ROYAUME DU MAROC
--*-*-*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
--*-*-*-*-*-*-*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
INSEA

Projet de Fin d'Etudes
*****

Mise en place d'une stratégie de gestion Actif-Passif pour une compagnie d'assurance vie

Préparé par : ***Mme Lamiae CHERGUI***
M. Sambassa DOUKOURE

Sous la direction de : ***M. Mohamed BOUMASSAOUD*** **(INSEA)**
Mme Fatima Zahrae BAMOUSSA **(MAZARS)**
M. Abdoulaye KONE (MAZARS)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- ***M. Mohamed BOUMASSAOUD*** (INSEA)
- ***M. Touhami ABDELKHALEK*** (INSEA)
- ***Mme Fatima Zahrae BAMOUSSA*** (MAZARS)
- ***M. Abdoulaye KONE*** (MAZARS)

Juin 2021 / PFE N°13

Résumé

Les premières notions de gestion actif-passif remontent aux années 1930 où celle-ci est apparue pour la première fois au sein d'entités chargées de la gestion de trésorerie des établissements de crédit, afin de contrôler les impasses de trésorerie et gérer les risques de taux et de liquidité pouvant en découler. Suite à la crise financière des années 1970, de nombreuses institutions financières se sont retrouvées en difficulté. Dans le secteur des assurances, cela a poussé les assureurs à prendre conscience des différents risques menaçant leur activité, notamment les risques de placement (actif) et de souscription (passif), les incitant ainsi à remettre en cause la qualité de leurs modèles de gestion des risques. Depuis, la gestion actif-passif est devenue quasi indispensable au sein des compagnies d'assurance et des caisses de retraite.

L'objet du présent travail est donc de mettre en place un outil de gestion actif-passif pour une compagnie d'assurance commercialisant des contrats d'épargne. Cependant, afin de projeter correctement l'évolution de l'actif et du passif de l'assureur, ainsi que son compte résultat, ce travail requiert une analyse approfondie de ses engagements et de ses placements pour mettre une politique de management et une allocation stratégique d'actifs convenables.

Mots clés : Gestion Actif-Passif, assurance vie, politique de management et allocation stratégique d'actifs.

Dédicaces

Avec l'expression de ma plus profonde reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère :

- Mes chers parents, pour tous leurs sacrifices et leur soutien tout au long de mes études.
- Mes sœurs et frères, pour leur appui et leur encouragement.
- Tous mes amis spécialement mon ami Youssef et à toute personne ayant cru en moi.

Que ce modeste travail puisse vous exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance.

Lamiae

Je dédie ce mémoire en guise de respects et de reconnaissance :

- A mes très chers et chaleureux parents.
- A mes sœurs et frères particulièrement à mon grand-frère Alhassane DOUKOURE.
- A toute la grande famille DOUKOURE à Manda Saran(en GUINEE).
- A mes amis de la promotion 2016.
- A toutes les étudiantes et tous les étudiants de l'INSEA.
- A vous chères lectrices et chers lecteurs.

Sambassa

Remerciements

Il nous est agréable de nous acquitter d’une dette de reconnaissance auprès de toutes les personnes dont l’intervention, au cours de ce projet, a favorisé son aboutissement.

Nous adressons notre profonde gratitude à notre cher professeur Monsieur Mohamed BOUMASSAOUD pour avoir accepté de veiller sur l’encadrement de notre travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Madame Fatima Zahrae BAMOUSSA et à Monsieur Abdoulaye KONE pour avoir encadré notre stage de fin d’études à Mazars, et pour leur grande serviabilité et patience.

Nous remercions également Monsieur Ibrahima SOW, Monsieur Marouan ABOULOUAF pour leur encouragement et leurs précieux conseils, et Monsieur Touhami ABDELKHALEK pour avoir accepté d’évaluer ce travail.

Finalement, nous tenons à remercier toute l’équipe Mazars et le corps enseignant et le personnel de l’Institut National de Statistique et d’Economie Appliquées et toute personne ayant contribué de près ou de loin à l’élaboration de cet humble travail.

Table des matières

Liste des abréviations

ALM : Asset and Liability Management

ACAPS : Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale

BA : Bénéfice Annuel de la compagnie

CIR : Cox, Ingersoll et Ross

MASI : Moroccan All Shares Index

OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

PF : Produits financiers

PM : Provision mathématique

PPB : Provision pour participation aux bénéfices

RT : Résultat Technique

SBR : Solvabilité Basée sur le Risque

TMG : Taux Minimum Garanti

TMP : Taux Moyen Pondéré du marché interbancaire

VA : Valeur Actuelle

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction générale

L'évolution démographique actuelle et l'allongement de l'espérance de vie mettent le sujet de l'avenir des compagnies d'assurance vie au centre des préoccupations. De plus, le contexte économique de « taux bas » a une influence négative sur l'état financier de ces compagnies. L'étude s'intéresse particulièrement à la mise en place d'une stratégie de gestion Actif-Passif comme une réponse à ces enjeux.

Les techniques de gestion Actif-Passif utilisées par les organismes d'assurance vie sont souvent basées sur l'expérience. Ainsi, leurs choix d'investissement se retrouvent majoritairement orientés vers les obligations. Cependant, cette classe d'actifs n'est plus rentable dans un contexte de « taux bas ».

La mise en place d'une stratégie optimale de gestion Actif-Passif dans le contexte économique et réglementaire actuel est donc devenue une problématique importante et complexe. Dans le cadre d'une compagnie d'assurance vie, elle vise à proposer une répartition du portefeuille d'investissement qui doit permettre de répondre à un objectif de performance financière tout en respectant les engagements.

En effet, les compagnies d'assurance vie sont exposés à des risques financiers (risque actions, risque de taux, risque de défaut, risque de crédit, etc.) et des risques actuariels (risque de longévité, risque de souscription, etc.). La combinaison de ces risques expose la compagnie au risque de sous financement : c'est-à-dire que la valeur des engagements soit supérieure à la valeur des actifs. En effet, le surplus de la compagnie d'assurance vie, représentant l'écart entre la valeur des actifs et la valeur des engagements actualisés, change au cours du temps. Cette constatation est expliquée par les fluctuations de la valeur de marché des différentes composantes du bilan. Le surplus nous permet donc de mesurer la solvabilité du fonds détenu par la compagnie. La situation de sous financement pourra alors être constatée lorsque le surplus devient négatif. Comment est-il alors possible de déterminer l'allocation qui optimise ce surplus en terme de couple risque/rendement? Quelle est la meilleure stratégie de taux servis ? Pour répondre à ces questions, ce mémoire s'intéresse à la mise en place d'un outil ALM et l'application de modèles d'allocations d'actifs pour trouver le meilleur choix d'investissement, les modèles étudiés sont ceux de Markowitz et Sharpe et Tint. Pour réduire les risques de rachat conjoncturel, nous allons essayer dans ce mémoire de proposer une politique de revalorisation qui permet de protéger l'assureur contre les rachats conjoncturels.

La première partie de ce mémoire présente le contexte de l'assurance et particulièrement l'assurance vie, ainsi que les différents risques encourus par les assureurs vie pour enfin conclure avec les modèles classiques d'ALM permettant la gestion de ces risques.

La seconde partie s'intéresse à la modélisation et projection du passif et de l'actif. Pour le faire, un générateur de scénarios économiques a été mis en place pour nous offrir un échantillon de scénarios possibles des taux d'intérêt et des rendements des actifs risqués. Les modèles d'actifs que nous allons considérer, dans ce contexte, sont le modèle de Cox, Ingersoll et Ross pour les taux d'intérêt et le modèle de Black and Scholes pour le rendement des actions. De plus, une corrélation entre ces deux variables va être prise en considération dans nos simulations.

La dernière partie aborde l'interaction actif-passif et l'allocation stratégique d'actifs. Avant de passer à l'interaction, nous déterminerons les allocations optimales par le modèle de Markowitz et de Sharpe et Tint. En fin, nous conclurons cette partie par une présentation des différents résultats obtenus.

Partie I : Contexte général

Dans cette première partie, nous décrirons le cadre général de notre projet de fin d'études. Pour ce faire, nous allons nous intéresser, dans un premier temps, au fonctionnement de l'assurance et plus particulièrement l'assurance vie. Puis, nous présenterons le cadre réglementaire du secteur de l'assurance vie. Nous passerons, ensuite, au recensement des différents risques encourus par les assureurs vie pour enfin conclure avec les modèles classiques d'ALM permettant la gestion de ces risques.

Chapitre 1: le fonctionnement de l'assurance

1 Catégories de l'Assurance :

Généralement on distingue entre deux catégories d'assurances :

1.1 Les assurances de dommages :

Les assurances de dommages compensent les pertes subies par une personne, dans son patrimoine ou sa capacité de travail suite aux différentes causes. Il existe deux types d'assurances de dommages :

1.1.1 Assurance de choses :

L'assurance de choses indemnise l'assuré dans le cas des pertes directes qu'il subit sur des choses ou des biens qui lui appartiennent.

1.1.2 Assurance de responsabilité :

Les assurances de responsabilité visent la prise en charge par l'assureur de la réparation du dommage causé par l'assuré à une tierce personne qui est le bénéficiaire.

1.2 Les assurances de personnes :

L'originalité des assurances de personnes réside dans l'absence du principe indemnitaire, car, elle garantit la personne même de l'assuré : en cas de vie, de décès, d'accidents, de maladie, d'invalidité … L'assureur doit verser les sommes assurées sans tenir compte du dommage ou de l'absence de dommage au bénéficiaire.

On distingue entre deux branches principales des assurances de personnes :

1.2.1 L'assurance accidents corporels :

Lors d'un accident corporel, l'assureur doit verser à l'assuré victime ou aux bénéficiaires désignés la somme due pendant la période de garantie.

1.2.2 L'Assurance Vie :

L'Assurance Vie est une assurance de personnes qui a pour objet de garantir le versement au bénéficiaire d'une somme d'argent (capital ou rente) en cas de vie et/ou en cas de décès de l'assuré. Dans notre projet nous s'intéresserons à l'Assurance Vie, qui sera l'objet de l'axe qui suit.

2 Spécificité du fonctionnement de l'assurance : Inversion du cycle de production

La charge financière d'une police du portefeuille est inconnue au début de la période d'assurance, alors que la prime a déjà été réclamée. La prime elle-même est déterminée sur l'historique et rien ne garantit qu'elle soit appropriée aux affaires auxquelles elle est appliquée. Il subsiste une réelle incertitude quant à l'adéquation de la prime au risque que la police représente.

Cette simple constatation amène à faire quelques commentaires. Dans une entreprise classique, lorsqu'un nouveau produit est mis sur le marché, on connait avec précision le montant consacré à sa mise au point, et partant de çà, son prix de revient. Par contre, le chiffre d'affaire de l'entreprise est au début inconnu, car il dépend de la capacité de cette dernière à vendre ses produits. Au contraire, lorsque l'assureur fixe la prime, il ne connaît pas le montant des sinistres. Sa situation est donc toute différente des autres entreprises, puisque l'assureur connaît a priori son chiffre d'affaire (les primes encaissées), mais pas le prix de revient des produits qu'il commercialise (c'est-à-dire ses charges futures). II s'agit de l'inversion du cycle de production.

3 Spécificité de l'assurance vie

En dehors du principe de l'inversion du cycle de production, le secteur de l'assurance vie est aussi caractérisé par la durée des opérations. Dans beaucoup de secteurs d'activités, le temps qui sépare la fabrication d'un bien et sa vente peut être court comme dans l'alimentation ou dans l'industrie, etc… Alors que les assureurs vie s'inscrivent dans la durée et ils peuvent diffuser des produits sur de très longues années.

C'est d'ailleurs sur le critère de la durée des engagements qui se distingue l'assurance vie de l'assurance non vie. Ce qui explique que les risques de l'assurance vie ne sont pas les mêmes que l'assurance non vie, et qu'une gestion des risques en assurance vie diffère d'une gestion des risques en assurance non vie.

En l'occurrence, en assurance vie, les risques techniques liés au caractère aléatoire du montant des sinistres sont essentiels. Dans le domaine de l'assurance vie, les risques liés aux placements financiers qui l'emportent. Ces risques seront développés dans le chapitre 2 de cette première partie.

3.1 La durée des opérations en assurance vie

Il s'agit de la durée des prestations souscrites dans le contrat d'assurance vie (durée du contrat). C'est le contrat en ses termes qui détermine s'il s'agit d'une durée viagère ou d'une durée fixe.

Type de contrat	Nature du contrat	Durée du contrat
Contrats en cas de décès	**Assurance vie prévoyance** -Temporaire décès -Survie et rente éducation -Vie entière	Moyenne à très longue
Contrat en cas de vie	**Assurance vie épargne** -Capital différé. -Rente (immédiate ou différée, temporaire ou viagère)	Moyenne à très longue
Couverture des risques vie et décès	**Contrat épargne et prévoyance** -capital différé avec contre-assurance -vie entière différé avec contre assurance -rente viagère différé avec contre assurance.	Moyenne à très longue

Tableau 1 : Typologie et durée de contrat en assurance vie

Ainsi suivant la nature du contrat, plusieurs années peuvent s'écouler que l'assureur ne verse un seul dirham d'indemnité. En général, le service d'une rente prend plusieurs d'années. En outre, alors même qu'un sinistre est survenu, il peut arriver que le paiement des prestations n'arrive quelques mois, voire quelques années après la déclaration à cause du temps nécessaire aux experts, avocats pour instruire les dossiers les plus difficiles. Pendant ce temps l'assureur constitue des provisions (présenter dans le chapitre suivant).

3.2 La fonction d'intermédiaires financier

Le métier de base des assureurs est de permettre le transfert d'un risque qui ne peut pas être supportable par un seul individu, un groupe d'individus, une entreprise vers une société en vertu du principe de la mutualisation des risques. Mais dans les économies de marché, les assureurs jouent également le rôle d'un investisseur institutionnel. C'est ce qu'ils font en empruntant à court terme auprès de leurs clients et en plaçant les fonds récoltés dans des actifs de plus long terme.

En effet, l'inversion du cycle de production qui caractérise l'assurance conduit à cette situation: l'assureur bénéficie d'une avance de trésorerie de la part de ces clients qu'il doit générer entre le moment où il perçoit l'avance et le moment où il paie la prestation. Cette fonction d'intermédiaire financier de long terme qu'est l'origine de la majeure partie des risques. La présence de tels risques qui pousse l'assureur à adopter des outils de contrôle, d'aide à la décision, d'une gestion permettant de gérer à la fois les risques encourus et les engagements à l'égard des assurés. C'est ainsi la gestion actif-passif débarque au sein des assurances pour coordonner les décisions relatives à l'actif (placements financiers) et au passif (engagement de l'assureur envers les assurés).Nous aurons l'occasion d'aborder la gestion actif-passif dans les compagnies d'assurance vie dans la suite de ce rapport.

Chapitre 2 : la problématique de la gestion actif-passif en assurance vie

1 La définition de la gestion actif-passif

« La gestion Actif-Passif consiste à allouer de manière optimale l'actif en fonction des engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats et en fonction d'objectifs de revalorisation des contrats et de rémunération des actionnaires.» [8]

Généralement, la gestion actif-passif poursuit 3 buts qui sont entre autres :

- un but final : assurer la cohérence de la gestion du bilan de la compagnie ;
- un but pragmatique : définir une stratégie de gestion de l'actif en fonction du passif ;
- un but réglementaire : remplir les obligations réglementaires (exemple Solvabilité Basée sur le Risque(SBR)).

2 Bref historique de la gestion actif-passif

Afin d'appréhender la place de la fonction gestion Actif-Passif au sein d'une compagnie d'assurance vie et de mesurer son importance grandissante, un rappel historique semble s'imposer. Jusqu'au début des années 90, l'ALM (Assets Liabilities Management) fut largement ignorée par les compagnies d'assurance vie, alors même qu'elle constituait l'un des piliers du secteur bancaire. Cette technique est née dans la deuxième partie du siècle dernier au sein des cellules de gestion de trésorerie des banques, elle a été développée par les chercheurs en finance qui se sont appuyés sur les mathématiques appliquées pour optimiser la gestion des écarts de trésorerie dans le but de préserver le surplus présentant la richesse des actionnaires. Elle s'est étendue ensuite au domaine de l'assurance et en particulier de l'assurance vie pour constituer aujourd'hui un outil essentiel à la bonne gestion des compagnies d'assurance vie [8].

3 Le principe de la gestion actif-passif en assurance vie

La gestion actif-passif pourrait se définir comme une méthode globale et formalisée permettant, compte tenu de la réglementation, de contrôler et maitriser la composition et l'adossement de l'actif au passif au regard des risques encourus. Elle passe donc par une modélisation du passif et de l'actif.

3.1 La modélisation du passif

L'activité d'une société d'assurance est représentée par le passif du bilan qui contient, pour l'essentiel, des provisions techniques. Le mode de calcul de ces provisions techniques est réglementé par la réglementation marocaine [2].Il s'agit de :

- La « **Provision mathématique** » (PM) : « c'est la différence entre les valeurs actualisées des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés. »
- La « **Provision de gestion** » : « provision destinée à couvrir les charges de gestion futures des contrats non couvertes par ailleurs. »
- La « **Provision pour capitaux et rentes à payer** » : « c'est la valeur des capitaux et rentes échus et restant à payer à la date de l'inventaire. »
- La « **Provision pour participation aux bénéfices** » (PPB): « c'est le montant des participations aux bénéfices techniques et financiers attribuées ou à attribuer aux bénéficiaires de contrats, … »
- La **« Provision pour fluctuations de sinistralité** » : «provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurances de groupe en cas de décès. »
- La « **Provision de capitalisation** » : « provision destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu. »
- La « **Provision pour aléas financiers** » : « provision destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif. »
- La « **Provision pour risque d'exigibilité** » : «provision destinée à faire face aux engagements de l'entreprise dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article 59 de la présente circulaire. »

Les provisions mathématiques constituent l'élément le plus important dans le passif d'une assurance vie et par conséquent leur calcul est d'une importance capitale. Elles sont calculées selon le type des contrats :

- Pour les produits classiques(les contrats mixtes, vies entières, rentes viagères…)

- Méthode prospective : actualisation des engagements futurs (capital garanti au terme)

$$\mathbf{PM = Engagements\ futurs\ de\ l'assureur - Engagements\ futurs\ de\ l'assur}\text{é}$$

- Méthode rétrospective :

$$\mathbf{PM = Engagements\ pass}\text{é}\mathbf{s\ de\ l'assur}\text{é} - \mathbf{Engagements\ pass}\text{é}\mathbf{s\ de\ l'assureur}$$

- <u>Les produits de capitalisation :</u>

$$\boldsymbol{PM(n) = PM(n-1) + Entr}\text{é}\boldsymbol{es(n) - Sorties(n)} + \mathbf{Int}\text{é}\mathbf{r}\text{ê}\mathbf{ts}$$

- <u>Les produits en Unité de compte</u>

$$\boldsymbol{PM(n)} = \mathbf{nombre\ d'unit}\text{é}\mathbf{de\ compte} * \mathbf{valeur\ liquidative}$$

Pour modéliser les PM, il faut disposer d'une connaissance de l'ensemble des produits gérés dans le portefeuille, ce qui englobe bien sûr les produits en cours de commercialisation, mais aussi tous les produits dont la commercialisation a été arrêtée.

Mais au-delà des produits, il est indispensable de connaitre et anticiper aussi le comportement de l'assuré : comment l'assuré va-t-il utiliser le contrat, quel montant moyen est-il susceptible de verser périodiquement ? En d'autres termes, quel est le risque de rachat de contrat ?

Au passif à côté des provisions mathématiques, il y'a les fonds propres qui représentent les ressources mises à la disposition de la société et autres éléments à savoir les réserves de capitalisation etc.

3.2 La modélisation de l'actif

La modélisation de l'actif d'un assureur vie suppose de séparer les placements adossés aux fonds propres (c'est-à-dire le fonds appartenant aux actionnaires) et les placements destinés à couvrir les engagements de l'assureur à l'égard des assurés. A l'actif du bilan, il s'agit donc de modéliser l'évolution des éléments suivants:

- Les actifs admis en représentations des fonds propres (actif incorporel notamment).
- Les actifs représentant les provisions mathématiques.

Les actifs admis en représentations des provisions mathématiques sont les placements financiers qui peuvent être classés en trois familles :

- Les produits de taux

- Les actions
- L'immobilier

En résumé nous pouvons présenter le bilan synthétique d'une société d'assurance vie par le graphique suivant :

Bilan synthétique d'une société d'assurance vie	
Actif	**Passif**
Actifs incorporels	**Fonds propres**
Placements financiers **-Produits de taux** **-Actions** **-Immobilier**	**Provisions Mathématiques**
Créances	**Dettes**

Tableau 2 : bilan synthétique d'une société d'assurance vie

En représentation de leurs provisions mathématiques, les compagnies d'assurance vie sont tenues d'avoir un montant suffisant d'actifs dits de « bonne qualité ».

En effet, les sociétés d'assurance ne doivent investir que dans des placements où les risques sont identifiés, mesurés et suivis. Elles ne doivent pas perdre de l'esprit les trois règles encadrant un placement à savoir la rentabilité, la sécurité et la liquidité.

La réglementation marocaine fixe, à ce titre, les différentes catégories d'actifs autorisées ainsi que les dispositions relatives à leur répartition et dispersion.

3.2.1 Liste des actifs autorisés

Les principaux groupes d'actifs dans lesquels les compagnies d'assurance sont autorisées à placer leurs provisions techniques sont [2]:

- les placements immobiliers ;
- les obligations, titres de créances négociables ;
- les actions et parts sociales ;
- les prêts et effets assimilés ;
- les dépôts en compte indisponibles ;
- Les supports d'investissement des contrats en unité de compte

3.2.2 Règles de répartition des placements : limitations par catégorie d'actif

Les règles de répartition définies par l'arrêté du ministère de l'économie et des finances sont les suivantes :

- L'ensemble des actifs immobiliers ne doit pas représenter plus de 30% de la base de dispersion.
- L'ensemble des actions et parts des fonds communs de placement à risque ne doivent pas dépasser 70% de la base de dispersion.
- L'ensemble des prêts et certificats de dépôts est plafonnés à 15% de la base de dispersion.
- Les obligations d'Etat ainsi que les OPCVM obligataires sont sans limitation avec un minimum de 30% du portefeuille de la compagnie.

3.2.3 Règles de congruence

Les dépôts et les investissements hors du Maroc ainsi que les placements en valeurs étrangères ne peuvent être effectuées par les compagnies d'assurance et de réassurance que dans la limite de 5% [2] du total de leur actif.

4 Les risques encourus par une société d'assurance vie

Pour honorer les engagements de l'assureur, la société d'assurance doit prendre en considération les risques suivants :

4.1 Les risques au passif

4.1.1 Le risque lié à la mortalité

Ce risque est commun aux contrats constitués de garanties sur le décès notamment les contrats de prévoyance. Dans ce cas la compagnie doit mesurer ses engagements en faisant recours à des tables de mortalité qui ne doivent pas sous-estiment pas la probabilité de décès car sinon une augmentation de la mortalité peut entrainer une augmentation des provisions techniques.

4.1.2 Les risques liés aux options cachées

« Les options cachées sont des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses contractuelles et destinées à rendre les contrats d'assurance plus souples et plus attractifs. Ces options se caractérisent par une absence d'un provisionnement distinct dans les comptes de l'assureur »[4].

Le risque principal qui pèse sur l'assureur est celui de rachat. En effet, en cas d'augmentation des taux, le rendement servi aux assurés devient faible par rapport à celui de marché ce qui pousse les assurés à récupérer à tout moment leur épargne. De façon à payer ces rachats, l'assureur est alors obligé de vendre des obligations qui, compte tenu de la hausse des taux, risquent de se traduire par la réalisation de moins-values latentes obligataires.

4.1.3 Le risque lié à la longévité

Ce risque est typique aux rentes viagères dont les garanties de prestation sont liées à la survie des assurés. Dans ce cas une augmentation de la longévité provoquera une augmentation de la valeur actuelle des provisions techniques.

4.2 Les risques à l'actif

En assurance vie, les risques liés à l'actif sont essentiellement des risques financiers qui résultent principalement de la volatilité des valeurs du marché et des instruments financiers notamment la variabilité de certaines variables financières telles le cours des actions, les taux d'intérêt… Ces risques peuvent donc créer une inadéquation entre l'actif et le passif.

4.2.1 Risque de taux d'intérêt

Le risque de taux est un risque lié aux variations des taux d'intérêt sur le marché d'obligations. Ce genre de risque intéresse particulièrement les compagnies d'assurance vie puisqu'elles investissent principalement en titres à revenus fixes qui ne sont pas beaucoup risquées.

Afin de préciser les effets liés au risque de taux, il convient de discerner le risque de réinvestissement et le risque de réalisation:

- **Le risque de taux à la baisse : le risque de réinvestissement**

En cas de baisse des taux d'intérêt, le réinvestissement des coupons rapporte moins en termes de rendement ce qui affecte le rendement à court terme. Ce risque s'appelle le « risque de réinvestissement.»

Par ailleurs, les obligations qui sont achetées en remplaçant des obligations arrivées à terme présentent des taux moins intéressants, ce qui conduit à une diminution du rendement à long terme. Une baisse sévère des taux conduit l'assureur à puiser dans ses fonds propres pour arriver à servir le taux garanti.

- **Le risque de taux à la hausse : Le risque de réalisation**

En période de hausse des taux d'intérêt, si la société est contrainte à vendre des obligations pour honorer ses engagements, elle risque de réaliser des moins-values sur les obligations à taux fixe : ce risque s'appelle « risque de réalisation». En premier recours, elle peut toujours puiser dans sa provision de capitalisation à condition qu'elle suffise bien entendu. Si la provision est insuffisante alors la compagnie d'assurance doit en deuxième recours diminuer le taux servi aux assurés ou puiser dans ses fonds propres.

Par ailleurs, en cas de hausse de taux, les assurés qui estiment que le taux offert par la compagnie est trop faible par rapport au marché et qui souhaitent réaliser un arbitrage, ils peuvent être tentés de racheter leurs contrats. La hausse des taux est susceptible d'entrainer de rachat conjoncturel de la part des assurés.

4.2.2 Risque de contrepartie

« Ce risque est lié à la solvabilité de l'émetteur de titres financiers, ainsi qu'à la perception de cette solvabilité par les marchés. »[4]

En effet, si le marché décide de réduire la note de l'ensemble des émetteurs privés, nous risquons de voir l'écart entre les taux d'emprunts d'Etat et les taux des emprunts obligataires privés se creuser. Dans ce cas, il est question de risque de spread.

4.2.3 Risque de liquidité

Une compagnie d'assurance doit disposer à tout moment de liquidités suffisantes pour pouvoir honorer ses engagements (termes, décès, rachat partiel ou total…). Le risque de liquidité apparait, donc, lorsque l'assureur n'a pas suffisamment de cash au moment où il doit rembourser ses assurés. Ce risque découle de l'inadéquation entre la liquidité de l'actif et l'exigibilité du passif et peut être cerné en ayant recours au concept de duration actif passif.

5 Les modèles et méthodes de la gestion actif-passif

5.1 Les modèles de la gestion actif-passif

Il existe deux modèles de la gestion actif-passif :

5.1.1 Approche statique

« L'approche statique consiste à effectuer les projections des flux à partir des stocks d'actifs et de passifs arrêtés à une certaine date, sans prendre en compte aucune opération créant ultérieurement de nouveaux passifs»[4].

Alors l'approche statique ne prend en considération aucune production nouvelle, ni des primes ou cotisations supplémentaires versées au titre des contrats existants et se base uniquement sur des donnés arrêtés à une date donnée. Cette approche est généralement simple à modéliser.

5.1.2 Approche dynamique

« L'approche dynamique consiste à projeter la totalité des cash-flows issus des actifs et passifs existants au début de la projection, ou constitués ultérieurement en fonction d'hypothèses sur l'activité future de la société. »[4]

L'approche dynamique doit prendre en considération la production future ainsi que les versements anticipés sur les contrats existants. Pour passer de la dynamique à la statique, il suffit de considérer que la production future est nulle.

A ces deux approches, s'ajoute aussi, l'approche dite semi-dynamique. Cette approche consiste à intégrer les versements futurs des contrats existants, mais sans prendre en compte les contrats nouveaux.

5.2 Les méthodes de gestion actif-passif

Nous avons vu jusqu'à présent les principes majeurs qui régissent l'activité des compagnies d'assurance vie. La complexité de son fonctionnement nécessite l'implémentation d'outils visant à projeter dans l'avenir le comportement de l'entreprise, à travers l'évolution de son bilan, de son compte de résultat, de ses provisions techniques, de ses primes, de ses prestations, etc., l'assureur ayant en effet le besoin de prévoir le comportement notamment de son actif et de son passif dans les décennies à venir.

Les outils de la gestion actif-passif en assurance vie sont spécifiques à cette activité et diffèrent des outils bancaires, même s'ils en sont souvent inspirés. Il est possible de les classer en quatre générations [4] [5] de façon chronologique, tout en gardant à l'esprit les points suivants :

- Une génération n'en remplace pas une autre, mais vient compléter les autres outils déjà existants;
- Certains modèles opérationnels ont des caractéristiques mixtes entre deux, trois ou quatre générations ;

- Au sein d'une même génération d'outils, le stade de développement, l'intégration des différents types d'actifs et passifs, le caractère opérationnel peuvent être très inégaux d'un modèle à un autre.

5.2.1 Première génération : Immunisation du portefeuille

Redington [1952] définit l'immunisation du portefeuille comme « l'investissement de l'actif d'une telle manière que le portefeuille soit protégé contre un changement des taux d'intérêt ». Autrement, c'est une stratégie d'investissement qui, dans le cas de l'assurance vie, produit des flux exactement adossés en maturité et en valeur à ceux que doit payer l'entreprise. Cette technique suppose que le principal risque des portefeuilles financiers de la compagnie est celui du changement des taux d'intérêt.

Nous pouvons citer deux approches classiques de l'immunisation :

- l'adossement des flux de trésorerie (cash-flows) à ceux provenant du passif.
- l'adossement des durations du passif et de l'actif.

Nous rappelons cependant quelques notions qui seront reprises ultérieurement dans ce projet :

Taux de rendement actuariel

En suivant une démarche inverse à celle du calcul de la valeur actuelle d'un actif (ou de toutes séquences de flux fixes par exemple les obligations à taux fixes), il est possible de calculer, à partir du prix de marché, un taux d'actualisation des flux de trésorerie correspondants dit taux de rendement actuariel r_a. Ce dernier vérifie la relation suivante:

$$\boldsymbol{prix\ de\ march\acute{e}} \approx \boldsymbol{valeur\ actuelle} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{F_{ti}}}{(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r_a})^{\boldsymbol{ti}}}$$

Avec F_{ti} est le flux de l'actif financier (coupon, dividende, amortissement…) à l'époque i .

Valeur actuelle nette des actifs obligataires

En pratique, il n'est pas nécessaire de calculer la valeur actuelle des actifs obligataires à taux variable, puisqu'il est plus simple d'observer leur valeur de marché. Cependant, dans le cas des obligations à taux fixe, la séquence des futurs cash-flows associés à un titre est parfaitement connue.

