2

Les couples $(\theta_1, X_1), \dots, (\theta_I, X_I)$ sont i.i.d.

Si on note $\widehat{\pi(\theta_i)}$ le meilleur estimateur linéaire en les observations de $\pi(\theta)$.

Théorème 2 : (modèle de Bühlmann)

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , on a un estimateur de crédibilité donné par :

$$\widehat{\pi(\theta_i)} = z \times \bar{X}_i + (1 - z) \times \pi_0$$

Tel que : $\pi_0 = E(\pi(\theta_i))$ et $z = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$ où $\tau^2 = Var(\pi(\theta_i))$ et $\sigma^2 = E(\sigma^2(\theta_i))$

3.2.2. Interprétation du facteur de crédibilité de Bühlmann :

Le rapport $\frac{\sigma^2}{\tau^2}$ réfère à ce qu'on appelle coefficient de crédibilité. La principale difficulté du modèle de Bühlmann réside dans l'estimation de ce coefficient.

$$R = \frac{\sigma^2}{\tau^2} = \left(\frac{\sigma/\pi_0}{\tau/\pi_0} \right)^2$$

Généralement on interprète \sqrt{R} comme le rapport entre la variabilité interne du risque σ/π_0 et l'hétérogénéité du portefeuille τ/π_0 .

En effet :

$$\frac{\sigma}{\pi_0} = \frac{\sqrt{E(Var(X_j|\theta_i))}}{E(X_j)}$$

$$\frac{\tau}{\pi_0} = Cov(\pi(\theta_i))$$

Le facteur de crédibilité z est une fonction croissante du nombre d'années d'observation n et de l'hétérogénéité du portefeuille, mais il est une fonction décroissante de la variabilité interne au risque donnée par σ/π_0 .

On a $z = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma_h^2}{\sigma_h^2 + \sigma_{\bar{X}_i}^2}$ donc on peut réécrire la prime de crédibilité de la façon explicite suivante :

$$\widehat{\pi(\Theta_i)} = \frac{\sigma_h^2}{\sigma_h^2 + \sigma_{\bar{X}_i}^2} \bar{X}_i + \frac{\sigma_{\bar{X}_i}^2}{\sigma_h^2 + \sigma_{\bar{X}_i}^2} \pi_0$$

Tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{\bar{X}_i}^2 = E(\text{Var}(\bar{X}_i|\theta)) = \frac{\sigma^2}{n} \\ \sigma_h^2 = \tau^2 = \text{Var}(\pi(\theta)) \end{cases}$$

On peut interpréter $\sigma_{\bar{X}_i}^2$ comme l'erreur commise lors de l'estimation de la prime pure.

On remarque que comparé à la formule explicitée en théorème 2, cette écriture est plus naturelle et intuitive. En effet, elle nous permet de clairement voir que le modèle de Bühlmann favorise la prime d'expérience sur la prime d'exposition lorsque l'hétérogénéité du marché est très importante comparée à l'erreur liée au calcul de la prime pure et inversement.

3.3. Modèle de Bühlmann-Straub :

Il est parfaitement logique de penser que les pertes les plus récentes seront plus représentatives des pertes à venir que celles passées justement parce que l'exposition du contrat considéré change (que ça soit une augmentation ou diminution du nombre de polices). Or le modèle de Bühlmann décrit dans la partie précédente suppose que les charges annuelles de sinistres sont indépendantes et identiquement distribuées :

$$\pi(\theta_i) = E(X_{ij}|\theta_i)$$

$$\sigma^2(\theta_i) = \text{Var}(X_{ij}|\theta_i)$$

Cette hypothèse est tellement forte qu'il est très rare de trouver qu'elle est effectivement vérifiée en pratique (la taille d'un contrat change toujours au fil du temps). Ainsi, afin de prendre en considération les variations de l'exposition au risque, Bühlmann et Straub ont généralisé le modèle précédent en attribuant un poids aux pertes annuelles. On a :

Variables non observables	Observations					Poids				
	1	...	k	...	n	1	...	k	...	n
Θ_1	X_{11}	...	X_{1k}	...	X_{1n}	ω_{11}	...	ω_{1k}	...	ω_{1n}
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots				\vdots
Θ_i	X_{i1}	...	X_{ik}	...	X_{in}	ω_{i1}	...	ω_{ik}	...	ω_{in}
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots				\vdots
Θ_I	X_{I1}	...	X_{Ik}	...	X_{In}	ω_{I1}	...	ω_{Ik}	...	ω_{In}

Figure 34 : Notations du modèle de Bühlmann Straub

En outre, naturellement, on s'attend à ce que l'expérience d'un contrat ayant une longue sinistralité soit plus stable dans le temps que celle d'un contrat ayant une sinistralité moins conséquente. Autrement dit, la variance conditionnelle devrait être décroissante avec l'exposition au risque.

Les hypothèses du modèle de Bühlmann-Straub sont les suivantes :

- H_1 :

Les variables X_{ij} ($j = 1, \dots, n$) sont conditionnellement à θ_i indépendantes. Elles ont comme moments conditionnels :

$$\begin{aligned} \pi(\theta_i) &= E(X_{ij}|\theta_i) \\ \sigma^2(\theta_i) &= \omega_{ij} \text{Var}(X_{ij}|\theta_i) \end{aligned}$$

- H_2 :

Les couples $(\theta_1, X_1), \dots, (\theta_I, X_I)$ sont indépendants et les $\theta_1, \dots, \theta_I$ sont identiquement distribués.

Théorème 3 : (modèle de Bühlmann-Straub)

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , on a un estimateur de crédibilité donné par :

$$\widehat{\pi(\theta_i)} = z_i \times \bar{X}_i + (1 - z_i) \times \pi_0$$

Tel que :

$$z = \frac{\omega_{i.}}{\omega_{i.} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \text{ où } \tau^2 = \text{Var}(\pi(\theta_i)) \text{ et } \sigma^2 = E(\sigma^2(\theta_i))$$

$$\bar{X}_i = \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i.}} X_{ij}$$

$$\omega_{i.} = \sum_j \omega_{ij}$$

Chapitre 2 : Application de la théorie de la crédibilité à la réassurance

Afin d'améliorer les conditions tarifaires de la cédante, et par ailleurs son résultat ; nous avons vu dans les parties précédentes deux méthodes de cotation en réassurance qui nous ont donné des taux de primes différents, pour trancher entre ces taux de primes on avait choisi celui qui maximise la part cédée au réassureur. Or, le meilleur choix consisterait à calibrer entre le taux obtenu par expérience et celui par exposition et ce par le biais de la théorie de crédibilité présenté dans le chapitre précédent.



On note qu'on désigne par la prime par expérience, la prime issue de la méthode probabiliste.

Pour ce faire, nous allons appliquer le modèle de Bühlmann et Bühlmann Straub pour ressortir un taux crédible. L'application de ces deux modèles est relativement simple par le biais de la commande `cm()` du package « `actuar` » sur R.

1. Modèle de Bühlmann :

On rappelle que le modèle de Bühlmann donne une forme linéaire de la prime crédible sous forme :

$$p^{Créd} = z \times p^{exposition} + (1 - z) \times p^{expérience}$$

Tel que **z** est le facteur de crédibilité qui nous servira comme pondération entre les deux primes.

Sous R, on applique le modèle de Bühlmann déjà implémenté sur R sur nos données et on obtient la prime de crédibilité qui sera la meilleure estimation de la prime à choisir, on a comme résultats :

```
Structure Parameters Estimators
collective premium: 54504539
```

Figure 35 : Prime de crédibilité par le modèle de Bühlmann

Donc :

$$p^{Créd} = 54\,504\,539 \text{ et } z = 22,759\%$$

Ainsi, la théorie de crédibilité suggère de pondérer la prime issue de la méthode selon l'expérience par 77,241% et celle issue de la méthode par exposition par 22,759%. On en conclut que l'expérience de la cédante pèse sur la détermination de la prime crédible.

