



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
INSEA



Projet de Fin d'Etudes

**Valorisation des exigences quantitatives
sous la Solvabilité Basée sur les Risques**

Préparé par : **Mme. Zineb CHALAOUANE**
M. Saad MOUSSAID

Sous la direction de : **M. Fouad MARRI (INSEA)**
Mme. Sabrina MRABTI (FORSIDES AFRICA)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Fouad MARRI (INSEA)**
- **M. Driss EFFINA (INSEA)**
- **Mme. Sabrina MRABTI (FORSIDES AFRICA)**

Juin 2021 / PFE N° 12

Dédicace

“

*À mes chers parents,
À ma chère sœur,
À Imane,*

*Je vous dédie ce travail en espérant qu'il soit
l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de
votre soutien infailible.*

”

- *Zineb*

“

Je dédie cet humble travail :

*À mes chers parents,
À ma chère sœur,
À mes meilleurs amis,*

*Je vous dédie ce travail en témoignage de l'attachement,
l'amour et l'affection que je vous porte.*

”

- *Saad*

Remerciements

Qu'il nous soit permis, au terme de ce travail, d'exprimer notre gratitude et vifs remerciements à notre encadrant interne M. Fouad MARRI d'avoir accepté de diriger ce travail, nous tenons aussi à lui être reconnaissants pour ses précieux conseils.

Nous adressons aussi notre profonde gratitude à notre encadrante de stage Mme. Sabine MRABTI. Qu'elle trouve ici le témoignage de notre estime et profonde reconnaissance pour son accueil, sa générosité, ses orientations et ses qualités humaines qu'elle a su nous prodiguer tout au long du stage.

Nous tenons également à remercier M. Driss EFFINA de nous avoir honorés en acceptant d'évaluer notre travail.

- Zineb & Saad

Résumé

Le projet Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) a été initié, au Maroc, afin de définir un nouveau cadre réglementaire adapté au monde économique actuel et aux profils de risque des compagnies d'assurance et protéger les assureurs ainsi que les assurés. En effet, la SBR prend une part importante dans le travail des actuaires, notamment au niveau des exigences quantitatives que constitue son premier pilier. Ces exigences concernent principalement l'évaluation des provisions techniques prudentielles ainsi que le capital de solvabilité requis (CSR). L'importance de ces éléments est de premier plan et leur estimation représente un enjeu fondamental puisqu'ils permettent aux compagnies d'assurance de faire face aux risques auxquels elles sont exposés et ainsi garantir leur solvabilité. Par conséquent, la SBR impose que leur évaluation soit la plus juste possible.

Dans ce contexte-ci, l'objet de ce mémoire s'inscrit dans le besoin de mieux discerner les exigences réglementaires des assureurs sous la SBR d'un point de vue théorique et pratique, tout en respectant les spécifications techniques de la deuxième étude d'impacts quantitatives (EIQ2) dont les hypothèses et les techniques de calcul sont encore en train d'être testés par les compagnies d'assurances.

Dans une première partie, nous présenterons brièvement le cadre réglementaire SBR, tout en décrivant les différents éléments du bilan prudentiel qui serviront d'introduction aux sections plus pratiques de notre mémoire. La deuxième partie s'articulera autour de la construction théorique et le calcul des provisions techniques prudentielles, et ce pour l'assurance vie et non-vie. Effectivement, suite à la modélisation de la courbe de taux, nous nous intéresserons au calcul de la meilleure estimation en assurance non-vie pour la branche « *Véhicules à usage de tourisme – Corporel* » grâce aux maintes méthodes de provisionnement à la fois déterministes et stochastiques. Ensuite, nous essayerons d'identifier les spécificités de l'assurance vie en adoptant le produit « *Décès Emprunteur* » comme base pour la modélisation et projection du passif, une étape qui s'avère nécessaire pour l'évaluation de la meilleure estimation vie. Nous terminerons notre mémoire par la valorisation du capital de solvabilité requis et de la marge de risque selon la formule standard, éléments vitaux quant à la solvabilité de l'assureur. Nous nous inspirerons de la directive Solvabilité II et de notre propre démarche de calibrage des chocs, soit par génération de scénario, soit par recours à des méthodes plus fameuses (notamment Merz & Wüthrich) afin de pouvoir combler les lacunes que présente la SBR dans ce cadre.

Mots clés : SBR, Provisionnement non-vie, Meilleure Estimation, CSR, Marge de Risque, Décès Emprunteur, Courbe des taux, Black & Scholes, Vašíček, CIR, Merz & Wüthrich .

Table des matières

Dédicace	II
Remerciements	III
Résumé	IV
Table des figures	VII
Liste des tableaux	VIII
Liste des sorties R	X
Liste des abréviations	XI
Introduction générale	1
1 Introduction à la norme Solvabilité Basée sur les Risques (SBR)	3
1.1 Contexte de la SBR	4
1.2 Piliers de la SBR	5
1.3 Focus sur le premier pilier	6
1.3.1 Provisions techniques prudentielles	7
1.3.2 Capital de solvabilité requis (CSR)	7
1.3.3 Valorisation du bilan prudentiel :	9
1.3.3.1 Actif du bilan prudentiel :	9
1.3.3.2 Passif du bilan prudentiel :	10
1.3.4 Les fonds propres :	11
2 Construction de la courbe des taux	13
2.1 Taux zéro-coupon	14
2.1.1 Courbes empiriques	14
2.1.2 Courbes théoriques	16
2.1.2.1 Modèle de Vašíček	16
2.1.2.2 Modèle CIR	22
2.2 Taux Forward	26
3 Valorisation des provisions techniques prudentielles - Non vie -	27
3.1 La meilleure estimation des engagements pour sinistres	28
3.1.1 Méthodes déterministes	29
3.1.1.1 Méthode de Chain Ladder	29

3.1.1.2	Méthode London Chain	32
3.1.1.3	Méthode de DeVyllder	34
3.1.2	Méthodes stochastiques	36
3.1.2.1	Mack	36
3.1.2.2	Bootstrap	39
3.2	La meilleure estimation des primes	42
3.3	La meilleure estimation des frais de gestion	43
4	Valorisation des provisions techniques prudentielles - Vie -	45
4.1	Tarification en assurance décès emprunteur	46
4.1.1	Notations et hypothèses	46
4.1.2	Calcul de la prime unique	47
4.1.3	Calcul des primes mensuelles selon le capital initial	48
4.1.4	Calcul des primes mensuelles selon le capital restant dû	48
4.2	Calcul des provisions techniques prudentielles	49
4.2.1	La meilleure estimation des engagements	49
4.2.2	La meilleure estimation des frais de gestion	51
4.2.3	Présentation des résultats	51
5	Capital de Solvabilité Requis et Marge de Risque	56
5.1	Définition et approches de calcul du CSR	57
5.2	Souscription Vie	57
5.2.1	CSR Souscription vie	57
5.2.2	Marge de Risque Vie	61
5.3	CSR marché	62
5.4	Souscription Non Vie	69
5.4.1	CSR Souscription Non Vie	69
5.4.2	Marge de risque Non Vie	78
5.5	CSR	78
	Conclusion générale	80
	Bibliographie	82
	Annexes	83
	A Courbes ZC	84
	B Hypothèses de Chain-Ladder	85
	C Hypothèses de Mack	87

Table des figures

1.1	Trajectoire de construction du projet SBR	4
1.2	Les trois piliers de la SBR	5
2.1	Courbe des taux zéro-coupon « Bootstrap »	16
2.2	Taux Moyen Pondéré entre 1/1/2004 et 31/12/2019	19
2.3	Corrélograme de la série des taux	20
3.1	Distribution des provisions suite à 10 000 simulations	41
4.1	Projection des flux primes	52
4.2	Projection des flux décès	52
4.3	Projection des flux	53
4.4	Projection des nombres de contrats du portefeuille	54
5.1	Évolution du cours MASI	64
5.2	Évolution des rendements MASI	64
5.3	Histogramme des rendements	64
5.4	QQ-plot des rendements MASI	64
5.5	5000 simulations du cours de l'indice MASI	66
5.6	Simulations Vašíček	67
5.7	Simulations CIR	67
B.2	Vérification de l'hypothèse (H1) de Chain-Ladder	85
B.4	Vérification de l'hypothèse (H2) de Chain-Ladder	86
C.2	Vérification de l'hypothèse (H3) de Mack	89

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les bilans comptable et économique	6
1.2	Agrégation des risques sous la SBR	8
1.3	Valorisation de l'actif	10
1.4	Valorisation du passif	10
1.5	Décomposition des fonds propres « <i>Catégorie 1</i> »	12
1.6	Décomposition des fonds propres « <i>Catégorie 2</i> »	12
3.1	Triangle des règlements cumulés.	29
3.2	Coefficients de développement de la méthode Chain Ladder	30
3.3	Triangle projeté par la méthode Chain Ladder	31
3.4	Provisions estimées par la méthode de Chain Ladder	31
3.5	Coefficients de la méthode London Chain	33
3.6	Triangle projeté par la méthode de London Chain	33
3.7	Provisions estimées par la méthode de London Chain	33
3.8	Paramètres estimés par la méthode de DeVyllder	35
3.9	Triangle projeté par la méthode de DeVyllder.	35
3.10	Provisions estimées par la méthode de DeVyllder	35
3.11	Récapitulatif des résultats des méthodes déterministes et écarts relatifs	36
3.12	Erreur quadratique et intervalle de confiance du modèle de Mack	38
3.13	Matrice des résidus de Bootstrap	40
3.14	Résultats du Bootstrap pour 10 000 simulations	41
3.15	Quantiles de la distribution des provisions	42
3.16	Récapitulatif des résultats des méthodes stochastiques	42
3.17	Historique des PA, PE et PPNA	43
3.18	Valorisation des différentes meilleurs estimations non-vie	44
4.1	Détail de la projection des flux selon le scénario central	53
4.2	Détail de la projection des flux de frais de gestion	54
5.1	Résultats avant et après choc du risque de mortalité	58
5.2	Résultats avant et après choc du risque de rachat	59
5.3	Résultats avant et après choc du risque de dépense	60
5.4	Résultats avant et après choc du risque de catastrophe	60
5.5	Matrice de corrélation des risques de souscription vie	61
5.6	Récapitulation des résultats du CSR_{vie}	61
5.7	Chocs à appliquer selon les modèles de Vašíček et CIR	68
5.8	Résultats avant et après choc du risque de taux	68
5.9	Détail des valeurs des rapports de l'hypothèse d'approximation	74
5.10	Récapitulation des résultats de Merz et Wütrich	74