Nous considérons même généralement que dans le cas des emprunts d'Etat, cette séquence est certaine et ne présente aucun risque de contrepartie (ou risque de défaillance). A l'aide de la structure par terme des taux (notée r_{ti}) il est possible de reconstituer le prix d'équilibre de l'obligation sans risque :

$$\boldsymbol{prix\ de\ march}\acute{e} = \boldsymbol{prix\ estim}\acute{e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{F_{ti}}}{(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r_{ti}})^{\boldsymbol{ti}}}$$

Valeur actuelle des passifs

Par analogie avec la valorisation des actifs, la valorisation des flux du passif se fait en se basant sur la courbe des taux zéro-coupon (nous reviendrons sur la construction de cette courbe dans le chapitre 3 de la partie 2). Cette dernière, permet de tenir compte de la maturité de chacun des flux du passif (rachats, décès,…) pour lui attribuer un taux d'actualisation précis. De même, il faudrait ajouter à cette courbe des taux sans risque une prime de risque (spread qui l'écart entre le taux d'emprunt d'Etat et celui des entreprises privées). Elle permettra ainsi de retomber sur une « valeur de marché » des passifs. Le problème c'est que le niveau réel de cette prime est inobservable sur le marché dans la mesure où les engagements du passif s'échangent régulièrement sur des marchés peu liquides et de gré-à-gré. En pratique, le calcul de la valeur actuelle du passif peut être effectué avec une prime de risque arbitrairement choisie ou nulle.

5.2.1.1 L'adossement des flux de trésorerie : cash flow matching

Il s'agit de la procédure d'immunisation la plus simple et la plus ancienne de la gestion actif-passif. Elle consiste à investir la richesse initiale dans un portefeuille de titres (le plus souvent des zéro-coupons ou des obligations à taux fixe) qui produisent exactement, et aux échéances prévues, les différents flux du passif.

Autrement, lorsque sur chaque période les flux nets obtenus (la différence entre le total des entrées de flux et total des sorties de flux) sont toujours positifs ou nuls, l'actif est dit adossé au passif. Il est dit exactement ou parfaitement adossé lorsque les flux nets sont nuls. Les anglo-saxons parlent alors de méthode de cash flow matching. Une fois que tous les passifs sont couverts par cette méthode d'immunisation, les actifs excédentaires sont alors considérés comme libres et représentatifs de la situation nette réelle de la société (le surplus).

L'adossement des cash-flows est valable à très court terme, mais malheureusement, elle ne trouve pas d'applications pratiques à long terme. En effet, les flux du passif et ceux de l'actif sont très influencés par des facteurs externes, notamment les taux d'intérêt. Ils sont donc eux-mêmes sujet à des variations dans des sens différents (les flux du passif ne sont pas fixes), il importe donc de réitérer souvent cette immunisation.

5.2.1.2 L'adossement par la Duration

Cette autre technique consiste à apparier les sensibilités du passif et de l'actif vis-à-vis de la variation des taux d'intérêt. En d'autres termes, elle consiste à définir une stratégie d'investissement qui fait que la valeur de marché des actifs suit tout mouvement de la valeur actuelle des engagements pris vis-à-vis des assurés. L'immunisation par la duration définit un portefeuille dont la valeur, au premier ordre, évolue comme la valeur actualisée des engagements. La règle de décision dans cette technique est basée sur l'indice de « sensibilité », défini par l'économiste Frédérick Macauley [1938]. Il est obtenu à l'aide de la formule de développement limité de Taylor du prix en fonction du taux d'intérêt.

<u>La sensibilité de l'actif :</u>

Reprenons la formule simplifiée de la valeur actuelle d'une obligation à taux fixe en fonction du taux d'actualisation actuariel r_a:

$$\boldsymbol{VA(r_a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1 + r_a)^{ti}}}$$

La variation de la valeur actuelle due à une petite variation du taux d'actualisation est donnée par le calcul de la dérivée première :

$$\boldsymbol{\frac{dVA(r_a)}{dr} = VA'(r_a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1 + r_a)^{ti+1}} * (-ti)}$$

Cette dérivation n'a de sens que si les flux F_{ti}sont fixes par rapport à $\boldsymbol{r_a}$.

La sensibilité est alors déterminée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{sensibilit}\text{é} = \boldsymbol{\frac{dVA(r_a)}{dr * VA} = \frac{-1}{VA} * \sum_{i=1}^{n} \frac{ti * F_{ti}}{(1 + r_a)^{ti+1}}}$$

Lorsque les cash-flows sont tous positifs, la sensibilité de la valeur actuelle aux variations du taux d'actualisation est nécessairement négative. Cela est effectivement le cas pour les obligations dont la valeur de marché croît quand les taux baissent et inversement. Cette sensibilité est parfois appelée duration modifiée.

La duration de l'actif

La duration d'une série de flux fixes telle que définie par Macaulay [1938] est donnée par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{duration} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{ti * F_{ti}}{(1+r_a)^{ti}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1+r_a)^{ti}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{ti * F_{ti}}{(1+r_a)^{ti}}}{VA(r_a)}$$

Avec F_{ti}une série de flux fixes.

La duration de Macaulay peut s'interpréter comme la durée de vie moyenne de l'obligation. En fait, chaque durée t_i étant pondérée par la valeur actuelle du flux correspondant $\frac{F_{ti}}{(1+r_a)^{ti}}$

Elle peut s'interpréter aussi comme l'élasticité du prix de l'obligation par rapport aux variations des taux d'intérêt. C'est la définition de Hicks [1946] qui permet de relier la sensibilité et la duration par la relation suivante :

$$\boldsymbol{duration} = -\frac{\frac{dVA(r_a)}{VA(r_a)}}{\frac{dr_a}{1+r_a}} = -(1+r_a) * \frac{\frac{dVA(r_a)}{VA(r_a)}}{dr_a} = -(1+r_a) * \boldsymbol{sensibilit}é$$

La duration s'interprète aussi comme la date à laquelle les deux effets de la variation des taux, effet sur la valeur et effet sur le revenu, se compensent.

Par ailleurs, nous pouvons étendre la notion de duration à d'autres actifs non obligataires malgré qu'ils soient plus ou moins sensibles à la variation des taux tels que les actions, l'immobilier. Pour ces derniers le calcul de la duration peut être effectué dans le cadre du modèle Gordon-Shapiro [1956].

- **Sensibilité du passif**

La sensibilité de l'actif que nous avons vue dans le paragraphe précédent supposait des flux fixes, indépendants des taux de marché. En revanche, les passifs des compagnies d'assurance vie cachent bien souvent des options complexes détenues par les assurés. Dans l'exercice de ces options cachées, le comportement du client sera influencé par la valeur des taux de marché (taux proposé par les concurrents), ce qui en pratique signifie que les flux de trésorerie du passif vont dépendre de ces taux, et la théorie précédente n'est plus applicable. Pour de faibles variations des taux, cette difficulté peut être négligée.

Au final, pour accomplir une immunisation par la duration, l'investisseur doit acquérir des titres dont la duration moyenne est égale à la duration des flux du passif.

Le grand inconvénient de ces outils de première génération réside dans leur approche statique. En effet, les bénéfices générés par les contrats futurs ne sont pas pris en compte, et cette méthode sous-évalue certains risques financiers. C'est le cas en particulier des contrats où les assurés peuvent effectuer des versements libres. Dans ce cas, les caractéristiques de l'actif vont être modifiées en fonction du contexte financier et ça crée des nouveaux également.

Ces outils dites de première génération de ne permettent donc pas de traiter les problèmes actuels auxquels les compagnies d'assurances vie sont exposées.

5.2.2 Deuxième génération : les scenarios déterministes

Les Outils de 2ème génération sont des modèles de simulation du bilan. Ils permettent la projection des résultats financiers et comptables et de l'évolution du bilan, en fonction d'un jeu d'hypothèses (Scénarios).Le premier scénario qui vient à l'esprit pour les modèles déterministes est celui de la continuité c'est-à-dire que les marchés financiers suivent la tendance actuelle. Il s'agit dans ce cas du scénario dit central, correspondant à une situation stable des marchés. Des scénarios catastrophes peuvent également être mis en place afin de connaître le comportement de la compagnie d'assurance vie en cas de sinistres majeurs, dans l'optique de prévenir et limiter les dommages occasionnés. D'importantes baisses ou hausses des taux sont simulables, de même que des krachs boursiers ou encore une forte augmentation du taux de rachat ou de décès.

Les modèles actif-passif déterministes sont complets, ils permettent:

- De prendre en compte de la non-fixité des flux du passif (contrairement aux outils de la 1ère génération) ;

- De projeter l'ensemble du bilan dans une approche dynamique, en tenant compte de la production future (les nouvelles entrées) ;
- De simuler l'interaction actif-passif et les provisions comptables ;
- De tester différentes politiques financières ;

En résumé l'usage principal des modèles déterministes est la prévision/projection des résultats dans une optique budgétaire, mais aussi pour faire des stress testing du bilan.

Par rapport à la première génération, la recherche ne porte plus seulement sur « l'indicateur unique du risque de taux », mais sur un éventail beaucoup plus vaste de risques d'actif-passif.

5.2.3 Troisième génération : les scenarios stochastiques

Les modèles à scenarios déterministes ne permettent d'effectuer des simulations que sur un seul scénario, qui représente l'évolution de l'ensemble des paramètres du marché (taux à plusieurs échéances, valeur des indices, etc.). Théoriquement, la probabilité qu'un tel scénario se produise est zéro. Cependant, l'objectif de la modélisation stochastique est d'évaluer par la méthode de Monte Carlo les lois de probabilités associées aux résultats de l'assureur vie et de fournir une mesure cohérente des risques d'Actif-Passif. Alors si l'on admet que les variables économiques et financières (les taux obligataires, les cours de bourse, etc.) peuvent être représentées par des processus stochastiques, il devient possible de définir une densité de probabilité conditionnelle (fonction du temps et de la valeur initiale) pour les différentes variables étudiées.

5.2.4 Quatrième génération : allocation dynamique

Les Outils de $4^{ème}$ génération sont obtenus par la définition d'une fonction objectif pour l'assureur vie et par la programmation d'algorithmes d'optimisation qui donnent automatiquement les allocations d'actifs et les politiques de taux servis aux clients « optimales » au sens de la fonction objectif. On parle alors de problème d'optimisation dynamique ou encore de problème de contrôle optimal.

Ces outils sont complexes à mettre en place, leur utilisation nécessite la maitrise des outils de $3^{ème}$ génération. Ils nécessitent:

1. De choisir une fonction objectif ;

2. De Poser le problème de contrôle optimal pour l'allocation stratégique d'actifs ou aussi la politique de distribution des bénéfices réalisés aux assurés ;
3. De résoudre cette équation « aux dérivées partielles » ;
4. Enfin, de faire les calculs de sensibilité afin de tester la robustesse de la solution obtenue aux différentes hypothèses posées par l'assureur vie.

6 Approche du flexing

Le flexing est une approche consistant à projeter dans un premier temps le passif au taux garanti, puis à utiliser le modèle ALM pour prendre en compte la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques,

Cette approche est synthétisée dans la figure suivante :

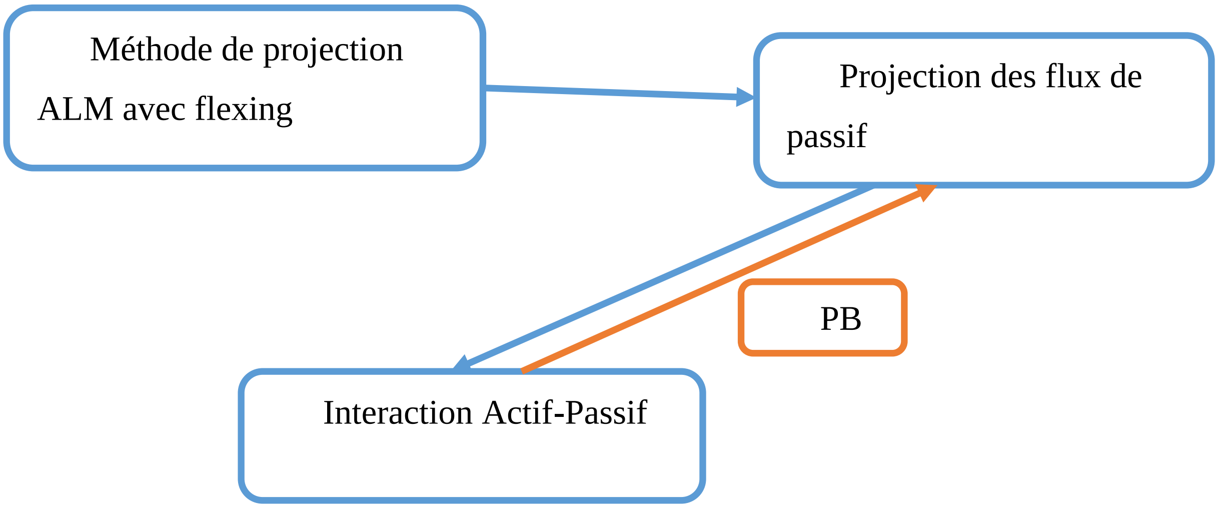

Figure 1 : Schéma synthétique de l'approche du flexing

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie, nous avons passé en revue les différents risques auxquels les assureurs vie sont exposés ainsi que les différentes approches adoptées (de l'analyse des flux de trésorerie à l'optimisation dynamique) pour y faire face. De façon générale, la gestion actif-passif est un outil de pilotage pour la direction générale, la direction technique et la direction financière. Elle les aide à la prise des décisions et au contrôle des risques en matière stratégique et tactique (définition d'une politique financière (allocation d'actifs), définition d'une politique de rémunération des contrats, ...).

Pour bien mener notre travail dans la suite de ce mémoire, nous retiendrons la démarche suivante :

- L'approche semi-dynamique sera adoptée dans ce mémoire ;
- Les scénarios déterministes seront utilisés pour projeter les flux du passif ;
- Quant aux flux de l'actif, ils seront modélisés par des modèles stochastiques
- Et en fin, l'approche flexing sera utilisée au sein de notre modèle ALM dans le chapitre 2 de la partie 3.

Partie II : Modélisation et projection des flux

En assurance vie, l'ALM nécessite la mise en place de projections futures des différents postes de l'actif et du passif afin de permettre à l'assureur de prévoir ses adéquations actif passif à n'importe quel moment et sous différents scénarios. C'est pourquoi cette deuxième partie sera entièrement consacrée à la modélisation et projections des flux du passif (Modélisation déterministe) et de l'actif (Modélisation stochastique). Nous débuterons la partie par une présentation des produits commercialisés par notre compagnie vie. Le portefeuille d'actifs de la compagnie d'assurance est supposé composé uniquement d'actions, d'obligations et le monétaire.

Chapitre 1 : Présentation des produits de la compagnie d’assurance vie

Dans cette section, il sera question de présenter les différentes caractéristiques des produits qui feront l'objet de traitements dans ce mémoire. Et dans le souci de confidentialité, notre compagnie d'assurance vie sera désormais appelée «Y » et elle commercialise plusieurs produits d'assurance sur la vie. Dans le cadre de ce mémoire, compte tenu du temps qui nous est imparti, nous baserons notre travail sur trois de ses produits que nous désignerons « Produit 1 », «Produit 2 » et « Produit 3 ».

1 Produit 1 et 2

L'objectif du présent contrat est de permettre au bénéficiaire de se constituer un complément de retraite ou un capital de fin de carrière à partir de la constitution d'une épargne par capitalisation.

La compagnie garantit :

- En cas de survie de l'assuré au terme du contrat, le paiement d'un capital égal au montant de l'épargne constituée augmentée des intérêts. Ce capital peut être versé en une seule fois ou sous forme de rentes périodiques.
- En cas de décès ou d'invalidité totale et permanente de l'assuré avant le terme du contrat, le paiement au bénéficiaire de la valeur du compte retraite évalué à la date du décès.

<u>Prime investie</u>

La prime investie (PI) est égale à la prime commerciale(PC) nette des impôts moins les frais d'acquisition (F_a), de gestion$\left(F_g\right)$ et de fractionnement$\left(F_f\right)$.

$$\boldsymbol{PI = PC - F_a - F_g - F_f}$$

Les différents frais sont calculés comme suit :

<u>Les chargements d'acquisition :</u>

Pour les produits 1 et 2, les frais d'acquisitions sont escomptés sur la durée du contrat avec un maximum de 20 ans. C'est-à-dire les frais d'acquisition escomptés sont prélevés sur une année de prime suivant la périodicité des primes. Ils sont calculés sur la base de la prime commerciale nette des impôts comme suit :

$\boldsymbol{F_a = PC * t \times \min(n; 20)}$ Seulement sur la 1 ère année de prime et $\boldsymbol{F_a = 0}$ pour le reste. Avec

$\boldsymbol{n}$: est la durée de contrat en année.

$\boldsymbol{t}$: est le taux de frais d'acquisition

Les chargements de gestion :

$\boldsymbol{F_g} = \frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{t}\times\mathbf{min}(\mathbf{20};\boldsymbol{n}))}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f})} \times \boldsymbol{g} * \boldsymbol{PC}$ Seulement sur une année de prime (la première année du contrat)

$\boldsymbol{F_g} = \frac{\boldsymbol{g}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f})} * \boldsymbol{PC}$ sur les autres primes

Avec

$\boldsymbol{g}$:le taux de frais de gestion sur prime

$\boldsymbol{f}$: le taux de frais de fractionnement mensuel

Les chargements de fractionnement sur primes

$\boldsymbol{F_f} = \frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{t}\times\mathbf{min}(\mathbf{20};\boldsymbol{n}))}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f})} \times \boldsymbol{f} * \boldsymbol{PC}$Seulement sur une année de prime (la première année du contrat).

$\boldsymbol{F_f} = \frac{\boldsymbol{f}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f})} * \boldsymbol{PC}$; sur les autres primes

Provision mathématique à une date d'inventaire

kV_x : Provision mathématique à la fin du mois k

. m : Nombre de cotisations encaissées au mois k

. R^{k+1} : Montant du rachat partiel au mois k (pénalité éventuelle y compris)

. C_j: $j^{\text{ième}}$Cotisation épargne créditée au compte épargne au mois k

. α_j: Nombre de jours de placement de la cotisation $C_j$au mois k

. p : Nombre de rachats partiels au mois k

. β_j : Nombre de jours entre la date du rachat et la date d'inventaire

$$\boldsymbol{kV_x} = \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{C_j} \times \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{i_f}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha_j}}{\mathbf{365}}} - \sum_{\boldsymbol{l}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{R_l^{k+1}} \times \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{i_f}\right)^{\frac{\boldsymbol{\beta_j}}{\mathbf{365}}}$$

Avec i_f : taux revalorisation net et il se calcule comme suit :

$$\boldsymbol{i_f} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})(\mathbf{1} - \boldsymbol{f_e}) - \mathbf{1}$$

f_e : Taux du frais encours.

Valeur de rachat à la fin du mois

$$S_i \begin{cases} \boldsymbol{m} < \mathbf{min}(\mathbf{0.15} \times \mathbf{12} \times \boldsymbol{n}; \mathbf{24})\,; \boldsymbol{pen_m} = \mathbf{100}\% \\ \mathbf{min}(\mathbf{0.15} \times \mathbf{12} \times \boldsymbol{n}; \mathbf{24}) < m < 120\,; \boldsymbol{pen_m} = \mathbf{5}\% \\ \mathbf{120} \leq \boldsymbol{m}; \boldsymbol{pen_m} = \mathbf{0}\% \end{cases}$$

$$\boldsymbol{VR_m} = \boldsymbol{V_m} \times (\mathbf{1} - \boldsymbol{pen_m})$$

2 Produit 3

Le Contrat permet à l'assuré de se constituer un capital en vue:

- de réaliser les projets personnels,
- disposer d'une épargne de précaution,
- organiser sa succession

La prime

- Le souscripteur choisit le niveau de prime, qu'il désire payer. Le minimum autorisé est de [$\boldsymbol{P}$] TTC.

- La prime investie est égale à la prime commerciale diminuée des frais d'acquisition.

- A tout moment, le souscripteur peut faire des versements libres ou périodiques.

Le Compte d'Epargne (Provision Mathématique)

-La totalité de chaque prime, nette des frais d'acquisition est portée au crédit d'un Compte d'Epargne attribué à chaque police.

- Le Compte d'Epargne est crédité chaque année des intérêts techniques de [$\mathrm{Tx}_{\mathrm{Tech}}$] par an.

La Valeur de Rachat

La valeur de rachat est égale à la provision mathématique du contrat diminuée, éventuellement, d'une indemnité égale à $\mathrm{P}_{\mathrm{Rach}}$ lorsque l'ancienneté inférieur à 10 ans.

Estimation de la Provision Mathématique

Les provisions PM_t sont évaluées de la manière suivante :

$$\boldsymbol{PM_t = \left(PM_{t-1} * (1 + \mathrm{Tx}_{\mathrm{Tech}}) + \sum_{i=1}^{M}\left(PC_i * (1-g) * (1 + \mathrm{Tx}_{\mathrm{Tech}})^{\frac{\beta_j}{360}}\right)\right) * (1 - f_e) - Rachat(entre\ t-1\ et\ t) - \mathrm{P}_{\mathrm{Rach}}}$$

Avec :

PC_i : La prime commerciale de la $i^{\,eme}$ cotisation

M : Nombre de cotisation effectué entre t-1 et t

f_e: Frais en cours

g : Chargement annuel de gestion

β_j : Nombre de jours entre le paiement de la cotisation i et la date d'évaluation t.

Cartographie des produits

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Taux technique	2%	2%	2%
Frais sur encours	0.475%	0.475%	1%
Taux revalorisation	1.516%	1.516%	0.980%
Frais d'acquisition	3%	3%	3%
Frais de gestion	5%	5%	0%
Frais de fractionnement	4%	4%	0%
Pénalité sur rachat	5%	5%	5%
Escompte	Oui	Oui	Non

Tableau 3 : Cartographie des produits

Chapitre 2 : Modélisation et Projection des flux du passif

Ce chapitre concerne la modélisation et projection du Passif. La production des flux a été réalisée sous **VBA Excel**. Nous commençons par exposer les hypothèses retenus pour cette partie.

1 Hypothèses liées au passif

- La compagnie « Y » est supposée fonctionner en run-off, c'est-à-dire sans production future. Seules les primes futures qui correspondent à l'engagement de l'assuré dans le cadre du contrat sont prises en compte dans les projections (semi-dynamique);
- Les projections sont réalisées sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de réassurance ;
- La mortalité des assurés est supposée déterministe en fonction de l'âge de l'assuré: le taux de mortalité est celui de la table «TD 88-90 » ;
- Le taux de rachat conjoncturel n'est pas modélisé ;
- Le rachat structurel est supposé déterministe en fonction de l'ancienneté du contrat : le taux de rachat structurel est celui obtenu avec l'historique. ;
- Les contrats sont projetés de façon individuelle ;
- Les frais (gestion, acquisition et fractionnement) sont supposés versés au début d'année ;
- Les sinistres tels que les décès et les rachats, qui donnent lieu à un versement de prestations, ont lieu au début d'année ;
- Les primes sont payées au début d'année ;
- Les contrats qui arrivent à terme ne sont pas soumis au décès, rachat et pénalités.

2 Modélisation des éléments apparaissant au passif du bilan

Nous passons maintenant à la modélisation des principaux éléments qui apparaissent au passif du bilan.

2.1 Les fonds propres

Du point de vue comptable, à la fin d'un exercice, les fonds propres d'un assureur sont composés du capital social, de la réserve (c'est-à-dire bénéfices des exercices précédents non redistribués aux actionnaires) et du résultat de l'année.

Durant la projection de l'activité de notre compagnie « Y » les bénéfices ne sont jamais redistribués aux actionnaires, par conséquent dans notre outil les fonds propres deviennent le capital de départ auquel on ajoute l'ensemble des résultats ayant eu lieu. Cette hypothèse permet alors de calculer les fonds propres à la fin de chaque année de projection de la manière suivante :

$$\boldsymbol{FP_N = FP_{N-1} + R_N}$$

Où

FP_N : sont les fonds propres de la compagnie « Y » lors de l'année N

R_N :est le résultat comptable de l'année N.

$FP_{2020} = 5\% * PM_{2020}\ DH.$

2.2 La provision mathématique

A la fin de chaque année de projection, la provision mathématique de clôture est calculée de la manière suivante :

$$\boldsymbol{PM_N = PM_{N-1} + Primes(N) - Chargements(N) - Décès(N) - Rachat(N) + Pénalité\ de\ rachat(N) - Terme(N) + Revaloriation(N) + PB_N}$$

2.3 La provision pour participation aux bénéfices

La PPE est un élément obligatoire du modèle ALM. Nous verrons par la suite comment cette provision est utilisée par le management. (5.2 Politique de revalorisation)

2.4 Les réserves de capitalisations

La réserve de capitalisation est une réserve alimentée par les plus ou moins-values réalisées lors de la cession d'actifs obligataires. Le rôle de la réserve de capitalisation est important. Elle permet de lisser les résultats en cas de moins-values latentes.

Ceci permet à la compagnie de construire une politique d'investissement moins sensible aux variations de taux. Cette réserve permet également de pousser les compagnies d'assurance de vendre leurs obligations en cas de baisse des taux et de dégager des bénéfices.

3 Modélisation des « cash-flows »

3.1 Les rachats

Les rachats sont très importants dans la projection des contrats Epargne. La modélisation doit prendre en considération des paramètres à plusieurs niveaux:

- Au niveau des conditions contractuelles (taux technique, échéance officielle du contrat (avant prorogation, pénalités de rachat) ;
- Au niveau de la situation personnelle de l'assuré (âge,…) ;
- Au niveau de la compétitivité du produit (taux de revalorisation servi, taux de marché).

Nous distinguons 2 genres de rachats

3.1.1 Rachats structurels

Ce sont les rachats que l'assureur vie peut observer dans un contexte économique normal. Ils traduisent des sorties d'épargne motivés par des besoins de trésorerie de la part des assurés. Ils sont indépendants de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance. Nous les modélisons donc par une loi de rachat qui dépend de la durée de détention du contrat et en pourcentage de la provision mathématique. Le taux de rachat à l'ancienneté k est donc défini comme suit :

$$\tau_k = \frac{Rachats(k)}{PM(K)}$$

Les rachats structurels suivent les lois suivantes :

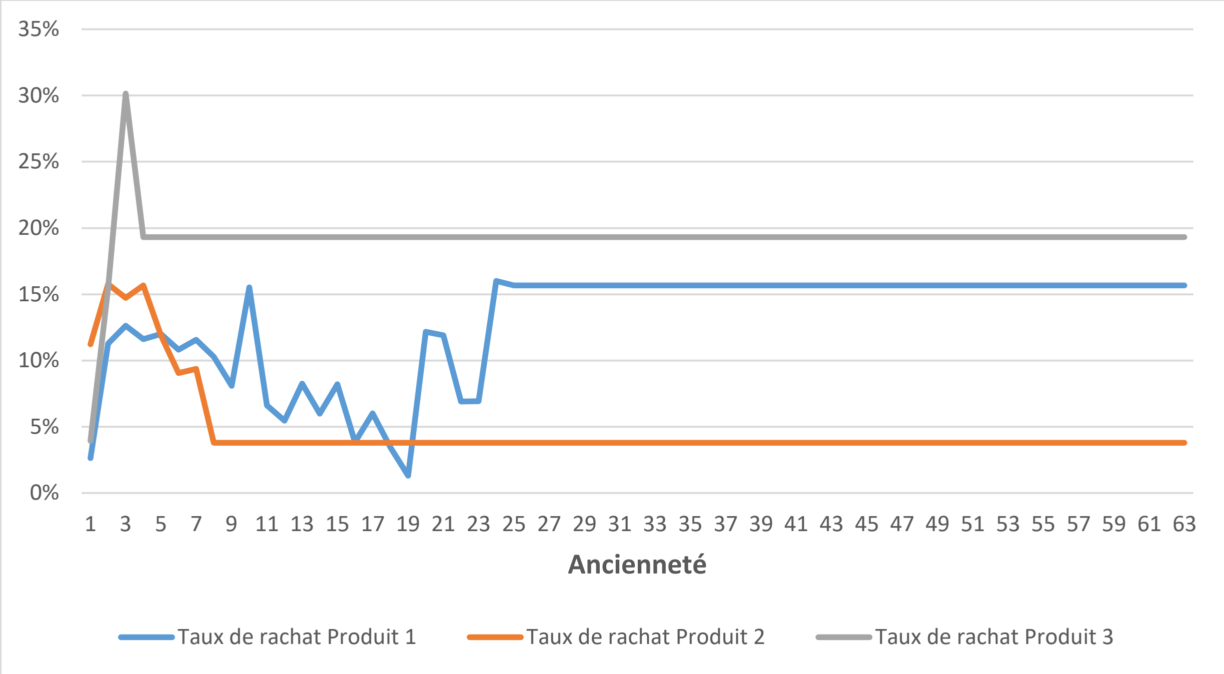

Figure 2 : Courbes des rachats structurels

Nous remarquons qu'il y a des pics pour ces trois produits pour remédier ce problème ainsi que pour éviter la sous-estimation et la surestimation de probabilité de rachat on va faire un lissage par moyenne mobile, le résultat dans les graphes suivants :

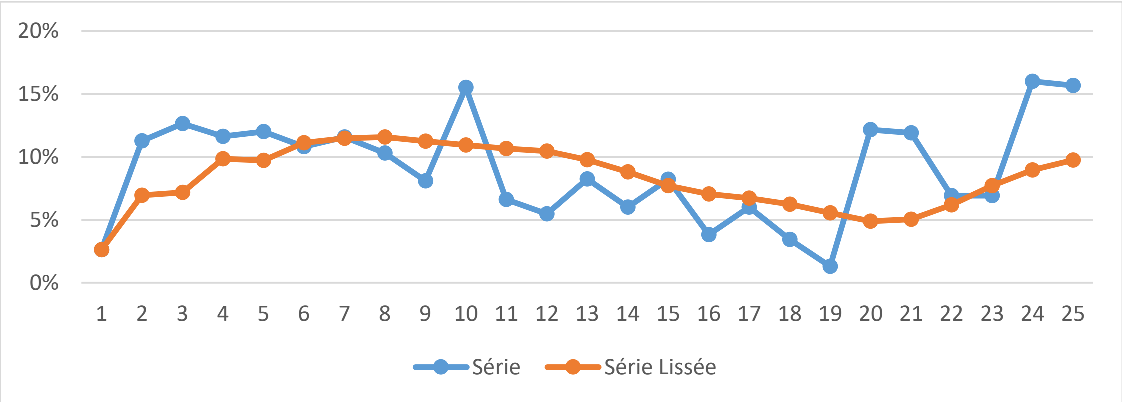

Figure 3 : Lissage moyenne mobile pour les produits 1

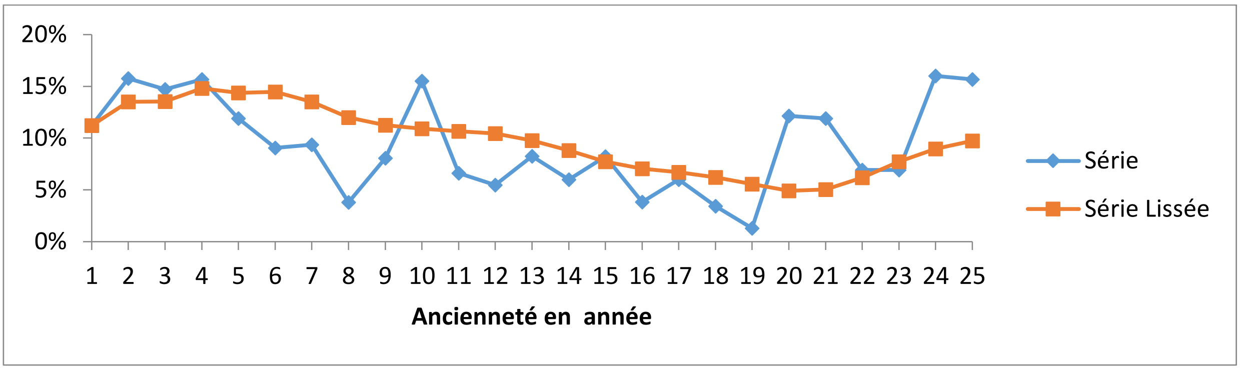

Figure 4 : Lissage moyenne mobile pour les produits 2

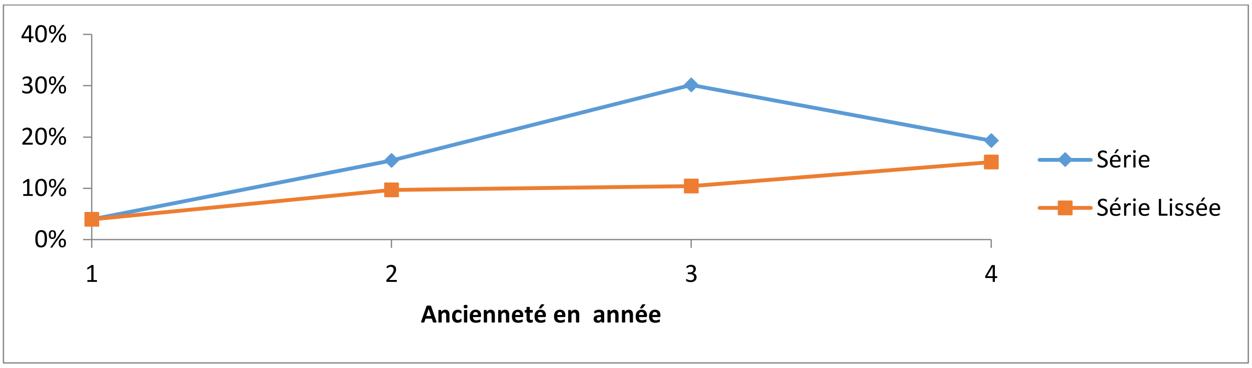

Figure 5 : Lissage moyenne mobile pour les produits 3

Nous remarquons que les comportements des assurés en terme de rachat pour les anciennetés de 1an à 3ans sont presque les mêmes ainsi que pour le produit 1 les assures ont tendances à racheter leurs épargnes à partir l'ancienneté 20 ans ce qu'est logique vu qu'on parle d'un produit de capitalisation, donc on peut expliquer ça par la duration de ce produit. Nous constatons également que le comportement des assurés du produit 2 est similaire à celui des assurés du produit 1. C'est pour cette raison, on a supposé que pour les anciennetés comprises entre 8 et 25 ans, les deux produits ont la même probabilité de rachat.