2. Modèle de Bühlmann Straub :

Le modèle de Bühlmann Straub suppose aussi une forme linéaire de la prime crédible mais diffère de celui de Bühlmann en attribuant un poids aux pertes annuelles :

$$P^{Créd} = z \times p^{exposition} + (1 - z) \times p^{expérience}$$

Tel que z est le facteur de crédibilité qui nous servira comme pondération entre les deux primes et qui prend en compte les poids attribués aux pertes annuelles.

Sous R, l'application du modèle de Bühlmann Straub se fait par le biais de la même commande que celle de Bühlmann, il suffit de rajouter la variable des poids (Weights). On obtient ainsi la prime crédible suivante :

```
Structure Parameters Estimators
collective premium: 58223492
```

Figure 36 : Prime de crédibilité par le modèle de Bühlmann Straub

Donc :

$$P^{Créd} = 58\,223\,492 \text{ et } z = 25,825\%$$

Ainsi, la théorie de crédibilité appliquée à nos données suggère de pondérer la prime issue de la méthode selon l'expérience par 74,175% et celle issue de la méthode par exposition par 25,825%. On en conclut qu'aussi dans le modèle de Bühlmann Straub l'expérience de la cédante pèse sur la détermination de la prime crédible.

Conclusion de la troisième partie :

Dans cette troisième partie, notre finalité était de trouver la meilleure estimation de la prime de réassurance et ce en pondérant entre la prime issue de la méthode de cotation selon l'expérience et celle issue de la méthode de cotation selon l'exposition par un facteur z qu'on nomme facteur de crédibilité et ce afin d'éviter que la cédante soit pénalisée selon son profil de risque et aussi afin de prendre en considération sa sinistralité mais qu'elle ne soit pas le seul critère tranchant.

Pour ce faire, dans un premier lieu nous avons présenté la théorie de la crédibilité, son histoire et les différents modèles existants (Bühlmann et Bühlmann Straub). En effet, ces deux modèles nous donnent une estimation bayésienne linéaire de prime de réassurance qu'on a prouvé être la meilleure estimation.

Dans un deuxième lieu, nous avons implémenté ces deux modèles sur nos données afin de pouvoir en déduire les meilleures estimations des primes de réassurance.

En guise de conclusion quant au choix de la prime, naturellement on va se pencher vers la prime qui est la plus petite, car en tant que cédante on cherchera à toujours à minimiser la prime qu'on devra céder au réassureur.

PARTIE 4

Analyse de quelques critères d'optimisation des traités XS

Introduction :

Dans ce qui précède, notre finalité était la recherche de la meilleure estimation de la prime de réassurance. En effet, nous avons implémenté deux méthodes de cotation : selon l'expérience et selon l'exposition ; puis, nous nous sommes basés sur la théorie de crédibilité afin de déterminer la meilleure estimation de la prime qui calibre entre le profil de risque de la cédante et sa sinistralité, c'est-à-dire qui pondère entre la prime par expérience et la prime par exposition par le biais de ce qu'on appelle le facteur de crédibilité. En effet, on a déterminé l'estimateur bayésien par les deux modèles de Bühlmann et de Bühlmann Straub qui, tous les deux, ont affecté le plus grand pourcentage à l'expérience de la cédante et le reste à son profil de risque. Ainsi, la cédante ne sera pas pénalisée selon son profil de risque.

Dans ce chapitre nous allons proposer quelques critères qui seront utiles à l'assureur pour faire son choix de programme de réassurance.

Comme l'assureur vise l'augmentation de son bénéfice et la réduction du risque qui s'y rapporte, on commencera par traiter le critère Espérance/Variance du gain. Ensuite, on passe au critère est la Value At Risk qui nous permettra d'évaluer les engagements de l'assureur dans les cas extrêmes.

1. Critère Espérance/ Variance du Gain :

En contractant un traité de réassurance, la cédante est en mesure d'homogénéiser son portefeuille et ce en éliminant les sinistres de pointes ce qui mène ainsi à réduire la volatilité du résultat

Dans cette première section, nous allons nous focaliser sur la modélisation du gain de l'assureur pour le traité de réassurance XS. Bien évidemment, l'assureur est en quête de la combinaison de portée et priorité lui procurant le meilleur profit tout en supportant le risque. C'est ce qu'on appelle la méthode Espérance / Variance, qui prendra comme mesure de risque l'écart type du profit.

Pour ce faire, nous allons nous baser sur l'historique de sinistres complet sans le limiter par un seuil de modélisation comme l'on a fait dans la modélisation de la sévérité.

On note que la démarche que l'on va suivre pour ajuster les lois modélisant la fréquence et la sévérité est semblable à celle du chapitre précédent.

1.1. Modélisation de la charge de l'assureur :

Notre base de données s'étale de 2008 jusqu'à 2018. Nous commençons notre étude par la revalorisation As If des charges des sinistres.

1.1.1. Loi de sévérité :

Suivant le même principe élaboré dans la deuxième partie de ce mémoire, on commence par tester l'ajustement de plusieurs lois (Log-Normale, Pareto, Exponentielle...) et on conclut par le biais de la minimisation de la distance de Kolmogorov Smirnov.

```

> ks.test(ch_tot, "ppareto",a,s)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 1, p-value = 1.332e-15
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(ch_tot, "plnorm",mean_LN,sd_LN)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 0.072272, p-value = 0.9061
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(ch_tot, "pgamma",shape,rate)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 0.074363, p-value = 0.8876
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(ch_tot, "pweibull",shape_w,scale_w)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 0.11189, p-value = 0.4414
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(ch_tot, "pexp",rate_expo)
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 0.5447, p-value = 1.332e-15
alternative hypothesis: two-sided

```

Figure 37: Tests de Kolmogorov Smirnov

Pour le cas de notre traité, il s'avère que c'est la loi Log-Normale qui minimise la distance de Kolmogorov Smirnov, ainsi on conclut qu'elle modélise la sévérité.

Ensuite, on passe à l'estimation des paramètres :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = 13,54702 \\ \hat{\sigma} = 0,1325045 \end{cases}$$

Puis, on effectue les tests d'ajustements pour valider le choix de l'ajustement par une loi log-normale.

```

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: ch_tot
D = 0.072272, p-value = 0.9061
alternative hypothesis: two-sided

```

Figure 38 : Test de Kolmogorov Smirnov pour valider l'ajustement par la loi Log-Normale

Par le biais du test de Kolmogorov Smirnov, on affirme que la loi de nos données est effectivement une loi Log-Normale car la p-value est supérieur à 5%.

1.1.2. Loi de fréquence :

Afin de modéliser la fréquence, nous récupérons le vecteur contenant le nombre des sinistres par année. Dans notre cas on se trouve avec le tableau récapitulatif suivant :

Années	Nombre de sinistres
2008	64
2009	93
2010	210
2011	274
2012	273
2013	340
2014	418
2015	91
2016	473
2017	163
2018	310

De la même manière que dans la deuxième partie de ce mémoire, les lois les plus utilisées sont la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

En estimant les paramètres par le biais de la méthode de maximum de vraisemblance, on obtient :

- Poisson : $\hat{\lambda} = 246,2727$
- Binomiale négative : $\begin{cases} \hat{r} = 3,030465 \\ \hat{p} = 0,04275618 \end{cases}$

Puis, on effectue le test de dispersion de Fisher afin de déterminer laquelle des deux lois est la plus convenable.

```
> qchisq(.95,N-1)
[1] 18.30704
> N*T
[1] 748.3581
```

Figure 39: Statistique du test de Fisher

Comme l'on a un indice de Fisher (748,3581) supérieur au quantile khi-deux à 10 ddl (18,30704), alors on rejette l'hypothèse nulle qui stipule que la loi de fréquence est une loi de poisson et ainsi on conclut quant à l'ajustement de la loi de la fréquence par la loi binomiale négative.

1.2. Modélisation du gain de l'assureur :

Afin de modéliser le gain de l'assureur, on considèrera que :

- La sinistralité totale survenue dans l'horizon d'étude 2008-2018, qui est égale à :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Où N est la variable aléatoire de la fréquence des sinistres qui suit une loi Binomiale Négative composée et les sinistres individuels X_i suivent une loi Log Normal ;

- Les montants (X_i) sont indépendants et identiquement distribués ;
- Le nombre de sinistre N et les X_i sont indépendants ;
- Le total des primes acquises de l'exercice sera noté par $P^{acquise}$.