Liste des tableaux

5.11	Matrice de corrélation des risques de souscription non vie	78
5.12	Matrice de corrélation des risques du CSR de base	78
A.1	Détail de l'estimation de la courbe zéro-coupon	84
C.1	Triangle des facteurs de développement individuels	87
C.2	Triangle des valeurs affectées aux facteurs de développement individuels . .	87
C.3	Résultats du test d'indépendance	88

Liste des sorties R

1	Test Dickey-Fuller	20
2	Estimation des paramètres du modèle de Vašíček	21
3	Estimation de la prime de risque du modèle de Vašíček	22
4	Estimation des paramètres du modèle de CIR	24
5	Estimation de la prime de risque du modèle de CIR	25
6	Test de normalité des rendements de MASI	64
7	Test de stationnarité des rendements	65
8	Test de normalité du log des charges ultimes	77
9	Estimation des paramètres σ et β	77

Liste des abréviations

ACAPS	<i>Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale</i>
BAM	<i>Bank Al Maghrib</i>
BCSR	<i>Capital de Solvabilité Requis de Base</i>
CDR	<i>Claims Development Result</i>
CIR	<i>Cox Ingersoll Ross</i>
CSR	<i>Capital de Solvabilité Requis</i>
EIQ	<i>Études d'Impacts Quantitatives</i>
IAIS	<i>International Association of Insurance Supervisors</i>
MASI	<i>Moroccan All Shares Index</i>
MCR	<i>Minimum de Capital Requis</i>
ME	<i>Meilleure Estimation</i>
MR	<i>Marge de Risque</i>
MSEP	<i>Mean Squared Error of Prediction</i>
M&W	<i>Merz & Wüthrich</i>
PPNA	<i>Provision pour Primes Non Acquises</i>
SBR	<i>Solvabilité basée sur les Risques</i>
SII	<i>Solvabilité 2</i>
TMP	<i>Taux Moyen Pondéré</i>
ZC	<i>Zéro-Coupon</i>

Introduction générale

A l'instar de Bâle 2 dans le secteur bancaire, les assureurs européens se sont vus imposer ces dernières années un nouveau cadre réglementaire prudentiel. La norme Solvabilité 2, entrée en vigueur au 1^{er} Janvier 2016, a pour principal objectif d'amener les organismes d'assurance à mettre en adéquation leur niveau de fonds propres avec les risques auxquels ils sont soumis.

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS), étant le régulateur de l'activité de l'assurance au Maroc, s'inspire de ce cadre européen pour mettre en œuvre sa propre norme afin d'assurer la solvabilité du secteur. En avril 2017, le projet de circulaire Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) a été lancé ayant comme objectif de s'aligner avec les principes de base de l'assurance émis par l'association internationale des contrôleurs d'assurance (IAIS) et définir les nouvelles règles de mesure du risque en assurance, entraînant une refonte de l'exigence de solvabilité des compagnies d'assurance. Désormais, l'évaluation des exigences de capital des compagnies d'assurance et de réassurance prendra en compte la taille, la nature et la complexité des assurances et des différents acteurs du marché. Ainsi, les provisions techniques ne seront plus évaluées dans un cadre comptable mais plutôt dans une vision économique.

En effet, le lancement de cette nouvelle norme a nécessité de nos jours deux études d'impacts quantitatives (EIQ) afin de mesurer l'impact de ce changement de réforme sur le marché des assurances au Maroc. La première étude EIQ1 a permis au régulateur de vérifier en premier lieu l'adéquation des spécifications techniques développées par l'ACAPS aux principes et objectifs retenus dans le projet de circulaire SBR – Pilier I de 2018, entrevoir la valorisation prudentielle des éléments du bilan SBR hors marge de risque (MR) et collecter les données nécessaires au calibrage des paramètres de calcul du capital de solvabilité requis (CSR). Alors que la deuxième étude EIQ2 vise à entrevoir les ajustements de la valorisation prudentielle des éléments du bilan suite à l'EIQ1, obtenir un calibrage de la formule standard SBR pour le calcul du besoin de capital, sur la base des exercices 2017 à 2019 et définir l'impact de la norme sur le bilan des entreprises d'assurance et de réassurance et de vérifier la cohérence des propositions faites face aux objectifs visés.

Ainsi, ce mémoire est organisé en quatre parties dans le but d'évaluer les exigences quantitatives sous la norme SBR. Pour ce faire, nous avons adopté le schéma suivant : En amont, nous avons présenté un aperçu global de la SBR, puis nous nous sommes focalisés sur la construction de la courbe de taux réglementaire. Ensuite, nous avons procédé à la valorisation des exigences quantitatives en assurance vie et en assurance non vie. Enfin, suite à la détermination des taux de chocs à appliquer, nous avons calculé le CSR et la marge de risque.

Introduction générale

Ce travail nous a permis de maîtriser le pilier I de la norme SBR, de mettre en pratique deux différents portefeuilles (non-vie et vie) pour voir l'impact du passage à la norme et enfin de proposer des solutions techniques à quelques insuffisances constatées lors de notre étude.

Chapitre 1

Introduction à la norme Solvabilité Basée sur les Risques (SBR)

Notre chapitre introductif aura pour objectif d'établir le contexte d'implémentation et de présenter les particularités du nouveau cadre réglementaire marocain : la Solvabilité Basée sur les Risques (SBR). Nous détaillerons les raisons qui ont poussé l'ACAPS à adopter ce projet, ce qui nous conduira à exposer la chronologie de son implémentation. Par la suite, nous attaquerons les trois piliers de la SBR et citerons leur enjeux. Nous focaliserons notre attention sur le pilier I puisqu'il représente le pilier concerné par les exigences quantitatives. Finalement, nous serons amenés à détailler le bilan prudentiel en SBR et les fonds propres à comptabiliser.

1.1 Contexte de la SBR

Fortement influencée par la directive Solvabilité II et visant à se conformer aux principes de base de l'assurance établis par l'association internationale des superviseurs d'assurance (IAIS), l'ACAPS annonce en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques » (SBR) élaboré dans l'intention d'instaurer un nouveau référentiel réglementaire adapté au contexte marocain qui prend en compte l'ensemble des risques auxquels les sociétés d'assurance marocaines peuvent être soumises. La mesure et le contrôle des risques demeurent des éléments incontournables dans la SBR, garantissant ainsi comme son prédécesseur la protection des assurés et des bénéficiaires de contrats.

Le projet SBR a été donc créé dans un contexte de constante évolution des normes internationales : le Maroc se trouvait dans la nécessité d'introduire la nouvelle directive SBR, étant donné les lacunes que présentait le cadre prudentiel antécédent. En outre, l'ACAPS vise à combler le fossé avec l'Europe quant aux réglementations prudentielles et pratiques de supervision dans le secteur assurantiel.

Cette nouvelle réglementation est censée créer un marché fiable et stable qui assure le respect des droits des assurés tout en promouvant la santé financière des entreprises d'assurance et de réassurance. Afin d'arriver à atteindre ces objectifs, l'approche adoptée par l'ACAPS repose sur les principes suivants :

- La mise en place d'un cadre de concertation et de dialogue avec les sociétés d'assurance.
- L'implémentation flexible et progressive du nouveau référentiel réglementaire.
- Le principe de proportionnalité qui prévoit la satisfaction des exigences en fonction de la nature et la complexité des risques inhérents au profil de chaque compagnie d'assurance.