Nous supposons à travers ce graphique que notre compagnie d'assurance a constaté à travers d'études statistiques un rachat structurel constant de 10% pour les trois produits lorsque l'ancienneté de l'assuré est supérieure ou égale à (24ans, 24 ans et 4ans respectivement pour les produits 1,2 et 3).

Le rachat intervient si l'assuré est vivant et son montant se calcule de la manière suivante :

$$MontantRachat(N) = \sum_{i=1}^{n} PM_{N-1}(i) * \tau_K(i) * p_x(i)$$

Avec $p_x(i)$: la probabilité de survivre de l'assuré id'âge x.

n : Le nombre des assurés.

3.1.2 Rachats conjoncturels

Ils interviennent dans un contexte fortement concurrentiel lorsque l'assuré arbitre son contrat d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assurantiels, bancaires ou immobiliers). Ils dépendent donc de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance.

3.2 Les décès

Comme pour les rachats, les décès interviennent au début. Nous rappelons que les décès sont supposé déterministes en fonction de l'âge. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que le montant de décès d'un assuré est égal à sa provision mathématique de clôture multipliée par la probabilité de décès.

$$MontantDécès(N) = \sum_{i=1}^{n} PM_{N-1}(i) * q_x(i)$$

Avec q_x : la probabilité de décès de l'assuré i d'âge x.

3.3 Les sorties à terme

Le montant des contrats qui arrivent à terme au cours de l'année de projection se calcule comme suit :

$$MontantTerme(N) = \sum_{i=1}^{n} (PM_{N-1}(i) + Primes(i) + revalorisation(i))$$

3.4 Les primes

Les primes de l'année N proviennent uniquement des contrats existant de la projection. Pour un contrat i considéré, sa prime mensuelle est la moyenne des primes de l'historique. D'où, la prime annuelle payable au début d'année est :

$$Prime(N) = 12 * \sum_{i=1}^{n} PrimeMensuelle(i)$$

3.5 Les pénalités de rachat

La pénalité de rachats est le montant retiré à l'épargne de l'assuré suite à un rachat avant une date convenue dans le contrat.

$$MontantPénalitRachat(N) = \sum_{i=1}^{n} MontantRachat(i) * TauxPénalité$$

3.6 Les frais

L'ensemble des frais modélisés de notre société d'assurance est payé au début d'année et calculé de la façon suivante :

- Frais encours :

$$FraisEncours(N) = \sum_{i=1}^{n} PM_N(i) * TauxFraisEncours$$

- Les chargements de gestion, d'acquisition et de fractionnement s'expriment en pourcentage des primes, ils sont prélevés lors du paiement de la prime.
- Le TMG (Montant garanti) est le montant que l'assureur garantit chaque année de projection, il est calculé comme suit :

$$MontantGaranti(N) = \sum_{i=1}^{n} PM_{debutannéeN}(i) * TauxTechnique$$

Chapitre 3 : Modélisation et Projection des flux de l'actif

Nous allons maintenant présenter la modélisation stochastique de la partie Actif.

1 Hypothèses liées à l'actif

- Les actifs sont supposés infiniment divisibles;
- Le marché est supposé liquide, c'est-à-dire qu'il est possible d'acheter ou de vendre ses actifs à tout instant ;
- La compagnie « Y » achète ses actifs sans coût de transaction ;
- Seuls les trois types d'actifs suivants sont modélisés :
  - Actions
  - Obligations à taux fixe
  - le monétaire.
- L'assureur est supposé garder la même allocation du portefeuille tout au long de la projection. Autrement dit, à la fin de chaque année, la répartition des trois types d'actifs dans le portefeuille sera toujours la même que celle de départ ;
- Le réinvestissement en obligations se fait uniquement dans des obligations possédant des caractéristiques définies au départ, à savoir qu'elles sont sans risque, au pair, avec une certaine maturité.

2 Modélisation et Projection de l'obligation

En assurance vie, la modélisation de la courbe des taux est essentielle car elle permet d'atteindre les deux objectifs principaux suivants :

- Au passif, elle sert de facteur d'actualisation pour les engagements de l'assureur. Plus précisément, elle permet de donner une valeur de marché au passif de la compagnie en actualisant chacun de ses flux, selon leurs maturités, aux taux zéro-coupons de la courbe.
- À l'actif, elle est utilisée pour reproduire l'évolution des prix des produits de taux, notamment le portefeuille obligataire, et par conséquent elle permet de protéger l'assureur contre les risques liés aux variations défavorables des taux d'intérêt.

2.1 Pourquoi choisir de travailler sur la courbe zéro-coupon ?

Construire une courbe de taux à partir d'obligations “classiques”, dotées d'un coupon, créerait une courbe souffrant d'un certain nombre d'incohérences. Ainsi, par exemple deux obligations ayant la même échéance mais une duration très différente, n'auront pas le même taux de rendement. De même, en partant de deux coupons identiques appartenant à deux obligations de maturité différente ne seront pas actualisés au même taux de rendement, alors qu'ils génèrent un flux strictement identique. Pour cette raison, nous allons traiter la courbe zéro-coupon dont nous citerons les caractéristiques dans ce qui suit.

2.1.1 Définition de la courbe des taux zéro-coupon:

a. L'obligation zéro-coupon :

Comme le nom l'indique, une obligation zéro-coupon (également nommée « obligation de capitalisation » ou « Strip » en anglais) ne verse aucun flux intermédiaire (coupon) et ne donne lieu qu'à un seul flux de remboursement à sa date d'échéance.

b. Le prix zéro-coupon :

Le prix $P(t,T)$ d'un bon zéro-coupon de maturité T à un instant $t(t < T)$ correspond à la valeur en cette date t d'une unité monétaire payée à $T(P(T,T) = 1)$ sans paiements intermédiaires entre les deux dates. Nous supposerons dans toute la suite que le prix zéro-coupon est un processus positif strictement et adapté sur un espace de probabilité filtré(Ω, F, P).

c. Le Taux zéro coupon

Communément connu comme étant le taux le plus utile sur le marché financier, le taux zéro-coupon à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années sans flux intermédiaires.

A chaque fois que l'on parle d'évaluation de produits financiers, qu'il s'agisse d'obligations, d'options ou autres, le taux zéro-coupon est forcément évoqué. Le taux zéro-coupon permet l'actualisation des flux à une date donnée, ce qui constitue en fait le principe de l'évaluation d'un actif quelconque. L'intérêt du taux zéro-coupon dans ce sens, apparaît principalement à travers son unicité. En effet, pour une maturité donnée il n'existe qu'un seul taux zéro-coupon permettant l'actualisation à une date préalable t.

En temps continu, à une date t le taux zéro-coupon correspondant à une maturité T est obtenu à partir du prix $P(t,T)$ défini précédemment en appliquant la relation :

$$\boldsymbol{R(t,T)} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T-t}}\mathbf{ln}(\boldsymbol{P(t,T)})$$

2.2 Construction de la courbe de Zéro-coupon par la méthode de Boostrap

Le « Bootstrap » est une procédure de reconstitution d'une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est-à-dire segment de maturité par segment de maturité. Cette méthode est basée sur l'hypothèse, que le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux. En pratique cela revient explicitement à :

- **Pour la partie de maturité inférieure ou égale à 1 an :**

Sur le court terme, les instruments négociés sont en général des instruments zéro-coupon. Effectivement, un prêt monétaire est remboursé en même temps que les intérêts à la date d'échéance. Le taux zéro-coupon est alors simplement fournit par une conversion de base du taux monétaire vers un taux actuariel selon la formule :

$$\boldsymbol{r_{a,t}} = \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{r_m \times n}}{\mathbf{360}}\right)^{\frac{1}{t}} - \mathbf{1}$$

Avec :r_m :taux monétaire(sur base de 360 jours)

N= nombre de jours exact du placement

r_a : Taux zéro-coupon actuariel

t : Fraction d'année du placement ou encore maturité (=$\frac{n}{365}$ puisque nous considérons une année de 365 jours)

Cette formule est appelée formule de transformation des taux ou encore formule de conversion actuarielle.

Ensuite, pour des maturités voulues non-figurantes parmi celles obtenues, on procède par interpolation.

Pour les maturités supérieures à 1 an :

Nous rappelons tout d'abord que les taux publiés pour les maturités supérieures à un an sont à la base des taux actuariels donc l'utilité de la conversion se limite à la partie précédente. Nous commençons alors par déterminer à partir des taux actuariels fournis ceux des ténors de la courbe notamment pour les maturités 1 an, 2 ans, 3 ans… etc avant de calculer les taux zéro-coupon correspondant.

Pour la maturité 2ans :

Rappelons-nous d'abord que toute obligation versant des coupons peut être considérée comme un ensemble de zéro-coupons. Son prix (théorique) est donc, par conséquent, équivalent à la somme des valeurs actuelles de ces zéro-coupons. Ainsi, pour calculer le taux zéro-coupon de l'échéance à 2 ans par exemple, on observe le prix et les caractéristiques (flux contractuels) d'une obligation à cette échéance et on la décompose à deux zéro-coupon : le premier versant un flux égal au montant du coupon à une maturité d'un an et le deuxième versant un flux égal à la somme du montant du coupon et celui du remboursement du nominal avec une maturité de deux ans.

A ce niveau, le facteur d'actualisation du premier flux est déjà connu grâce à l'étape précédente et l'on déduit le facteur d'actualisation du second flux en résolvant l'équation :

$$\frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,2})}+\frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,2})^2}+\frac{1}{(1+r_{a,2})^2}=\frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,1})}+\frac{r_{a,2}}{(1+R(0,2))^2}+\frac{1}{(1+R(0,2))^2}$$

Avec: $r_{a,1}$: taux actuariel correspondant à la maturité 1 an.

$r_{a,2}$: Taux actuariel correspondant à la maturité 2 ans.

$R(0{,}2)$: Le taux zéro-coupon de maturité 2.

En général pour une maturité de n années :

Disposant des taux actuariels de toutes les maturités et des taux zéro-coupon correspondants aux maturités inférieures à n, le calcul du taux zéro-coupon $R(0,n)$ se fait par la résolution de l'équation :

$$\frac{1}{(1+r_{a,n})^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{a,n}}{(1+r_{a,n})^i}=\frac{1}{(1+R(0,n))^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{a,n}}{(1+R(0,i))^i}$$

Nous avons automatisé le calcul de zéro-coupon à la base du taux actuariel sous VBA.

Ainsi pour réaliser la construction de zéro-coupon, nous avons utilisé les taux de Bons de trésor publié le 01/04/2021 par le BAM.

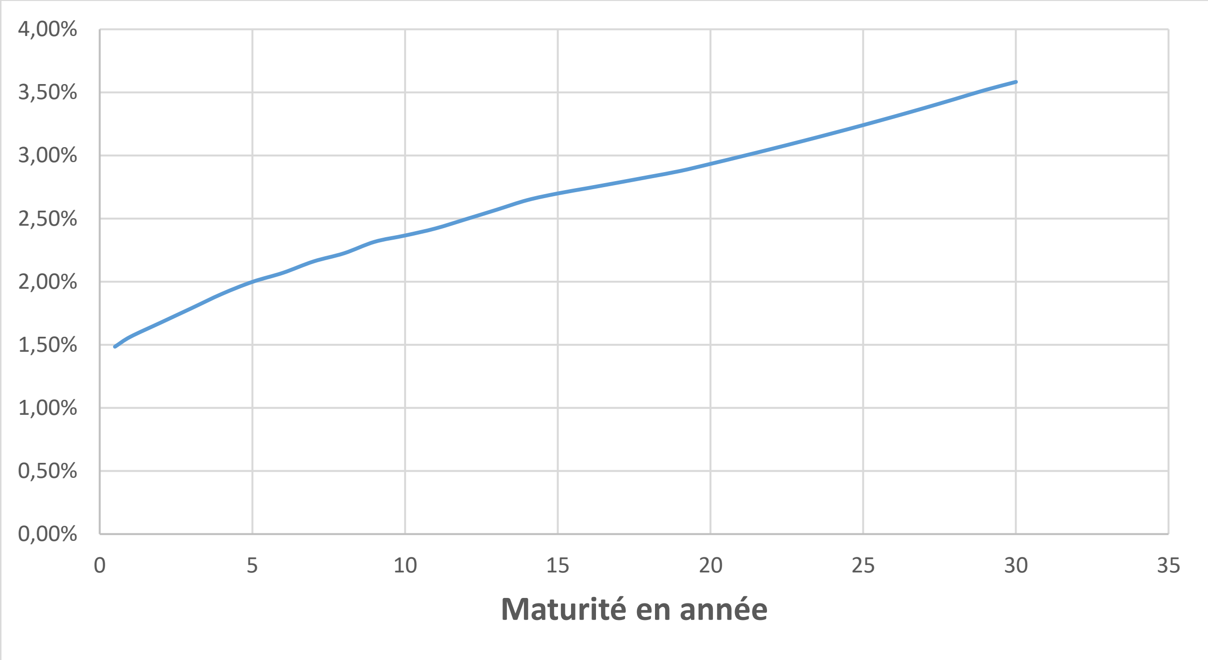

Figure 6 : Taux de Zéro-Coupon par la méthode Bootsrap au 01/04/2021

2.3 Modélisation stochastique de la courbe de Zéro-coupon [14][1]

2.3.1 Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross

Développé en 1985, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) permet de modéliser la structure par terme des taux d'intérêt. Tout en conservant le principe de retour à la moyenne, ce modèle introduit un processus racine carrée qui ne permet pas l'apparition de taux négatifs. Il possède l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et il fournit des formules explicites des prix des zéro-coupons et des obligations. C'est ce qui fait de lui un modèle mieux réputé que le modèle de Vasicek.

2.3.1.1 Présentation du modèle

Selon Cox, Ingersoll et Ross, l'évolution du taux d'intérêt instantané «r_t» est modélisée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$$

Où :r_t est le taux court à la date t, tel que $r(0) = r_0$ a t=0 ;

a est la vitesse de retour à la moyenne ;

b: est le taux moyen à long terme ;

[1] La partie théorique de cette partie a été développée en se basant sur cette référence indiquée.

σ : est la volatilité, telle que $\sigma\sqrt{r_t}$ correspond à l'écart type instantané du taux d'intérêt ;

B_t : est un mouvement brownien standard.

À l'aide de ce modèle, la simulation des taux instantanés va nous permettre de définir une courbe des taux CIR, à partir de laquelle nous allons estimer la valeur de marché des obligations. Cependant, deux étapes sont indispensables avant de débuter les simulations, Celles-ci sont la discrétisation du modèle et l'estimation de ses paramètres.

2.3.1.2 Discrétisation du modèle

Au niveau de l'implémentation de ce processus, la discrétisation pose problème car celui-ci n'admet pas de solution exacte à court terme. Il faut donc faire appel à des techniques de discrétisation approximative. À ce titre, nous optons pour l'utilisation du schéma explicite d'Euler. Celui-ci propose l'approximation de premier ordre suivante :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t \Delta t}\varepsilon_t$$

Avec :

Δt : Le pas utilisé pour la modélisation

ε_tLa réalisation d'une loi normale centrée réduite.

À partir de là, il suffit de générer une loi normale centrée réduite et ensuite de procéder par récurrence pour obtenir les taux courts instantanés jusqu'au terme de notre horizon de projection. Il nous faut désormais estimer les paramètres $a, b\ et\ \sigma$.

2.3.1.3 Calibrage du modèle

2.3.1.3.1Estimation de la volatilité σ

L'estimation de la volatilité est obtenue à partir de l'écart type des observations journalières du taux moyen pondéré du marché interbancaire publié par Bank Al-Maghrib.

Dans le cadre de notre étude, les observations journalières TMP prises en compte s'étalent de 01/01/2015 à 01/04/2021, dont l'écart type est le suivant :

$$\boldsymbol{\sigma = 0,002958249}$$

2.3.1.3.2Estimation des paramètres a et b :

Pour des processus n'admettant pas de solution exacte, il est déconseillé d'estimer leurs paramètres via la méthode du maximum de vraisemblance, car cela peut conduire à des résultats biaisés. Il va donc falloir faire appel à une méthode plus adéquate pour ce genre de situation.

Ainsi, nous allons reformuler l'équation de discrétisation d'Euler sous forme de régression linéaire, pour ensuite estimer les paramètres du processus CIR en ayant recours à la méthode des moindres carrés ordinaires :

Les paramètres initiaux sont obtenus en minimisant la fonction suivante :

$$\sum_{i}\left(\frac{r_{ti+1}-r_{ti}}{\sqrt{r_{ti}}}-\frac{ab}{\sqrt{r_{ti}}}+a\sqrt{r_{ti}}\right)^{2}$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

$a = 0,0001768$
$b = 0,0227155$

Les paramètres du modèle de CIR étant estimés, nous pouvons désormais utiliser la discrétisation d'Euler pour représenter l'évolution des taux courts sur les prochaines années. Rappelons que pour un pas de discrétisation d'une année, nous avons :

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t$$

Pour chaque année projetée, nous avons effectué, sous Excel, 500 simulations du taux court à partir du paramétrage suivant :

$$t_0 = 01/04/2021$$

$r_0 = 1,50\%$

ε_t est la réalisation d'une loi normale centrée réduite obtenue à l'aide du générateur pseudo aléatoire « Rand () » d'Excel et l'inverse de la loi normale.

Nous obtenons la représentation graphique ci-après où nous n'avons gardé que 50 simulations des taux courts pour une meilleure lisibilité.

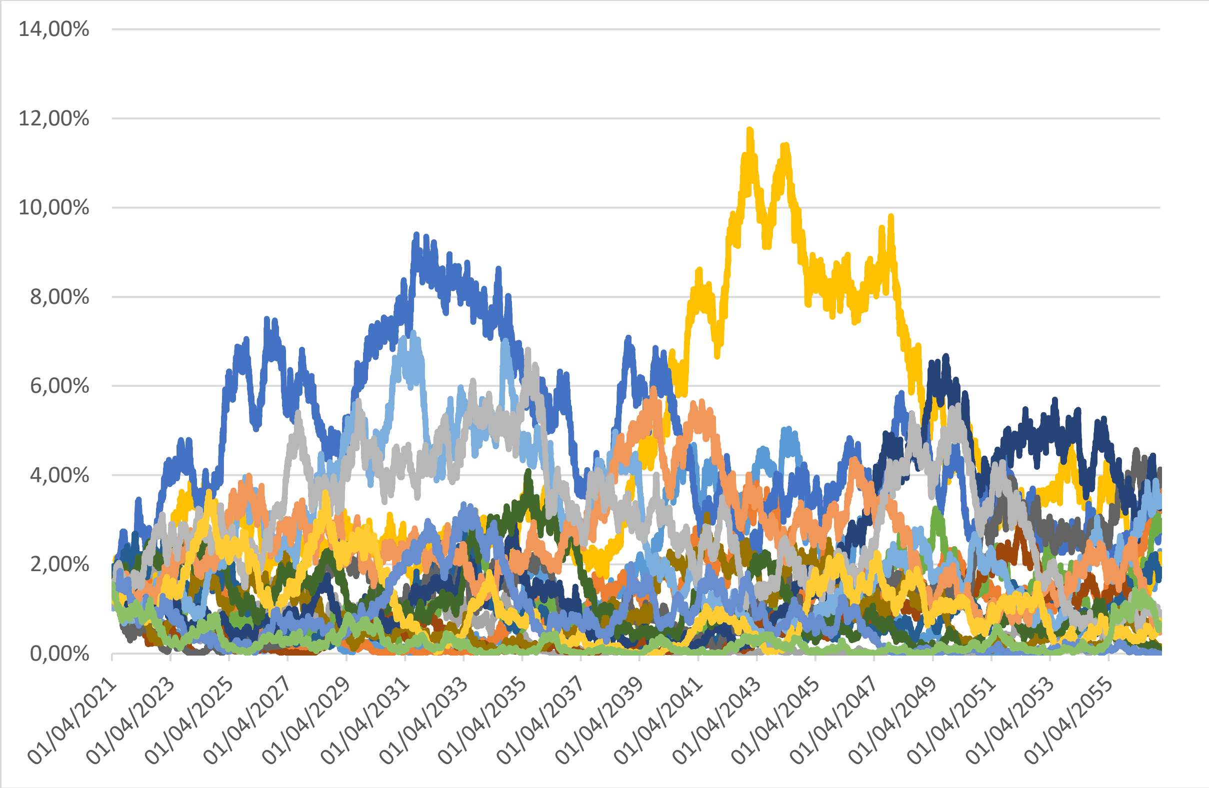

Figure 7 : 20 simulations des taux courts du modèle de CIR

Nous obtenons par méthode de Monté-Carlon(500 simulations) la prévision des taux pondérés.

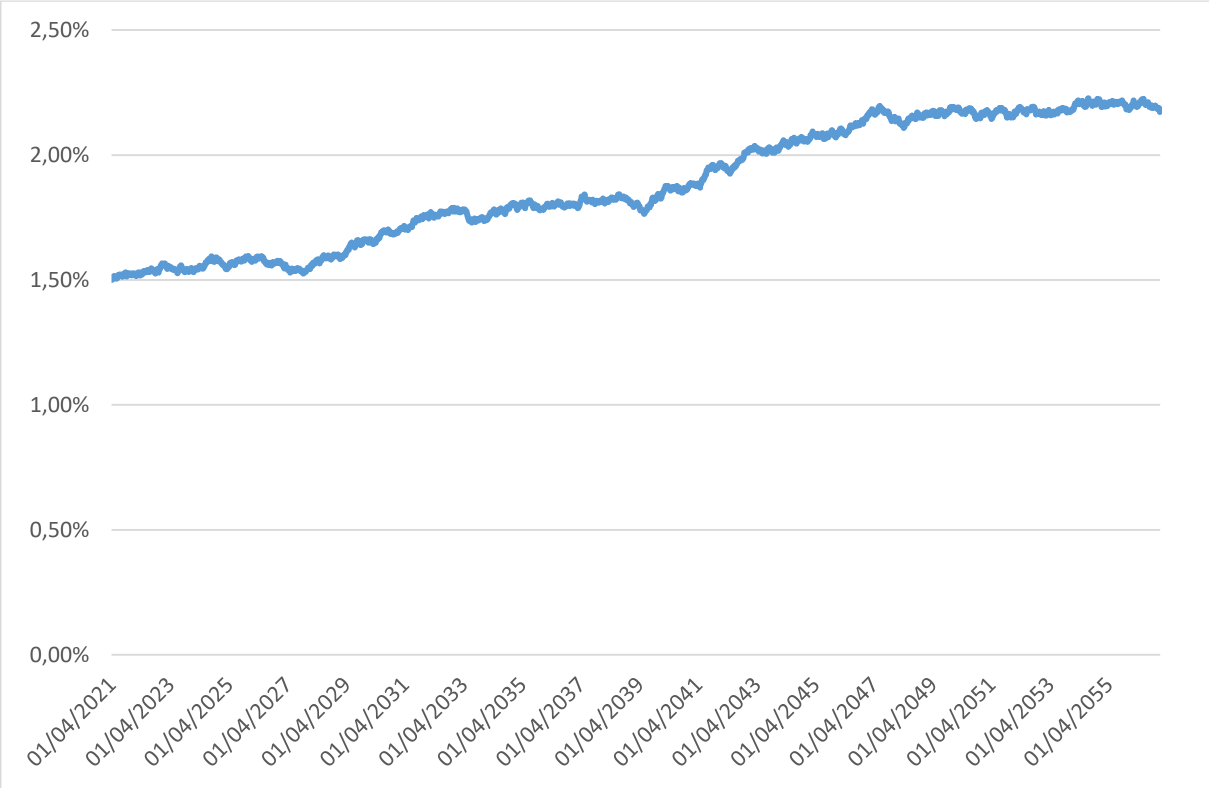

Figure 8 : Prévision du taux moyen pondéré

2.3.1.4 Simulation de la courbe des taux zéro-coupons

Après avoir représenté la courbe des taux courts selon le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, nous pouvons désormais en déduire la courbe des taux zéro-coupons.

2.3.1.4.1Prix des zéro-coupons

Le prix à la date d'une obligation zéro-coupon de maturité est donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{P(t,T) = A(t,T)\exp(-B(t,T)r_t)}$$

Avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{A(t,T) = \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+a+\lambda)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}} \\ \boldsymbol{B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}} \\ \boldsymbol{\gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2}} \end{cases}$$

2.3.1.4.2 Taux zéro-coupons

Les taux zéro-coupons sont obtenus à partir des prix des obligations zéro-coupons en appliquant la formule suivante :

$$\boldsymbol{R(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}}$$

2.3.1.4.3Estimation de la prime de risque

Afin de construire la courbe du taux zéro coupon par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, nous devons faire l'estimation de λ. Celle-ci est obtenue par la minimisation des écarts au carré entre les rendements théoriques et les rendements du marché à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

Nous allons travailler sur la courbe de taux correspondante au 01/04/2021. Nous allons initialiser par zéro, et puis utiliser le solveur Excel pour calculer la valeur qui minimise les écarts pour cette date. On trouve comme estimation de la prime de risque :

$$\boldsymbol{\lambda = -0,056785072}$$

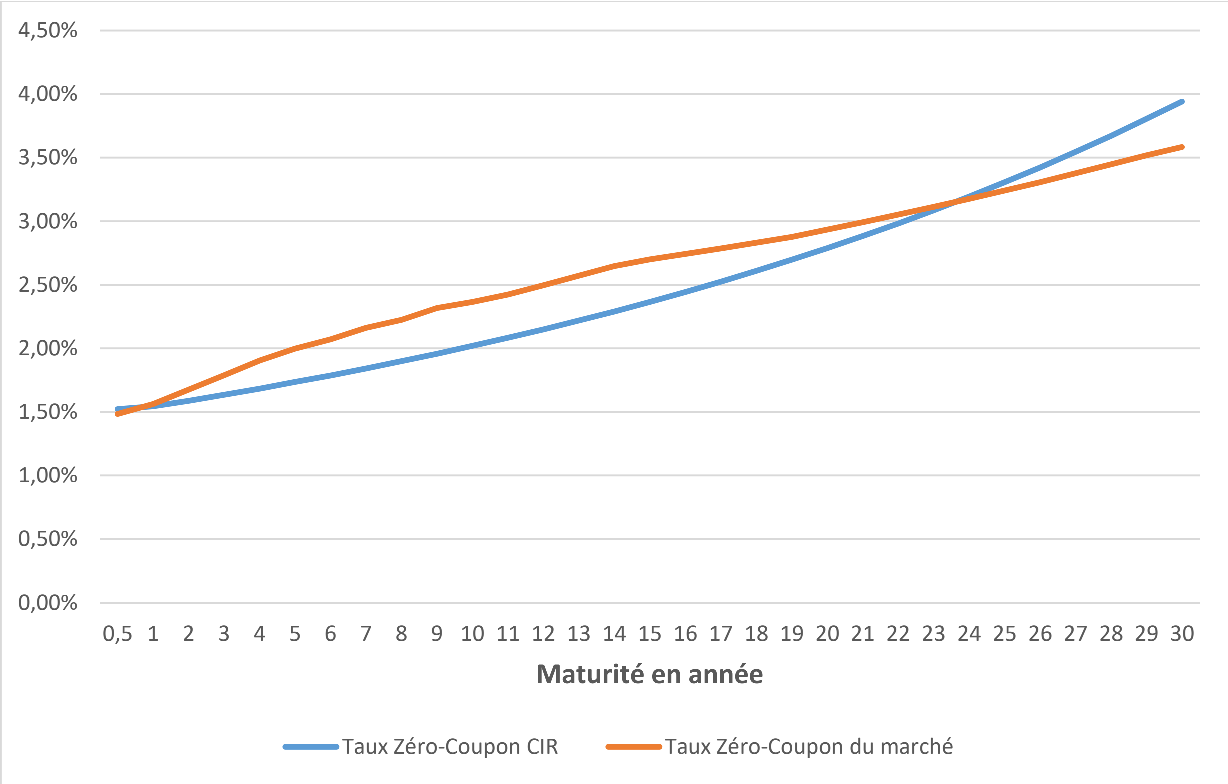

Figure 9 : La structure par terme des taux du modèle de CIR et des taux du marché

2.3.1.5 Projection des flux générés par le fonds obligataire

Le portefeuille obligataire de la compagnie est constitué uniquement d'obligations d'Etat (sans risque de défaut) de valeur nominale égale à 1000 DH. Celles-ci sont achetées au pair (les valeurs d'achat, de remboursement et nominales sont toutes égales).

Le coupon de chaque obligation est déterminé à l'achat comme celui qui égalise le prix d'achat et la valeur des flux futurs actualisés avec la courbe des taux zéro-coupons du modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

En effet, la valeur d'achat d'une obligation à la date t est égale à la somme de ses flux de trésorerie futurs (coupons et remboursements) actualisés avec les taux zéro-coupons:

$$\boldsymbol{V_t = \sum_{i=t+1}^{T} \frac{c \times N}{(1 + R(t,i))^i} + \frac{V_R}{(1 + R(t,T))^T}}$$

Avec :

T :la maturité de l'obligation ;

$R(t,T)$:le taux zero-coupon calculé a la date t et de maturité T ;

Or, il s'agit d'une obligation au pair $\boldsymbol{V_t = N = V_R}$ donc le coupon est déduit de la relation suivante :

$$\boldsymbol{c = \frac{1 - \frac{1}{(1+R(0,T))^T}}{\sum_{i=1}^{T} \frac{1}{(1+R(0,i))^i}}}$$

En partant de ces relations, le flux généré par les obligations se calcule comme suit :

$$\boldsymbol{Flux(Obliation\ de\ l'ann\acute{e}e\ N) = \sum_{j=1}^{M} C(j) * N(J) * NombreObligation(j) + ValeursRemboursement(N)}$$

Avec $ValeursRemboursement(N)$: c'est la somme des valeurs de remboursement des obligations qui arrivent à maturité à l'année N.