Dans le cas sans réassurance, la formulation du gain de l'assureur s'exprime par :

$$G = P^{acquise} - S$$

Ainsi, en moyenne le gain l'assureur est donnée par :

$$E(G) = P^{acquise} - E(S)$$

$$E(G) = P^{acquise} - E(N) * E(X)$$

Et donc la variance du gain est :

$$Var(G) = Var(S)$$

On se place dans le cas d'un traité de réassurance non proportionnelle, un excédent de sinistre. On rappelle que la part des sinistres à la charge du réassureur dans ce cas est donnée par :

$$X_i^R = \min(\max(0; X_i - \text{Priorité}); \text{Portée})$$

D'où, sur un exercice donné, le réassureur aura à sa charge :

$$S^R = \sum_{i=1}^N X_i^R$$

Sachant que la prime pure de réassurance est :

$$PP^R = E(S^R)$$

On note que la prime cédée par l'assureur n'est pas celle pure, mais c'est une prime de risque où l'on applique à la prime pure un taux de chargement t_c qui inclut des frais supplémentaire et une marge de risque.

$$P^R = E(S^R) \times (1 + t_c)$$

Alors, on en déduit que le gain de l'assureur dans le cas de ce traité de réassurance est :

$$G = (P^{acquise} - S) - (P^R - S^R)$$

$$G = (P^{acquise} - S) - (E(S^R) \times (1 + t_c) - S^R)$$

D'où :

$$E(G) = P^{acquise} - E(S) - E(S^R) \times t_c$$

Et

$$Var(G) = Var(S - S^R)$$

En analysant ces deux formules, on constate que la réassurance diminue d'une part le bénéfice de l'assureur mais en contrepartie elle diminue aussi son risque illustré en termes de la variance du gain.

On note que l'expression de la variance du gain doit être simplifiée afin de faciliter les calculs :

$$Var(G) = Var\left(\sum_{i=1}^N X_i - X_i^R\right)$$

On

note

$$Y_i = X_i - X_i^R,$$

donc :

$$Var(G) = Var\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)$$

$$Var(G) = E(N) * Var(Y) + Var(N) * E(Y)^2$$

Le calcul de cette variance est fait par une simulation de Monte Carlo, car il est difficile de trouver la variance de Y qui est fonction de la variable aléatoire X.

Le tableau ci-dessous résume les espérances et les variances du gains tel que formulés ci-dessus, et ce pour différentes priorités et une limite fixée à 1 000 000 (la limite du traité coté dans les parties précédentes).

Afin de mener cette application, on choisit comme taux de chargement $t_c = 10\%$ et d'après nos données on récupère la prime acquise et finalement on travaille avec la prime crédibilisée comme prime de réassurance.

Priorité	Aucune	400 000	500 000	600 000	700 000	800 000
E(G)	603 935 564	603 930 930	603 932 789	603 934 182	603 935 122	603 936 122
$\sigma(G)$	97 672 395	76 736 131	83 779 136	84 064 555	84 804 442	85 937 174
CV(G)	16,173%	12,706%	13,872%	13,919%	14,042%	14,230%

En analysant nos résultats, on remarque que pour une portée fixée on a l'espérance du gain qui augmente avec l'augmentation de la priorité.

Cette constatation est évidente étant donné que plus la priorité augmente plus la prime cédée au réassureur diminuera d'où le gain sera élevé. Or, en cédant moins de sinistres c'est-à-dire en augmentant la priorité, l'assureur augmentera en conséquence son exposition au risque et ainsi la variance du résultat.

Pour une meilleure visibilité des résultats obtenus, nous allons comparer deux cas de figure : cas sans réassurance et le cas avec une couverture en XS de priorité 600 000.

L'espérance de gain dans le premier cas est de 609 590 715. Alors qu'avec un traité XS de priorité 600 000 et de limite 1 000 000, on a une espérance de gain de 603 934 182. Ainsi l'assureur perd une partie de son bénéfice qui est de l'ordre de 5 656 533. En revanche, on remarque qu'en se couvrant par un traité XS on diminue davantage l'écart type de notre résultat qui passe de 97 672 395 à 84 064 555.

Afin de mieux appréhender les résultats obtenus, nous nous baserons sur le coefficient de variation, ce dernier est une mesure de dispersion donnée par le rapport entre l'écart-type et la moyenne. En calculant cette mesure, on constate que la couverture par le traité XS de notre exemple permet de diminuer la dispersion du gain de l'assureur d'environ 3%.

Enfin, on en conclut que l'assureur est confronté à deux cas de figures : augmenter son bénéfice et supporter un risque plus grand ou le contraire.

2. La Value At Risk comme mesure de risque :

L'écart type est une mesure de risque populaire qui permet de quantifier la dispersion autour de la moyenne, cependant elle présente la limite de ne pas capter l'asymétrie des distributions et ne prend pas en considération les dispositions des masses de probabilité alors qu'on sait qu'en réassurance les queues des distributions des sinistres sont assez lourdes. Ainsi, on aura recours à une mesure de risque plus robuste « la Value At Risk ».

2.1.Définition :

On définit la VaR au niveau α avec $\alpha \in [0,1]$ par le quantile de niveau α donné par :

$$P(X \leq VaR_\alpha(X)) = \alpha$$

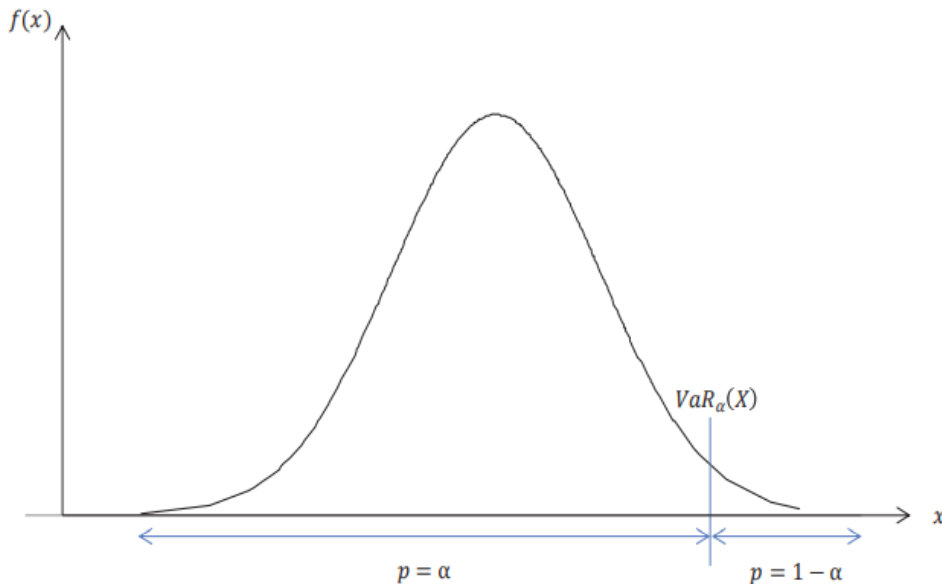


Figure 40 : Illustrations du principe de la VaR

La formulation de la VaR s'écrit aussi :

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x, P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

Ainsi, on dit qu'elle correspond à la perte maximale probable pour un niveau de confiance α .

Cette mesure nous permet de calculer le besoin en capital donné par $VaR_{99,5\%}(X)$.

2.2.Application :

- **Méthode de simulation :**

D'après la définition ci-dessous de la VaR, on cherchera dans notre cas à trouver le quantile de la charge annuelle net au seuil α .

Sachant les lois de fréquences de de sévérité, nous pouvons donc appliquer la méthode de simulation étant donné que c'est est une méthode pratique et simple à mettre en œuvre.

On rappelle que pour un traité C XS P , la charge nette de l'assureur est donnée par :

$$S^{Nette} = \sum_{i=1}^N X_i - \min(\max(0, X_i - P), C) = \sum_{i=1}^N Y_i$$

Avec :

- $Y_i = X_i - \min(\max(0, X_i - P), C)$
- C est la portée et P est la priorité.