L'implémentation de la SBR a connu plusieurs étapes, dont les phases les plus notables sont résumées selon l'illustration suivante :

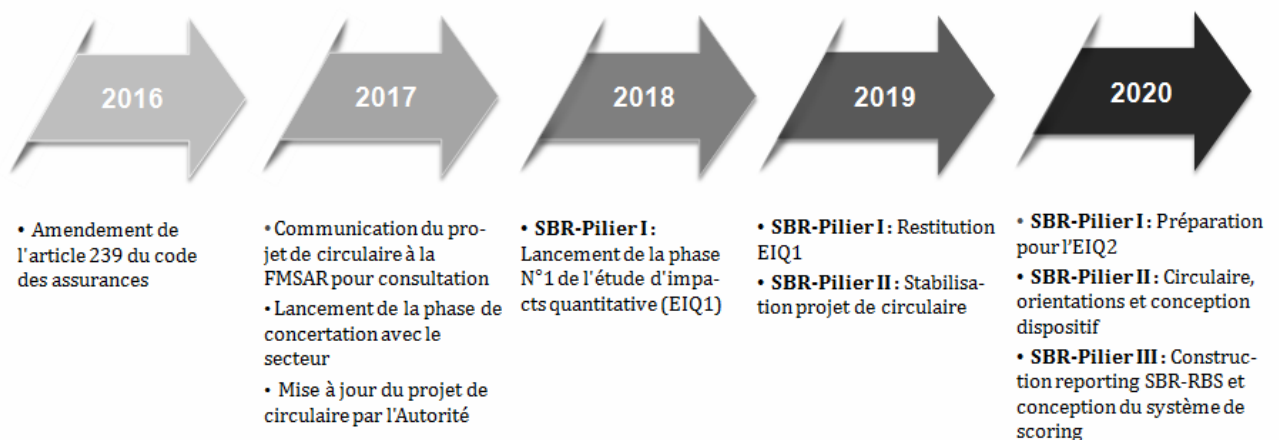


FIG. 1.1 : Trajectoire de construction du projet SBR

1.2 Piliers de la SBR

La SBR s'articule ainsi autour de trois piliers. Le premier englobe toutes les exigences quantitatives, le deuxième fixe les normes qualitatives et le troisième décrit l'ensemble des critères en matière de communication et d'information :

- **Premier pilier quantitatif** : La surveillance prudentielle, à travers le pilier 1, permet au régulateur d'évaluer le niveau de solvabilité de l'assureur et sa capacité à résister aux chocs. Ce pilier sera le focus de notre rapport.
- **Deuxième pilier** : Ce pilier étoffe le dispositif actuel concernant le processus de suivi des risques des compagnies, la gouvernance et la partie audit interne dont l'objectif est d'établir une gouvernance globale appropriée et d'inciter les entreprises à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à connaître leur capacité à les gérer.
- **Troisième pilier** : Le principe de ce troisième pilier est d'obliger les compagnies d'assurance à communiquer de façon transparente et périodique des informations précises et détaillées sur leurs activités et leur situation solvable avec l'Autorité de contrôle et avec le public. Ceci se réalise à travers la publication des états prudentiels et statistiques ainsi que des rapports narratifs.

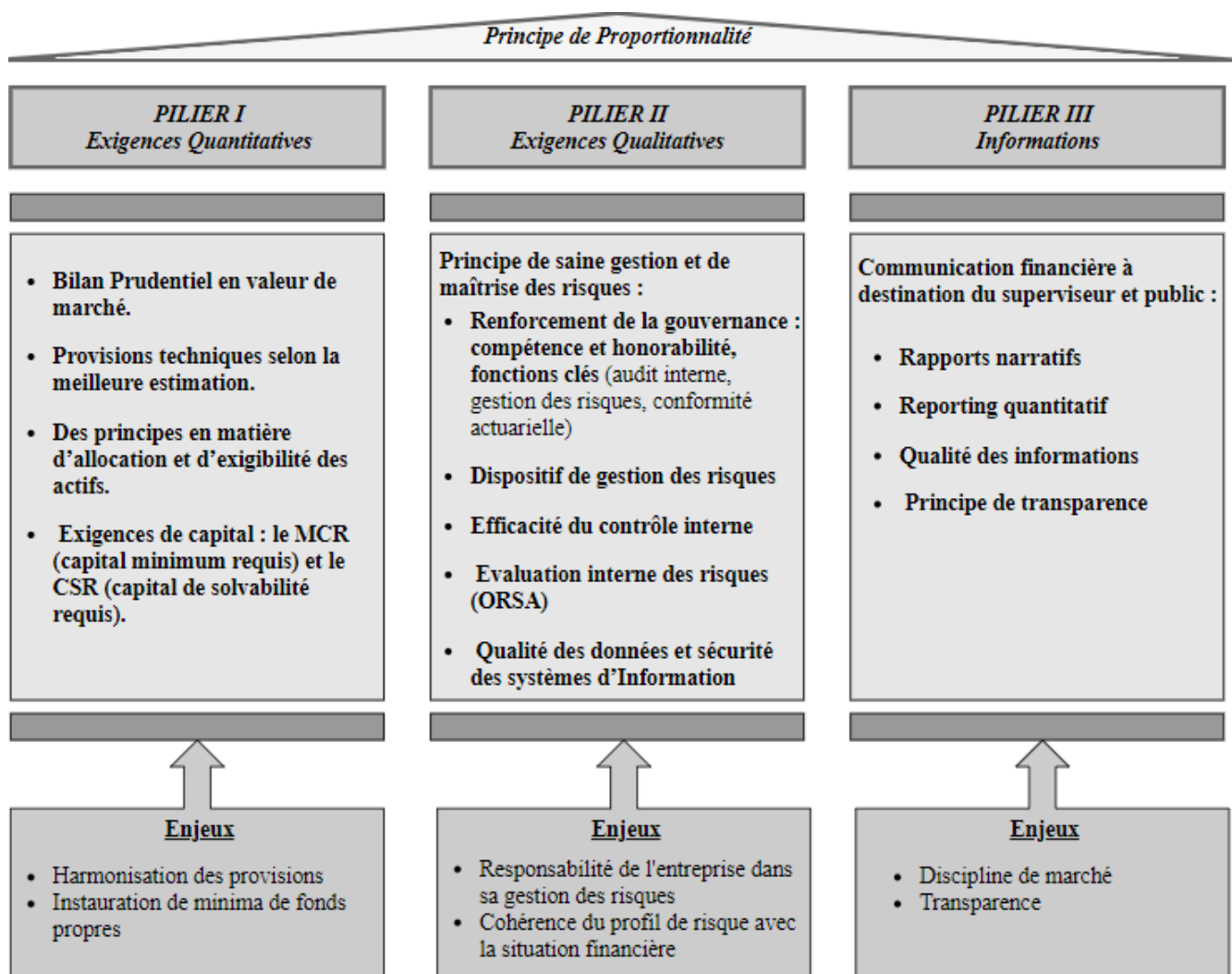


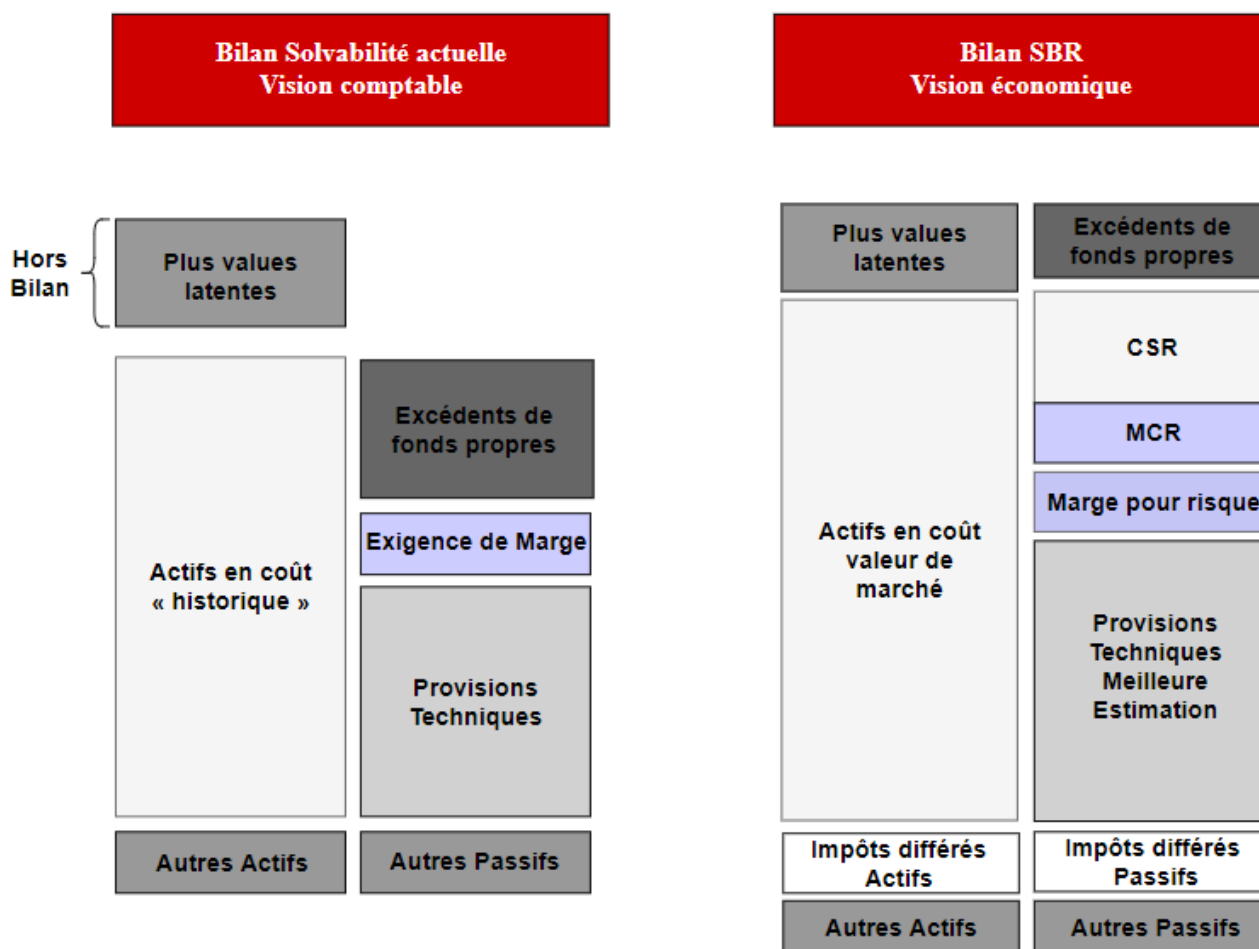
FIG. 1.2 : Les trois piliers de la SBR

1.3 Focus sur le premier pilier

Pour une meilleure évaluation des risques, la nouvelle réforme SBR s'imprègne des fondements de la Solvabilité II. Effectivement, la vision meilleure estimation (ou « Best Estimate » en anglais) est préconisée pour la valorisation des provisions techniques prudentielles. Elle correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs, ce qui permet de prendre en compte la valeur du temps ainsi que la valeur du risque.