M : Le nombre des obligations de maturité différente détenues dans le portefeuille.

3 Modélisation et projection du cours des actions

Le cours des actions est simulé par une méthode stochastique .De nombreux modèles ont été proposés pour modéliser l'évolution du cours des actions et une littérature abondante est consacrée à ce sujet.

On peut faire remonter l'idée de modéliser l'évolution des cours par ce que nous appelons aujourd'hui un processus stochastique à BACHELIER [1990] qui, dans sa thèse de doctorat, utilise la loi normale pour modéliser le prix d'un actif boursier. Le modèle de référence est proposé par BLACK et SCHOLES [1973] en considérant le mouvement brownien géométrique comme processus décrivant les trajectoires des prix des actifs financiers. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc. un certain nombre d'observations empiriques contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et au surplus les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale. Pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduits, en décrivant l'arrivée des sauts par le processus de poisson

(MERTON[1976]),ou par des processus mixtes brownien Poisson (BELLAMY [1999]), ou encore des martingales discontinues (DRITSCHEL et PROTTER [1999]). Pour modéliser les variations de la volatilité, des modèles à volatilité stochastique (dirigés par des mouvements browniens) sont apparus, comme par exemple HULL et WHITE [1987].

Dans ce mémoire, nous avons utilisé le modèle de référence de BLACK & SCHOLES pour modéliser l'action.

3.1 Le modèle de Black and Scholes [15][2]

3.1.1 Principes de bases

3.1.1.1 Le mouvement brownien

Un processus stochastique $(X_t, t \in T)$ est une suite de variables aléatoires indexées sur le temps t, à valeurs dans un ensemble défini. Une réalisation d'un processus stochastique est appelée trajectoire.

Dans les modèles stochastiques utilisés en finance, la partie aléatoire du processus de prix est souvent représentée par un mouvement brownien.

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé, et soit un processus$(B_t, t \in [0, +\infty])$ sur cetespace. Le processus$(B_t, t \in [0, +\infty])$ est dit mouvement brownien si :

- $B_0 = 0$ presque surement $(P(B_0 = 0) = 1)$;
- $B_t$est accroissement stationnaire;
- $B_t$est accroissement indépendant

3.1.1.2 Le lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est utilisé dans les processus stochastiques. Si Xest la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\boldsymbol{X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)\, ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)\, dB_s}$$

Le processus d'Itô s'écrit :

$$\boldsymbol{dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB_t}$$

Avec B_t un mouvement brownien, μ le drift et σ la volatilité

Si $f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors :

[2] La partie théorique de cette partie a été développée en se basant sur cette référence indiquée.

$$df(t,x) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X(t),t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(X(t),t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(X(t),t)\frac{\partial f}{\partial x}dB_t$$

3.1.2 Présentation du modèle

Dans le modèle de Black and Scholes, les cours des actions «S_t » évoluent selon un processus stochastique de mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Avec :

- μ:la moyenne du rendement des actions, constante ;
- σ:l'écart type du rendement des actions, constant lui aussi ;
- S_t:le prix de l'action à l'instant t > 0 et prend la valeur en ;
- B_t:un mouvement brownien standard.

En appliquant le lemme d'Itô à$\boldsymbol{Y_t = \ln S_t}$ et la condition à l'origine $S(0) = S_0$nous obtenons une solution explicite de l'équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

De ces deux formules, nous déduisons la discrétisation exacte :

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma(B_{t+1} - B_t)\right)$$

Comme $B_t$est un mouvement brownien, l'accroissement $B_{t+1} - B_t$ suit une loi normale centrée réduite.

Ainsi le rendement du fond d'actions entre les deux dates successives et, donnée par l'équation ci-dessous, suit une loi normale de moyenne $\boldsymbol{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}$et de variance $\boldsymbol{\sigma^2}$

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(B_t - B_{t-1})$$

3.1.3 Application du modèle de Black and Scholes

3.1.3.1 Description des données retenues

Pour modéliser la dynamique des cours des actions nous avons choisi comme benchmark, l'indice MASI. La raison pour laquelle nous avons opéré ce choix est due, non seulement au fait qu'il présente l'évolution du marché marocain dans son ensemble et fournit une référence à long terme, mais aussi parce qu'il est réputé pour avoir connu de grandes variations.

Nous disposons d'observations quotidiennes (5 jours par semaine) des cours pour la période du 1er janvier 2015 au 1er avril 2021, dont l'évolution durant cette période est représentée par le graphique suivant. L'unité utilisée est le jour.

Figure 10 : L'évolution du cours du MASI entre janvier 2015 et avril 2021

L'indice MASI a connu une forte variation entre 2015 et 2021. Plus précisément, il a connu une baisse jusqu'à 2016 (de 9 643,19 points à 8 989,49 points). Ensuite, il est parti à la hausse jusqu'à 2018(13000 points).Puis revenir à la baisse en 2020(9000 points).

A partir de ces cotations, nous obtenons les rendements journaliers du MASI en appliquant la formule suivante :

$$\boldsymbol{Rendement(t)_{MASI}} = \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{Valeur(t)_{MASI}}}{\boldsymbol{Valeur(t-1)_{MASI}}}\right)$$

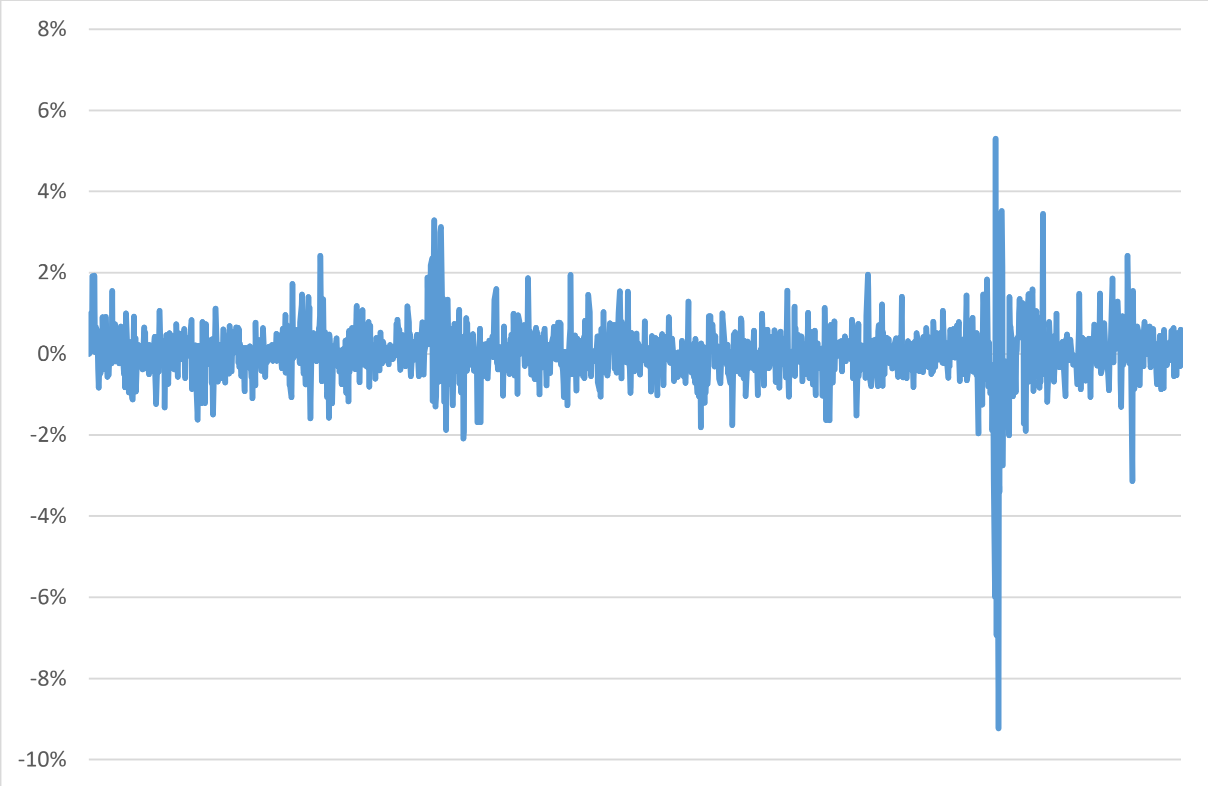

Figure 11 : L'évolution des rendements du MASI entre janvier 2015 et avril 2021

La série des rendements du MASI, représentée ci-dessous, semble stationnaire, sans tendance marquée à long terme, avec un rendement en moyenne compris entre -10% et 6%.

3.1.3.2 Estimation des paramètres

À partir des observations retenues « rendement journalier du MASI » pour calibrer le modèle des actions nous obtenons les estimateurs des paramètres théoriques :

- La moyenne historique des rendements :

$$\boldsymbol{\mu - \frac{\sigma^2}{2} = 0,01165\%}$$

- L'écart type historique des rendements:

$$\boldsymbol{\sigma = 0,73044\%.}$$

3.1.3.3 Simulation de la trajectoire du cours des actions

Le but de ce paragraphe est de simuler les trajectoires du cours de notre fonds d'actions sur une période de projection précise en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Etant donné que le processus représentant le cours des actions est continu, il est d'abord nécessaire de trouver une discrétisation exacte de celui-ci avant de lancer la simulation.

Ainsi, pour un mouvement brownien géométrique et en choisissant comme pas de discrétisation $\boldsymbol{\Delta t}$, nous obtenons le schéma récursif exact suivant :

$$\boldsymbol{S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right)}$$

Où ϵ représente la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Notons que lorsque nous prenons en considération la corrélation entre les taux de rendement des actions et les taux courts, la relation ci-dessus devient telle que :

$$\boldsymbol{S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\rho\sqrt{\Delta t}B_1 + \sigma\sqrt{(1-\rho^2)\Delta t}W_1\right)}$$

Avec W_1 et B_1 deux mouvements browniens indépendants, et ρ le coefficient de corrélation. Nous effectuons 500 simulations de trajectoires sous Excel, avec le paramétrage suivant :

- Projection sur 30 ans.

- Pas de discrétisation : 1

Nous obtenons la représentation graphique suivante (S(0) = 11 552,78) (pour une meilleure lisibilité seulement 20 simulations ont été représentées).

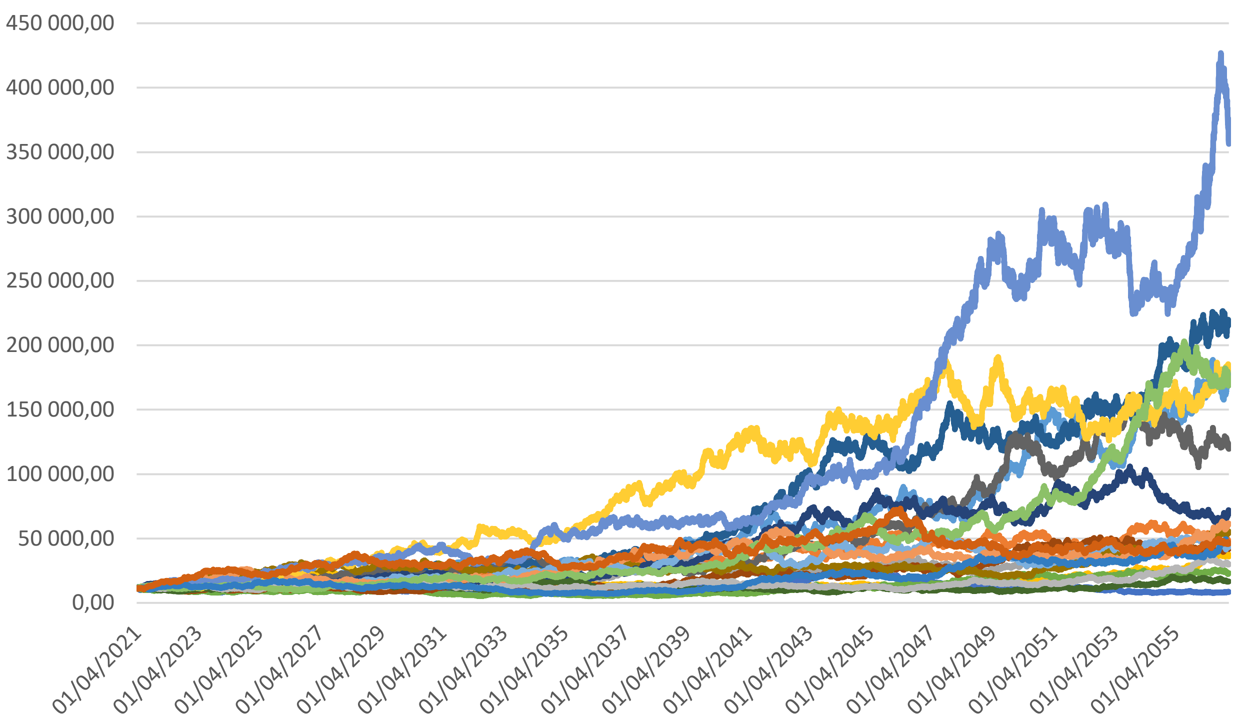

Figure 12 : La représentation de 20 trajectoires du cours des actions pour S(0)= 11 552.78

3.2 Projection des flux générés par le portefeuille actions

Les Flux dégagés par les actions détenues au sein du portefeuille de placements sont obtenus à partir de la formule suivante :

$$\boldsymbol{Flux(action\ de\ l'année\ N) = VM_N * TauxDividende}$$

Avec :

$$\boldsymbol{VM_N = VM_{N-1} * \exp(r_N)}..$$

$$\boldsymbol{et\ VM_0 = S_0 * NombrePartAction_{N-1}}$$

$$\boldsymbol{NombrePartAction_0 = \frac{ValeursAction(0)}{S_0}}\ .$$

$$\boldsymbol{r_N = \ln\left(\frac{S_N}{S_{N-1}}\right)}.$$

Voici l'évolution du rendement annuel de l'indice MASI :

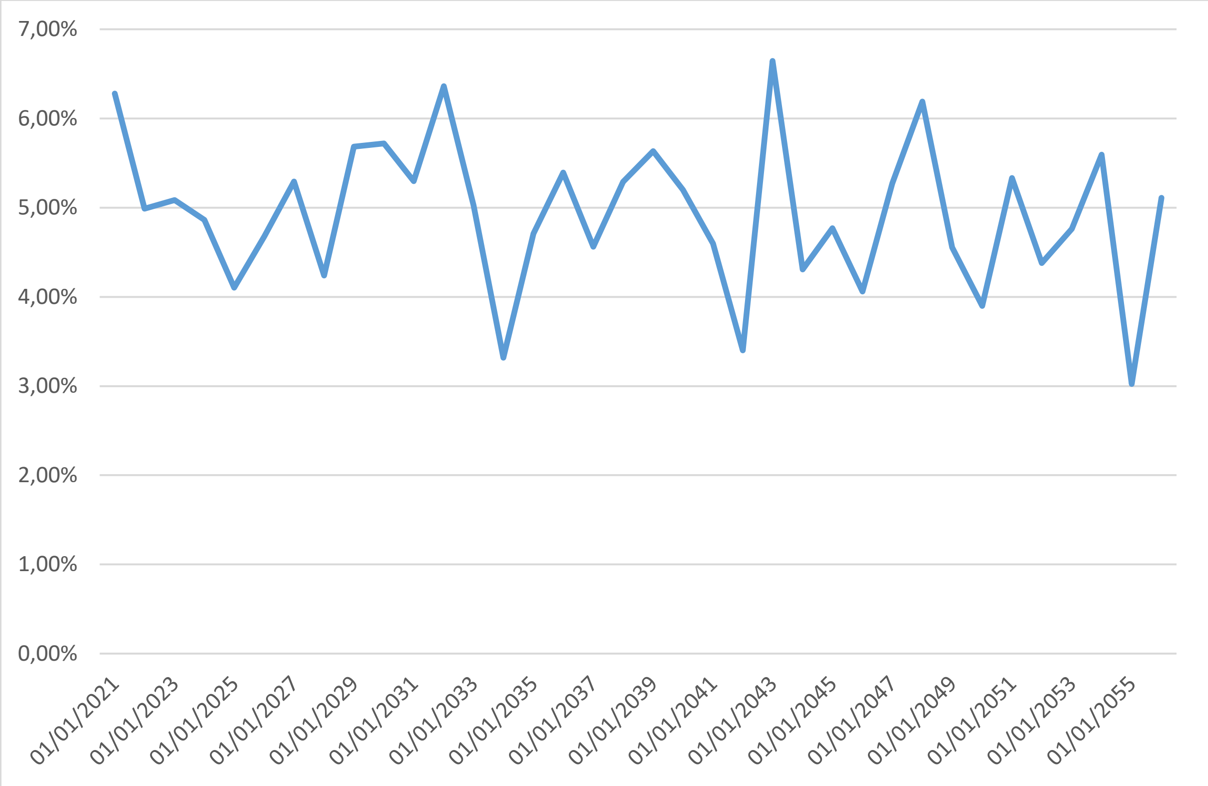

Figure 13 : L'évolution du rendement annuel de l'indice MASI

Nos prévisions montrent que le rendement de l'indice MASI va fluctuer entre 3% et 7%.

4 Modélisation et projection des flux monétaires

Pour les rendements du monétaire, nous conservons les taux sans risque de maturité une année obtenus lors de la modélisation stochastique du taux zéro-coupon (voir 2.3.1.4.2 Taux zéro-coupons) et les flux générés par le monétaire sont calcules comme suit :

$$\mathbf{Flux}(\boldsymbol{monétaire\ de\ l'année\ N}) = \boldsymbol{VM_{N-1}} * \boldsymbol{Taux\ sans\ risque_N}$$

Conclusion de la deuxième partie

L’objet de cette partie était de faire la projection des éléments du passif pour voir l’évolution des engagements de notre compagnie d’assurance vie qu’on va l’utiliser dans la partie suivante, et aussi de présenter un modèle stochastique de génération de scénarios économiques permettant de suivre certains comportements des taux d’intérêt et des marchés financiers. Ces modèles d’actifs stochastiques vont nous permettre dans la suite du mémoire de projeter les classes d’actifs (actions, obligations et le monétaire) d’une part et de l’autre de déterminer les produits financiers de ces classes.

Partie III : Interaction Actif-Passif et allocation stratégique d'actifs

Après avoir effectué les différentes modélisations du passif et de l'actif de notre compagnie « Y », dans cette troisième partie, nous allons montrer le fonctionnement du modèle ALM qui permet de gérer l'adéquation entre les flux du passif (Décès, rachats, sortie à terme, Primes,…) et les flux de l'actif (Coupons, dividendes, intérêts reçus, …). Pour une meilleure gestion de cette adéquation, la compagnie doit déterminer la composition de son portefeuille d'investissement qui doit lui permettre de répondre à un objectif de performance financière tout en respectant ses engagements pris vis-à-vis des assurés. Pour trouver l'allocation que la compagnie « Y » doit adopter, nous avons fait recours au modèle de l'optimisation à savoir le modèle de Markowitz et le modèle de Sharpe et Tint.

Chapitre 1 : Allocation stratégique d'actifs

En réalité, le gestionnaire actif passif est intéressé par la « meilleure » allocation de placements. Ceci étant dit, la notion de « meilleure » allocation nécessite de retenir une relation d'ordre entre les différentes allocations possibles. Le gestionnaire actif passif doit donc réfléchir sur l'objectif qu'il cherche à atteindre. L'objectif étant déterminé, il faut alors formaliser le problème d'optimisation sous contraintes de cette fonction objectif et ensuite le résoudre. On parle alors de problème d'optimisation c'est-à-dire quelle allocation optimale d'actifs permettra-t-elle de rendre maximal la fonction objectif ?

Pour répondre à cette question et dans le cadre de ce mémoire, nous aborderons dans un premier temps, le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, qui permet de déterminer une allocation optimale en minimisant la variance du portefeuille sous hypothèse d'un rendement cible donné, de façon à obtenir un portefeuille optimal au sens rendement-risque. Et dans un second temps, le modèle de Sharpe et Tint très similaire à celui de Markowitz qui permet de prendre en compte la croissance du passif et qui consiste à étudier le rendement du surplus sera aussi abordé.

1 Le modèle de Markowitz (1952)

Le modèle de Markowitz a été développé en 1952 et il a constitué le fondement de la théorie moderne de portefeuille. Markowitz a été le premier qui a distingué le risque du rendement et a donné des mesures : espérance et variance. Son approche « moyenne-variance » consiste à optimiser les poids des actifs du portefeuille en fonction de leurs rendements espérés, leurs variances et leurs covariances. Une fois les rendements, les variances et les covariances sont estimés, l'approche consiste en la résolution du programme qui minimise la variance du portefeuille sous contrainte d'un rendement minimum. La résolution de ce programme fournit la composition du portefeuille « efficient » et guide l'investisseur dans sa politique de diversification.

La représentation des portefeuilles efficients dans le plan (volatilité du portefeuille, rendement du portefeuille) c'est la frontière efficiente. Si on suppose que le marché est constitué de n actifs risqués, la frontière efficiente prend une forme de parabole. Dans le cadre de l'étude, et en vue d'être au plus proche de la réalité, le portefeuille est supposé être exclusivement composé de n actifs risqués [9] [12].

Notations :

n: Nombre d'actifs risqués

$\breve{R}_i$: Rendement de l'actif i du portefeuille d'actifs (scalaire)

$\breve{\tilde{R}}$: Vecteur aléatoire des rendements des actifs, de taille $n \times 1$

μ : Vecteur des rendements espérés des actifs, de taille $n \times 1$

e : Vecteur de taille $n \times 1$ contenant uniquement des 1

V : La matrice de covariance des actifs risqués du vecteur $\breve{\tilde{R}}$

x_i: Le poids de l'actif $i$dans le portefeuille

x : Le vecteur des poids des actifs du portefeuille, de taille $n \times 1$, l'inconnue du problème

$\breve{R}_A(x)$: Rendement aléatoire du portefeuille en fonction des poids

μ_p: Le rendement espéré minimum du portefeuille

σ_p : La volatilité du portefeuille optimal

<u>Hypothèse :</u>

$\breve{\tilde{R}}$: Suit une loi normale multivariée d'espérance μ et de matrice de covariance V

1.1 Le programme d'optimisation de Markowitz

Le problème d'optimisation de Markowitz s'écrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{min_x x^T V x}$$

$$\mathbf{s.c}\begin{cases} \boldsymbol{x^T \mu = \mu_p} \\ \boldsymbol{x^T e = 1} \end{cases}$$

Le lagrangien de ce problème s'exprime de la façon suivante :

$$\boldsymbol{L(x) = \frac{1}{2} x^T V x - \delta\left(x^T \mu - \mu_p\right) - \gamma(x^T e - 1)}$$

Oùδet γ sont les multiplicateurs de Lagrange.

1.2 Résolution du problème

La condition de premier ordre s'écrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\frac{dL(x)}{dx} = 0}$$

Soit :

$$Vx - \delta\mu - \gamma e = 0$$

En supposant que la matrice de covariance V est inversible :

$$x = \delta V^{-1}\mu + \gamma V^{-1}e$$

Afin de déterminer les expressions de δet de γ, nous réinjectons cette solution dans les deux contraintes du programme d'optimisation, le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \delta\mu^T V^{-1}\mu + \gamma\mu^T V^{-1}e = \mu_P \\ \delta e^T V^{-1}\mu + \gamma e^T V^{-1}e = 1 \end{cases} (S)$$

Il est par ailleurs, utile d'introduire les portefeuilles suivants :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{e^T V^{-1}e} V^{-1}e \\ x_\mu = \dfrac{1}{e^T V^{-1}\mu} V^{-1}\mu \end{cases}$$

Le portefeuille x_1 est le portefeuille de variance minimale. x_μ est un autre portefeuille plus risqué tel que $\mu \neq e$ (il n'est pas particulièrement reconnaissable). D'après ce qui précède :

$$x = (\delta e^T V^{-1}\mu)x_\mu + (\gamma e^T V^{-1}e)\, x_1$$

Or d'après le système précédent,

$$\delta e^T V^{-1}\mu = 1 - \gamma e^T V^{-1}e = \lambda$$

La solution finale s'exprime alors de la façon suivante :

$$x = \lambda x_\mu + (1-\lambda)x_1$$

Où, $\begin{cases} \lambda = \delta e^T V^{-1}\mu \\ x_1 = \frac{1}{e^T V^{-1}e} V^{-1} \quad e \\ x_\mu = \frac{1}{e^T V^{-1}\mu} V^{-1}\mu \end{cases}$

Le portefeuille optimal est donc une combinaison linéaire des deux portefeuille $x1$ et x_μ.

Expression de du coefficient λ

Soit $A = \mu^T V^{-1}\mu; B = \mu^T V^{-1}e \;\; et \;\; C = e^T V^{-1}e$

Le système précédent (S) s'écrit aussi de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

En supposant que la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ est inversible, alors :

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{AC - B^2} * \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\delta = \frac{1}{AC - B^2} * (C\mu_p - B)$$

Or, comme :

$$\lambda = \delta e^T V^{-1} \mu = \delta B$$

Alors :

$$\lambda = \frac{BC\mu_p - B^2}{AC - B^2}$$

Finalement, la solution au problème d'optimisation de Markowitz est:

$$\boldsymbol{x = \lambda x_\mu + (1 - \lambda) x_1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{1}{e^T V^{-1} e} V^{-1} e} \\ \boldsymbol{x_\mu = \dfrac{1}{e^T V^{-1} \mu} V^{-1} \mu} \\ \boldsymbol{\lambda = \dfrac{BC\mu_p - B^2}{AC - B^2}} \\ \boldsymbol{A = \mu^T V^{-1} \mu} \\ \boldsymbol{B = \mu^T V^{-1} e} \\ \boldsymbol{C = e^T V^{-1} e} \end{cases}$$

Le coefficient linéaire étant croissant avec le rendement minium imposé, l'équation ci-dessus permet de constater qu'une augmentation du rendement minimum implique un investissement plus faible dans le portefeuille de variance minimal et plus fort dans le portefeuille de variance maximal (risqué) x_μ.

1.3 Frontière efficiente

La frontière efficiente est une représentation des portefeuilles efficients de Markowitz sur le plan $(\mu_p, {\sigma^2}_p)$.

En effet, dans le cadre de Markowitz, à chaque contrainte de rendement minimum est associé un portefeuille efficient caractérisé par un niveau optimal de risque. La fonction qui pour chaque contrainte de rendement minimum μ_P du portefeuille associe la variance optimale σ_P est une parabole: $\boldsymbol{{\sigma^2}_p = \frac{A-2B\mu_P+C{\mu_P}^2}{AC-B^2}}$

Une relation de type parabolique entre la volatilité et la rentabilité du portefeuille est ainsi obtenue. Elle permet d'identifier les couples (risque, rendement) possibles avec les actifs disponible et de distinguer la frontière efficiente.

<u>Preuve :</u>

$$
\begin{aligned}
{\sigma_p}^2 &= (\lambda x_\mu + (1-\lambda)x_1)^T * V * (\lambda x_\mu + (1-\lambda)x_1) \\
&= \left(\lambda {x_\mu}^T V + (1-\lambda){x_1}^T V\right) * (\lambda x_\mu + (1-\lambda)x_1) \\
&= \left(\frac{\lambda}{e^T V^{-1}\mu} e^T V^{-1} V + \frac{(1-\lambda)}{e^T V^{-1} e} e^T V^{-1} V\right) * (\lambda x_\mu + (1-\lambda)x_1) \\
&= \left(\frac{\lambda}{B}\mu^T + \frac{(1-\lambda)}{C} e^T\right) * \left(\frac{\lambda}{B} V^{-1}\mu + \frac{(1-\lambda)}{C} V^{-1} e\right) \\
&= \frac{\lambda}{B}\mu_p + \frac{\lambda(1-\lambda)}{BC} e^T V^{-1}\mu + \frac{(1-\lambda)^2}{C^2} e^T V^{-1} e. \\
&= \frac{\lambda}{B}\mu_p + \frac{\lambda(1-\lambda)}{BC} B + \frac{(1-\lambda)^2}{C^2} C \\
&= \frac{\lambda}{B}\mu_p + \frac{\lambda(1-\lambda)}{C} + \frac{(1-\lambda)^2}{C} \\
&= \frac{\lambda}{B}\mu_p + \frac{\lambda-\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2}{C} \\
&= \frac{\lambda}{B}\mu_p + \frac{1-\lambda}{C} \\
&= \frac{\lambda C\mu_p + B(1-\lambda)}{BC} \\
&= \frac{1}{BC} * \left(\frac{BC^2{\mu_p}^2 - CB^2\mu_p + ABC - B^3 - B^2C\mu_p + B^3}{AC-B^2}\right) \\
&= \frac{C{\mu_p}^2 - B\mu_p + AB\mu_p}{AC-B^2} \\
&= \frac{A - 2B\mu_p + C{\mu_p}^2}{AC-B^2}
\end{aligned}
$$

L'avantage principal du modèle de Markowitz est sa simplicité dans l'implémentation. Cependant, ce modèle optimise un portefeuille d'actifs sans tenir compte des engagements. Ce point constitue une limite importante. En effet, un assureur est contraint par ses engagements et doit faire face à des contraintes de liquidité. Il lui faut surveiller constamment que ses actifs peuvent financer à tout moment ses engagements. C'est pourquoi, nous présentons dans ce qui suit le modèle de Sharpe et Tint.

2 Modèle de Sharpe et Tint (1990)

Le modèle théorique de base de la gestion actif-passif a été posé par Sharpe et Tint. Il met le problème d'intégration du passif dans la problématique de gestion de portefeuille et utilise une approche similaire à l'approche espérance-variance traditionnelle de Markowitz.

En effet, Sharpe et Tint ont remarqué l'hésitation de la plupart des institutions de retraite à prendre en compte le passif dans leurs stratégies de gestion. La plupart de ces institutions n'étaient pas prêtes à se défaire de l'approche traditionnelle de Markowitz. Par conséquent, un modèle qui s'en inspire tout tenant compte du passif s'est imposé.

Celui-ci est applicable à une entité possédant des actifs en face d'engagements, notamment une assurance ou un fonds de pension. En effet, dans la mesure où c'est le passif qui est contraignant, l'actif doit être géré de façon à couvrir les variations du passif.

Par conséquent, l'allocation optimale par le biais de ce modèle est différente de celle qui résulterait d'une allocation standard par Markowitz qui ne tient pas compte du passif. Elle cherche à couvrir des risques du passif et à optimiser le surplus de l'investisseur financier. Le surplus est la différence entre la valeur de l'actif et le produit de la valeur des engagements par un poids (compris en 0 et 1) [9].

2.1 Modélisation du passif

Comme les éléments du passif ne sont pas réellement échangés sur un marché, ils n'ont pas de valeur de marché à proprement dit.

Par conséquent, des règles spécifiques de comptabilité et d'actualisation sont supposées utilisées pour le calcul de la valeur initiale du passif ou des engagements à $t = 0$ noté L_0 .

Ces mêmes règles permettent alors de définir les engagements à $t = 1$ noté $\widetilde{L_1}$. Par ailleurs la croissance des engagements (variation des engagements entre l'instant initial et finale) est définie comme suit :

$$\boldsymbol{\widetilde{R_L} = \frac{\widetilde{L_1} - L_0}{L_0}}$$

Hypothèse

$\widetilde{R_L}$: Suit une loi normale multivariée d'espérance μ_L et de variance ${\sigma_L}^2$.

2.2 Modélisation de l'actif

La valeur de marché initiale des actifs détenus est notée A_0. En vue d'être au plus proche de la réalité, le portefeuille est supposé être exclusivement composé d'actifs risqués. Il existe n actifs risqués, chaque actif i possède un rendement $\widetilde{R_l}$.