Les étapes à suivre pour effectuer la simulation dans le cas d'une loi composée sont les suivantes :

- Choisir le nombre de simulation souhaité, on le note par J ;
- Choisir les caractéristiques du traité XS (priorité et portée) ;
- Construire le vecteur $N = (n_1, n_2, \dots, n_j)$ des fréquences de sinistres qui suit la loi de fréquence qu'on a trouvé précédemment ;

n_j est la $J^{\text{ème}}$ valeur issue de la simulation par la loi Binomiale Négative

- Pour j allant de 1 jusqu'à J :
 - On simule n_j les variables $x_1^{n_j}, x_2^{n_j}, \dots, x_{n_j}^{n_j}$ issues de la loi de la sévérité, la loi log normale ;
 - Pour i allant de 1 jusqu'à n_j :
 - Construire le vecteur : $y_i^{n_j} = \min(\max(0, x_i^{n_j} - P), C)$;
 - En déduire : $S_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_i^{n_j}$;
- Trier le vecteur $\{S_j\}_{1 \leq j \leq J}$ par ordre croissant et on retient la valeur correspondante à 99,5% de la taille de l'échantillon.

• **Résultats :**

La meilleure estimation de la VaR est celle par simulation car elle se base sur les distributions réelles de la fréquence et de la sévérité. Nous nous contentons dans cette partie de chercher pour différentes priorités la VaR par simulation.

Priorité	Par simulation
400 000	471 262.9
500 000	579 237.7
600 000	607 513.7
700 000	756 071.7
800 000	820 032.2
Aucune	1 256 606.1

D'après les résultats illustrés dans le tableau ci-dessous, on constate que plus la priorité augmente plus la Value at Risk augmente aussi. Ce résultat est prévisible étant donné qu'en augmentant la priorité du traité XS, on diminue davantage la part de risque cédée au réassureur et ainsi l'assureur garde une grande partie de son risque.

La Value at Risk est la représentation de la valeur nécessaire pour l'assureur afin qu'il puisse honorer ses engagements à 99.5%. Ainsi, les valeurs inscrites dans le tableau représentent le besoin en capital pour différentes priorités.

Pour une meilleure lecture, nous allons comparer deux situations : une sans réassurance et une autre avec un traité de réassurance 400 000 XS 600 000. Si l'assureur ne contracte pas un traité de réassurance alors il devra avoir à sa disposition environ 1 256 606.1 comme montant afin de pouvoir honorer ses engagements et indemniser toute sa sinistralité. Alors qu'avec un traité de réassurance ce montant diminue et dans notre cas il n'aura à constituer que 607 513.7 comme montant nécessaire pour couvrir sa sinistralité.

Ainsi, on conclut que la réassurance lui permet de s'absenter de constituer un montant à hauteur de 649 092,4. D'où le recours à la réassurance est bénéfique pour la cédante.

Conclusion de la quatrième partie :

A travers cette partie nous avons étudié certains critères d'optimisation du traité qu'on a en main. Le premier critère est un critère utilisé fréquemment en finance et qui stipule de risquer plus afin de gagner encore plus. En effet, si l'assureur ne cède qu'une petite partie de son risque alors bien évidemment son gain augmentera mais en contrepartie il aura son risque c'est-à-dire la volatilité de son gain qui augmente aussi.

Le deuxième critère qu'on a élaboré est le calcul de la Value at Risk, cette mesure de risque incontournable qui permet de quantifier les engagements de l'assureur et donne une estimation du montant qu'il devra constituer afin d'être en mesure d'honorer ses engagements et de couvrir sa sinistralité à un niveau de confiance de 99,5%. Les résultats obtenus sont issus de la méthode de simulation qui est la plus fiable, et ils stipulent qu'une situation avec réassurance est largement bénéfique pour la cédante puisqu'elle permet de diminuer significativement le montant dédié à se couvrir contre sa sinistralité dans 99,5% des cas.

PARTIE 5

Présentation de l'outil informatique de tarification en excédant de sinistre (XS)

Introduction :

Dans le cadre de ce mémoire, on avait affaire à la branche Accidents de Travail. Or, puisque l'activité de l'assurance consiste à la couverture de différentes branches on pourra avoir affaire à d'autres portefeuilles non semblables à ce dernier. C'est dans cette optique qu'il nous a paru opportun, de créer un outil de tarification adéquat. Cet outil nous permettra dans un premier temps d'effectuer une analyse du portefeuille pour en déduire la tranche (travaillante ou non travaillante) et la branche (à développement long ou court) de l'activité analysée. Cette analyse est primordiale pour procéder à la tarification en réassurance, car elle nous permet de choisir la bonne méthode de cotation. Ensuite, il nous permettra d'automatiser nos calculs et de mieux visualiser nos données afin de choisir la méthode de cotation la plus convenable aux données dont on dispose.

1. Choix du langage de programmation :

Il nous a paru opportun dans le cadre de ce mémoire, de créer un outil de tarification adéquat. Ceci permettra d'automatiser nos calculs et de mieux visualiser nos données. Cet outil permet de calculer de la prime de réassurance par les deux méthodes de tarification : selon l'expérience et selon l'exposition.

Grâce à son environnement diversifié (plusieurs packages utiles, facilité d'utilisation...) qui permet de manipuler un nombre impressionnant de données, il est l'un des outils incontournables des actuaires dans leurs mission de gestion ainsi que la tarification des risques. C'est exactement pour ces raisons qu'en tant que futurs actuaires juniors on a eu recours au langage de programmation **R** pour y implémenter notre outil.

L'une des raisons derrière la popularité de cet outil est le nombre extravagant des packages qui y existe ; parmi ces package on trouve « **Shiny** ». Le package **Shiny** permet de faciliter la création des applications interactives à partir de R. Ainsi, en tant qu'utilisateur on est amené à fournir des inputs, puis avec un simple clic des boutons on obtient les résultats souhaités.

Une application **Shiny**, comme toutes les applications qui peuvent exister, se structure en deux parties :

- *Partie UI (User Interface)* : c'est l'interface utilisateur qui regroupe l'ensemble des éléments de mise en forme et d'affichage des inputs et outputs qui y figurent.
- *Partie Server* : c'est le serveur de notre application où l'on exécute les codes R permettant de produire les outputs (qui peuvent être soit des graphiques, tables, valeurs numérique ou chaînes de caractères, ect) et comme il s'agit d'une application interactive ça nous permet aussi de modifier et mettre à jour les outputs dans le cas où on a des modifications dans les inputs.

2. Présentation de l'application de tarification :

2.1. Lecture des données :

Par le biais du langage de programmation R et plus précisément du package Shiny, on a pu élaborer une application de tarification en réassurance qui se présente comme suit :



Figure 41 : Interface de l'outil de tarification en réassurance

Comme nous pouvons le constater sur la figure on a à gauche les différentes parties que représente notre outil, chacune présente une des étapes du processus de tarification, et à droite on a les visualisations des inputs ainsi que les zones dédiées aux outputs et les boutons permettant le lancer l'algorithme afin d'aboutir aux résultats.

Tout d'abord, on se trouve sur la première partie « **Lecture des données** », qui comme son nom l'indique nous permettra de lire notre base de données. On commence par l'importation des données, qui doit être une table **Excel csv**, en précisant si notre base de données contient les intitulés des colonnes et le séparateur de notre base de données (à noter que pour savoir de quel séparateur s'agit-il, il suffit d'ouvrir la base de données avec bloc-notes). Après cette étape on aura dans la partie '**Zone de visualisation**' les 10 premières lignes de notre base de données (avec les intitulés des colonnes) pour s'assurer qu'elle a été bien importée sur l'application.

2.2. Analyse des données :

Il est primordial d'analyser notre base de données pour pouvoir identifier s'il s'agit d'une branche longue ou courte et aussi s'il s'agit d'une tranche travaillante ou non travaillante, et ce selon les définitions explicitées dans la première partie de ce mémoire. De plus, comme informations permettant cette analyse de données on aura besoin de la priorité et la portée du traité XS qu'on cherche à tarifier.