La courbe des taux utilisée pour l'actualisation de ces flux est communiquée par l'ACAPS et se base sur les taux actuariels des bons de Trésor publiée par Bank Al Maghrib. Une marge de risque, rajoutée à cette meilleure estimation, permet de garantir un montant qui permettra aux organismes d'assurance d'honorer leurs engagements.

Les actifs et les autres passifs sont valorisés à leurs valeurs économiques. Les impôts différés eux seront désignés comme passif ou actif en fonction de la valeur économique et de la valeur comptable des fonds propres. Le bilan SBR désigne aussi le montant minimum de la marge de solvabilité et les éléments constitutifs désignés respectivement par « Capital de Solvabilité Requis » (CSR) et « Fonds propres »



TAB. 1.1 : Comparaison entre les bilans comptable et économique

1.3.1 Provisions techniques prudentielles

Les provisions techniques prudentielles sont calculées en additionnant une meilleure estimation des engagements, une meilleure estimation des frais de gestion et une marge de risque selon la relation suivante :

$$PT = BE_{eng} + BE_{frais} + RM$$

Avec :

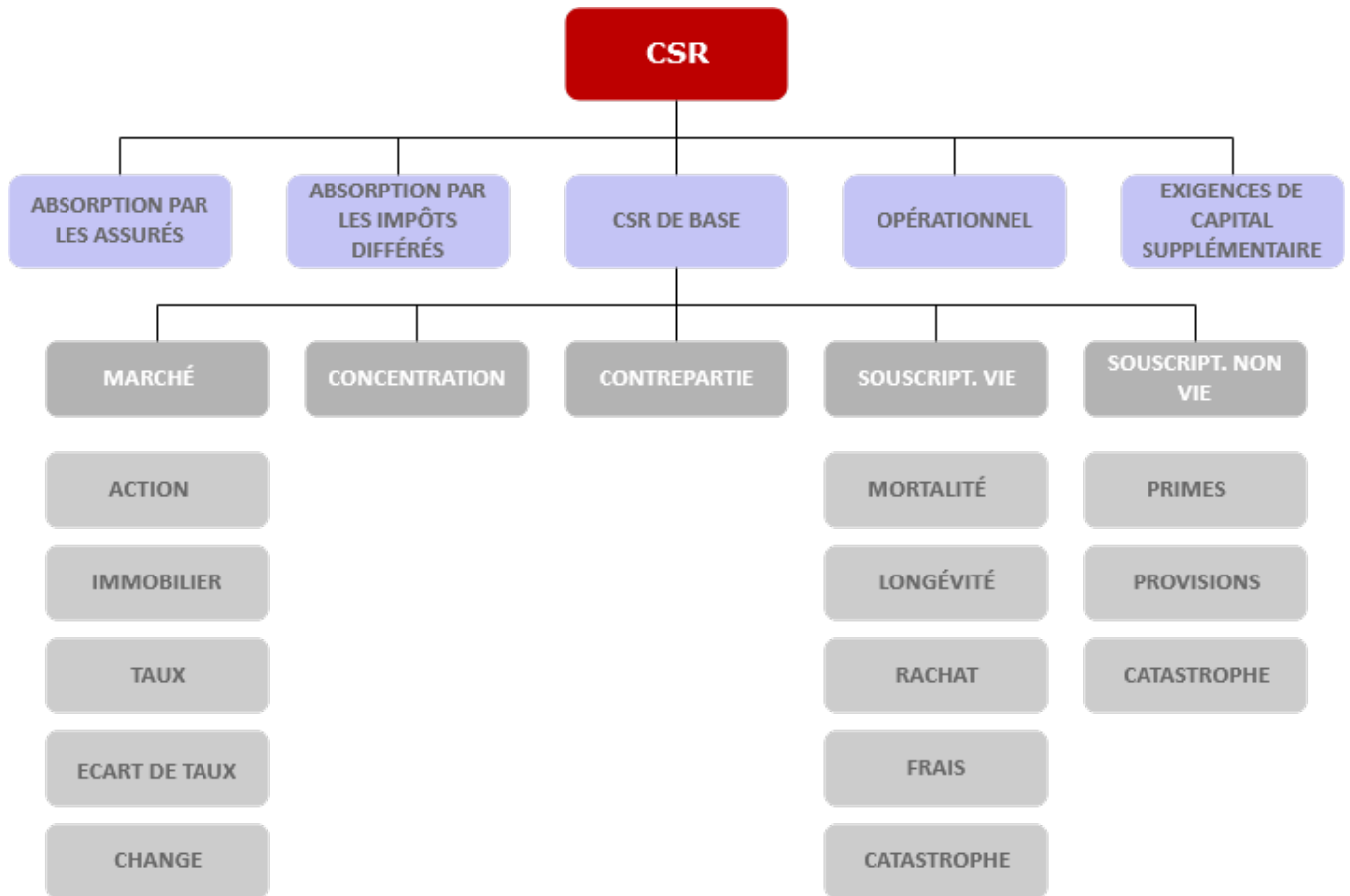
- BE_{eng} : la meilleure estimation des engagements qui représente la valeur actuelle probable des flux des engagements pris par l'assureur ou le réassureur.
- BE_{frais} : la meilleure estimation des frais de gestion qui correspond à la valeur actuelle probable des flux des frais de gestion des contrats.
- RM : la marge de risque qui équivaut au coût de capital et est déterminée suivant la nature des opérations d'assurance et de réassurance. Elle constitue ainsi une marge de prudence dans l'estimation des provisions techniques.

La valorisation de ces provisions se fait par catégorie d'activité à savoir :

- les opérations d'assurance vie, décès ou de capitalisation ;
- les rentes découlant des opérations non-vie ;
- les opérations d'assurance non-vie hors rente ;
- les opérations de réassurance.

1.3.2 Capital de solvabilité requis (CSR)

Le capital de solvabilité requis est une exigence de capital représentant le minimum de la marge de solvabilité. Il correspond au seuil prévu par le régulateur afin de faire face aux risques d'exploitation propres au caractère aléatoire des opérations d'assurance et de réassurance. La définition plutôt technique de ce terme implique que le CSR correspond au capital exigible dont une entreprise d'assurance a besoin pour limiter la probabilité de ruine à un an à 0,5%.



TAB. 1.2 : Agrégation des risques sous la SBR

Nous distinguons ci-après entre chacun des modules de risque de la CSR :

1. **Risque de souscription** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de sinistralité, de tarification et de provisionnement ;
 - *Risque de souscription en vie* : tient compte du risque de mortalité ou de longévité, risque de rachat, risque de frais de gestion et risque de catastrophe.
 - *Risque de souscription en non-vie* : est mesuré en fonction du risque de primes, du risque de provisions, et du risque catastrophe.
2. **Risque de marché** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant, directement ou indirectement, de fluctuations affectant le niveau de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers. Il est déterminé en fonction du risque immobilier, risque action, risque de taux, risque de spread et risque de change ;
 - *Risque de spread (marge de crédit)* : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant des changements touchant les marges additionnelles par rapport aux taux de référence exigées par les investisseurs sur les emprunts émis par des entités autres que l'État.

3. **Risque de contrepartie** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un défaut de paiement d'une contrepartie ou d'une dégradation de sa qualité de crédit. Il correspond à la somme du risque de contrepartie des cessionnaires et risque de contrepartie des assurés ;
4. **Risque opérationnel** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de procédures internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieurs ;
5. **Risque de concentration** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un manque de diversité des émetteurs auxquels l'entreprise d'assurances et de réassurance est exposée. Autrement, il correspond à la perte des fonds propres qui résulterait de la baisse des actifs associés à un ensemble d'émetteurs appartenant au même groupe ;
6. **Absorption par les assurés** : correspond au minimum de l'écart entre le capital de solvabilité requis de base, calculées brutes et nettes d'absorption par les assurés, d'une part, et le montant des bénéfices discrétionnaires futures tels que visés à la spécification technique 20 de la même circulaire, d'autre part ;
7. **Absorption par les impôts différés** : correspond au produit du taux d'impôts et le minimum de la somme du capital de solvabilité requis de base et l'exigence de capital relative au risque opérationnel diminuée de l'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption des pertes par les assurés, d'une part, et l'écart positif entre les impôts différés-passif et les impôts différés-actif, d'autre part.