Comme pour l'approche de Markowitz, la matrice de covariance de ces actifs est notée V. La stratégie d'investissement de la compagnie d'assurance consiste en le choix d'un portefeuille $x = (x_i)$ avec la contrainte suivante : $\sum x_i = 1$

La valeur de marché des actifs à $t = 1$ est : $\widetilde{A_1} = A_0\big(1 + \widetilde{R_A}(x)\big)$

Où $\widetilde{R_A}(x)$représente le rendement du portefeuille avec $\widetilde{R_A}(x) = x^T \tilde{R}\ et\ \tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \vdots \\ \tilde{R}_n \end{bmatrix}$

Hypothèse

$\tilde{R}$: Suite une loi normale multivariée d'espérance $\mu = E\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \vdots \\ \tilde{R}_n \end{bmatrix}$ et de matrice de covariance V.

2.3 Le problème d'optimisation

Soit un assureur vie avec un surplus initial S_0 tel que : $\boldsymbol{S_0 = A_0 - mL_0}$

Le paramètre m correspond au poids que l'assureur accorde au passif. Ce poids du passif est compris entre 0 et 1.

L'approche consiste à optimiser une fonction de la variation du surplus entre le temps de départ $(t = 0)$ et le temps d'arrivée $(t = 1)$.

Le surplus en $(t = 1)$ se calcule de la façon suivante :

$$\widetilde{S_1} = A_0\big(1 + \widetilde{R_A}(x)\big) - mL_0\big(1 + \widetilde{R_L}\big)$$

Soit :

$$\widetilde{S_1} - S_0 = A_0\,\widetilde{R_A}(x) - mL_0\,\widetilde{R_L}$$

Le rendement du surplus est noté $\widetilde{R_S}$ tel que: $\widetilde{R_S} = \frac{\widetilde{S_1}-S_0}{A_0} = \widetilde{R_A}(x) - \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}$

Le programme d'optimisation est similaire à celui de Markowitz mais porte sur la minimisation de la variance de la rentabilité du surplus $\widetilde{R_S}$ au lieu de celle du portefeuille d'actifs.

Le programme d'optimisation est le suivant :

$$\boldsymbol{min_x Var\left(\widetilde{R_S}\right) = Var\left(\widetilde{R_A}(x) - \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}\right)}$$

$$\mathbf{s.c}\begin{cases}\boldsymbol{E\left(\widetilde{R_A}(x) - \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}\right) = r_s} \\ \boldsymbol{x^T e = 1}\end{cases}$$

La donnée $\boldsymbol{r_s}$ correspond au rendement minimum du surplus que le gérant se fixe. Cette donnée reflète la tolérance au risque de l'assureur.

Réécriture du programme d'optimisation

La variance du rendement du surplus s'exprime de la façon suivante

$$Var\left(\widetilde{R_A}(x) - \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}\right) = Var\left(x^T\tilde{R} - \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}\right)$$

$$= x^T V x + \frac{m^2}{{f_0}^2} * Var\left(\widetilde{R_L}\right) - 2 * Cov\left(x^T\tilde{R}, \frac{m}{f_0}\,\widetilde{R_L}\right)$$

$$\boldsymbol{Var}\left(\widetilde{R_S}\right) = x^T V x + \frac{m^2}{{f_0}^2} * Var\left(\widetilde{R_L}\right) - \frac{2m}{f_0} * x^T\gamma$$

Avec $\gamma = \begin{bmatrix} Cov\left(\widetilde{R_1}, \widetilde{R_L}\right) \\ \vdots \\ Cov\left(\widetilde{R_n}, \widetilde{R_L}\right) \end{bmatrix}$

Plus les termes de γ sont élevés plus le terme $\frac{2m}{f_0} * x^T\gamma$ l'est aussi. Ceci vient diminuer la variance du surplus. Or, l'assureur cherche à atteindre un niveau de volatilité du surplus minimum afin de couvrir au mieux les variations du passif. Par conséquent, plus le portefeuille d'actifs est corrélé (positivement) au passif, mieux le risque est couvert.

Le programme d'optimisation se réécrit alors de la façon suivante :

$$\boldsymbol{min_x x^T V x + \frac{m^2}{{f_0}^2} * Var(\widetilde{R_L}) - \frac{2m}{f_0} * x^T \gamma}$$

$$\mathbf{s.c}\begin{cases} \boldsymbol{x^T \mu = \tilde{r} = r_s + \frac{m}{f_0} * \mu_L} \\ \boldsymbol{x^T e = 1} \end{cases}$$

Comme le terme $\frac{m^2}{{f_0}^2} * Var(\widetilde{R_L})$ ne dépend pas des poids des actifs, le programme d'optimisation de Sharpe et Tint se réécrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{min_x x^T V x - \frac{2m}{f_0} * x^T \gamma}$$

$$\mathbf{s.c}\begin{cases} \boldsymbol{x^T \mu = \tilde{r} = r_s + \frac{m}{f_0} * \mu_L} \\ \boldsymbol{x^T e = 1} \end{cases}$$

2.4 Résolution du programme d'optimisation de Sharpe et Tint

De même que pour Markowitz, le calcul du lagrangien du problème d'optimisation précédent est calculé de la façon suivante (un facteur $\frac{1}{2}$ est ajouté afin de faciliter les calculs) :

$$\boldsymbol{L(x) = \frac{1}{2} \quad x^T V\, x - \frac{m}{f_0} * x^T \gamma + \lambda(\, x^T \mu - \tilde{r}) - \vartheta(\, x^T e - 1)}$$

Où λ et ϑ sont les multiplicateurs de Lagrange.

La condition de premier ordre suivante :

$$V\, x^* - \frac{m}{f_0}\gamma - \lambda\mu - \vartheta e = 0, \qquad avec\ \geq 0\ et\ \vartheta\ \in \mathbb{R}$$

Le vecteur des poids du portefeuille efficient de Sharpe et Tint s'exprime donc de la façon suivante en fonction des multiplicateurs de Lagrange.

$$x^* = \frac{m}{f_0} V^{-1}\gamma + \lambda V^{-1}\mu + \vartheta V^{-1} e$$

Calcul des poids du portefeuille de variance minimale

Dans un premier temps, le poids du portefeuille de variance minimale est calculé. C'est-à-dire que la contrainte de rendement minimum n'est pas prise en compte. Dans ce cas, l'expression du vecteur des poids du portefeuille de variance minimale s'exprime de la façon suivante en fonction du multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\vartheta}$:

$$\boldsymbol{x^{min} = \frac{m}{f_0} V^{-1}\gamma + \vartheta V^{-1} e}$$

En remplaçant cette expression dans la condition $x^T e = 1$, alors:

$$\left(\frac{m}{f_0} V^{-1}\gamma + \vartheta V^{-1} e\right)^T e = 1$$

Soit $\vartheta = \frac{1}{e^T V^{-1} e}\left(1 - \frac{m}{f_0}\gamma^T V^{-1} e\right)$ avec $\gamma^T V^{-1} e = e^T V^{-1}\gamma$

En remplaçant l'expression de ϑ dans l'expression de x^{min} précédente:

$$\mathrm{x}^{\min} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{f}_0}\mathrm{V}^{-1}\gamma + \left[\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\mathrm{e}}\left(1 - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{f}_0}\gamma^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\mathrm{e}\right)\right]\mathrm{V}^{-1}\mathrm{e}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{x^{min}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^T V^{-1} e}}\boldsymbol{V^{-1} e} + \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{f_0}}\left(\boldsymbol{V^{-1}\gamma} - \frac{\boldsymbol{e^T V^{-1}\gamma}}{\boldsymbol{e^T V^{-1} e}}\boldsymbol{V^{-1} e}\right)$$

$\boldsymbol{x^{min}}$ est le portefeuille qui minimise la variance du rendement surplus minimal.

Le terme $\boldsymbol{\hat{x}^{min}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^T V^{-1} e}}\boldsymbol{V^{-1} e}$ correspond au portefeuille de variance minimale en absence de passif (on retrouve ce terme dans l'approche de Markowitz).

Le second terme représenté par $\boldsymbol{Z^{min}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{f_0}}\left(\boldsymbol{V^{-1}\gamma} - \frac{\boldsymbol{e^T V^{-1}\gamma}}{\boldsymbol{e^T V^{-1} e}}\boldsymbol{V^{-1} e}\right)$permet de constater que le passif est pris en compte.

Ainsi les poids $\mathrm{x}^{\min}$du portefeuille qui minimise la variance du rendement du surplus minimale se calculent de la façon suivante :$\boldsymbol{x^{min}} = \boldsymbol{\hat{x}^{min}} + \boldsymbol{Z^{min}}$**.**

Solution du programme d'optimisation initial

De même que pour la résolution du problème de Markowitz, la solution optimale est exprimée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{x^{*}} = \boldsymbol{\hat{x}^{min}} + \boldsymbol{Z^{min}} + \boldsymbol{\lambda Z^{*}}$$

Avec :

$$\boldsymbol{Z^{*}} = \boldsymbol{V^{-1}\mu} - \frac{\boldsymbol{e^T V^{-1}\mu}}{\boldsymbol{e^T V^{-1} e}}\boldsymbol{V^{-1} e}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{AC - B^2}}\left[\boldsymbol{C} \times \left(\boldsymbol{\hat{r}} - \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{f_0}}\boldsymbol{\gamma^T V^{-1}\mu}\right) - \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{m \times B \times (\gamma^T V^{-1} e)}}{\boldsymbol{f_0}}\right]$$

Soit $\boldsymbol{A = \mu^T V^{-1}\mu; B = \mu^T V^{-1} e}$***et***$\boldsymbol{C = e^T V^{-1} e}$

2.5 Frontière efficiente de Sharpe et Tint

Le portefeuille efficient de niveau de contrainte $\hat{r}$ vérifie

$$\begin{cases} E\left[\widetilde{R_A}(x^*) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right] = E\left[\widetilde{R_A}(x^{min}) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right] + \lambda E\left[\widetilde{R_A}(z^*)\right] \\ Var\left[\widetilde{R_A}(x^*) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right] = Var\left[\widetilde{R_A}(x^{min}) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right] + \lambda^2 E\left[\widetilde{R_A}(z^*)\right] \end{cases}$$

Il suffit pour cela de prouver que $cov\left(\widetilde{R_A}(z^*), \widetilde{R_A}(x^{*min}) - \frac{1}{f_0}\widetilde{R_L}\right) = 0$

Preuve :

$$cov\left(\widetilde{R_A}(z^*), \widetilde{R_A}(x^{*min}) - \frac{1}{f_0}\widetilde{R_L}\right) = z^{*T}Vx^{min} - \frac{m}{f_0}z^{*T}\gamma$$

$$= z^{*T}V * \left(\frac{1}{e^TV^{-1}e}V^{-1}e + \frac{m}{f_0}\left[V^{-1}\gamma - \frac{e^TV^{-1}\gamma}{e^TV^{-1}e}V^{-1}e\right]\right) - \frac{m}{f_0}z^{*T}\gamma$$

$$= \frac{1}{e^TV^{-1}e}z^{*T}e + \frac{m}{f_0}z^{*T}\gamma - \frac{e^TV^{-1}\gamma}{e^TV^{-1}e}z^{*T}e - \frac{m}{f_0}z^{*T}\gamma = 0$$

Car ; $z^{*T}e = 0$

Il existe encore une fois une relation parabolique entre l'espérance du rendement du surplus $\mu_s = E\left[\widetilde{R_A}(x^*) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right]$ et sa volatilité $\sigma_s = E\left[\widetilde{R_A}(x^*) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right]$. Cela dit, cette relation parabolique existe si et seulement si:

$Var\left[\widetilde{R_A}(x^{min}) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right]$>0

3 Application dans le cadre d'une compagnie d'assurance vie

Cette partie a pour vocation d'appliquer les méthodes de Markowitz et de Sharpe et Tint au portefeuille de notre compagnie d'assurance vie. Les allocations optimales obtenues sont alors intégrées dans le modèle ALM qui sera présenté dans le chapitre 2 de la partie 3 en vue d'analyser les différents résultats de la projection.

3.1 Performance et corrélation des différentes classes d'actifs

Obligations

Tout nouvel investissement en obligations est supposé fait pour une maturité de 30 ans. Le rendement des obligations est donc déduit de la courbe des taux zéro-coupons au 1/04/2021. Pour une maturité de 30 ans, celui-ci est de 3,58% La volatilité est quant à elle calibrée sur l'historique des taux sans risque 30 ans. Une volatilité de 1,131% est obtenue.

Actions

A partir du calcul du rendement et de la volatilité du fonds actions dans lequel la compagnie « Y » investit, un rendement de 5,95% et une volatilité de 3.816% sont retenus.

Monétaire

Le rendement et la volatilité de la classe d'actifs « monétaire » sont calibrés sur l'historique des taux sans risque 1 an. Un rendement de 1.56% et une volatilité de 0,695% sont obtenus.

La matrice de variance-covariance utilisé est présentée ci-dessous :

	Obligation	Action	Monétaire
Obligation	0,012803%		
Action	-0,000549%	0,145621%	
Monétaire	0,004095%	-0,002329%	0,004828%

Figure 14 : La matrice de variance-covariance entre les classes d'actifs retenue

A fin d'implementer le modele il faut prendre en consideraton des contraintes réglemntaires, on pourra resumer ces contraintes dans le tableau suivant :

Catégories modélisées	Min	Max
Obligation	30%	100%
Action	0%	70%
Monétaire	0%	15%

Tableau 4 : contraintes réglementaires retenu

Nous volons trouver la stratégie optimale pour une compagnie d'assurance vie dont l'assureur a des engagements vis-à-vis de l'assuré donc il ne peut pas investir une part plus grande de la richesse initiale dans les actifs les plus risqués pour cette raison on fixe un plafond de 30% pour les actions dans notre implémentation.

Par ailleurs, dans la partie théorique, les problèmes d'optimisation des méthodes de Markowitz, de Sharpe et Tint ont pu être résolues de façon analytique. Dans le cadre de ce cas pratique, cela n'est plus possible pour deux raisons :

- La dimension du vecteur des poids à optimiser est supérieure à 2.
- Le problème intègre des contraintes d'investissement.

Un algorithme d'optimisation non linéaire, disponible sur le logiciel R, permet de résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes.

3.2 Méthode de Markowitz

- **Portefeuille minimisant la volatilité sous contrainte d'un rendement = rendement initial**

Catégories modélisées	Allocation initiale	Min de volatilité sous contrainte de rendement=rendement initial
Obligation	70%	77%
Action	20%	15%
Monétaire	10%	8%
Rendement	3,855%	3,855%
Volatilité	0,0125%	0,0095%
Ratio de Sharpe[3]	2,05	2,36

Tableau 5 : Allocations obtenues par la méthode de Markowitz, avec un rendement minimum égal au rendement du portefeuille initial.

L'optimisation par la méthode de Markowitz permet d'afficher un rendement égal au rendement du portefeuille initial avec une volatilité nettement inférieure. Celle-ci passe en effet de 0,0125% à 0,0095% pour un même rendement global. Cela a pour conséquence d'améliorer le ratio de Sharpe qui passe de 2.05 à 2.36.

Pour respecter le rendement attendu par l'investisseur tout en minimisant la volatilité, l'optimiseur diminue la proportion d'actions qui passe de 20% à 15%. Pour compenser cette diminution, l'optimiseur investit principalement en obligation.

[3] Le ratio de Sharpe se calcule comme suit : $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ avec μ_P et σ_P : respectivement le rendement moyen et l'écart-type du portefeuille et r_f : le taux sans risque. Ici, le rendement de l'actif sans risque utilisé est le taux zéro-coupon de maturité un an.

- **Portefeuille minimisant la volatilité sous contrainte d'un rendement supérieur rendement initial**

Catégories modélisées	**Min de volatilité sous contrainte de rendement=rendement initial**	**Min de volatilité sous contrainte de rendement>rendement initial**
Obligation	77%	62%
Action	15%	25%
Monétaire	8%	13%
Rendement	3,855%	3.94%
Volatilité	0,0095%	0,0144%
Ratio de Sharpe	2.36	1.94

Tableau 6 : Allocations obtenues par la méthode de Markowitz, avec un rendement minimum supérieur au rendement du portefeuille initial.

Pour un rendement égal 3.94% (supérieur au rendement initial), la méthode affiche un ratio de Sharpe légèrement supérieur à 1 et une volatilité plus élevée que la volatilité initiale. En effet, celle-ci passe de 0,0125% à 0,0144%. En comparaison avec l'optimisation précédente, l'optimiseur est contraint d'augmenter globalement le poids des actifs les plus risqués et de diminuer les poids des actifs moins risqués afin d'atteindre un rendement de 3.94%.

La figure suivante représente la frontière efficiente pour notre portefeuille :

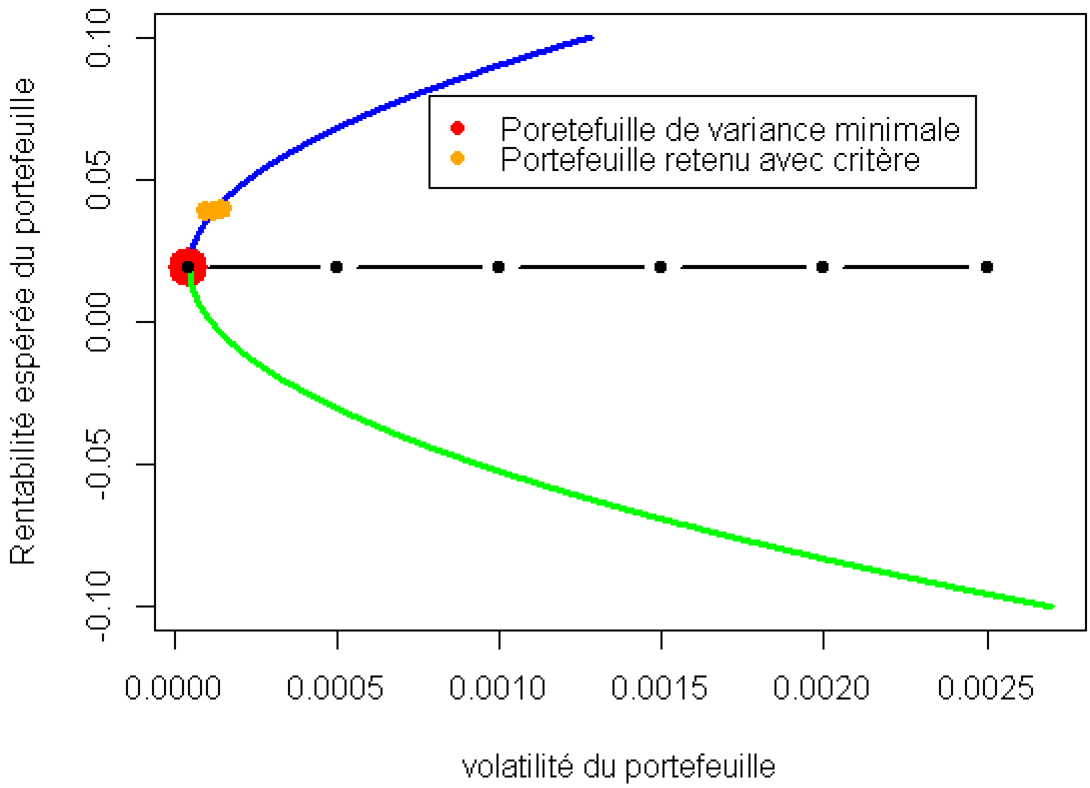

Figure 15 : La frontière efficiente de markowitz

3.3 Méthode de Sharpe et Tint

Hypothèses

Le taux de croissance des engagements(Prestations-Primes) dans le modèle de Sharpe et Tint correspond à la variation des engagements d'une année à une autre. Ce taux a été calibré sur la base des projections du passif dans la partie 2. $\mu_L = -15{,}75\%$ a été obtenu comme taux de croissance des engagements avec une volatilité de $\sigma_L = 56{,}79\%$.

$$Taux\ de\ croissance\ moyen\ du\ Passif = moyenne_{1\leq t\leq 30}\left(\frac{(Prestations_t - Primes_t) - (Prestations_{t-1} - Primes_{t-1})}{(Prestations_{t-1} - Primes_{t-1})}\right)$$

Par ailleurs, le poids du passif est fixé à $m = 100\%$ et le ratio de financement initial $f_0 = \frac{VM_0}{PM_0} = 105\%$ a été retenu.

Nous avons aussi calibré la covriance entre les classes d'actif et le passif et l'application numérique suivant a donnée le résultat suivant :

$$\gamma = Cov(R_A, R_L) = \begin{bmatrix} Cov(\widetilde{R_{Obligation}}, \widetilde{R_L}) \\ Cov(\widetilde{R_{Action}}, \widetilde{R_L}) \\ Cov(\widetilde{R_{Monétaire}}, \widetilde{R_L}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}187\% \\ 0{,}771\% \\ 0{,}088\% \end{bmatrix}$$

Après la calibation des paramètres, nous pouvons passser à la détermination des allocations optimales selon le modèle de sharpe et Tint.

Catégories modélisées	Valeur initiale	Min de volatilité sous contrainte de rendement=rendement initial	Min de volatilité sous contrainte de rendement>rendement initial
Obligation	70%	66%	68%
Action	20%	28%	30%
Monétaire	10%	6%	2%
Rendement	3,855%	3,855%	4.253%
Volatilité	0,0125%	0,01787445%	0,01888585%
Ratio de Sharpe	2.05	1.71	1.97
Rendement de surplus	19%	19%	19.26%
Volatilité de surplus	28.7%	28%	28.8%

Tableau 7 : Allocations obtenues par la méthode de Sharpe et Tint

- **Pour une contrainte d'un rendement égale au rendement initial,**

L'optimisation par la méthode de Sharpe et Tint permet d'afficher un rendement de portefeuille égal au rendement du portefeuille initial avec une volatilité du surplus également optimisée par rapport à la situation initiale. Elle passe de 28,7% à 28%. L'optimiseur alloue plus de poids aux classes actions +8% et moins de poids à la classe monétaire -4% et obligation -4%,

- **Pour une contrainte de rendement minimum supérieure au rendement initial**

La méthode permet d'afficher une volatilité du portefeuille de 0,01888585% affichant un ratio de Sharpe de 1,97 La volatilité du rendement du surplus est quant à elle supérieure à la volatilité du surplus initiale.

3.4 Portefeuilles retenus pour les tests

Parmi les allocations obtenues précédemment, trois sont retenues et sont les portefeuilles avec un ratio de Sharpe le plus élevé (2.36, 2.05 et 1.97) :

Le portefeuille 1 : correspond à l'allocation initiale. (70% pour l'obligation, 20% action et 10% pour le monétaire)

Le portefeuille 2 : correspond à l'allocation obtenue par la méthode de Markowitz en tenant compte des contraintes d'investissement, avec un rendement du portefeuille minimum égal au rendement initial. (77% obligation 15% action 8% du monétaire)

Le portefeuille 3 : correspond à l'allocation obtenue par la méthode de Sharpe et Tint, en tenant compte des contraintes d'investissement avec un rendement du portefeuille minimum supérieur au rendement initial (68% obligation, 30% action et 2% monétaire.

Chapitre 2 : Modélisation des actions du management

Le long de chacun des milliers de scénarios économiques, le modèle ALM projette dans le temps l'actif et le passif de l'assureur et permet de déterminer les flux. Chaque année N de la projection, étant donné le scénario économique fourni par le générateur de scénario économique pour cette année-là (performance des actions et courbe des taux au 31/12/N), le modèle ALM procède en 6 étapes pour vieillir d'un an la compagnie, calculer sa nouvelle situation au 31/12/N et calculer les flux :

- Etape 1 : Vieillissement du passif
- Etape 2 : Vieillissement de l'actif
- Etape 3 : Calcul des encaissements et des décaissements de la trésorerie
- Etape 4 : Réallocation des actifs
- Etape 5 : Revalorisation des contrats
- Etape 6 : Construction du compte de résultats et du bilan.

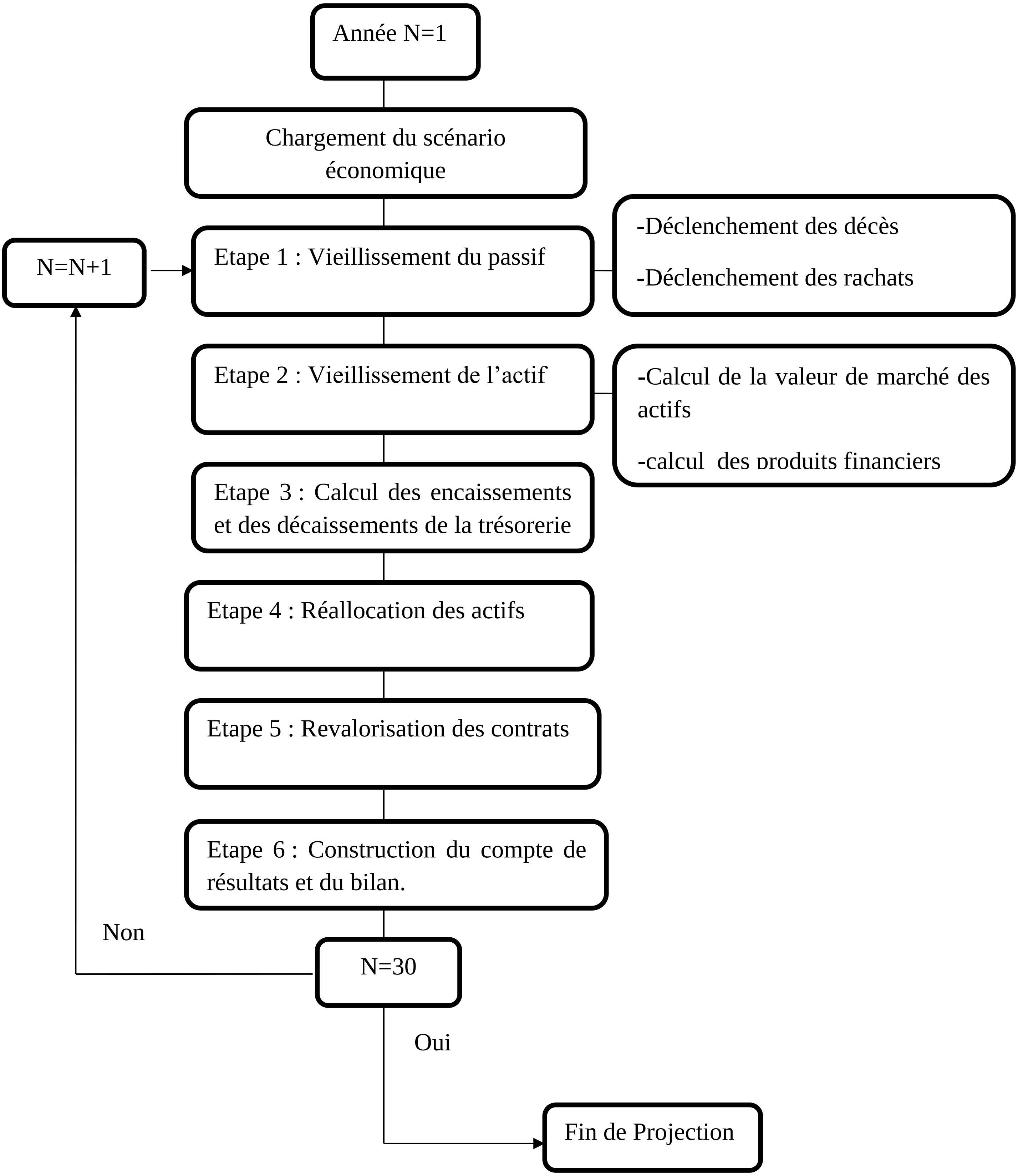

Figure 16 : Schéma de fonctionnement du modèle actif-passif

1 Etape 1 : Vieillissement du passif

Dans cette étape on voit l'évolution de différentes composantes du passif tout en calculant les prestations et les frais intervenant au cours de chaque année N et pour chaque assuré.

Cette partie a déjà été développée dans le chapitre 2 de la partie II (2 Modélisation des éléments apparaissant au passif du bilan).

2 Etape2 : Vieillissement de l'actif

On recalcule les valeurs de marché des actions (globales et autres), de l'obligation, du monétaire en fonction de leurs taux de revalorisation respectifs et on détermine les dividendes, les coupons et les intérêts monétaire perçus au titre de l'année.

Cette partie a déjà été développée dans le chapitre 3 de la partie II.

3 Etape 3 : Calcul des encaissements et des décaissements de la trésorerie

Cette étape consiste à déterminer l'assiette de trésorerie constituée des flux ayant eu lieu le début de l'année tant à l'actif qu'au passif. Elle est notamment composée des produits financiers (dividendes, coupons, intérêts monétaire), du remboursement des obligations arrivées à maturité et des prestations.

L'ensemble des flux ayant eu lieu le début de l'année de projection sont synthétisés dans le Tableau 8.

	Décaissement	Encaissement
Actif	**Frais de placements**	**Produits financiers** Dividendes Coupons Intérêts monétaires **Remboursement** Obligations arrivées à maturité
Engagements	**Frais** De gestion D'acquisition De fractionnement **Prestations** Décès Rachats Sortie à terme	**Primes brut**
	Total Décaissement	**Total encaissement**

Tableau 8 : Synthèse des flux de trésorerie

Le flux de trésorerie est alors calculé par la différence entre la somme des encaissements et la somme des décaissements. Au sein de notre modèle ALM, le solde de trésorerie est absorbé par le monétaire, quel que soit son signe. Cela permet ainsi de déterminer le montant de cash existant afin de procéder à la réallocation du portefeuille financier.

4 Etape 4 : Réallocation des actifs

La réallocation d'actifs consiste à suivre une stratégie de réinvestissement. Elle est notamment définie par une allocation cible. Une stratégie d'investissement à plusieurs objectifs. Le premier est un but de gestion et de contrôle des risques. Le second objectif d'une stratégie de réinvestissement est d'assurer des bonnes projections.

La stratégie d'investissement développée dans le modèle ALM est une stratégie dite statique. Il s'agit d'une allocation cible, fixée en début pour les différentes classes d'actifs modélisées.

4.1 Mécanismes d'achat/vente

Lorsque l'allocation cible est connue, il convient d'acheter ou de vendre des actifs afin de respecter cette allocation tout au longue de la projection. Dans chacun des cas, différentes hypothèses ont été émises pour que le modèle ALM projette bien la stratégie de la compagnie d'assurance.

Nous avons fait l'hypothèse dans notre modélisation que le management cherchait à retrouver l'allocation cible de départ.

A partir des taux cibles d'allocation, le management détermine les flux financiers (en valeur de marché) qui doivent être effectués entre les actifs afin d'obtenir l'allocation cible. Le flux de transfert de l'actif obligataire nécessite un traitement différent.