Figure 42 : Interface de l'analyse de données de notre outil

Après avoir spécifier les informations nécessaires décrites ci-dessous, on clique sur le bouton '**Analyser les données**' et automatiquement on se trouve sur la partie « **Analyse de données** » où encore on a une visibilité de notre base de données dans la zone '**Extrapolation du tableau**'. Ensuite, comme l'on peut constater sur la figure ci-dessous on est amené à choisir la variable qu'on souhaite analyser (les sinistres ou bien les primes), après ce choix on aura les 6 champs restants remplis par des graphiques et des valeurs numériques. Détaillons chaque champ :

- **Summary** : ça nous permet d'avoir la description statistique de la variable choisie. Il s'agit d'une fonction qui renvoie 6 valeurs : **le minimum** (Min.), **le maximum** (Max.), **premier quartile** (1st Qu.), **la médiane** (Median), **la moyenne** (Mean), **le troisième quartile** (3rd Qu.).

Ces valeurs nous intéressent particulièrement dans notre étude, car ils nous donnent une idée sur l'intervalle de variation des sinistres ou primes [Min ; Max] en plus de la valeur moyenne des montants ; par laquelle on pourra estimer la part de sinistres que va englober le traité qu'on

cherche à coter. Les quartiles nous donnent une visibilité globale des sinistres ou primes. En effet, le 1^{er} quartile (respectivement le 3^{ème} quartile et médiane) indique que 25 % (respectivement 75% et 50%) des données sont inférieures ou égales à cette valeur.

- **Evolution par année** : il s'agit d'un graphique qui, comme son nom l'indique, affiche l'évolution des sinistres / primes par année. Ceci est particulièrement intéressant dans l'optique de voir si la cédante a un portefeuille qui au fil des années devient plus péril ou s'il s'agit d'une stabilisation et aussi voir quelle est la tendance d'avoir des sinistres extrêmes par année.
- **Evolution des ratios S/P** : il s'agit aussi d'un graphique, qui comme indiqué sur l'intitulé, présente une image de l'évolution de l'un des plus importants ratios dans le monde des assurances : le ratio S/P. Ce graphique nous donne une visibilité sur la rentabilité de la cédante. En effet, les cédantes ont comme objectif principal l'amélioration continue de leurs résultats.

Remarque : On note que l'actuaire tarificateur, s'il souhaite tarifier une branche à développement long il doit avant tout projeter les sinistres et les primes et avoir dans sa base de données les valeurs à l'ultime.

Dans notre cas, il est pertinent d'afficher ces graphiques notamment pour voir la tendance de la sinistralité de la cédante en question et pouvoir mener un jugement sur son portefeuille et son profil de risque.

Les deux champs restants sont particuliers à l'identification de la tranche (travaillante ou non travaillante). Ainsi, selon la définition explicitée dans la première partie on a :

- **Nombre moyen de sinistres touchant annuellement la tranche** : c'est une valeur numérique représentative de la moyenne des nombres de sinistres dépassant la tranche par année.
- **Le pourcentage de portée atteinte** : il s'agit aussi d'une valeur numérique qui présente le ratio : $\frac{\max_{1 \leq i \leq n} (X_{k,i})}{Portée}$, tel que les $X_{k,i}$ sont les montants des sinistres à charge de la k^{ème} tranche.

Pour en tirer une conclusion, on suit la proposition suivante « *on va considérer qu'une tranche est travaillante si le nombre moyen de sinistres touchant annuellement la tranche est strictement supérieur à un et si le pourcentage de portée atteinte est strictement supérieur à 80%.* »

Finalement on se trouve avec une analyse approfondie de notre base de données qui nous permettra de conclure quant à la branche et la tranche et ainsi avoir une visibilité sur la démarche à suivre pour effectuer la tarification du traité XS considéré.

Après cette analyse de données, qui on rappelle qu'elle est primordiale à effectuer avant de procéder à l'application des méthodes de tarification, on peut conclure quant à la méthode qu'on devrait choisir pour effectuer notre tarification. En effet, les méthodes selon l'expérience ne peuvent être appliquées que sur les historiques de sinistralités assez longs. Dans le cas échéant on a recours aux méthodes selon l'exposition qui se base sur les profils de risque des cédantes.

2.3.Statistique As if :

A la fin de l'étape précédente, on aura choisi la méthode convenable à notre base de données pour effectuer la tarification.

Supposons qu'on a choisi de procéder à une tarification selon l'expérience, alors comme l'on a expliqué dans la première partie, avant de procéder au calcul de la prime de réassurance on doit effectuer une revalorisation des sinistres et primes (voir la première partie de ce mémoire pour plus de détail).

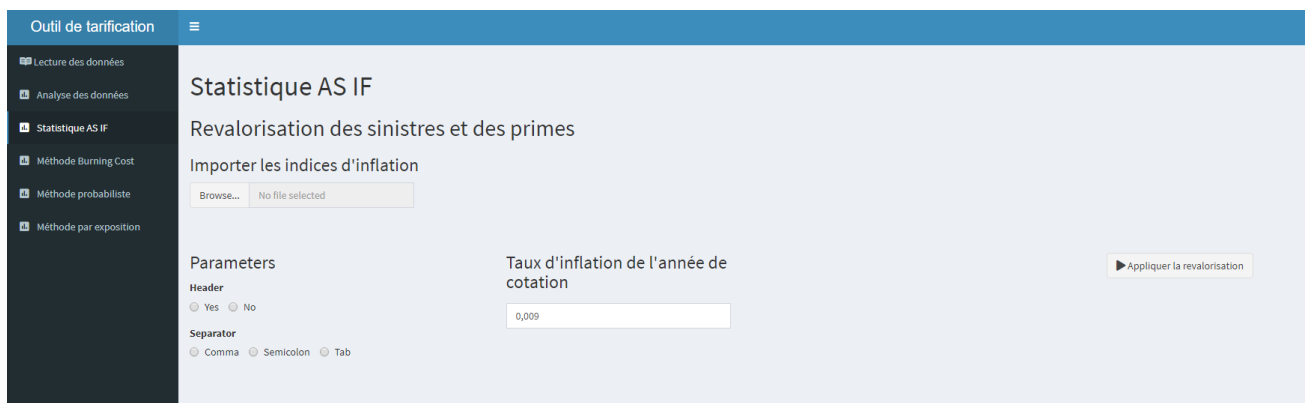


Figure 43 : Interface de la revalorisation des données (sinistres et primes)

Pour effectuer cette revalorisation, on se réfère à la partie « *Statistique AS IF* ». On donne ainsi le choix à l'utilisateur d'importer un document **csv** contenant les indices d'inflation qu'il souhaite appliquer à ses données. Ça peut être les indices réels pour chaque année (selon le pays) comme il peut choisir d'appliquer le même indice chaque année. Ensuite, avec un simple clic sur '**Appliquer la revalorisation**' on obtient une table contenant les dix premières lignes des données revalorisées.

2.4.Cotation selon l'expérience :

La revalorisation de nos données est une étape assez importante, sans laquelle on ne pourra appliquer aucune des méthodes de tarification selon l'expérience, tout simplement parce que l'application de ces méthodes s'effectue sur la base des données revalorisées et non pas bruts. Il existe deux variétés des méthodes de tarification selon l'expérience : la méthode non paramétrique Burning Cost et la méthode probabiliste. Dans la suite on présentera l'implémentation de ces deux méthodes dans notre outil en expliquant la démarche à suivre pour faire sortir la prime de réassurance.

2.4.1. Méthode non paramétrique : Burning Cost

Commençons par la méthode la plus intuitive et simple : Burning Cost. Cette méthode se trouve naturellement dans la partie « *Méthode Burning Cost* ».