1.3.3 Valorisation du bilan prudentiel :

1.3.3.1 Actif du bilan prudentiel :

Le tableau présente la valorisation des différents types d'actifs du bilan prudentiel SBR selon la Section 2 du rapport des spécifications techniques SBR publié par l'ACAPS :

Actif du bilan prudentiel	
Types d'actifs	Valorisation
Les actions cotées à la bourse	Dernier cours coté
Les titres OPCVM et OPCI	Dernière valeur liquidative
Les titres OPCC et FPCT	Dernière valeur connue
Titres de créances négociables, obligations et bons	Valeur de marché
Immobilisations corporelles	Valeur comptable
Autres créances	Valeur comptable
Immobilisations en non valeur	Valeur nulle
Immobilisations incorporelle	Valeur nulle
Actifs immobiliers hors OPCI	Valeur de transaction (sinon Valeur comptable)
Autres actifs	Valeur dire d'expert (sinon Valeur comptable)

TAB. 1.3 : Valorisation de l'actif

1.3.3.2 Passif du bilan prudentiel :

Comme pour les actifs, Solvabilité basée sur les risques détaille la valorisation des différents types du passif du bilan prudentiel SBR selon la Section 3 du rapport des spécifications techniques SBR publié par l'ACAPS :

Passif hors provisions techniques prudentielles	
Types du passif	Valorisation
Capitaux propres	Valeur comptable
Capitaux propres assimilés	Valeur comptable
Dettes de financement	Valeur comptable
Provisions durables pour risques et charges	Valeur comptable
Dettes pour espèces remises par les cessionnaires	Valeur comptable
Dettes de passif circulant	Valeur comptable
Autres provisions pour risques et charges	Valeur comptable
La trésorerie-passif	Valeur comptable
Les écarts de conversion-passif	Valeur comptable (sinon la valeur nulle)
Emprunts obligataires	Valeur de marché

TAB. 1.4 : Valorisation du passif

1.3.4 Les fonds propres :

Les fonds propres désignent les capitaux dont dispose une entreprise. Ils sont soit constitués des apports des investisseurs (actionnaires), soit générés par l'activité économique. Les entreprises d'assurance et de réassurance en disposent également. Les normes auxquelles elles sont soumises fixent les dispositions de détermination de ces fonds propres.

Les critères de classification des fonds propres sont :

- la subordination
- la capacité d'absorption des pertes
- la permanence
- la perpétuité
- l'absence de charges financières

La SBR classe donc les types de fonds propres en deux catégories, notamment :

- les fonds propres de catégorie 1
- les fonds propres de catégorie 2

La constitution de ces éléments est donnée par les deux tableaux qui viennent ci-après :

Fonds propres catégorie 1	
(+)	(-)
Capital en actions ordinaires appelé et versé/Fonds d'établissement	Montant de la valeur des actions
Primes d'émission, de fusion, d'apport	Dividendes
Fonds social complémentaire	Report à nouveau débiteur
Réserve légale	Résultats nets déficitaires en attente d'affectation
Autres réserves non liées à des engagements	Résultat net déficitaire de l'exercice
Report à nouveau créateur	Engagements donnés hors bilans
Résultats nets bénéficiaires en instance d'affectation	X % des moins-values latentes nettes d'impôt différé actif
Résultat net bénéficiaire de l'exercice	Écart négatif entre impôts différés actifs et passifs
Plus-values latentes	Écart négatif entre les provisions techniques comptables et prudentielles
Écart positif entre provisions techniques comptables et prudentielles	Immobilisations incorporelles et en non valeurs nettes d'impôts différés
Emprunt pour augmentation du fonds d'établissement	Montant des participations
Dettes subordonnées	

TAB. 1.5 : Décomposition des fonds propres « *Catégorie 1* »

Fonds propres catégorie 2	
+	-
Capital en actions ordinaires appelé et non versé	Montant des instruments de fonds propres de catégorie 2
Écart de réévaluation	
Dettes subordonnées	
Écart positif entre les impôts différés actifs et les impôts différés passifs	

TAB. 1.6 : Décomposition des fonds propres « *Catégorie 2* »

Chapitre 2

Construction de la courbe des taux

Dans le présent chapitre, nous aborderons tout d'abord les éléments essentiels concernant la notion du taux zéro-coupon, qui sera dans les prochains chapitres un instrument primordial dans le calcul et l'actualisation de plusieurs éléments. A cet effet, l'étude et la construction de la courbe de taux sera basé sur la courbe de taux de référence fournie par le site de Bank Al Maghrib (BAM) tout en s'appuyant sur des étapes et méthodes bien décrites dans ce qui suit. Nous entamerons d'abord la construction de la courbe empirique. Ensuite, nous modéliserons notre courbe théorique grâce à deux modèles à un seul facteur : le modèle de Vašíček et le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

2.1 Taux zéro-coupon

2.1.1 Courbes empiriques

Importation des taux de référence :

Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

En premier lieu, nous commençons par transformer les taux monétaires correspondant à des maturités inférieures à 1 an à des taux actuariels. La différence entre ces deux taux se traduit en terme de durée.

En effet, le taux monétaire étant le taux d'intérêt du marché monétaire où s'échangent des instruments financiers d'une durée de vie inférieure à 1 an, celui-ci correspond à une durée qui ne dépasse pas l'année. Ce type de taux est calculé sur une base de 360 jours dite année commerciale. Par opposition donc aux taux monétaires, les taux actuariels, eux, correspondent à une durée supérieure à 1 an. Les taux de rendement actuariels sont calculés en base nombre de jours exacts.

Le passage du taux monétaire au taux actuariel se fait suivant la relation suivante :

$$T_a = \left(1 + \frac{n}{360} T_m\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

T_m : le taux monétaire ;
 T_a : le taux actuariel ;
 n : le nombre de jours de placement.

Maintenant que la courbe des taux actuariels de référence est bien définie nous passerons à la prochaine étape qui est l'interpolation linéaire de ces taux.

Interpolation de la courbe des taux de référence :

Il existe plusieurs méthodes d'interpolation, la plus utilisée est la méthode d'interpolation linéaire. À cet effet, notre courbe des taux a été interpolée linéairement afin d'obtenir des taux actuariels de maturités pleines.

Afin d'interpoler linéairement notre courbe, nous nous intéressons à la période t qui ne coïncide pas avec les points d'intérêts et que l'on connaît les taux actuariels des maturités t_i et t_{i+1} tels que $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, ainsi le taux $R(t)$ correspondant à la maturité t est calculé selon la formule :

$$R(t) = \frac{(t_i - t)R(t_j) + (t - t_j)R(t_i)}{t_i - t_j}$$

Transformation en courbe des taux zéro-coupons « Méthode du Bootstrap » :

Le **Bootstrap** est une procédure de reconstitution d'une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est à dire segment de maturité par segment de maturité. Cette méthode est basée sur l'hypothèse que le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux.

Nous commençons alors par déterminer à partir des taux actuariels fournis ceux des ténors de la courbe notamment pour les maturités 1 an, 2 ans, 3 ans... etc avant de calculer les taux zéro-coupon correspondant.

1. Pour la maturité 2 ans

Rappelons d'abord que toute obligation versant des coupons peut être considérée comme un ensemble de zéro-coupons. Son prix (théorique) est donc, par conséquent, équivalent à la somme des valeurs actuelles de ces zéro-coupons. Ainsi, pour calculer le taux zéro-coupon de l'échéance à 2 ans par exemple, nous observons le prix et les caractéristiques (flux contractuels) d'une obligation à cette échéance et nous la décomposons à deux zéro-coupon : le premier versant un flux égal au montant du coupon à une maturité d'un an et le deuxième versant un flux égal à la somme du montant du coupon et celui du remboursement du nominal avec une maturité de deux ans. A ce niveau, le facteur d'actualisation du premier flux est déjà connu grâce à l'étape précédente et l'on déduit le facteur d'actualisation du second flux en résolvant l'équation :

$$\frac{Nt_f}{(1+r_{a,2})} + \frac{Nt_f}{(1+r_{a,2})^2} + \frac{N}{(1+r_{a,2})^2} = \frac{Nt_f}{(1+R(0,1))} + \frac{Nt_f}{(1+R(0,2))^2} + \frac{N}{(1+R(0,2))^2}$$

Ou encore puisque $R(0,1) = r_{a,1}$ et en considérant t_f le taux facial égal au taux actuariel de la maturité cible (ici 2 ans, donc $t_f = r_{a,2}$)

$$\frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,2})} + \frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,2})^2} + \frac{1}{(1+r_{a,2})^2} = \frac{r_{a,2}}{(1+r_{a,1})} + \frac{r_{a,2}}{(1+R(0,2))^2} + \frac{1}{(1+R(0,2))^2}$$

Avec :

- $r_{a,1}$: taux actuariel correspondant à la maturité 1 an ;
- $r_{a,2}$: taux actuariel correspondant à la maturité 2 ans ;
- $R(0,2)$: le taux zéro-coupon de maturité 2.

2. Pour la maturité 3 ans

Nous réitérons l'opération précédente à partir de titres ayant une maturité comprise entre 2 et 3 ans, etc.