4.1.1 Ventes d'obligations dues à la réallocation

Si nécessaire le management doit vendre des obligations afin d'obtenir l'allocation cible. En cas de vente d'obligations, les nouvelles valeurs de marché et valeurs comptable et les coupons futurs seront réajustés de la façon suivante:

$$\boldsymbol{VM_t(Obligation\ apres\ reallocation) = VM_t(Obligation\ avant\ reallocation) - vente_t}$$

$$\boldsymbol{VC_t(Obligation\ après\ réallocation) = VC_t(Obligation\ avant\ réallocation)\left(1 - \frac{Vente_t}{VM_t(Obligation\ avant\ réallocation)}\right)}$$

$$\boldsymbol{Coupons_t = Coupons_{t-1} - \left(\frac{Vente_t}{Prix_t}\right) \times ValeurNominale \times TauxCoupons}$$

4.1.2 Achats d'obligations dues à la réallocation

Le management peut acheter à la fin de chaque année de projection de nouvelles obligations afin de satisfaire l'allocation cible en actifs obligataires. Nous supposons que notre société « Y » achète uniquement des obligations d'Etat de maturité 30 ans cotant le pair depuis le début de notre projection. Par conséquent, lors d'un achat d'obligations, la valeur de marché et comptables et les coupons futurs seront réajustés de la façon suivante :

$$\boldsymbol{VM_t(Obligation\ apres\ reallocation) = VM_t(Obligation\ avant\ reallocation) + Achat_t}$$

$$VC_t(\boldsymbol{Obligation\ après\ réallocation}) = VC_t(\boldsymbol{Obligation\ avant\ réallocation}) + Achat_t$$

$$Coupons_t = Coupons_{t-1} + \left(\frac{Achat_t}{Prix_t}\right) \times ValeurNominale \times TauxCoupons$$

4.1.3 Achats/Ventes d'actions

Lors d'achat ou de vente des actions, la valeur de marche du portefeuille après réallocation sera :

$$VM_t(\boldsymbol{Action\ apres\ reallocation}) = VM_t(\boldsymbol{Action\ avant\ reallocation}) + Achat_t(ou - Vente_t)$$

Et pour les valeurs comptables en cas de vente :

$$VC_t(\boldsymbol{Action\ après\ réallocation}) = VC_t(\boldsymbol{Action\ avant\ réallocation})\left(1 - \frac{Vente_t}{VM_t(\boldsymbol{Action\ avant\ réallocation})}\right)$$

Et en cas d'achat :

$$VC_t(\boldsymbol{Action\ apres\ reallocation}) = VC_t(\boldsymbol{Action\ avant\ reallocation}) + Achat_t$$

4.2 Nouvelle allocation

La compagnie d'assurance effectue les flux financiers entre les différents actifs, et calcule les profits/ pertes associés à ces transferts qui résultent de l'état des marchés financiers au moment de l'opération de vente d'obligations et d'actions. A ce sujet :

- Les plus ou moins-values réalisées sur les cessions d'obligations sont directement affectées à la réserve de capitalisation.
- Les plus-values réalisées sur les cessions d'actions sont réparties entre l'assureur et l'assuré selon le même principe que les produits financiers (Voir Le résultat financier). La part destinée aux assurés est ensuite ajoutée à la provision pour participation aux excédents.

5 Etape 5 : Revalorisation des contrats

Au sein du modèle développé, la dernière étape lors de la projection est la revalorisation des contrats. Cette étape s'effectue en plusieurs temps. Dans un premier temps, il faut déterminer les résultats technique et financier. Sera ensuite appliquée la politique de revalorisation.

5.1 Calcul des résultats technique et financier

Dans le but de déterminer le montant de revalorisation qui va être distribué aux assurés, il convient de déterminer le résultat de la compagnie d'assurance. Selon la définition donnée par le Code des Assurances de la participation aux bénéfices, il est nécessaire de différencier le résultat technique du résultat financier.

Dans ce qui suit nous allons présenter les résultats technique et financier avant la revalorisation des contrats.

5.1.1 Le résultat technique

Pour le calcul du minimum de PB règlementaire, et dans le cadre du modèle ALM développé, le résultat technique est constitué par les produits et charges liés à l'activité de l'assureur.

Le résultat technique, tel que calculé au sein du modèle de projection, est présenté dans le Tableau 9.

Résultat technique	
Charges	**Produits**
Charges de la compagnie	Chargements de gestion Chargements d'acquisition Chargements de fractionnement Frais encours Pénalité de Rachats
Total Charges	**Total Produits**

Tableau 9 : Résultat technique d'une compagnie d'assurance vie

La différence entre total produits et total charges nous donne le résultat technique.

Lorsque ce résultat est positif, l'assureur doit verser au moins 90% aux assurés sous forme de participation aux bénéfices :

$$\boldsymbol{RésultatTechnique = RT = TotalProduits - TotalCharges}$$

$$\boldsymbol{RésultatTechnique_{assuré} = RT_{assuré} = \max(90\% * RT; 0)}$$

$$\boldsymbol{RésultatTechnique_{assureur} = RT_{assureur} = \min(10\% * RT; RT)}$$

5.1.2 Le résultat financier

Le résultat financier exprime le résultat réalisé par une compagnie en raison de sa situation financière. Il est calculé à partir des produits réalisés auxquels sont soustraites les charges.

Le résultat financier, tel que calculé au sein du modèle de projection, est présenté dans le Tableau 10 .

Résultat Financier	
Charges	**Produits**
Frais de placements	**Produits financiers** Dividendes Coupons Intérêts monétaires
Moins-values réalisées (MVR) MVR Actions **Charges provisions** Charges sur réserves de capitalisation	**Remboursement** Obligations arrivées à maturité **Plus-values réalisées (PVR)** PVR Actions
Total Charges	**Total Produits**

Tableau 10 : Résultat financier d'une compagnie d'assurance vie

Le résultat financier exprime les gains - ou les pertes - engendrés du fait de la détention de placements financiers. Une part de ces actifs appartient aux actionnaires de la compagnie. Il convient ainsi qu'une part de ce résultat leur soit distribué.

Le modèle de gestion Actif-Passif développé ne permet pas de cantonner les actifs. Ainsi, une règle de proportionnalité est appliquée afin de déterminer la part du résultat financier devant être distribuée aux assurés.

$$\textbf{RésultatFinancier} = \textbf{RF} = \textbf{TotalProduits} - \textbf{TotalCharges}$$

$$\textbf{RésultatFinancier}_{\textbf{assuré}} = \textbf{RF}_{\textbf{assuré}} = \left(\frac{\textbf{PM} + \textbf{PPE}}{\textbf{TotalPassif}}\right) * \textbf{RF}$$

$$\textbf{RésultatFinancier}_{\textbf{assureur}} = \textbf{RF}_{\textbf{assureur}} = \left(\frac{\textbf{FP} + \textbf{Reserve de capitalisation}}{\textbf{TotalPassif}}\right) * \textbf{RF}$$

5.2 Politique de revalorisation

Une politique de revalorisation est définie par l'ensemble des règles mises en place par une compagnie d'assurance lors de la revalorisation de ses contrats. Pour l'assureur, il existe une contrainte contractuelle qui est de fournir à minima le TMG ainsi qu'une contrainte règlementaire lui imposant de redistribuer une partie de son résultat. En dehors de ces objectifs réglementaires et afin d'éviter les rachats conjoncturels, l'assureur doit servir au moins le taux concurrent.

5.2.1 La revalorisation « garantie » :

La revalorisation garantie (RG) représente dans notre modèle la revalorisation due aux engagements contractuels de l'assureur envers l'assuré. Le calcul doit être effectué pour chaque assuré en fonction du TMG. Le montant total de la revalorisation garantie de l'année N ainsi nécessaire est calculée comme suite :

$$\boldsymbol{RG = RevalorisationPrestations + \sum_{k=1}^{n}(PM_K * TMG_k)}$$

Avec :

n : Le nombre des assurés dans le portefeuille de la compagnie.

PM_K : La provision mathématique de l'assuré k

TMG_k: Le taux minimum garanti de l'assuré k

La suite de cette partie décrira les hypothèses émises afin que la compagnie d'assurance puisse, dans tous les scénarios, verser ce montant à ses assurés.

La PB cible

Afin d'atteindre le taux cible que l'assureur se fixe comme objectif afin d'éviter le rachat conjoncturel, nous calculons un montant nommé « PB_{Cible} » qui nous permettra par la suite de savoir si le $PB_{Contractuelle}$ a distribué est suffisant pour l'assuré.

Ce montant se calcul comme suit :

$$\boldsymbol{PB_{Cible} = \sum_{k=1}^{N} PM_k * \max(TauxCible - TMG; 0)}$$

5.3 Politique de taux servis

Dans la plupart des cas, les produits financiers revenant aux assurés ne suffisent pas à atteindre le montant de revalorisation cible RC. Le management va alors suivre une série d'action permettant de s'approcher au mieux de ce montant.

Réécrivons la revalorisation cible globale en séparant la partie garantie et la partie complémentaire :

$$\boldsymbol{RC = RG + PB_{Cible}}$$

La société a-t-elle les ressources pour servir la revalorisation garantie (TMG)?

Dans un premier temps, nous regardons si les produits financiers générés par l'argent des assurés ($RF_{assurés}$) suffisent à servir la revalorisation dite garantie RG par l'assureur.

– Si oui, le nouvel objectif est de servir la PB_{Cible}.

– Si non voici comment procéder : on puise dans le RT global si cela ne suffit toujours pas alors nous abandonnons les produits financiers en face des fonds propres ($RF_{assureur}$) sinon on réalise des PVL sur les actions.

La société a-t-elle les ressources pour servir la participation aux bénéfices cibles ?

Dans un second temps, nous nous intéressons à la PB_{Cible}.Rappelons qu'afin de satisfaire la contrainte temporelle de la PPE (PPE=$PB_N + PB_{N-1} + PB_{N-2}$) chaque année PB_{N-3} est obligatoirement versées aux assurés.

– SiPB_{N-3} ainsi que les produits financiers générés par les assurés après abattement de la revalorisation garantie sont suffisants nous pouvons servir la PB_{Cible}.

– Si cela ne suffit pas, nous pouvons puiser dans le résultat technique et dans la PPE.

– Si malgré cela, nous n'avons toujours pas atteint le taux concurrent, nous déclenchons alors des rachats conjoncturels (qui dépendent de l'écart entre le taux servi et le taux concurrent).

5.4 Synthèse de la politique de revalorisation

La politique de revalorisation implémentée dans le modèle a été synthétisée dans la Figure 17 .

Figure 17 : Synthèse de la politique de revalorisation

6 Etape 6 : Construction du compte de résultats et du bilan

Dans cette dernière étape de la projection, il s'agit de calculer le résultat de l'exercice qui correspond $\boldsymbol{BA_{assureur}}$ au niveau de la Figure 17 et de l'ajouter au fonds propre.

Le compte de résultat modélisé au sein du modèle ALM a été construit selon la nomenclature présentée dans le Tableau 11.

Compte de résultat
+ Résultat technique +Résultat financier -TMG - Revalorisation des prestations -Charges sur Provision pour Participation aux Excédents
Résultat de l'exercice Avant impôt
-Impôt sur bénéfices
Résultat de l'exercice Apres impôt

Tableau 11 : Nomenclature du compte de résultat implémenté dans le modèle

Gestion de la fin de projection

En général, l'horizon de projection (30 ans) n'est pas suffisant pour liquider l'ensemble des provisions mathématiques présentes dans le portefeuille. Il convient ainsi d'émettre des hypothèses de fin de projection.

Dans le modèle implémenté, la fin de projection est modélisée par la liquidation de la compagnie « Y ». Cela se traduit alors par le versement des différents éléments du passif à leurs détenteurs.

Il a été supposé que les versements se faisaient de la façon suivante :

- actionnaires : Fonds propres et Réserve de Capitalisation résiduelle
- assurés : Provisions Mathématiques et PPE.

Le versement de ces éléments se traduit par la vente de la totalité des actifs de la société.

Chapitre 3 : Résultats et analyse

Dans ce chapitre nous allons étudier et analyser les différents comportements de chaque portefeuille retenu précédemment afin d'aider l'investisseur à choisir la meilleur stratégie en fonction de ses objectifs et besoins.

1 Vieillissement du passif

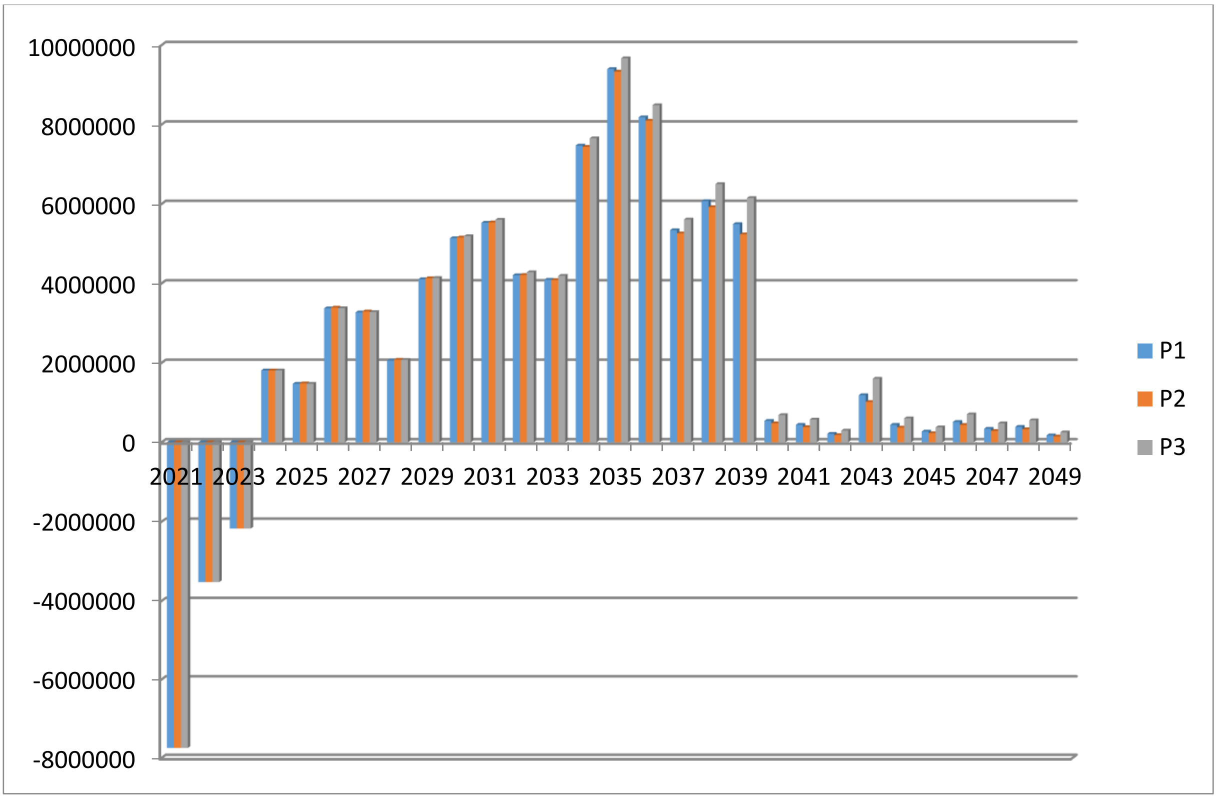

Figure 18 : Evolution de la chronique de décaissement de la compagnie « Y »

La différence entre les flux sortants et entrants est négative durant les trois premières années pour les trois portefeuilles parce qu'au cours de ces années les primes reçues sont supérieures aux prestations. Plus qu'on avance dans le temps les primes diminuent et les prestations augmentent. Le pic de la dixième année coïncide avec le pic des rachats et les pics de 2036 s'expliquent par le nombre des sorties à terme important de cette année. La duration du passif pour les trois portefeuilles est d'environ 16ans.

2 Produits Financiers :

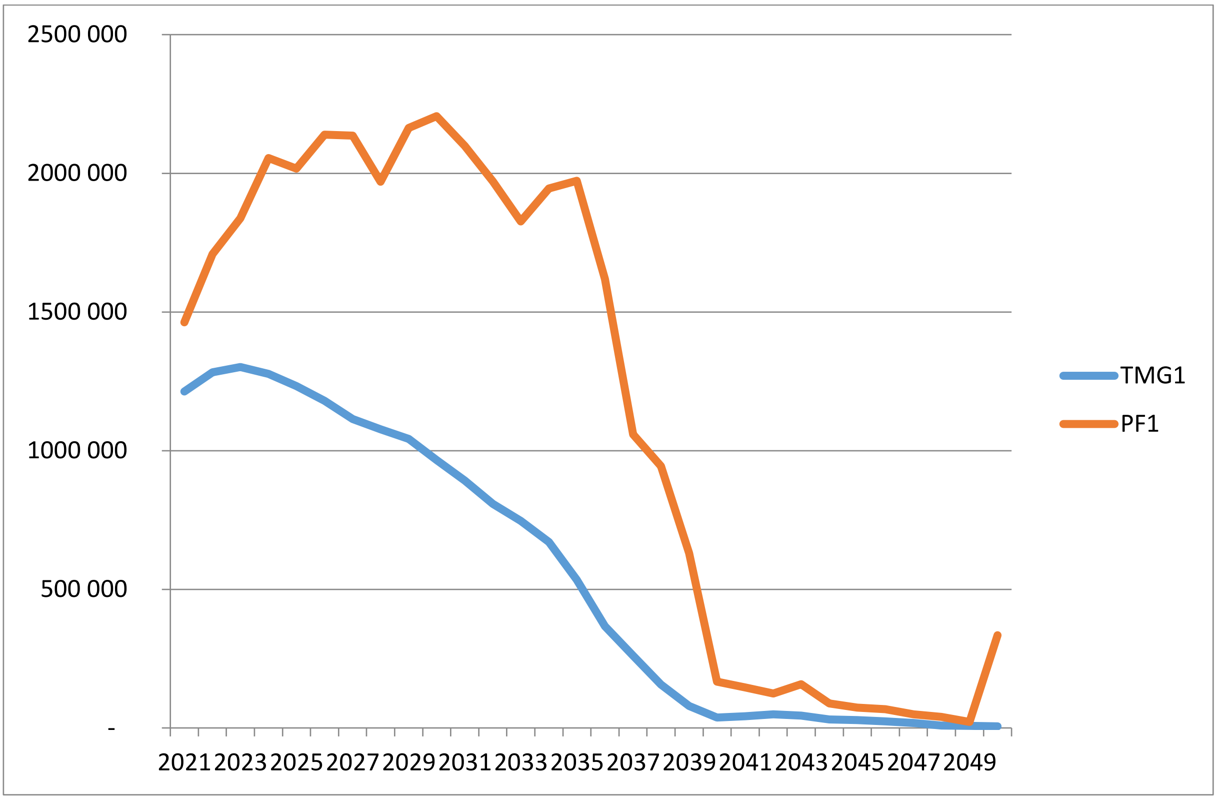

Figure 19 : Produits Financiers et le TMG obtenus par le portefeuille 1

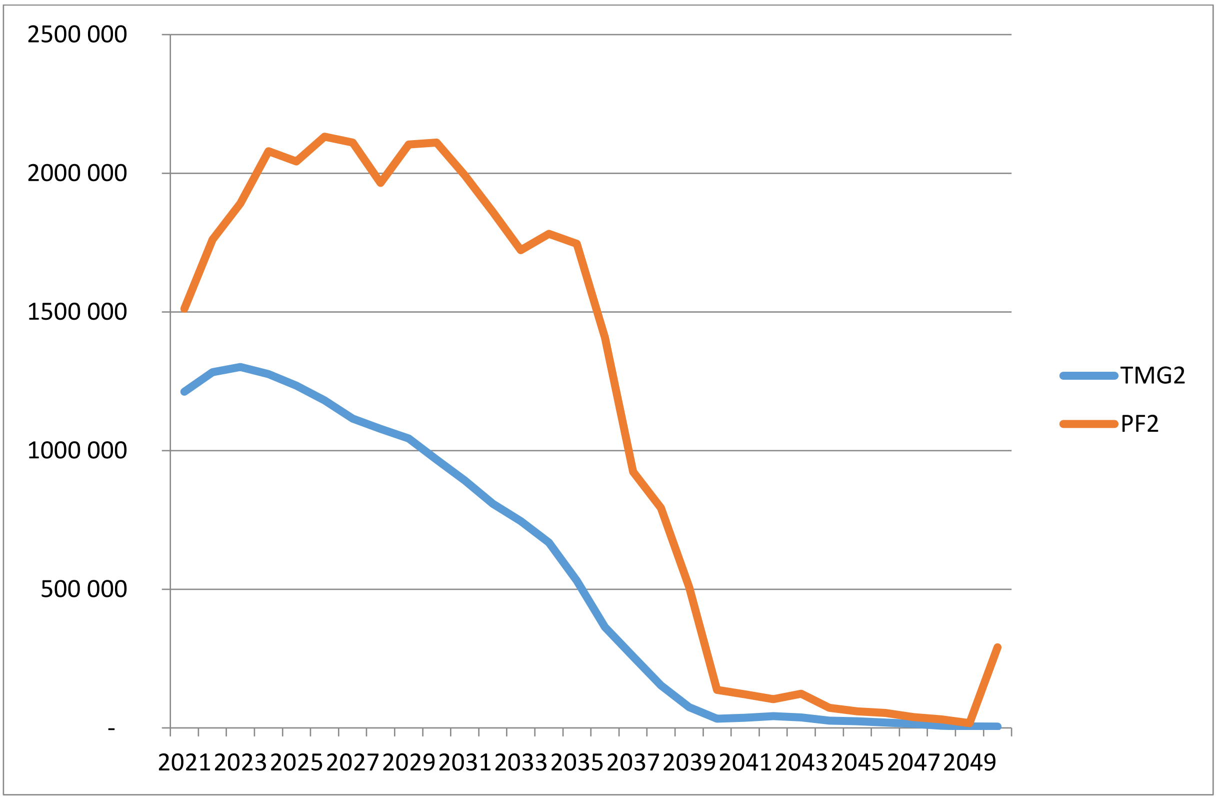

Figure 20 : Produits Financiers et le TMG obtenus par le portefeuille 2

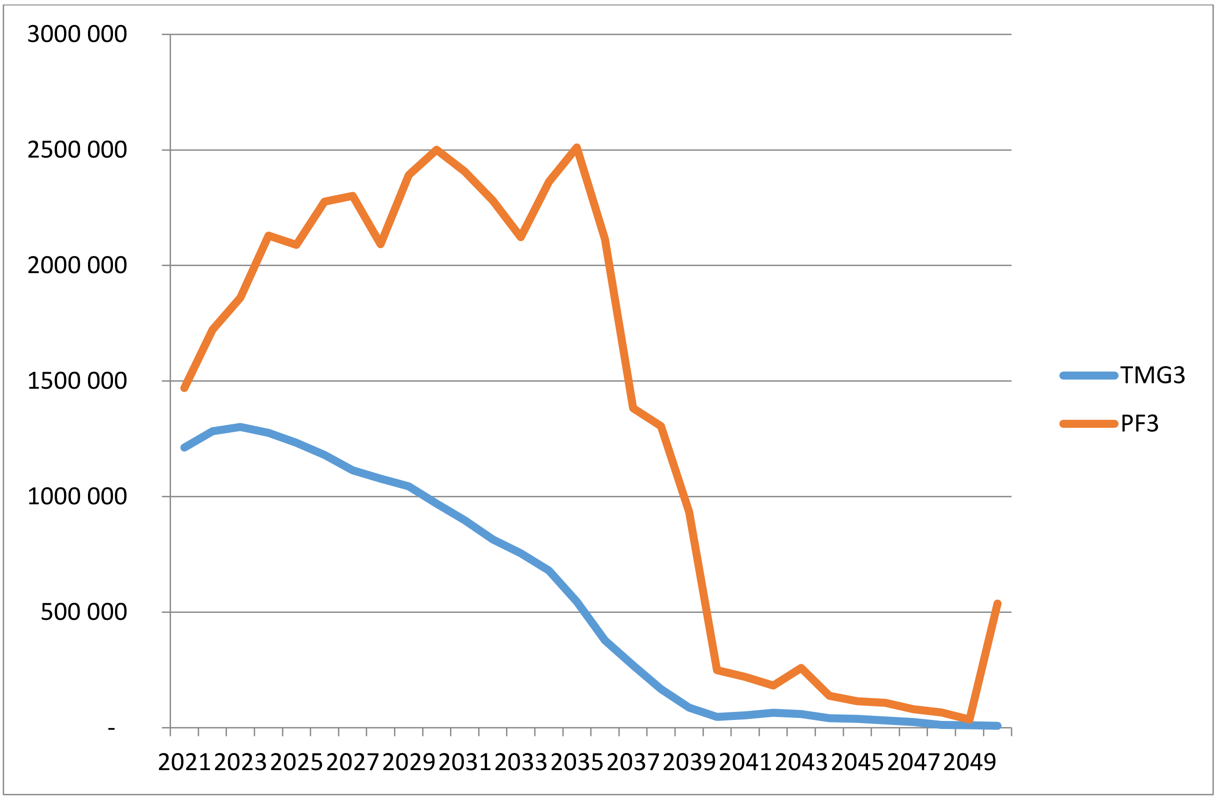

Figure 21 : Produits Financiers et le TMG obtenus par le portefeuille 3

D'après ces trois figures (Figure 19, Figure 20 et Figure 21), nous constatons que les produits financiers obtenus par les placements arrivent à couvrir les engagements pris par la compagnie « Y ». Ce qui nous permet d'affirmer que la compagnie pourra servir une participation aux bénéfices au-delà de celle qui est contractuelle pour lui permettre d'éviter les rachats conjoncturels.

Sensibilité par rapport au TMG

Pour voir l'impact d'une variation de TMG sur la politique de revalorisation, nous avons décidé de suivre l'effet marginal de TMG sur celle-ci, donc on a augmenté le TMG de 1%, les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 22.

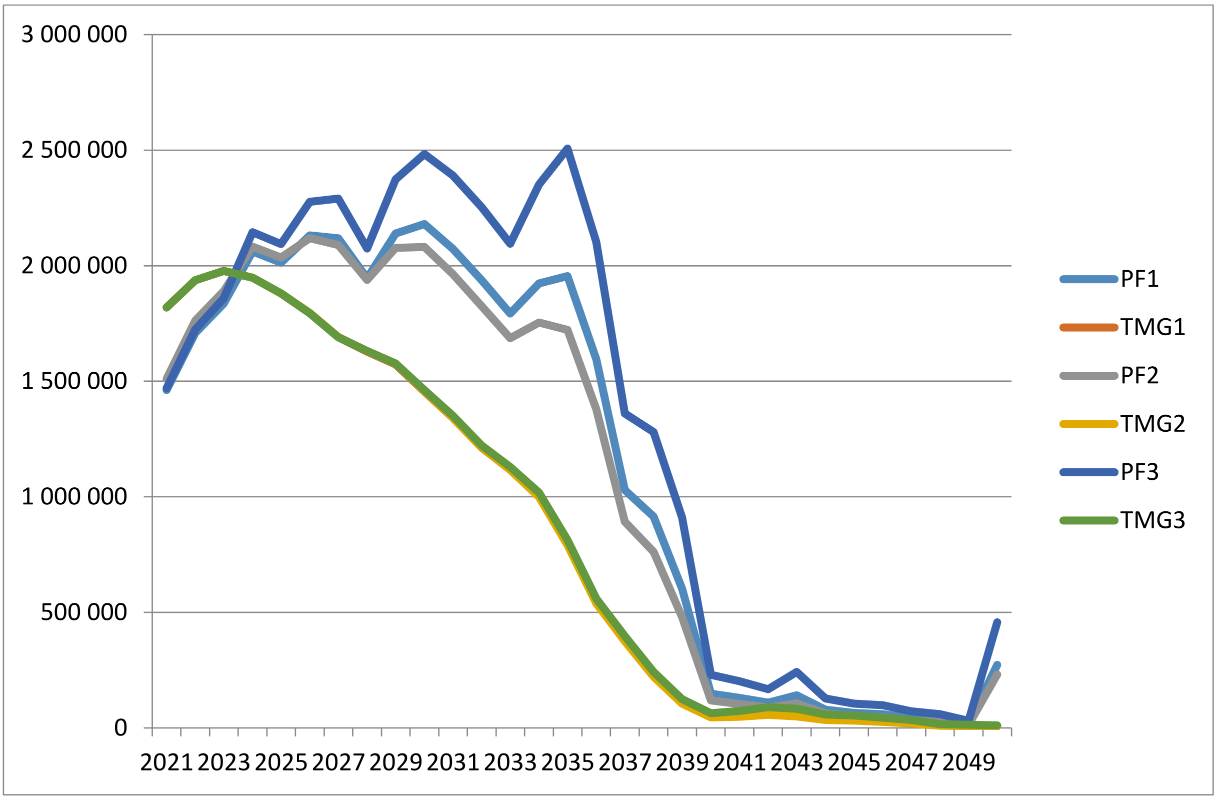

Figure 22 : Impact d'une variation de TMG sur le rendement des actifs

Avec une augmentation de TMG de 1% les produits financiers ne suffisent pas de servir le TMG donc l'assureur doit réaliser des PVL ou bien s'endetter sur le marché. Sinon, l'assureur pourrait échelonner le taux de revalorisation ; durant les cinq premières années, l'assureur gardera le TMG à 2% car avec ce taux, ces produits financiers lui permettront de l'atteindre. Au-delà de cinq ans, il pourra revoir le TMG à la hausse jusqu'à 3%, pour mieux fidéliser la clientèle.

3 Politique de revalorisation

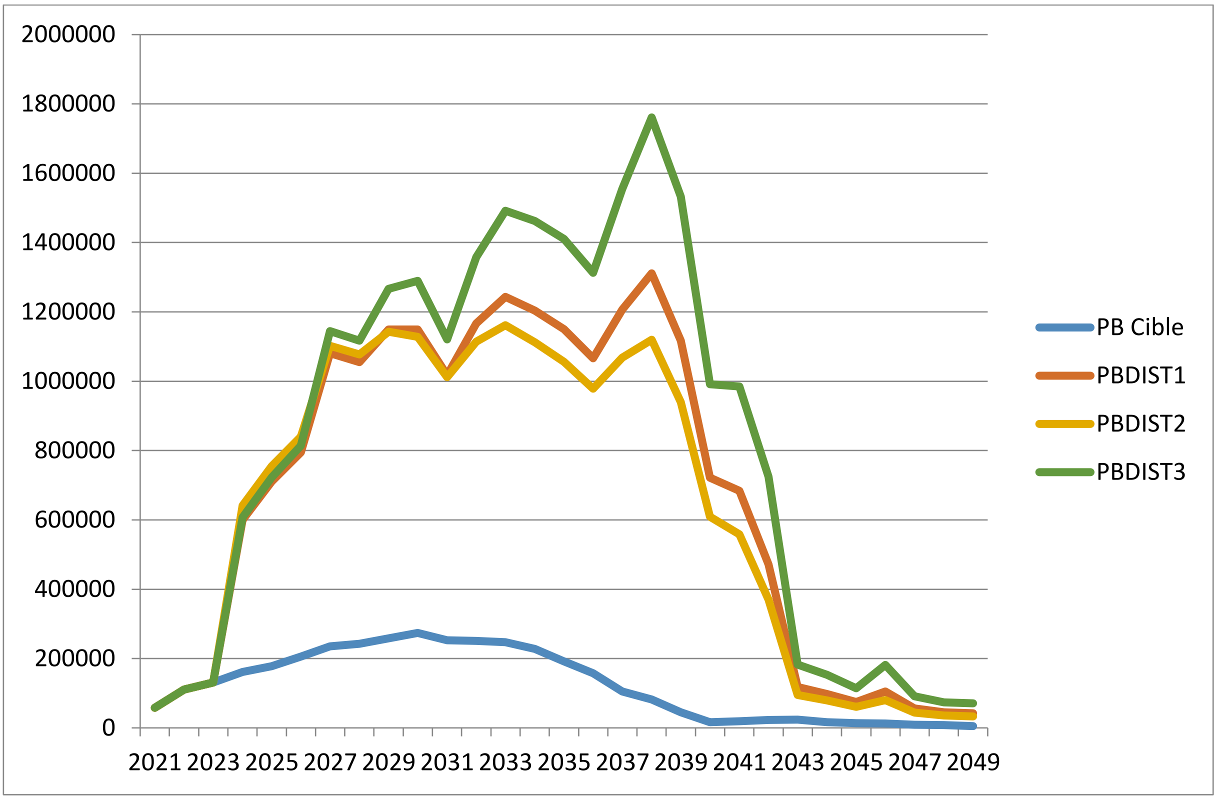

Figure 23 : Evolution de la participation aux bénéfices

L'assureur garantit avec les trois stratégies d'investissement une PB qui est supérieure à la PB_{cible} donc en aucun cas il y aura des rachats conjoncturels, en suivant une stratégie d'investissement de l'un des trois portefeuilles, on pourra constater une augmentation du nombre des épargnants qui veulent augmenter leurs épargnes vu que le taux servi par la compagnie dépasse plus le taux de marché.