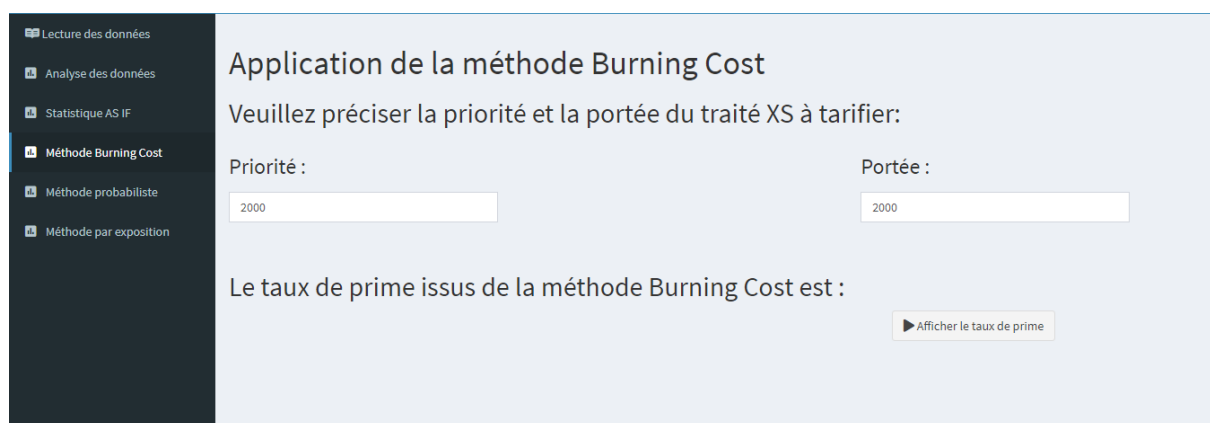


Figure 44 : Interface d'application de la méthode Burning Cost

Afin d'appliquer cette méthode, on aura bien évidemment besoin de rappeler le traité XS qu'on désire tarifier et avec un simple clic sur le bouton '**Afficher le taux de prime**' on se

retrouve avec le taux Burning Cost à appliquer à l'assiette des primes pour enfin en déduire la prime de réassurance.

2.4.2. Méthode probabiliste :

On passe à la présentation de la méthode probabiliste tel qu'implémentée sur notre outil. Naturellement on la trouve dans la partie « *Méthode probabiliste* » :

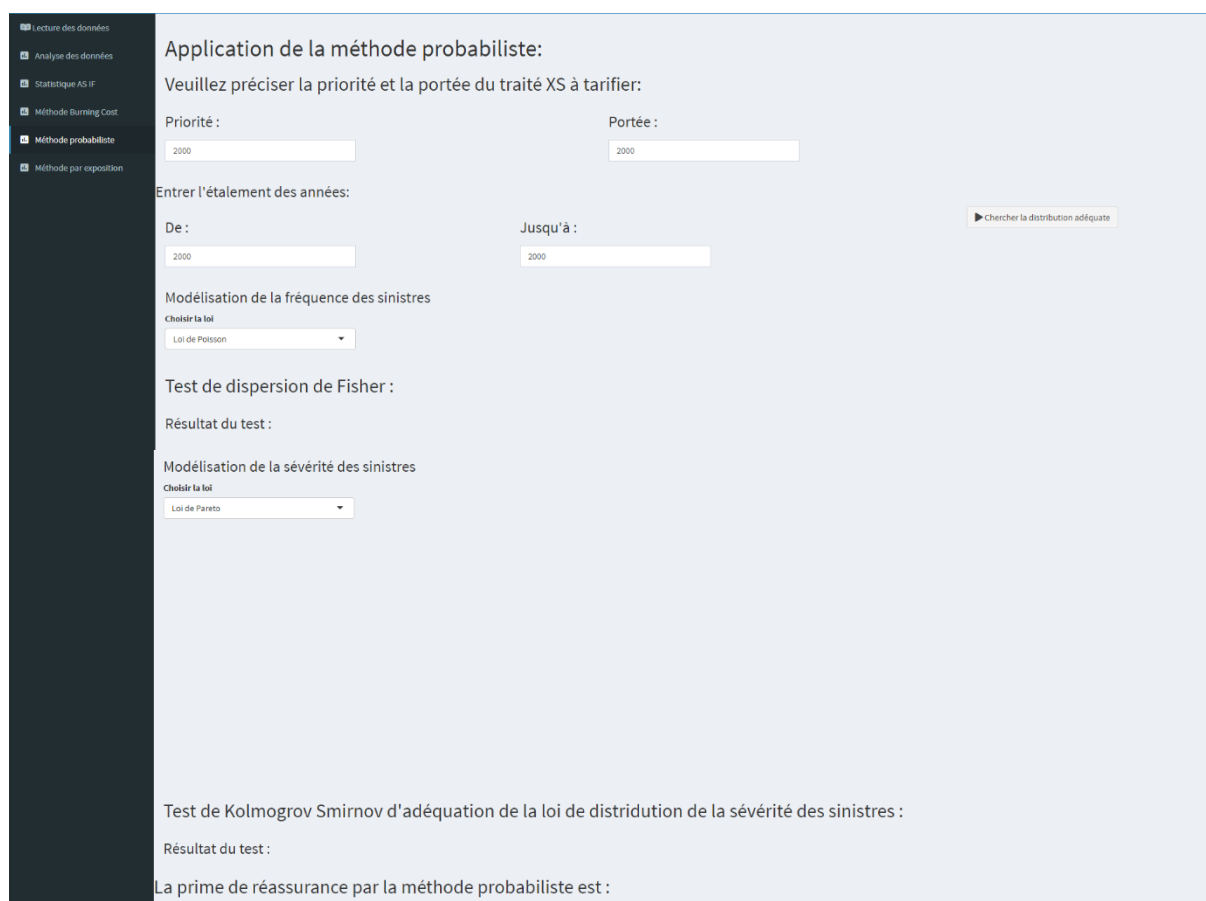


Figure 45 : Interface utilisateur de l'application de la méthode probabiliste

Comme c'est le cas pour toutes les méthodes de tarification, on est amené avant tout à préciser le traité XS qu'on souhaite coter. Ensuite, on procède aux différentes étapes de la cotation probabiliste.

On commence par la modélisation des lois de la fréquence (nombre de sinistres). Pour ce faire, on aura besoin des nombres de sinistres par années qui dépassent la tranche pour en déduire un nouveau tableau de deux colonnes : année et nombre de sinistres, c'est pour cela qu'on aura besoin de savoir l'étalement des années figurant dans la base de données importée et revalorisée.

On s'appuie sur le fameux test de dispersion de Fisher, (où H_0 stipule qu'il s'agit d'une loi de Poisson. On acceptera H_0 si la p-value correspondante est supérieure à 5%) pour choisir la distribution probabiliste la plus adéquate à nos données.

On trouve ensuite la partie dédiée à la modélisation de la sévérité (montants des sinistres). Dans le cadre de cette étude, tout d'abord, on va tester graphiquement l'adéquation des lois **Pareto, Log Normale, Weibull, Exponentielle et Gamma** en estimant pour chacune de ces lois les paramètres associés par la méthode du maximum de vraisemblance

Le test graphique de l'ajustement par les lois continues (pour la sévérité) consiste à afficher la distribution empirique des montants des sinistres et on y rajoute sur le même graphe la distribution de la loi choisie pour pouvoir comparer les deux et en déduire celle qui présente un meilleur ajustement.

Certes, la visualisation graphique est très utile, cependant elle n'est pas suffisante pour conclure qu'une loi ajuste mieux que l'autre ainsi pour pouvoir faire le bon choix on applique le test statistique de **Kolmogorov Smirnov** (où H_0 stipule que les observations suivent la loi choisie, donc on acceptera H_0 si la p-value correspondante est supérieure à 5%).

Finalement, ayant les lois convenables aux données, on effectue une simulation en générant un nombre de sinistres pour l'année de cotation et générer les montants de sinistres correspondants pour finalement en déduire la charge XS. D'où on déduit la prime pure de réassurance. (Les formulations mathématiques de ce processus se trouve dans la première partie de ce mémoire).