3. En général pour une maturité de n années

Disposant des taux actuariels de toutes les maturités et des taux zéro-coupon corres-

pondants aux maturités inférieures à n , le calcul du taux zéro-coupon $R(0, n)$ se fait par la résolution de l'équation :

$$\frac{1}{(1 + r_{a,n})^n} + \sum_{i=1}^n \frac{r_{a,n}}{(1 + r_{a,n})^i} = \frac{1}{(1 + R(0, n))^n} + \sum_{i=1}^n \frac{r_{a,n}}{(1 + R(0, i))^i}$$

De manière générale, et après simplification, la formule de calcul du taux zéro-coupon de n années de maturité est :

$$R(0, n) = \sqrt[n]{\frac{1 + r_{a,n}}{1 - r_{a,n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+R(0,i))^i}}} - 1$$

À partir des taux zéro-coupons obtenus, nous pouvons simplement obtenir ceux relatifs à n'importe quelle maturité en résonnant par interpolation linéaire. En effet, bien que ces dernières soient approximatives, elles restent pratiques et simples à manipuler et sont souvent utilisées dans le cadre l'élaboration de n'importe quelle courbe de taux notamment celle des zéro-coupon. Nous obtenons le graphique de la courbe de taux empirique :

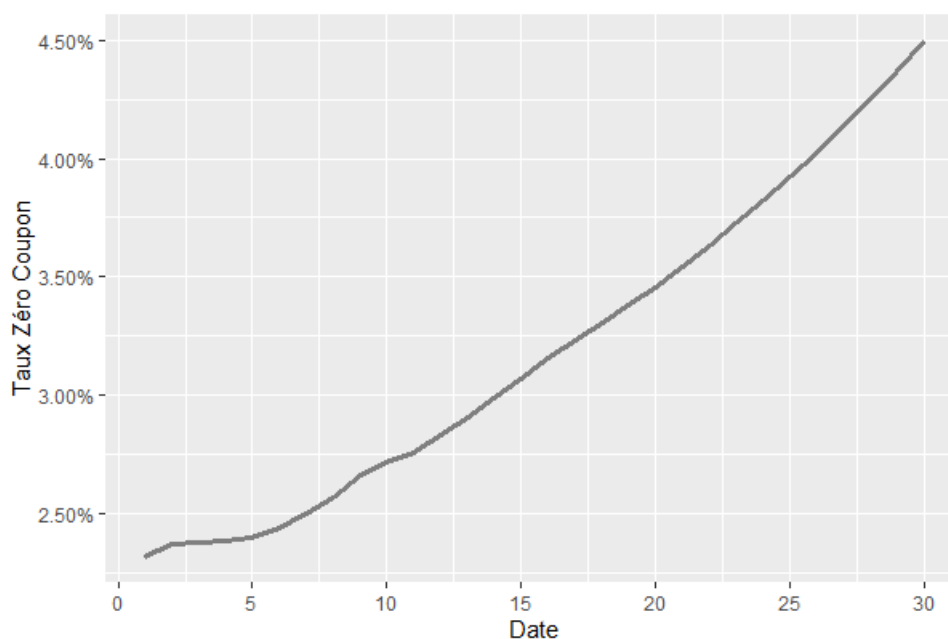


FIG. 2.1 : Courbe des taux zéro-coupon « Bootstrap »

2.1.2 Courbes théoriques

2.1.2.1 Modèle de Vašíček

Présentation théorique du modèle

En 1977, Oldrich Vašíček (*mathématicien et économiste tchèque*) développe un modèle considéré comme modèle fondateur de la modélisation des taux d'intérêts nominaux de court terme. Ce modèle a été adopté depuis pour sa simplicité afin de décrire le développement du taux zéro-coupons à partir du taux de risque instantané; c'est

pourquoi il est dit modèle à **un seul facteur**.

Cette modélisation du taux instantané à court terme, effectuée dans le cadre d'un modèle d'équilibre partiel, suppose que le taux court instantané r suit le processus autorégressif d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants et ceci se présente sous deux composantes, la première appelée dérive et la seconde volatilité :

$$\begin{cases} dr_t = k(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Dont W est un mouvement brownien standard et r_0 , k , θ et σ sont des constantes positives telles que :

- k : force de rappel ou de retour à la moyenne ;
- θ : taux d'intérêt de long terme ;
- σ : volatilité du taux d'intérêt r_t .

La solution explicite de l'EDS pour tout $s \leq t$ est déterminée par :

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

Ou encore :

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{-ku} dW_u$$

L'espérance et la variance du taux prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) \\ \text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}) \end{cases}$$

En outre, la mise en œuvre pratique du modèle de taux court de Vašíček, à l'instar des processus stochastiques, nécessite une discrétisation que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour la simulation des trajectoires. Dans ce sens, ce modèle possède la discrétisation exacte suivante :

$$r_t = a + br_{t-1} + \epsilon_t$$

Avec :

- $a = \theta(1 - e^{-k})$ et $b = e^{-k}$ sont des constantes positives ;
- ϵ_t : le résidu de l'équation de régression ;
- r_{t-1} : est le taux court à l'instant $t - 1$.

Sur ce point, le taux court est supposé être un modèle autorégressif d'ordre 1, $AR(1)$, et stationnaire. En effet, la vérification de ces deux caractéristiques permettra la simplicité du calibrage du modèle de Vašíček : il suffit d'appliquer une régression linéaire entre deux

jeux de données historiques de taux courts pour aboutir aux estimations des paramètres \hat{a} et \hat{b} ainsi que l'écart-type des résidus σ_ϵ qui permettront de remonter aux paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme suit :

$$\begin{cases} k = -\ln(\hat{b}) \\ \theta = \frac{\hat{a}}{1-\hat{b}} \\ \sigma = \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2k}{1-e^{-2k}}} \end{cases}$$

À ce niveau, le calcul des taux zéro-coupon nécessite en premier lieu la recherche des prix zéro-coupon de différentes maturités en se basant sur les taux court. Effectivement, le prix à la date t d'un zéro-coupon de maturité T se définit grâce aux paramètres du modèle de Vašíček par :

$$P(t, T) = a(t, T) \exp\{-b(t, T)r_t\}$$

Avec :

$$\begin{cases} b(t, T) = \frac{1}{k}(1 - \exp\{-k(T-t)\}) \\ a(t, T) = \exp\left\{\left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(b(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k}b^2(t, T)\right\} \end{cases}$$

Jusqu'à présent, il reste à spécifier un seul paramètre qui vient d'apparaître dans l'expression ci-dessus qui est la prime de risque λ et correspond au prix du risque du marché. Ce paramètre nous permet la mesure du degré auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour compenser le risque de défaut et le risque de liquidité auxquels ils seront exposés en détenant une obligation. L'estimation de cette prime de risque λ consiste à supposer le prix du marché du risque est une constante et puis minimiser l'écart quadratique entre l'historique des prix du marché et les prix théoriques du modèle. Formellement, cela revient à minimiser la fonction définie par :

$$D(\lambda) = \sum_i (P_{\text{marché}}(i) - P_{\text{estimé}}(i, \lambda))^2$$

Nous pouvons maintenant, à partir du prix zéro-coupon, extraire directement le taux zéro-coupon. Ainsi selon ce modèle, le taux zéro-coupon de maturité T s'écrit à la date t :

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t} \\ &= -\frac{1}{T-t} \left[-b(t, T)r_t + \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(b(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k}b^2(t, T) \right] \end{aligned}$$

Présentation des données

Rappelons que la courbe des taux de référence ayant été utilisée lors de cette étude est celle des taux moyens pondérés (TMP) publiée quotidiennement par Bank Al Maghrib (BAM). Ainsi, pour une estimation plus précise des paramètres désirés, nous avons utilisé une base de données assez large, celle des données journalières du TMP s'étalant du 1/1/2004 au 31/12/2019, soit un total de 5756 observations représentées sur le graphe suivant :

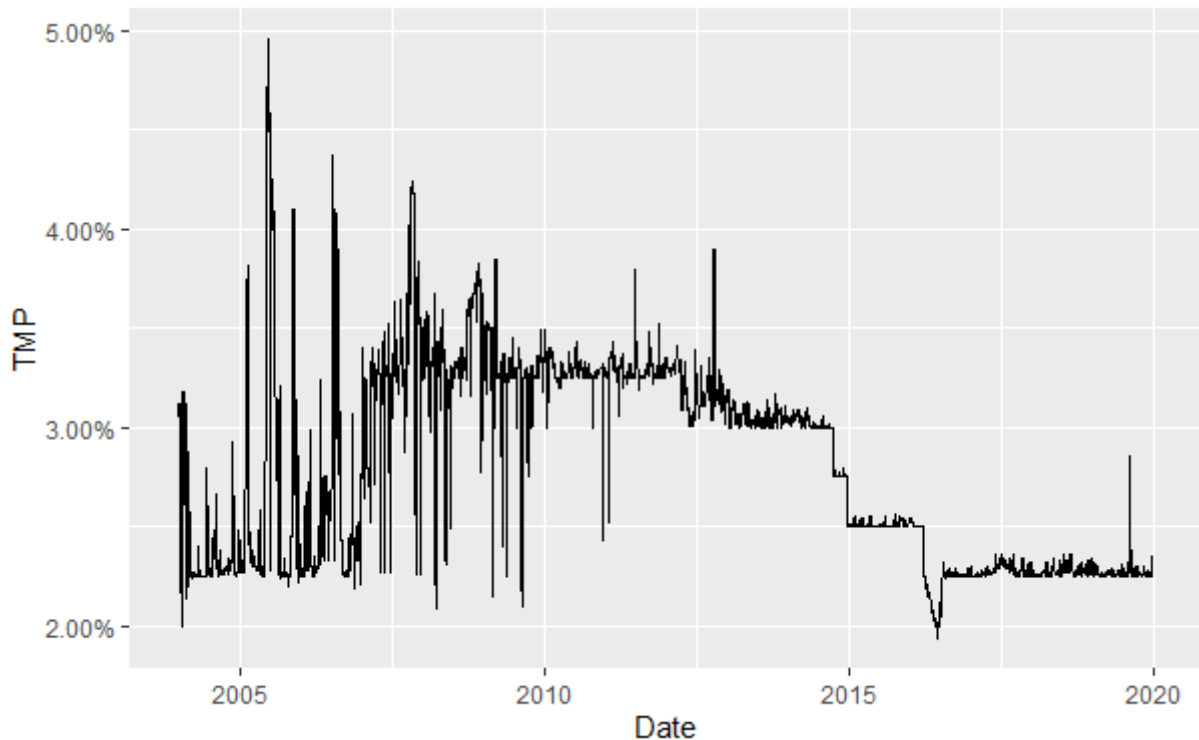


FIG. 2.2 : Taux Moyen Pondéré entre 1/1/2004 et 31/12/2019

Sous R, nous commençons tout d'abord par le calcul des coefficients d'aplatissement β (*kurtosis*) et d'asymétrie α (*skewness*) qui sont respectivement de 2.44 et 0.39, ces valeurs sont à peu près proches de ceux d'une loi normale ($\beta = 3$ et $\alpha = 0$), alors nous pouvons déduire que, sur la période du 01/01/2004 au 31/12/2019, les valeurs prises par le TMP sont approximativement normalement distribuées.