4 Bénéfice de l'année :

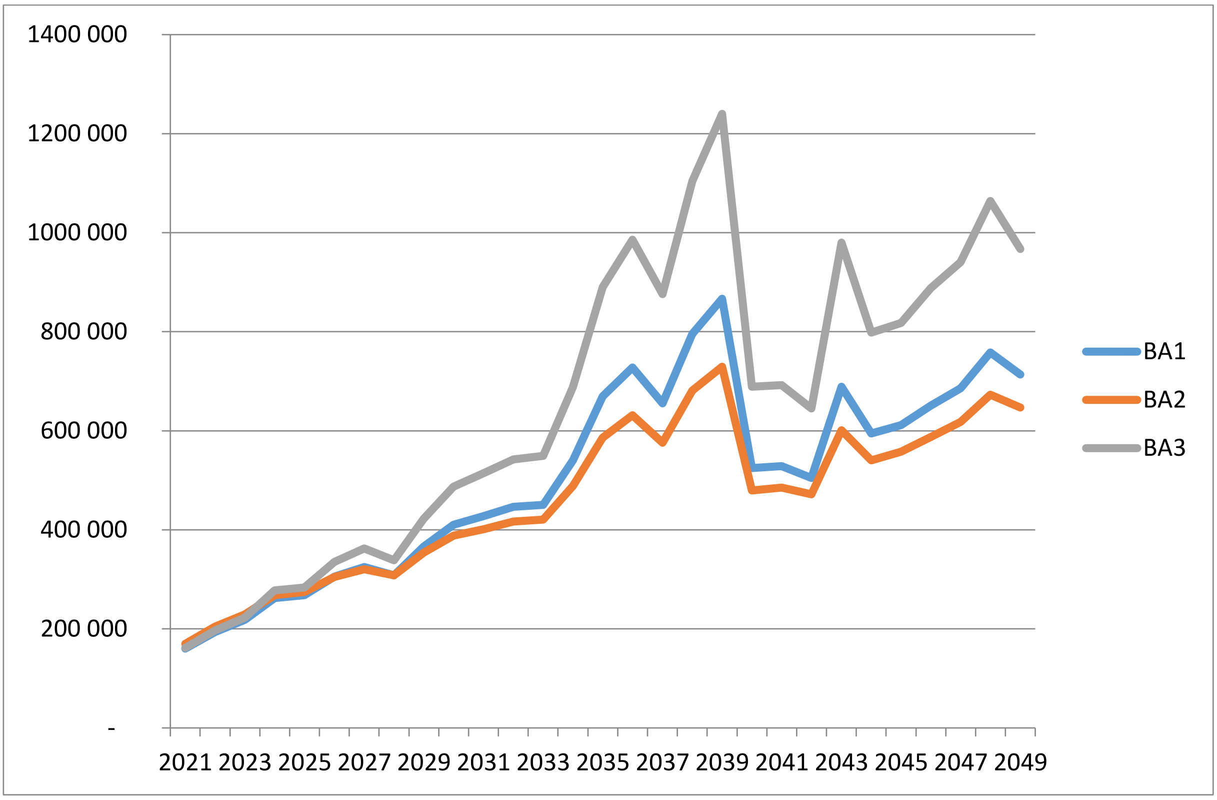

Figure 24 : Evolution du bénéfice de la compagnie Y

D'après cette Figure 24, nous remarquons que les bénéfices obtenus par le portefeuille 3 est largement supérieur à ceux des portefeuilles 1 et 2 à partir de 2027.

Cette croissance du bénéfice de l'année s'explique du fait que nous avons fait l'hypothèse que les bénéfices ne sont jamais distribués aux actionnaires tout long de la projection. Par conséquent, ces bénéfices viennent augmenter les fonds propres.

5 Valeur de marché dans 29 ans

La figure ci-dessous représente la valeur de marché dans 29 ans par portefeuille retenu. La méthode d'optimisation du surplus surperforme le portefeuille initial.

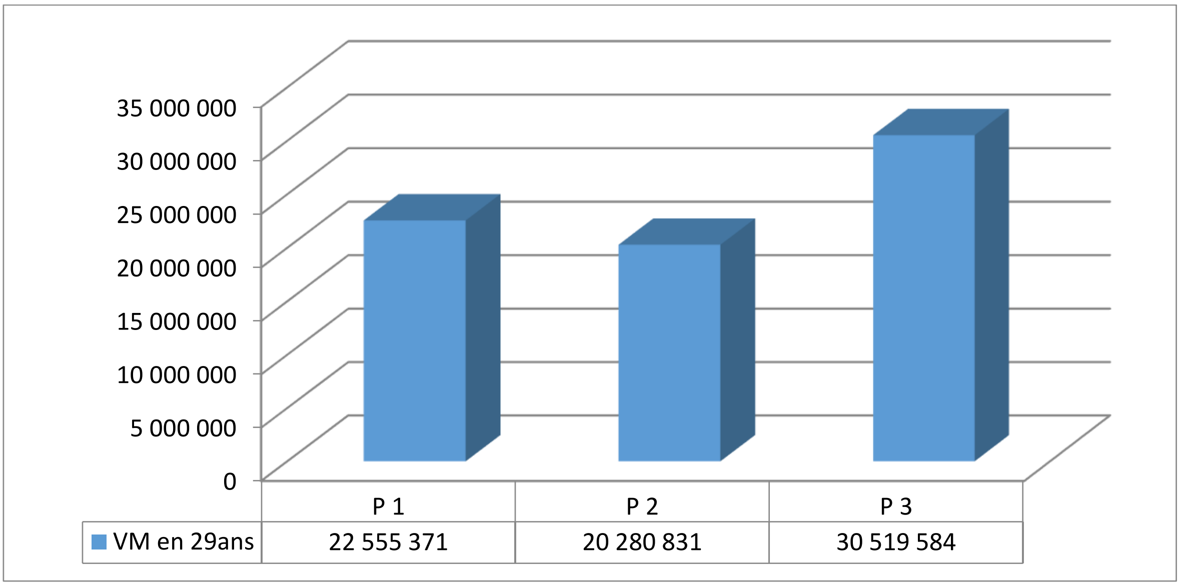

Figure 25 : Valeur de marché dans 30 ans par portefeuille

Ceci s'explique par le fait que la valeur de marché est croissante avec la part d'actifs risqués dans le portefeuille et décroissante avec la part des produits de taux (obligation+monétaire).

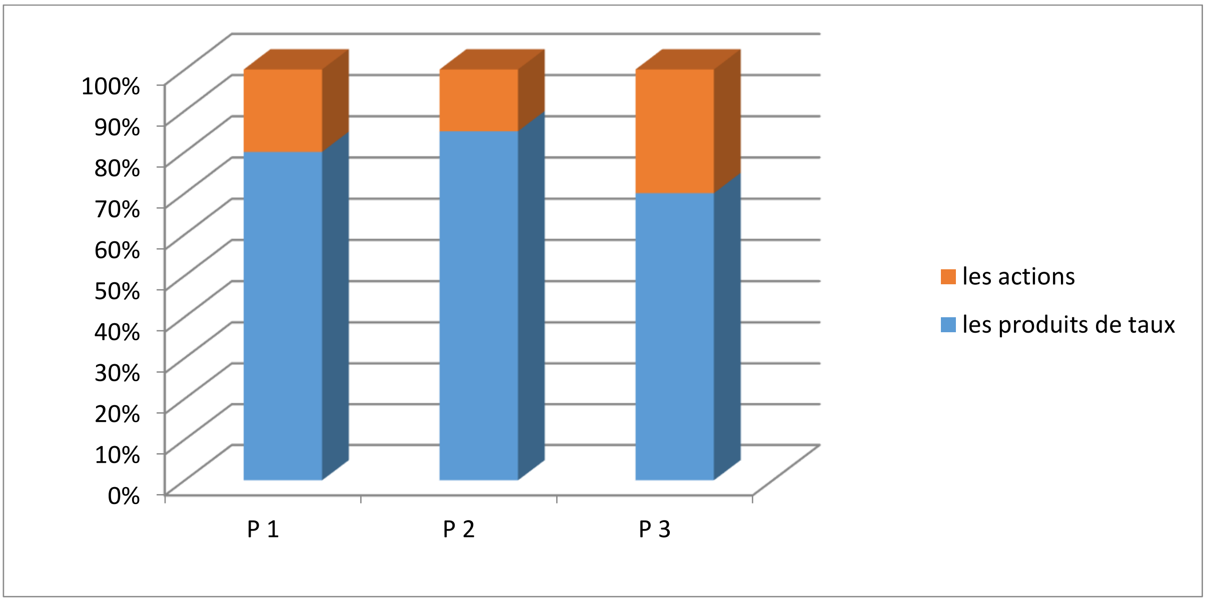

Figure 26 : Part d'actifs risqués et de produits de taux par portefeuille

6 Le Surplus

Le surplus correspond à l'écart entre la valeur de marché et les engagements techniques (ou provisions mathématiques). La figure ci-dessous permet de constater que l'allocation obtenue par la méthode d'optimisation du surplus performe l'allocation initiale. En effet la prise en compte de la corrélation avec le passif permet d'obtenir un surplus plus élevé.

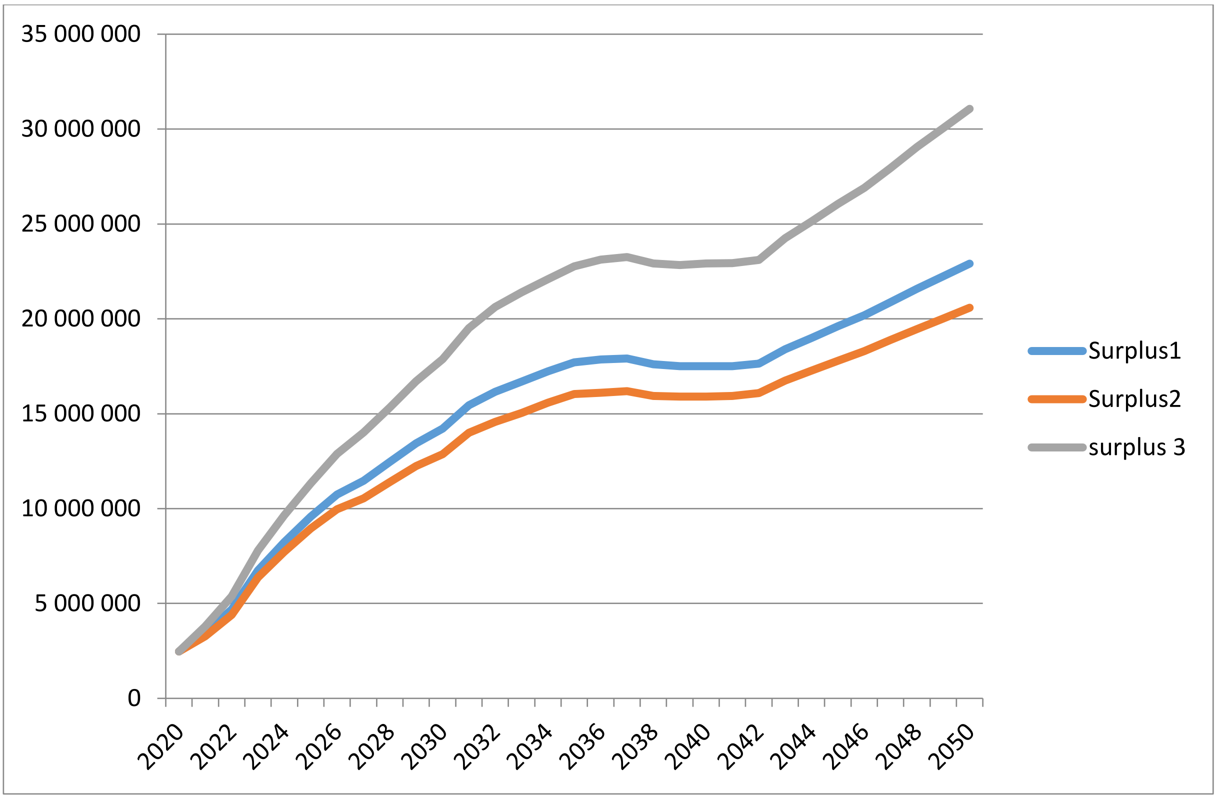

Figure 27 : Evolution du surplus : Valeur de marché - Provisions Mathématiques

Les surplus induit par les différents portefeuilles s'expliquent par les tendances des valeurs de marché et des provisions mathématiques (qui elles même dépendent du taux de revalorisation). Le portefeuille obtenu par la méthode d'optimisation du surplus contient une part relativement élevée d'actifs risqués. Ceci le permet de performer en termes de valeur de marché. Cet effet permet au modèle de Sharpe et Tint de surperformer le portefeuille 3 en termes de surplus.

7 Analyse de la liquidité

La liquidité du portefeuille est exprimée par le monétaire (trésorerie) qui est la somme des cash entrants (coupons, dividendes, intérêt monétaire et primes..) moins les cash sortants (décès, rachat..), l'analyse de cette dernière nous permet de voir est-ce que l'assureur est capable de rembourser ses assurés à chaque instant sans faire recours à la vente des obligations ou des actions qui dépendent de l'évolutions des marchés financier(l'augmentation des taux…). La Figure 28 montre l'évolution du monétaire pour les trois portefeuilles.

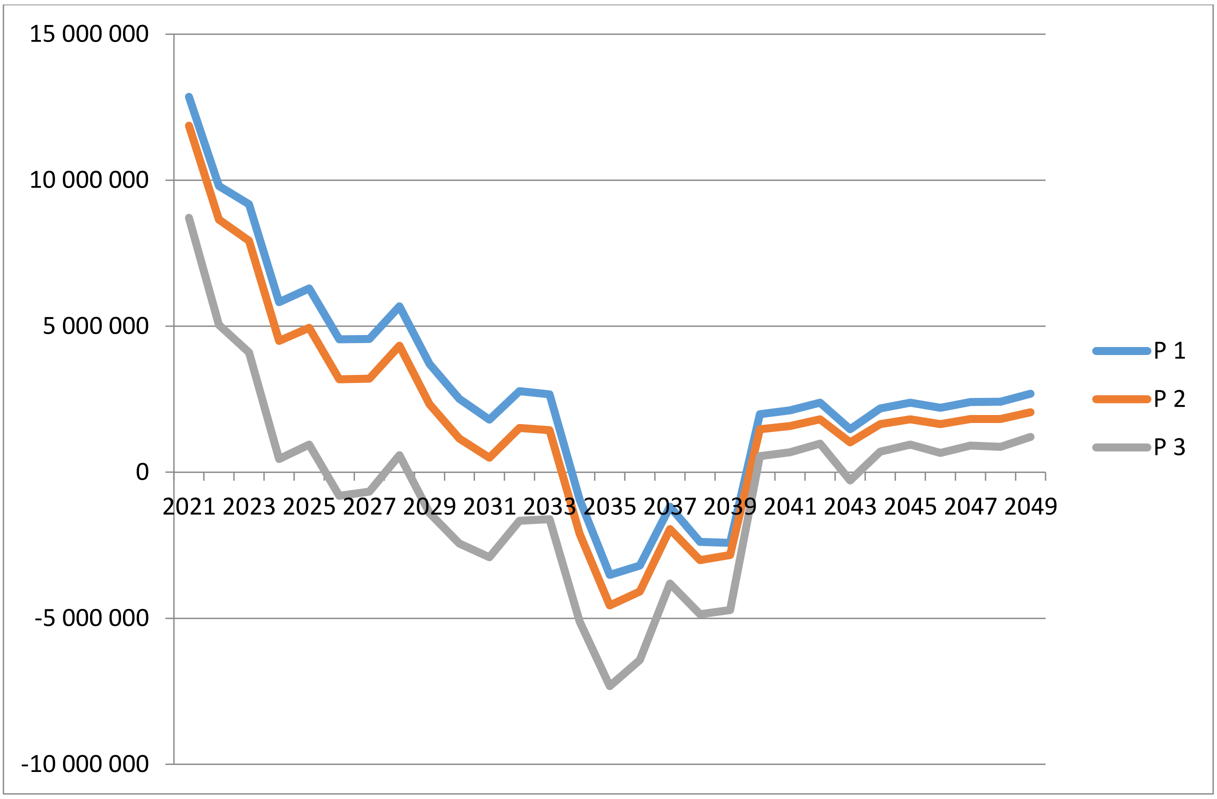

Figure 28 : Evolution de la poche monétaire

D'après la Figure 28, nous pouvons faire les constats suivants :

- A court terme, il n'y a pas de problèmes de liquidité pour les trois portefeuilles.
- A moyen terme, on a un problème de liquidité pour le portefeuille 3, cela pourrait être dû aux types d'obligations qu'on a choisi pour notre outil (obligation à longue maturité) donc pour remédier à ce problème il faut que l'assureur achète en 2021 des obligations de maturité 5ans pour que les remboursements tombent en 2026 et résout ce problème.
- Pour les portefeuilles 1 et 2, on a un problème de liquidité à long terme donc pour remédier à ce problème il faut que l'assureur achète en 2021 des obligations dont les remboursements tombent en 2034 et résout ce problème.

Pour voir la sensibilité du monétaire par rapport aux risque du passif, on va appliquer certain choc sur le décès et rachats. En suivant la directive de Solvabilité 2, une hausse de 50% pour les rachats et 10% pour les décès a été appliquée.

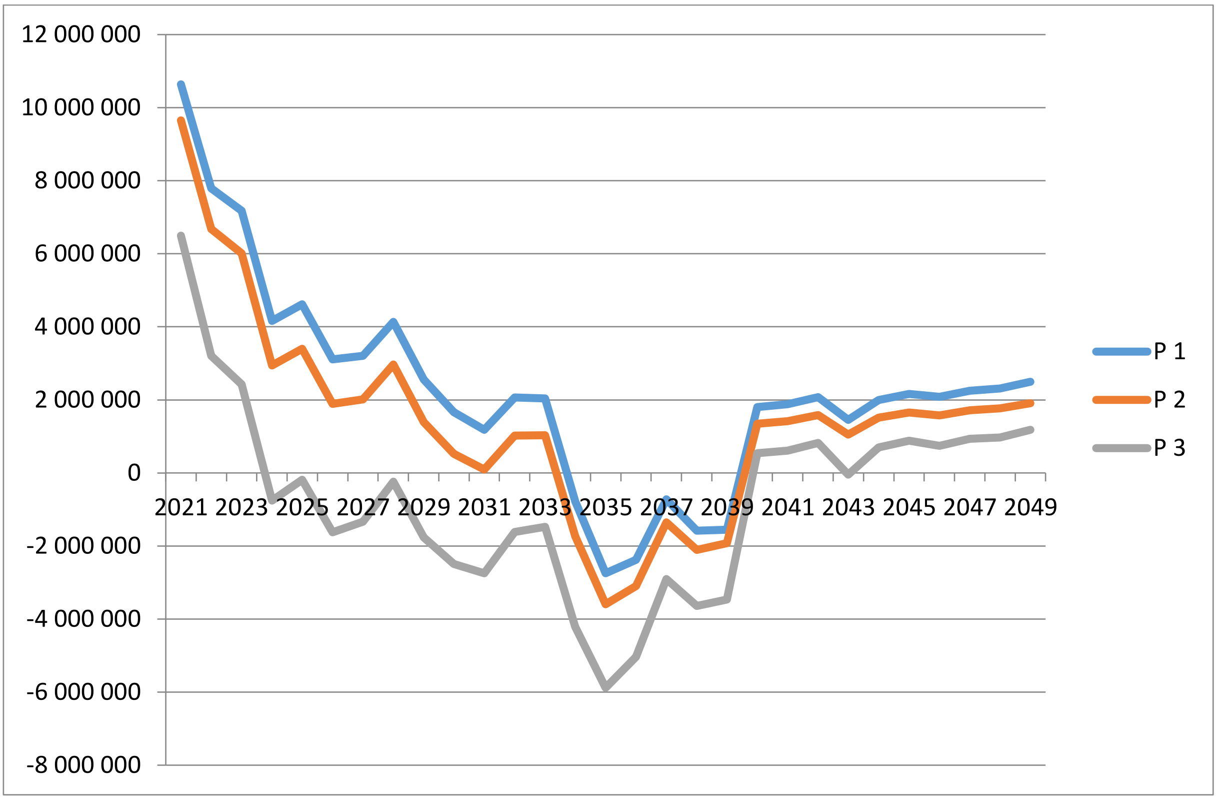

Figure 29 : Evolution de la poche monétaire après choc sur les rachats

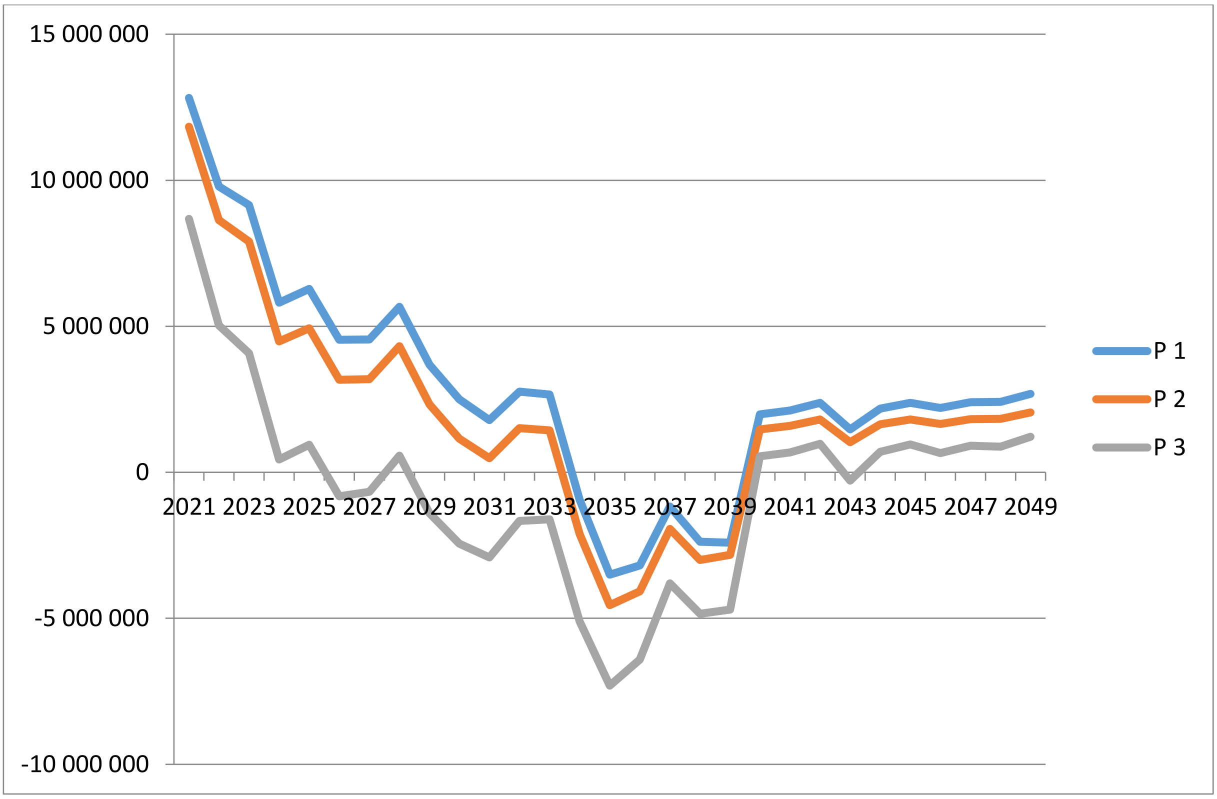

Figure 30 : Evolution de la poche monétaire après choc sur le décès

L'augmentation du taux de rachat et décès diminue respectivement la valeur du monétaire des trois portefeuilles de 2 215 474 DHs et 33 698 DHs, et cela impacte la liquidité à moyen terme du portefeuille 3.

8 Projection du bilan de la compagnie

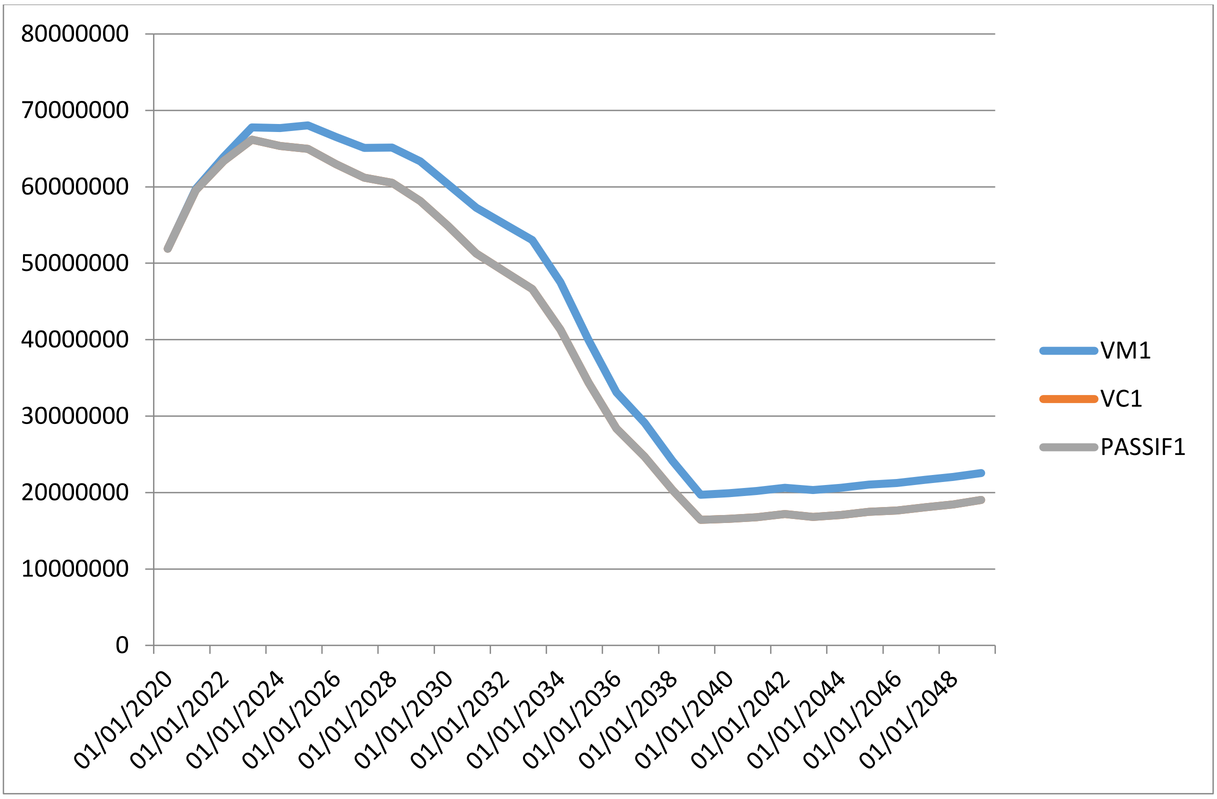

Figure 31 : Projection du bilan du portefeuille 1

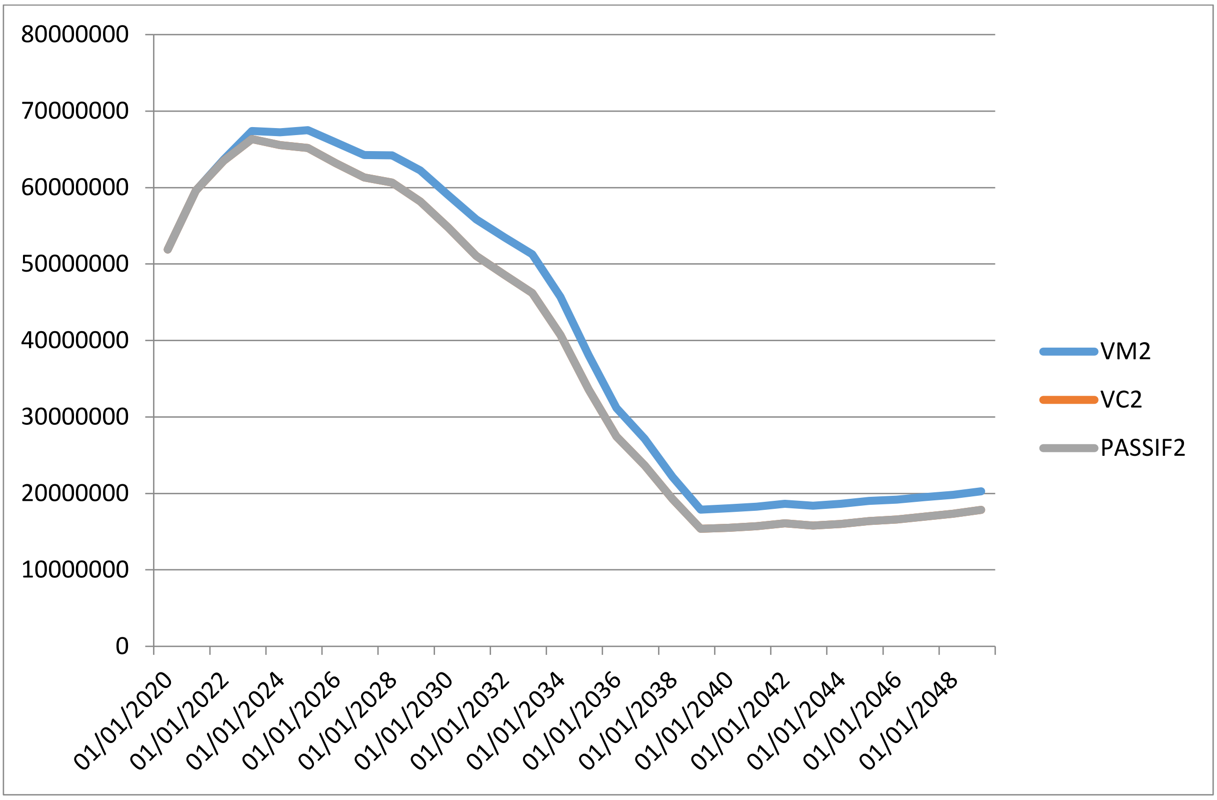

Figure 32 : Projection du bilan du portefeuille 2

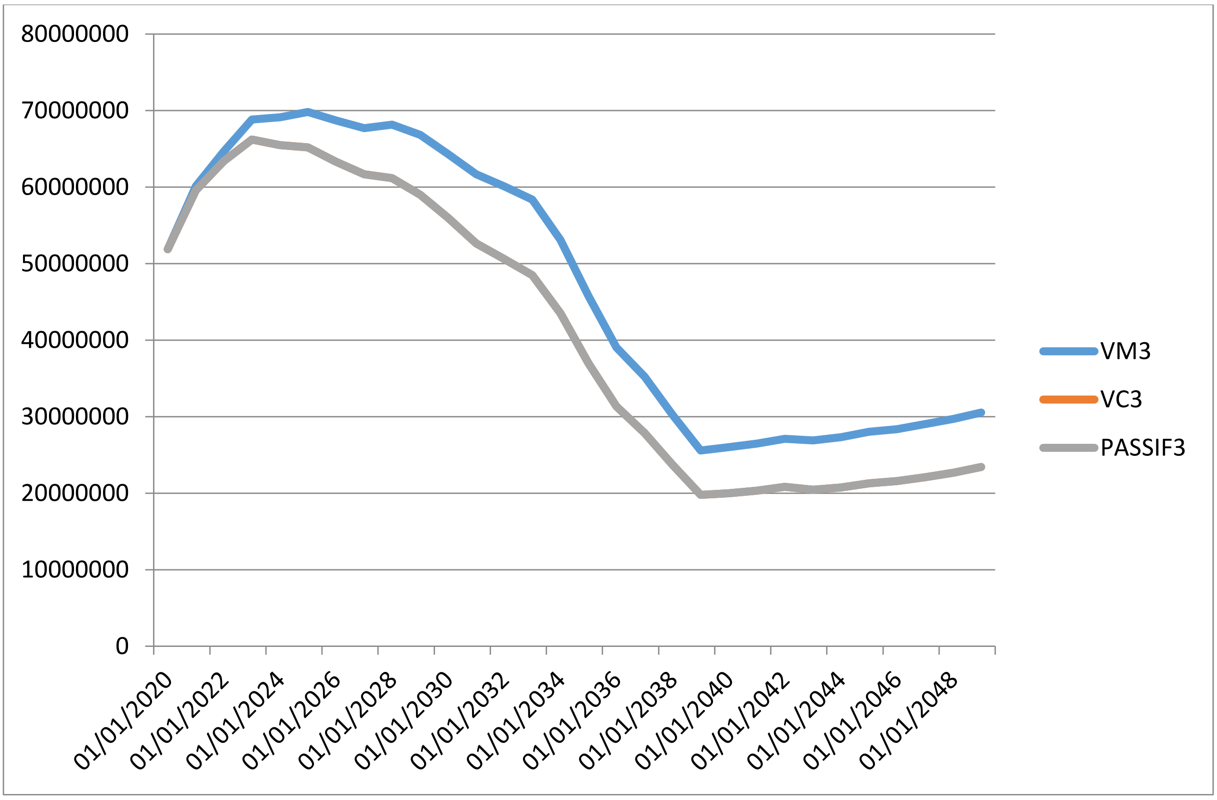

Figure 33 : Projection du bilan du portefeuille 3

D'après les Figure 31, Figure 32 et Figure 33, nous remarquons que la valeur de marché de nos actifs est supérieure à leur valeur comptable. Ceci permettra à l'assureur de vendre ses actifs en plus-values latentes s'il arriverait une hausse du taux de rachats ou taux de décès.