2.5.Cotation selon l'exposition :

Dans le cas où l'analyse de données nous a montré que notre base de données n'est pas assez longue pour appliquer les méthodes selon l'expérience, on appliquera la méthode de cotation par exposition qui se base principalement sur les courbes d'exposition pour en déduire les taux de conservation de la prime de réassurance.

Les courbes les plus fameuses dans le monde de la réassurance et ceux les plus utilisées sont les courbes Swiss Re qui sont au nombre de quatre (Y1, Y2, Y3, Y4). Ce sont ces courbes qu'on a implémenté sur notre outil. On donnera la main à l'utilisateur pour choisir la courbe qu'il souhaite utiliser pour effectuer sa cotation.

Lecture des données

Analyse des données

Statistique AS IF

Méthode Burning Cost

Méthode probabiliste

Méthode par exposition

Application de la méthode par exposition

Importer le profil de risque de la cédante :

Browse... No file selected

Paramètres

Header

Yes No

Separator

Comma Semicolon Tab

Veuillez préciser la priorité et la portée du traité XS à tarifier:

Priorité :

Portée :

Choix de la courbe d'exposition :

Choisir une des courbes Swiss Re

Chercher la prime de réassurance

La prime de réassurance est:

Figure 46 : Interface de l'application de la méthode de cotation selon l'exposition

Comme il ne s'agit plus d'un historique de sinistralité, on aura à importer une nouvelle base de données qui présente le profil de risque de la cédante en question, c'est-à-dire des bandes et pour chaque bande on a le nombre de risque, les sommes assurées (ou le sinistre maximum possible SMP), et les primes ou l'assiette de prime. Afin de réussir l'importation, cette base de données doit être un document **Excel CSV**, et on précise si la première ligne contient les intitulés des colonnes et aussi le séparateur des valeurs de cette base.

Ensuite, après la collecte des données, on peut passer à la cotation. Naturellement, la première étape consiste à déterminer la priorité et la portée du traité XS qu'on voudrait coter, puis on choisit la courbe d'exposition sur laquelle on souhaite s'appuyer pour coter ce traité qui est l'une des quatre courbes Swiss Re, ce choix revient à l'actuaire tarificateur.

Et finalement avec un simple clic sur '**Chercher la prime de réassurance**' on obtient le taux de prime de réassurance. Il suffit de le multiplier par l'assiette des primes pour en déduire la prime de réassurance.

Conclusion de la cinquième partie :

Dans cette dernière partie nous avons présenté une description détaillée des différents onglets d'un outil technique de tarification des traités XS crée sur R Shiny, l'outil des actuaires par excellence. La classification des onglets dans cet outil respecte l'ordre des étapes qu'on suit en appliquant la tarification en réassurance des traités XS. En effet, on commence par l'analyse des données qui nous conduira par la suite au bon choix de la méthode de cotation qu'on aura à appliquer. Ensuite, afin d'appliquer les méthodes selon l'expérience on est contraint à créer la statistique AS IF. Puis, nous avons explicité ce que contient les onglets dédiés aux méthodes de cotation, ainsi que l'enchaînement suivi pour déduire la prime de réassurance.

Grâce à cet outil, l'analyse de différentes branches ainsi que la cotation des traités XS est dorénavant automatisée. En outre, on pourra gagner en termes de temps et minimiser le risque opérationnel qui peut en découler.

Conclusion générale :

Tout au long de ce mémoire, nous avons analysé le portefeuille AT de la cédante en étudiant son besoin de contracter un traité XS auprès d'un réassureur. Nous avons commencé notre étude par analyser la sinistralité et le profil de risque de cette dernière. On en a conclu l'existence d'une forte sinistralité et une forte volatilité des sinistres de cette dernière, d'où son recours à la réassurance est bien nécessaire. En effet, la couverture en réassurance lui sera très utile en termes d'amélioration de son résultat et de diminution de son besoin en capital.

Ensuite, nous nous sommes attardés sur la cotation du traité ci-dessous par différentes méthodes (expérience et exposition) où l'on a créé une application de tarification qui permet de faciliter les calculs et les automatiser pour éviter ou minimiser le risque opérationnel. Les méthodes classiques de tarification se penche soit l'historique de sinistralité de la cédante ou sur son profil de risque, or en choisissant l'un des taux de primes issus de ces méthodes on négligera l'autre qui est autant important. Ainsi, on s'est penché sur deux méthodes issues de la théorie de crédibilité : Bühlmann et Bühlmann Straub qui nous ont permis de donner un poids conséquent à la prime issue de l'expérience et le reste au profil de risque de la cédante comme ça on a eu une prime qui ne va pénaliser ni l'assureur (en ne prenant en considération que son profil de risque) ni le réassureur (en ne travaillant qu'avec l'historique de sinistralité seul).

Enfin, nous avons étudié quelques critères d'optimisation, afin d'optimiser notre traité c'est-à-dire afin de trouver la priorité optimale selon les préférences de la cédante. Nous avons traité le critère espérance / variance du gain qui n'est autre que le dilemme « prendre plus de risque pour gagner plus ». Dans notre cas, on a trouvé un résultat attendu qui stipule qu'en cédant moins certes l'assureur aura en moyenne un gain élevé mais en contrepartie il aura une volatilité aussi élevée. Ensuite, le deuxième critère était la mesure de risque VaR et on l'a appliqué à un niveau de confiance 99,5%. On a conclu qu'une situation avec réassurance est bénéfique pour la cédante puisqu'elle permet de diminuer significativement le montant dédié à se couvrir contre sa sinistralité dans 99,5% des cas.

Ainsi, par le biais de toute cette analyse, on est en mesure de dire que grâce à ce traité de réassurance la cédante sera en mesure d'assurer sa solvabilité.

En guise de conclusion, l'entrée en vigueur de la nouvelle circulaire sur le nouveau dispositif prudentiel relatif à la solvabilité basée sur les risques, permettra aux assureurs de

mieux gérer leurs risques. A cet effet, il serait très intéressant de compléter ce travail en étudiant l'impact du nouveau dispositif prudentiel sur le choix des programmes de réassurance et ainsi, élaborer un modèle interne permettant de définir la stratégie optimale de réassurance.

Bibliographie

- MARRI Fouad [2019], cours « Mathématiques de l'assurance », « Assurance Non-Vie ». INSEA.
- KHALIL SAID [2020], cours « Réassurance », INSEA.
- Arthur Charpentier [2013], cours « Actuariat IARD – Partie 7- réassurance et grands risques »
- Goulet, Vincent [1998], « Principles and Application of Credibility Theory ». Journal of Actuarial Practice.
- Christophe Chesneau [2016], « Sur l'adéquation à une loi de probabilité avec R ».
- Jan Hrevuš, Luboš Marek [2019], « EXPOSURE MODELLING IN PROPERTY REINSURANCE ».
- David R. Clark, FCAS [2014], « Actuarial Study Note, Basics of Reinsurance Pricing ».
- Christophe Dutang, Markus Gesmann, Giorgio Spedicato [2020], « Exposure rating, destruction rate models and the mbbefd package».
- Arthur Charpentier, Christophe Dutang [2012], « L'Actuariat avec R ».
- Stefan Bernegger [2014], « The Swiss Re exposure curves and the MBBEFD distribution class ».
- Patrick Thourot [2016], « La réassurance : quel rôle dans le développement économique dans les pays émergents ? »
- El Madhi Belhoudji [2014], « Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche Responsabilité Civile : une approche entre expérience et exposition ».
- ABILA, BENZARIA [2016], « L'optimisation des traités de réassurance et la conception d'une application de tarification ».
- BENSSEYED, DIOURI [2014], « Réassurance : la tarification et l'analyse des critères d'optimisation pour le cas de l'assurance emprunteur ».
- FINAS Christine [2015], « Les tarifs des réassureurs sont-ils crédibles ? ».
- Poulin [2012], Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie.