9 Recommandations

Le choix d'un portefeuille par rapport aux autres dépend de l'objectif de l'assureur. Partant des résultats obtenus, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Si l'objectif est de garantir le TMG (2%) sans faire des ventes des obligations qui sont en cas de hausse des taux risque de réaliser des moins-values latentes ou bien la vente des actions, l'assureur peut choisir n'importe quel portefeuille parmi les trois vu qu'ils garantissent des produits financiers qui dépassent largement le montant garanti .
- Si l'objectif est de réaliser le meilleur résultat de l'année c'est-à-dire réaliser un résultat qui permettrait de servir un taux de participation aux bénéfices plus que les concurrents et bien sûr s'attendre à une meilleure rémunération des actionnaires, nous recommanderions de choisir le portefeuille 3 dont la part des actifs risqués est beaucoup important.
- Si l'objectif est de diminuer le risque de liquidité donc l'assureur pourrait choisir le portefeuille 1ou 2 dans lequel le risque de liquidité ne se pose qu'à long terme.

Conclusion de la troisième partie

Dans cette troisième et dernière partie de notre mémoire, les méthodes de Markowitz et de Sharpe et Tint ont été mis en place pour une compagnie d'assurance vie commercialisant des produits d'épargne pour trouver une allocation d'actifs. Et par la suite, les allocations obtenues ont été intégrées dans un modèle ALM en vue d'analyser les différentes sorties. L'analyse des résultats permet de constater que la méthode prenant en compte le passif, surperforme l'allocation initiale en termes de surplus et les produits financiers. Cependant, il y a des problèmes de liquidité pour ces portefeuilles à moyen terme. Le choix de la méthode utilisée dépend de l'objectif de chaque assureur en fonction de son portefeuille, ses produits et ses attentes.

Conclusion générale

Pour définir l'allocation stratégique et le meilleur politique de revalorisation, les compagnies d'assurance vie se sont longtemps appuyées sur l'expérience. Or, l'allocation stratégique et la politique de revalorisation, dans l'environnement réglementaire et économique actuels, exigent une maitrise mathématique de plus en plus poussée. L'objectif de ce mémoire a été d'apporter des éléments de réponse à ces exigences par l'étude et l'application de modèle d'optimisation basé sur le surplus et par le respect de différentes étapes des actions du management.

Après avoir parcouru le cadre général et réglementaire du secteur de l'assurance vie, nous avons développé un générateur de scénarios économiques dans lequel nous avons sélectionné plusieurs modèles permettant de modéliser, de manière plus ou moins correcte, les différents postes de l'actif. Il s'agit du modèle de Cox, Ingersoll et Ross pour la modélisation du taux sans risque et du modèle de Black and Sholes pour la modélisation du rendement des actions. Le choix de ces modèles nous a permis de simuler l'évolution des flux générés par le portefeuille de placements, tout comme de modéliser l'interaction de celui-ci avec les éléments du passif. Pour la modélisation du passif, nous avons basé sur l'historique pour déterminer une loi des taux de rachat structurel en fonction de l'ancienneté des contrats. Par contre, aucune modélisation n'a été effectuée pour les autres facteurs entrant dans la valorisation des engagements de l'assureur, à savoir la mortalité.

Après avoir trouvé les différentes projections sur un horizon de 30 ans de l'actif et du passif, nous avons cherché l'allocation stratégique d'actif en utilisant deux modèles Markowitz et Sharp et Tint, à l'aide de ratio de Sharpe, nous avons sélectionné trois portefeuilles qui maximise le ratio de Sharpe comme premier critère de sélection, après nous sommes passés à l'étude de performances de chaque portefeuille retenu. Cependant avant cette étape, nous avons défini une politique de revalorisation qui permet de servir un taux servi qui dépasse le taux de la concurrence afin de réduire les rachats conjoncturels.

Le modèle ALM développé dans le cadre de notre analyse n'est pas complet car il est basé sur des hypothèses audacieuses, parmi lesquelles nous citons :

- Un taux minimum garanti est supposé constant tout au long de la période de projection.
- Un portefeuille en run-off ne prenant pas en compte les nouveaux contrats.
- Une allocation statique tout au long de la projection

En perspective, ce projet de fin d'études peut faire l'objet de plusieurs améliorations. Il pourrait être intéressant de rendre certains paramètres variables dans le temps, notamment le taux minimum garanti pour une meilleure estimation du taux de rachat conjoncturel. L'étude pourrait aussi s'étendre à une modélisation du phénomène de mortalité à l'aide de certains modèles comme celui de Lee Carter, et cela pour établir une table de mortalité propre au portefeuille des assurés étudié.

Les résultats de ce travail peuvent également être le point de départ pour une étude IFRS (International Financial Reporting Standards) ou bien les problématiques de la solvabilité basé sur le risque.

Bibliographie

Textes réglementaires

[1] **Code des assurances,** Dahir n° 1-02-238 du 25 rejeb 1423 (3 octobre 2002) portant promulgation de la loi n° 17-99 portant code des assurances.

[2] **La circulaire** n° 01/AS/19 du président de l'ACAPS

Livres et articles de recherche

[3] **PIERMAY M., MATHOULIN A., COHEN A**., [2002] – La gestion Actif-Passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel.

[4] **LA VALLOIS F., PALSKY P., PARIS B., TOSETTI A**., [2003] - Gestion Actif Passif en Assurance Vie - Réglementation, outils, méthodes.

[5] **FALEH A.** [2011] «Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite », Thèse, Institut de Science Financière et d'Assurances.

Mémoires d'actuariat

[6] **GUILLAUME GERBER**, Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne, Université PARIS DAUPHINE, 2010

[7] **SYLVAIN DETROULLEAU et SANDRINE MOURET,** Modèle ALM : Apport de la Logique Floue dans la modélisation des comportements, ENSAE, 2013

[8] **MARIE MOUKHAIBER**, Gestion Actif-Passif pour un portefeuille de produits d'épargne : Application par immunisation et par allocation d'actifs, ISFA, 2013

[9] **BERRADA SOUNI Salma**, Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite, ENSAE, 2015

[10] **DAMIEN TICHIT**, Construction d'un modèle ALM pour l'analyse de l'impact d'une remontée des taux sur la solvabilité d'un assureur vie, ENSAE, 2019

Supports de cours

[11] **F. MARRI**, « Assurance vie », INSEA, 2019-2020

[12] **K. SAID**, « Marchés financiers et gestion de portefeuille », INSEA, 2019-2020

[13] **Y. EL QALLI**, « Econométrie de la finance », INSEA, 2020-2021

[14] **Y. EL QALLI**, « Courbe des Taux et Produits à Revenu Fixe », INSEA, 2020-2021

[15] **Y. EL QALLI**, « Théorie des Options», INSEA, 2020-2021

[16] **M. BOUMASSAOUD**, «ALM», INSEA, 2020-2021

Annexes

Annexe I : Présentation de l'outil

Notre outil ALM central contient 8 feuilles comprenant : **produit 1, produit 2, produit 3, paramètres, table, Passif, Actif et Actif-Passif ;**

Dans les trois feuilles **Produit 1 , Produit 2 et Produit 3** nous avons effectué la projection sur un horizon de 30 ans des différents éléments du passif de bilan et les différents cash-flows assuré par assuré (voir chapitre 2 de la partie 2).

31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025
Somme PM 31/12/20	Somme PM 31/12/2021	Somme PM 31/12/2022	Somme PM 31/12/2023	Somme PM 31/12/2024	Somme PM 31/12/2025
33 238 659	39 100 885	44 027 530	47 996 261	50 034 558	51 621 694
9	10	11	12	13	14
PM 31/12/2020	PM 31/12/2021	PM 31/12/2022	PM 31/12/2023	PM 31/12/2024	PM 31/12/2025
99 577	–	–	–	–	–
2 765	4 487	–	–	–	–
91 737	–	–	–	–	–
88 625	–	–	–	–	–
7 685	8 982	10 164	–	–	–
77 636	–	–	–	–	–
83 123	77 682	72 737	–	–	–
103 321	94 997	–	–	–	–
46 626	44 476	42 523	–	–	–
4 835	6 400	7 831	9 137	10 402	11 584
36 321	–	–	–	–	–
8 740	9 948	11 051	–	–	–
54 149	51 439	–	–	–	–
35 863	35 359	34 457	–	–	–
36 504	36 989	37 032	36 486	–	–
2 281	4 175	5 990	7 660	9 184	–
6 302	8 031	9 680	11 144	12 444	–
3 254	5 103	6 871	–	–	–
20 597	–	–	–	–	–
10 715	–	–	–	–	–
1 908	–	–	–	–	–
62 190	60 747	–	–	–	–
2 996	4 821	–	–	–	–
15 134	16 313	17 545	18 827	20 177	21 276
106	2 084	–	–	–	–
21 295	22 052	22 914	23 864	–	–
315	2 281	4 163	5 988	7 782	9 441
315	2 282	4 164	5 988	7 782	9 441
1 716	3 609	–	–	–	–
1 774	–	–	–	–	–
19 980	20 812	–	–	–	–
188	2 160	4 029	–	–	–
20 575	21 430	22 353	23 380	24 709	26 014
23 661	24 225	–	–	–	–
4 456	6 183	7 843	–	–	–

Figure 34 : Exemple de projection de PM du produit 1 sur l'outil

Dans la feuille « **Paramètres** », nous avons mis les paramètres de chaque produit ainsi les tables de rachat de chaque produit et les hypothèses de projection.

Dans la feuille « **Table »,** nous avons mis la table TD 88-90.

Dans la feuille « **Passif »,** nous avons regroupé les résultats des projections contrat par contrat des trois produits.

PM	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025	31/12/2026
Produit 1	33 238 659	39 100 885	44 027 530	47 996 261	50 034 558	51 621 694	51 518 420
Produit 2	11 287 606	11 092 437	9 534 136	7 550 937	4 841 774	3 079 383	1 548 176
Produit 3	4 893 217	6 130 921	5 689 677	5 473 708	4 574 499	3 772 141	2 734 002
Total PM	49 419 482	56 324 242	59 251 343	61 020 906	59 450 831	58 473 218	55 800 597
DECES	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		210 065	234 393	266 885	282 708	301 993	309 885
Produit 2		86 263	80 275	68 213	44 613	29 423	14 791
Produit 3		84 208	47 200	47 773	39 372	33 665	20 816
Total Montant Décès		380 537	361 868	382 871	366 693	365 081	345 491
RACHAT	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		2 832 148	3 517 530	4 103 540	4 512 196	4 775 380	4 823 634
Produit 2		1 037 480	1 013 047	847 641	588 908	389 013	199 039
Produit 3		561 320	519 666	559 702	452 258	326 507	239 598
Total Montant Rachat		4 430 948	5 050 243	5 510 883	5 553 362	5 490 900	5 262 271
TERMES	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		4 265 509	3 859 658	3 598 690	4 772 510	4 358 621	5 372 218
Produit 2		3 950 114	4 275 193	3 801 511	3 875 119	2 370 384	1 853 215
Produit 3		82 593	1 621 362	1 035 494	1 569 689	1 343 440	1 401 377
Total Montant Termes		8 298 215	9 756 213	8 435 695	10 217 318	8 072 445	8 626 810
PRIMES INVESTIES	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		12 596 291	11 883 628	11 223 870	10 475 720	9 729 361	8 977 142
Produit 2		4 715 112	3 656 161	2 606 731	1 648 660	922 737	467 410
Produit 3		1 927 932	1 698 075	1 384 635	1 080 360	819 710	552 094
Total PRIMES INVESTIES		19 239 334	17 237 865	15 215 237	13 204 740	11 471 808	9 996 647
CHARGEMENT D'acquisition	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		0	0	0	0	0	0
Produit 2		0	0	0	0	0	0
Produit 3		59 627	52 518	42 824	33 413	25 352	17 075
TOTAL		59 627	52 518	42 824	33 413	25 352	17 075
CHARGEMENT DE GESTION	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		629 815	594 181	561 193	523 786	486 468	448 857
Produit 2		235 756	182 808	130 337	82 433	46 137	23 371
Produit 3							
TOTAL		865 570	776 989	691 530	606 219	532 605	472 228
CHARGEMENT DE FRACTIONNEME	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		503 852	475 345	448 955	419 029	389 174	359 086
Produit 2		188 604	146 246	104 269	65 946	36 909	18 696
Produit 3							
TOTAL		692 456	621 592	553 224	484 975	426 084	377 782

PENALITE DE RACHAT	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		89 020	113 547	131 348	125 014	106 350	83 790
Produit 2		51 874	50 652	42 382	29 445	19 451	9 952
Produit 3		28 066	25 983	27 985	22 613	16 325	11 872
TOTAL		168 960	190 183	201 715	177 072	142 126	105 614
CAPITAL GARANTI (TMG)	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produit 1		822 970	912 792	987 249	1 033 124	1 058 776	1 065 564
Produit 2		266 801	241 498	196 302	139 842	86 151	48 187
Produit 3		122 876	128 341	117 913	103 074	88 168	65 601
TOTAL		1 212 647	1 282 631	1 301 463	1 276 039	1 233 095	1 179 351
PB à distribuer	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025	31/12/2026
Produit 1		39 055	76 459	97 221	472 133	597 810	701 652
Produit 2		13 263	21 691	21 053	74 278	57 849	41 856
Produit 3		5 749	11 989	12 564	53 844	54 656	51 272

Figure 35 Exemple de projection du passif sur l'outil

Dans la feuille « **Actif »,** nous avons mis les résultats de générateur de scenario économique à savoir : les valeurs marché des obligations, les coupons, les valeurs marches des actions, rendement du monétaire.

Dans la feuille « **Actif-Passif »,** nous avons mis l'interaction entre l'actif et passif en respectant les étapes des actions du management et la politique de PB qui a été mis en place (Voir chapitre 2 de la partie 3).

	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025	31/12/2026
Portefeuille cible	Part	Part	Part	Part	Part	Part	Part
Obligations	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
Actions	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%
Monétaire	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

veillissement du passif	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025	31/12/2026
PM	49 419 482	56 324 242	59 251 343	61 020 906	59 450 831	58 473 218	55 800 597
PPE	-	600 255	1 310 570	2 105 350	2 586 034	2 930 933	3 285 632
FP	2 470 974	2 631 116	2 824 885	3 043 242	3 305 652	3 573 890	3 879 477
Réserve de capitalisation	-	-	-	-	-	36	4 973
TOTAL PASSIF	51 890 456	59 555 613	63 386 798	66 169 498	65 342 518	64 978 077	62 970 679

ENCAISSEMENT-DECAISSEMENT AU DEBUT D'ANNEE							
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
PRIMES BRUT		20 856 987	18 688 964	16 502 814	14 329 348	12 455 849	10 863 732
CHARGEMENT D'ACQUISITION		59 627	52 518	42 824	33 413	25 352	17 075
CHARGEMENT DE GESTION		865 570	776 989	691 530	606 219	532 605	472 228
CHARGEMENT DE FRACTIONNEMENT		692 456	621 592	553 224	484 975	426 084	377 782
PRIMES NET		19 239 334	17 237 865	15 215 237	13 204 740	11 471 808	9 996 647
DECES		380 537	361 868	382 871	366 693	365 081	345 491
RACHAT		4 430 948	5 050 243	5 510 883	5 553 362	5 490 900	5 262 271
TERME		8 298 215	9 756 213	8 435 695	10 217 318	8 072 445	8 626 810
TOTAL PRESTATION		13 109 700	15 168 324	14 329 449	16 137 373	13 928 425	14 234 572
TRESORIE		7 747 287	3 520 640	2 173 365	-1 808 026	-1 472 577	-3 370 840

ACTIF EN FIN D'ANNEE	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022	31/12/2023	31/12/2024	31/12/2025	31/12/2026
Coupons	0%	3,39%	3,39%	3,39%	3,39%	3,39%	3,39%
Rendement des actions	0%	6,28%	4,99%	5,08%	4,86%	4,10%	4,68%
Rendement de monétaire	0%	1,62%	1,68%	1,70%	1,73%	1,76%	1,80%
VM des obligations	36 323 319	41 829 292	44 758 532	47 436 655	47 370 616	47 630 046	46 577 228
VM des actions	10 378 091	11 951 226	12 788 152	13 553 330	13 534 462	13 608 584	13 307 780
VM du monétaire	5 189 046	5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VM	51 890 456	59 756 132	63 940 760	67 766 650	67 672 308	68 042 922	66 538 898
VC des obligations	36 323 319	42 301 560	45 488 700	47 790 638	47 539 058	47 523 211	46 377 383
VC des actions	10 378 091	11 278 440	11 504 022	11 602 194	11 036 229	10 650 573	9 939 406
VC du monétaire	5 189 046	5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VC	51 890 456	59 555 613	63 386 798	66 169 498	65 342 518	64 978 077	62 970 679

ACTIF AVANT REALLOCATION	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Produits Financiers							
VR au 31/12/2049	36 323 319	42 380 312	45 629 468	47 956 640	47 704 187	47 688 285	46 538 476
Coupons		1 230 523	1 435 716	1 545 787	1 624 625	1 616 072	1 615 533
Dividendes		221 018	251 251	269 103	284 571	282 027	285 199
Intérêt du Monetaire		83 983	100 281	108 540	117 258	118 930	122 279
FRAIS de placement		0	0	0	0	0	0
TOTAL PF		1 535 524	1 787 248	1 923 431	2 026 453	2 017 030	2 023 011
VM des obligations		35 851 051	41 571 393	45 134 716	47 621 304	47 645 928	47 727 994
VM des actions		11 050 878	12 562 570	13 455 158	14 228 543	14 101 350	14 259 955
VM du monétaire		12 854 203	9 806 798	9 176 776	5 822 461	6 295 644	4 550 949
TOTAL ACTIF VM		59 756 132	63 940 760	67 766 650	67 672 308	68 042 922	66 538 898
VC des obligations		36 323 319	42 301 560	45 488 700	47 790 638	47 539 058	47 523 211
VC des actions		10 378 091	11 278 440	11 504 022	11 602 194	11 036 229	10 650 573
VC du monétaire		12 854 203	9 806 798	9 176 776	5 822 461	6 295 644	4 550 949
TOTAL ACTIF VC		59 555 613	63 386 798	66 169 498	65 215 294	64 870 932	62 724 733

REALLOCATION	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Obligations		60%	65%	67%	70%	70%	72%
Actions		18%	20%	20%	21%	21%	21%
Monétaire		22%	15%	14%	9%	9%	7%
TOTAL		100%	100%	100%	100%	100%	100%

ACHAT-VENT	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Obligations en VM		5 978 241	3 187 139	2 301 939	-250 689	-15 883	-1 150 766
Actions en VM		900 349	225 582	98 172	-694 081	-492 765	-952 175
Monétaire en VM		-6 878 590	-3 412 722	-2 400 111	944 770	508 648	2 102 941
TOTAL		0	0	0	0	0	0
Obligations en VC		5 978 241	3 187 139	2 301 939	-251 580	-15 847	-1 145 828
Actions en VC		900 349	225 582	98 172	-565 965	-385 656	-711 167
Monétaire en VC		-6 878 590	-3 412 722	-2 400 111	944 770	508 648	2 102 941
TOTAL		- 0	- 0	- 0	127 224	107 145	245 946
PVL/MVL Réalisées sur Cession des Obligations		0	0	0	-891	36	4 937
PVL/MVL Réalisées sur Cession des Actions		0	0	0	128 116	107 109	241 008

ACTIF APRES REALLOCATION	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
VM Obligations		41 829 292	44 758 532	47 436 655	47 370 616	47 630 046	46 577 228
VM Actions		11 951 226	12 788 152	13 553 330	13 534 462	13 608 584	13 307 780
VM Monétaire		5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VM		59 756 132	63 940 760	67 766 650	67 672 308	68 042 922	66 538 898
VC des obligations		42 301 560	45 488 700	47 790 638	47 539 058	47 523 211	46 377 383
VC des actions		11 278 440	11 504 022	11 602 194	11 036 229	10 650 573	9 939 406
VC du monétaire		5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VC		59 555 613	63 386 798	66 169 498	65 342 518	64 978 077	62 970 679

Résultat Technique	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
CHARGEMENT D'ACQUISITION		59 627	52 518	42 824	33 413	25 352	17 075
CHARGEMENT DE GESTION		865 570	776 989	691 530	606 219	532 605	472 228
CHARGEMENT DE FRACTIONNEMENT		692 456	621 592	553 224	484 975	426 084	377 782
PENALITE DE RACHAT		168 960	190 183	201 715	177 072	142 126	105 614
FRAIS SUR ENCOURS		326 628	345 027	346 810	336 663	322 281	303 212
TOTAL PRODUIT TECHNIQUE		2 113 241	1 986 309	1 836 103	1 638 343	1 448 447	1 275 912
COÛT MOYEN PAR CONTRAT		172	172	172	172	172	172
TOTAL CHARGE TECHNIQUE		1 617 653	1 476 704	1 314 096	1 172 631	1 016 039	905 514
RESULTAT TECHNIQUE		495 588	509 605	522 007	465 712	432 408	370 397
		249 756	658 322	- 600 255			
Politique de revalorisation	**2020**	**2021**	**2022**	**2023**	**2024**	**2025**	**2026**
RESULTAT FINANCIER		1 535 524	1 787 248	1 923 431	2 153 677	2 124 139	2 264 019
RESULTAT TECHNIQUE		495 588	509 605	522 007	465 712	432 408	370 397
RESULTAT FINANCIER ASSUREUR		73 120	78 959	85 719	99 051	107 459	124 526
RESULTAT TECHNIQUE ASSUREUR		49 559	50 961	52 201	46 571	43 241	37 040
TOTAL RESULTAT ASSUREUR		122 679	129 920	137 920	145 622	150 700	161 565
RESULTAT FINANCIER ASSURE		1 462 403	1 708 289	1 837 711	2 054 626	2 016 679	2 139 494
RESULTAT TECHNIQUE ASSURE		446 029	458 645	469 806	419 141	389 167	333 357
TOTAL RESULTAT ASSURE		1 908 432	2 166 934	2 307 518	2 473 767	2 405 846	2 472 851
CAPITAL GARANTI (TMG)		1 212 647	1 282 631	1 301 463	1 276 039	1 233 095	1 179 351
Taux concurrent	2,02%	2,12%	2,20%	2,22%	2,26%	2,30%	2,35%
PB cible		58 067	110 138	130 838	160 903	177 845	205 213
Bénéfice Financier assureur(BF)		37 463	63 849	80 437	116 788	117 538	144 021
Bénéfice Technique assureur(BT)		49 559	50 961	52 201	46 571	43 241	37 040
PVL sur les actions		-	-	-	-	-	-
Reprise dans PPE		-	-	-	-	-	-
Surplus		58 067	110 138	130 838	-	-	-
Reste RESULTAT FINANCIER ASSUREUR		73 120	78 959	85 719	99 051	107 459	124 526
PBN	-	600 255	710 316	794 779	1 080 939	1 055 214	1 149 479
PBN-1	-	-	600 255	710 316	794 779	1 080 939	1 055 214
PBN-2	-	-	-	600 255	710 316	794 779	1 080 939
PBN-3(à distribuer)	-	58 067	110 138	130 838	600 255	710 316	794 779
PPE Avant la reprise		-	600 255	1 310 570	1 505 095	1 875 719	2 136 153
Bénéfice de l'année N		160 142	193 768	218 357	262 410	268 238	305 587
PPE Après la reprise		600 255	1 310 570	2 105 350	2 586 034	2 930 933	3 285 632
ACTIF APRES Réalisation des PVL	**31/12/2020**	**31/12/2021**	**31/12/2022**	**31/12/2023**	**31/12/2024**	**31/12/2025**	**31/12/2026**
VM Obligations		41 829 292	44 758 532	47 436 655	47 370 616	47 630 046	46 577 228
VM Actions		11 951 226	12 788 152	13 553 330	13 534 462	13 608 584	13 307 780
VM Monétaire		5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VM		59 756 132	63 940 760	67 766 650	67 672 308	68 042 922	66 538 898
VC des obligations		42 301 560	45 488 700	47 790 638	47 539 058	47 523 211	46 377 383
VC des actions		11 278 440	11 504 022	11 602 194	11 036 229	10 650 573	9 939 406
VC du monétaire		5 975 613	6 394 076	6 776 665	6 767 231	6 804 292	6 653 890
TOTAL ACTIF VC		59 555 613	63 386 798	66 169 498	65 342 518	64 978 077	62 970 679

Figure 36 : Exemple de l'interaction actif -passif sur l'outil

Annexe II : Présentation de MAZARS

1 Le groupe Mazars International

Mazars est une entreprise internationale d'origine française spécialisée dans l'audit, l'expertise comptable, la fiscalité et le conseil aux entreprises. De 33 salariés en France en 1977, l'effectif global du cabinet est aujourd'hui supérieur à 40 000 collaborateurs à travers le monde, où Mazars est présent dans 89 pays. Ce qui démontre l'évolution qu'a connu Mazars, en particulier, lors des deux dernières années.

Mazars renforce sa présence dans le monde, en particulier, en Amérique du Nord, via la création de « Mazars North America Alliance » qui permet à ses clients de profiter des expertises des 40 000 professionnels présents dans 89 pays et territoires à travers le monde. La présence mondiale de Mazars aujourd'hui est structurée autour de plateformes géographiques : l'Europe, l'Asie Pacifique, l'Afrique, le Moyen-Orient, l'Amérique Latine, les Caraïbes et l'Amérique du nord.

Le groupe Mazars fédère un ensemble de métiers répartis dans différents départements :

- Financial reporting audit& advisory :
- Consulting
- Financial advisory services
- Accounting and Outsourcing
- Fiscalité
- Conseil juridique
- International desks
- Actuariat

2 Mazars Maroc

Le cabinet « Mazars Audit et Conseil », membre intégré du partnership Mazars, fait partie des cinq plus importants cabinets d'audit et de conseil du Royaume. Fort d'une expérience de plus de trente-cinq ans, et porté par une équipe de plus d'une centaine de professionnels, le cabinet poursuit son ambition de rester l'un des acteurs les plus en vue pour accompagner le secteur public dans ses stratégies de modernisation et le secteur privé dans ses projets de développement au Maroc et dans la région de l'Afrique du nord et de l'Afrique subsaharienne.

Le cabinet est géré par un comité exécutif sous la supervision d'un comité de surveillance, il est composé de Management Units métiers et de trois directions de support :

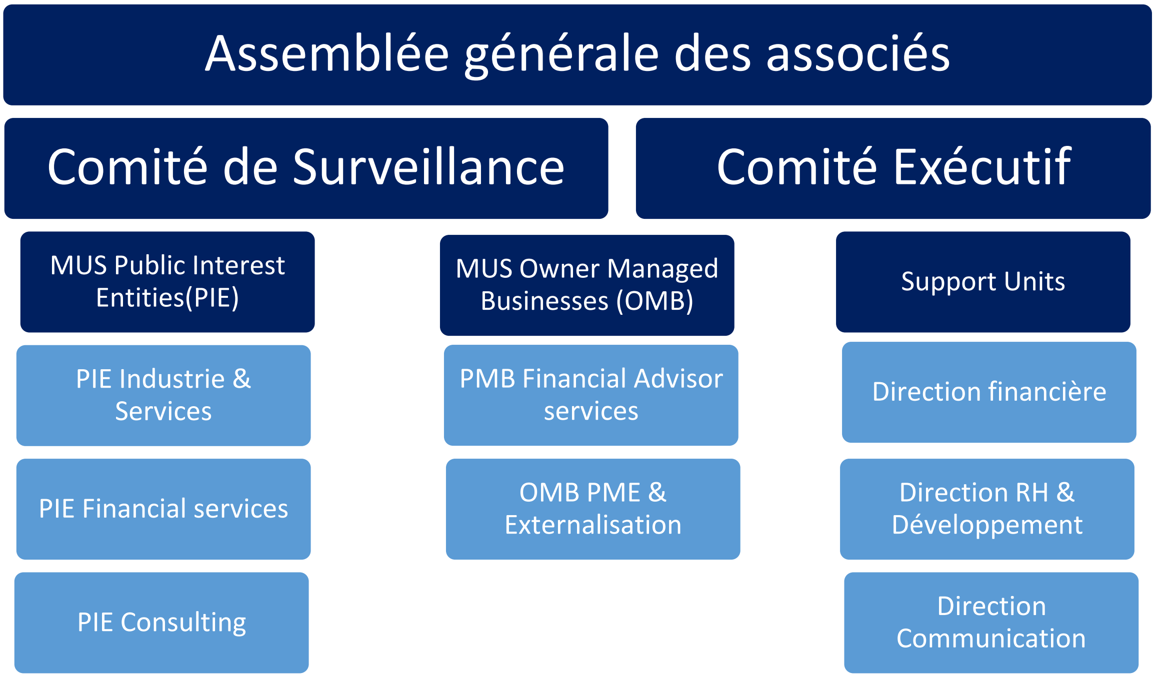

Figure 37 : Organigramme (Source :Mazars)

Annexe III : Interpolation et Extrapolation linéaire

Si l'on possède les taux couponnés de maturité $t_1$et t_2 notés respectivement $Y(0, t_1)$ et $Y(0, t_2)$, nous déduisons alors le taux de maturité t avec $t_1 < t < t_2$ en interpolant linéairement de la manière suivante :

$$\boldsymbol{Y(0, t) = \frac{(t_2 - t)Y(0, t_1) + (t - t_1)Y(0, t_2)}{(t_2 - t_1)}}$$

L'extrapolation concerne les taux correspondant aux maturités dépassant la maturité maximale t_{max} dont le taux est disponible et elle consiste graphiquement en la prolongation du segment liant les deux points $(t_{max-1}, Y(0, t_{max-1}))$ et $(t_{max}, Y(0, t_{max}))$ tel que t_{max-1} est la borne supérieure des maturités inférieures à t_{max} dont les taux sont connus et mathématiquement ceci revient à calculer le taux pour une maturité $t > t_{max}$ en utilisant la relation :

$$\boldsymbol{Y(0, t) = \frac{(t_{max} - t)Y(0, t_{max-1}) + (t - t_{max-1})Y(0, t_{max})}{(t_{max} - t_{max-1})}}$$