Annexes

Annexe 1 : Présentation de l'organisme d'accueil : FORSIDES AFRICA

1. Présentation du groupe FORSIDES & FORSIDES AFRICA

FORSIDES Consulting Group



Forsides est un cabinet d'actuariat et de conseil indépendant d'une présence fortement ancrée en France, en Belgique et en Luxembourg et récemment au Maroc. FORSIDES fait le conseil sur tous les sujets actuariels mais aussi sur les sujets réglementaires, sur l'innovation et les solutions techniques et industrielles pour répondre à ses obligations réglementaires aussi bien pour la lutte contre le blanchiment d'argent que sur les obligations déclaratives. Il est noté que le groupe *Forsides* est conçu dans le sens d'apporter des solutions dans un secteur marqué par des changements profonds.

Les mutations structurelles que connaît le secteur de l'assurance font de lui un secteur exposé aux changements et aux nouvelles actions qui visent à promouvoir sa croissance. Généralement ses actions élargissent le domaine traditionnel dont les compagnies d'assurances opèrent et par conséquent un risque systémique se présente à titre d'exemple lorsque les compagnies d'assurances décident de commercialiser des produits financiers sophistiqués. Un tel risque requière un accompagnement solide et une vision objective pour éclairer les prises de décisions ce qui interfère avec le périmètre d'activité du groupe *Forsides*.

FORSIDES AFRICA :



FORSIDES
AFRICA

Le périmètre d'action du Forsides Consulting Group s'est récemment élargi pour opérer dans l'Afrique faisant son chemin de départ au Maroc depuis Casablanca.

C'est une opportunité d'accompagnement et d'aide à la décision pour les compagnies d'assurance surtout que le marché africain offre des perspectives prometteuses au secteur de l'assurance qui montre aujourd'hui un potentiel important de croissance.

Une telle croissance du secteur de l'assurance marquée sur les dernières années était le fruit d'une multitude d'actions parmi lesquelles nous citons :

- ✓ La refonte du cadre réglementaire.
- ✓ La libéralisation progressive des tarifs d'assurances.
- ✓ Le renforcement du réseau de distributions des produits d'assurances.
- ✓ L'encouragement de la stabilité financière et de la surveillance macro-prudentielle.

La logique d'intervention de Forsides Africa comme étant un cabinet d'actuariat-conseil émerge au moment où l'assureur fait preuve de volonté d'anticiper le risque en opérant dans un périmètre au-delà des assurances obligatoires tout en protégeant son activité et en restant très compétitif. Cette logique repose sur l'accompagnement et l'éclairage décisionnel portant sur :

- ✓ La politique de souscription qui porte sur la concurrence tarifaire des acteurs du marché
- ✓ Les refontes réglementaires et prudentielles dans le code des assurances, dans les directives SBR, normalisation comptable et le droit fiscal.
- ✓ Côté nouveauté technologique tel est le cas pour la Big Data et la digitalisation qui porte aux modalités de tarification, de commercialisation et de garanties correspondantes.

2. L'équipe Forsides Africa & Métiers et domaine d'expertise

Les consultants de Forsides Africa sont polyvalents et maîtrisent les contextes spécifiques à chaque catégorie d'assureur selon son activité, son contexte prudentiel et réglementaire. Cette polyvalence vient de la variété des domaines d'expertise et de compétence présents dans le groupe Forsides dans ses différentes localités. Nous donnons dans le tableau ci-dessous les différents domaines d'expertises et leurs champs d'action partiels qui composent la fonction de conseil actuariel du groupe Forsides :

Domaine d'expertise Compétences	Contenu / Missions
Actuariat technique	✓ Maîtrise des grands équilibres de l'entreprise d'assurance - conception produit- calcul de provisions-suivi de rentabilité
Fonction actuarielle	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Une des quatre fonctions-clé défini par les normes de Solvency II ✓ Coordination du calcul des provisions techniques, attester leur suffisance et l'adéquation des méthodes techniques utilisées dans le calcul avec les exigences réglementaires Remettre un avis sur les politiques de souscription et de réassurance de la compagnie cliente ✓ Incorpore une fonction de Risk management en collaborant avec les parties prenantes dans la compagnie
SBR	✓ Expertise et savoir-faire sur les sujets de solvabilité II
PRIIPS	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Concerne la situation où les nouvelles exigences d'informations des assurés posent un défi technologique et juridique ✓ Etablissement d'une documentation de documents extrêmement important, alimentation de ces documents par des indicateurs supposant, pour certains, la mise en œuvre de processus de calculs élaborés et exigeant une documentation solide ✓ Gestion dans le temps de cet ensemble documentaire.
Risk Management	✓ Repenser l'approche gestion des risques et de mettre en œuvre des nouvelles approches conformes à la réglementation.
Reporting et Data management	<ul style="list-style-type: none"> ✓ S'inscrit dans l'enjeu de la maîtrise des données ✓ Eclaire sur le choix d'outils garantissant la qualité des données, une stratégie du traitement et du management claire, structurée, traçable et auditable
Modélisation financière	<ul style="list-style-type: none"> ✓ S'inscrit dans le cadre d'une compréhension des engagements et la mesure de l'exposition réelle aux risque inhérents à l'activité des banques et organismes d'assurance en élaborant des scénarios économiques et de projections ✓ Résolution des problèmes de gestion actif/passif ✓ Développement de Forsides d'un Générateur de Scénarios Économiques stochastiques monde réel/risque-neutre et dispose de son propre outil ALM
Business Analyst	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Automatisation de certaines tâches et l'optimisation de certains processus ✓ Intervention dans le Project management, la rédaction des cahiers de charges, la maîtrise d'ouvrage et le Testing
Valorisation des engagements	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Choix de la métrique selon le contexte de la valorisation ✓ Choix de des modèles, calibrations des hypothèses, des scénarios

Figure 47 : Présentation de l'ensemble des domaines d'expertise de Forsides Africa et les missions dédiées à chacun de ces domaines

Annexe 2 : Descriptifs des lois de fréquence des sinistres

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Poisson	λ	$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^n}{n!}$	λ	λ
Binomiale Négative	r, p	$P(N = n) = \frac{\Gamma(r + n)}{n! * \Gamma(r)} * p^r * (1 - p)^n$	$\frac{r * (1 - p)}{p}$	$\frac{r * (1 - p)}{p^2}$

La loi de Poisson : est la plus répandue et la plus utilisée. En effet, c'est une loi de renouvellement ayant des propriétés remarquables tels que: l'absence de mémoire des durées inter-occurrences et la propriété de Markov (En probabilité, un processus stochastique vérifie la **propriété de Markov** si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donnés les états passés et l'état présent, ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés (absence de « mémoire »).

Or, cette loi dispose d'une limitation qui vient du fait que la variance est égale à la moyenne. (Pour certaines branches, il est plus intéressant de considérer une volatilité plus importante).

La loi Binomiale Négative : cette loi présente l'avantage de remédier à la limitation de la loi de poisson. En effet, on a :

$$E(N) = \frac{r * (1 - p)}{p} < Var(N) = \frac{r * (1 - p)}{p^2} ; Avec p \in]0,1[$$

Annexe 3 : Descriptifs des lois de sévérité des sinistres

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Pareto	t, α Avec : $t > 0$ et $\alpha > 0$ et $x \geq t$	$1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$	$\frac{\alpha t}{\alpha - 1}$ Pour $\alpha \geq 1$	$\frac{\alpha t^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ Pour $\alpha \geq 2$
Log-Normale	t, μ, σ Avec : $t > 0, \mu$ fini, $\sigma > 0$ et $x \geq t$	$\phi\left(\frac{\ln(x - t) - \mu}{\sigma}\right)$ Avec ϕ est la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$

La distribution la plus utilisée dans le monde de la réassurance est certainement **la distribution de Pareto**. En effet, elle présente l'avantage qu'une loi de Pareto tronquée à gauche demeure une loi de Pareto ;

Rappel sur les lois tronquées :

La densité d'une variable X tronquée en M est donnée par l'expression suivante :

$$f_X^{X \geq M}(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(M)} 1_{\{x > M\}}$$

Or, on sait que si $X \sim \text{Pareto}(t, \alpha)$ avec $t > 0$ et $\alpha > 0$, alors :

La densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{\alpha t^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{]t, +\infty[}(x)$$

La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha & \text{si } x > t \\ 0 & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

D'où la loi de Pareto convient parfaitement.