Ensuite, il nous sera indispensable de vérifier que nos taux s'adaptent selon un processus autorégressif d'ordre 1, ce qui est bien clair selon le corrélogramme qui vient ci-après dont les autocorrélations partielles sont significativement ou presque nuls à partir du deuxième coefficient d'autocorrélation partiel tandis que la valeur de la première autocorrélation partielle dépasse largement l'intervalle de confiance :

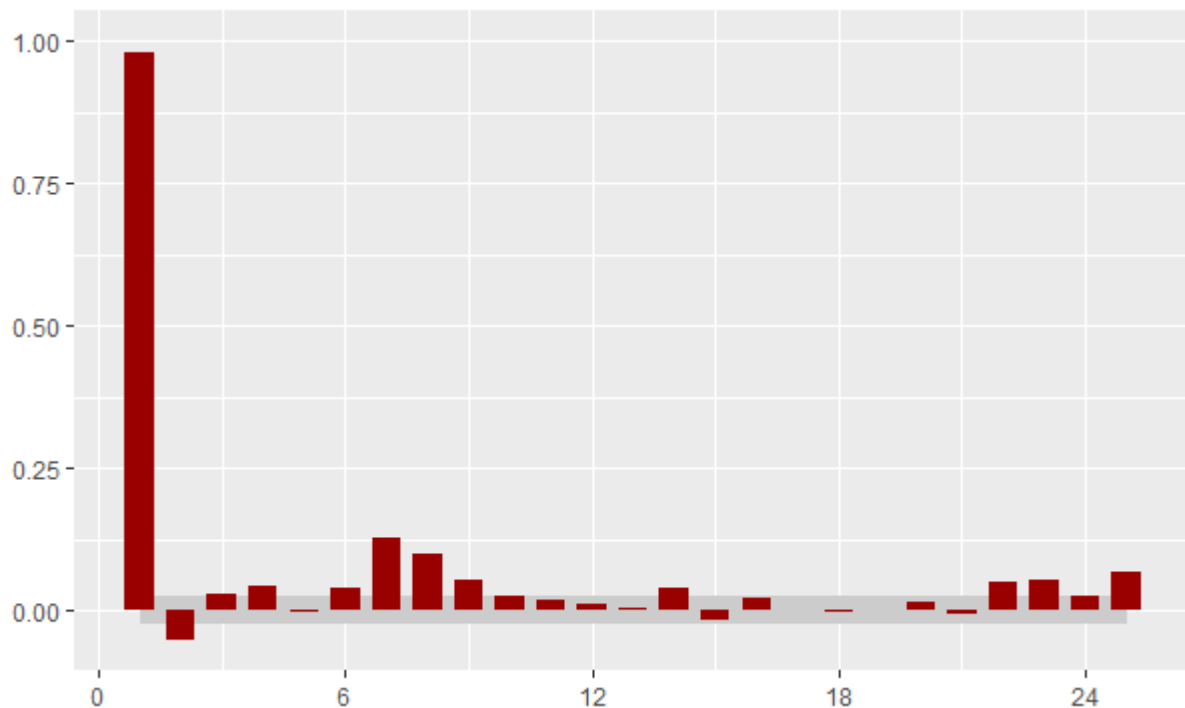


FIG. 2.3 : Corrélogramme de la série des taux

Par la suite, nous nous basons sur le test de racine unitaire « Unit Root Test » proposé par Dickey et Fuller dans le cas des modèles AR(1) pour s'assurer de la stationnarité de la série. Ce test donne le résultat suivant :

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: TMP
Dickey-Fuller = -5.2664156, Lag order = 17, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Listing 1 : Test Dickey-Fuller

Ainsi, la statistique de Dickey-Fuller affiche une valeur de -5.266415 négative et inférieure à la valeur critique -3.410706 et une p -value < 0.05 ce qui permet de rejeter H_0 (H_0 : La série n'est pas stationnaire) et donc de déduire que la série est stationnaire.

Résultats Vašíček

Maintenant, après avoir vérifié que la série est un processus autoregressif d'ordre 1 et stationnaire, nous passerons à l'estimation des paramètres a et b de la régression du taux d'intérêt court suivant le modèle de Vašíček :

Call:

```
lm(formula = Rt1 ~ Rt)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.0146794428	-0.0001215628	-0.0000302717	0.0001030820	0.0143373053

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	6.065717e-04	7.758848e-05	7.81781	6.3485e-15 ***
Rt	9.784823e-01	2.714882e-03	360.41435	< 2.22e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.00104337 on 5753 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.9575899, Adjusted R-squared: 0.9575825
 F-statistic: 129898.5 on 1 and 5753 DF, p-value: < 2.2204e-16

Listing 2 : Estimation des paramètres du modèle de Vašíček

Nous constatons que les p-values sont toutes inférieures au seuil critique de 5%. Nous rejettons donc l'hypothèse de nullité des coefficients a et b.

À partir de cette sortie R, nous donnons alors :

$$\begin{cases} \hat{a} = 0.000607 \\ \hat{b} = 0.9784 \\ \sigma_\epsilon = 0.00104 \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons présenter la série comme suit :

$$r_t = 0.000607r_{t-1} + 0.9784 + \epsilon_t$$

Et nous pouvons donc déduire les paramètres du modèle de Vašíček :

$$\begin{cases} k = -\ln(\hat{b}) = 0.02175 \\ \theta = \frac{\hat{a}}{1 - \hat{b}} = 0.02819 \\ \sigma = \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2k}{1 - e^{-2k}}} = 0.00105 \end{cases}$$

Pour notre prochaine étape, nous prenons comme référence la valeur de *TMP* du 31/12/2019 qui est de 2.26%, pour effectuer les calculs et construire la courbe des taux zéro-coupon, et puis minimiser la somme des carrés des erreurs entre les taux zéro-coupon réels du marché et ceux obtenus par le modèle de Vašíček pour déterminer la prime de risque λ :

Call:

```
mle2(minuslogl = écart, start = list(q = 0), method = "Nelder-Mead",  
      control = list(maxit = 5000, trace = TRUE))
```

Coefficients:

```
          q  
-1.243359375
```

Log-likelihood: -0.01

Listing 3 : Estimation de la prime de risque du modèle de Vašíček

Ainsi, la prime de risque du modèle de Vašíček est de $\lambda \approx -1.24$. Cette valeur nous permettra la détermination des taux zéro-coupon. **Les résultats sont présentés en ANNEXE.**

2.1.2.2 Modèle CIR

Présentation théorique du modèle

Le modèle proposé par Cox, Ingersoll et Ross (CIR), en se basant sur le modèle de Vašíček, accorde à son équation différentielle un terme en **racine carré** au niveau du coefficient de diffusion afin d'éviter l'apparition des taux d'intérêts négatifs sous la condition $2k\theta > \sigma^2$.

$$\begin{cases} dr_t = k(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Dont W est un mouvement brownien standard et r_0 , k , θ et σ sont des constantes positives telles que :

k : force de retour à la moyenne ;
 θ : taux d'intérêt de long terme ;
 σ : volatilité du processus.

La solution explicite de l'EDS est pour un instant donné t est :

$$r_t = r_0 + \int_0^t k(\theta - r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}dW_s$$

Et les premiers moments de r sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t] = r_0e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) \\ Var[r_t] = r_0\frac{\sigma^2}{k}(e^{-kt} - e^{-2kt}) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt})^2 \end{cases}$$

Comme dans le modèle de Vašíček, le passage par la discrétisation de la dynamique de ce modèle aussi est nécessaire vu la nature des données disponibles qui sont discrètes. Ainsi, dans ce mémoire, nous nous appuyons sur le procédé de discrétisation d'Euler qui consiste à l'approximation du processus continu r_t par un autre discret noté \hat{r}_t et défini par :

$$\hat{r}_{t+\gamma} = \hat{r}_t + k(\theta - \hat{r}_t) + \sigma\sqrt{\hat{r}_t}\gamma\epsilon_t$$

Où :

ϵ_t : une variable aléatoire normale centrée réduite ;
 γ : une petite variation temporelle.

Ainsi, en prenant une variation γ constante et égale à une période de 1, l'estimation des paramètres de ce processus peut s'effectuer en se basant sur l'équation stochastique discrétisée pour obtenir :

$$\frac{r_t}{r_{t-1}} = \frac{k\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1-k)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma\epsilon_t$$

Nous allons retenir la deuxième forme de régression en choisissant pour taux de référence le taux TMP utilisé dans le modèle précédent et nous posons :

$$Y = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad X = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad Z = \sqrt{r_{t-1}}$$

Ainsi, l'équation de régression devient :

$$Y = k\theta X + (1-k)Z + e_t$$

Avec $e_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ correspond au résidu de la régression.

Et comme la section précédente, l'approche consiste également à chercher tout d'abord le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T à une date t qui s'écrit sous la forme suivante :

$$P(t, T) = a(t, T)e^{-b(t, T)r_t}$$

Avec :

$$a(t, T) = \left(\frac{2\gamma \exp\left\{\frac{\hat{k}+\gamma}{2}(T-t)\right\}}{2\gamma + (\hat{k}+\gamma)(\exp\{\gamma(T-t)\}-1)} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \quad b(t, T) = \frac{2(\exp\{\gamma(T-t)\}-1)}{(\hat{k}+\gamma)(\exp\{\gamma(T-t)\}-1)+2\gamma}$$

Et :

$$\hat{k} = k + \lambda\sigma \quad \gamma = \sqrt{2\sigma^2 + \hat{k}^2}$$

Ainsi, du prix zéro-coupon, nous pouvons extraire le taux zéro-coupon de maturité T à la date t , qui est décrit selon ce modèle, par :

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t} \\ &= -\frac{b(t, T)r_t - \ln(a(t, T))}{T-t} \end{aligned}$$

Résultats CIR

De même que la procédure suivie pour le modèle de Vašíček, nous estimons les paramètres k , θ et σ sur la base des mêmes données de taux TMP dont nous disposons et nous obtenons les résultats suivants :

Call:

```
lm(formula = Y ~ X + Z + 0)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.075886885	-0.000738526	-0.000169702	0.000523035	0.087809277

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
X	5.527728e-04	7.443747e-05	7.4260	1.2824e-13 ***
Z	9.803951e-01	2.688829e-03	364.6179	< 2.22e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.006043488 on 5753 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9987037, Adjusted R-squared: 0.9987033

F-statistic: 2216159 on 2 and 5753 DF, p-value: < 2.2204e-16

Listing 4 : Estimation des paramètres du modèle de CIR

Nous constatons que toutes les p – values sont inférieurs à 5%, nous concluons que les coefficients k et θ sont bien significatifs. De plus, la statistique Durbin-Watson est de 1.8898266 et donc proche de 2, ce qui nous permet de vérifier l'absence d'autocorrélation entre les erreurs. Ainsi, nous donnons :

$$\begin{cases} k = 0.0196 \\ \theta = 0.0282 \\ \sigma = 0.00105 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant trouver la valeur du prime de risque λ qui minimise l'écart entre la courbe estimé et la courbe du marché et nous prenons, comme dans le modèle précédent, la date de référence comme le 31/12/2019 qui correspond au $TMP = 2,26\%$:

Call:

```
mle2(minuslogl = écart1, start = list(q = 0), method = "Nelder-Mead",  
      control = list(maxit = 5000, trace = TRUE))
```

Coefficients:

```
      q  
-6.825
```

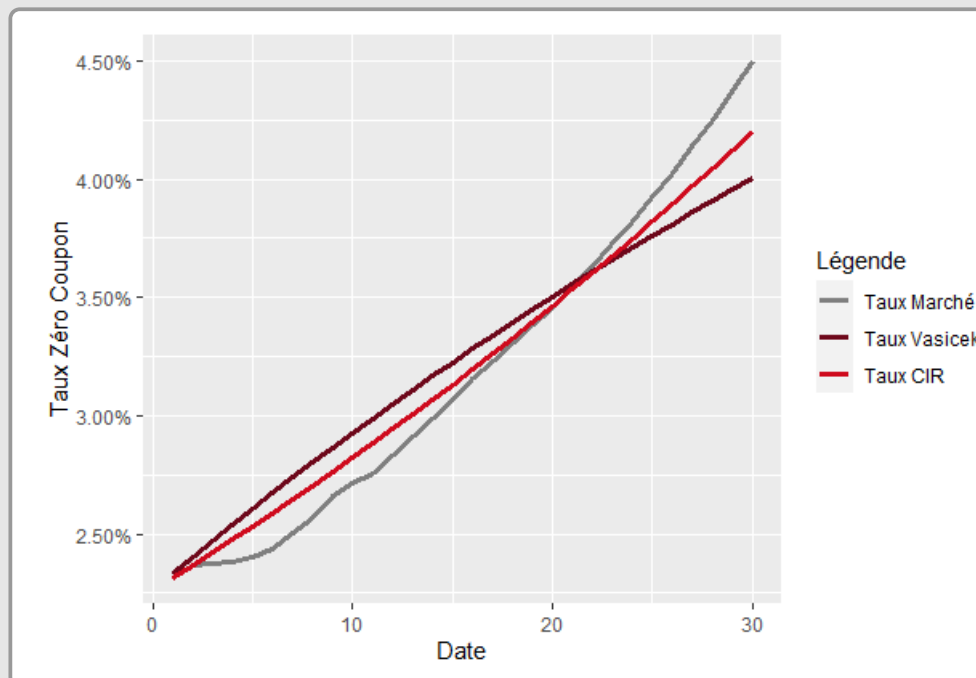
Log-likelihood: 0

Listing 5 : Estimation de la prime de risque du modèle de CIR

Ainsi, la prime de risque du modèle de CIR est de $\lambda = -6.825$. Et de même, cette valeur nous permettra ensuite le calcul des taux zéro-coupon. **Les résultats sont présentés en ANNEXE.**

Comparaison entre les modèles

D'après le graphique ci-dessous, nous remarquons clairement que les écarts entre la courbe zéro-coupon estimée par le modèle de CIR et la courbe réelle sont **relativement inférieurs** en comparaison avec ceux du modèle de Vašíček. Ceci apparaît bel et bien à travers la comparaison illustrée ci-dessous entre la courbe des taux réelles et les courbes estimées à la base des résultats obtenus auparavant :



La courbe des taux zéro-coupon adoptée dans le reste de notre mémoire est donc celle du **modèle de CIR**.

2.2 Taux Forward

Après avoir calculé les taux zéro-coupon, la prochaine étape est de déterminer les taux Forward qui nous permettront l'actualisation et serviront pour le calcul final des flux de frais de gestion.

Afin de calculer les taux Forward nous nous basons sur la formule suivante :

$$F(t_1, t_2) = \left[\frac{(1 + r_2)^{d_1}}{(1 + r_1)^{d_2}} \right]^{\frac{1}{d_2 - d_1}} - 1$$

Avec :

- $F(t_1, t_2)$: taux Forward entre t_1 et t_2 ;
- r_i : taux zéro-coupon d'échéance t_i tel que $i \in \{1, 2\}$;
- d_i : nombre d'années entre la date initiale et l'échéance t_i tel que $i \in \{1, 2\}$.

Chapitre 3

Valorisation des provisions techniques prudentielles - Non vie -

Dans cette partie de notre mémoire, nous appliquerons la directive de la SBR à un portefeuille non vie, notamment la branche *Véhicules à usage de tourisme – Corporel* afin de pouvoir estimer les provisions techniques prudentielles non vie, en particulier la meilleure estimation non vie. Pour ce faire, nous allons comparer les différentes méthodes de provisionnement déterministes d'une part (Chain Ladder, DeVylder et London Chain) et stochastiques d'autre part (Mack et Bootstrap) dans le but de choisir la méthode la plus adaptée au calcul de la meilleure estimation des engagements. Ceci nous aidera à accorder une estimation la meilleure estimation des frais de gestion.

Pour les opérations d'assurance non vie, les provisions techniques prudentielles sont évaluées en additionnant la meilleure estimation des engagements, la meilleure estimation des frais ainsi que la marge de risque. La meilleure estimation des engagements comprend la meilleure estimation des engagements pour sinistres ($ME_{sinistres}$) et la meilleure estimation des engagements pour primes (ME_{primes}). Nous commencerons d'abord par le calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistres.

3.1 La meilleure estimation des engagements pour sinistres

La meilleure estimation des engagements pour sinistres ($ME_{sinistres}$) est déterminée en actualisant les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres survenus, comme suit :

$$ME_{sinistres} = \sum_{k=1} \frac{Flux_k}{(1 + taux_{zc_k})^k}$$

Les flux des règlements futurs probabilisés nets de recours sont estimés sur la base d'un triangle des règlements par année de survenance conformément à la méthode Chain Ladder. Toutefois, l'entreprise d'assurance et de réassurance peut utiliser d'autres méthodes de provisionnement après accord de l'Autorité. Ainsi, nous présenterons différentes méthodes pour déterminer la $ME_{sinistres}$, à savoir des méthodes déterministes et des méthodes stochastiques, ces dernières nous permettront de quantifier l'incertitude liée à l'estimation.

Présentation des données et notations

Dans cette partie, nous présenterons et appliquerons moult méthodes actuarielles dans le but de valoriser les provisions techniques prudentielles non vie. Nous irons au-delà des résultats classiques de la fameuse méthode de Chain Ladder (préconisée par l'ACAPS) en cherchant à comparer différentes méthodes, sans pour autant proclamer en faire une liste exhaustive. Nous aspirons ainsi à introduire des méthodes qui pourraient être particulièrement adaptées au cadre de notre étude.

Les données sont représentées sous forme de triangle qui comporte en ligne les années de survenance et en colonne les années de développement des sinistres. Dans ce mémoire, les données utilisées sont confidentielles. Par conséquent, les données du triangle seront ramenées en base 1 000 000 pour le paiement de l'année de survenance la plus ancienne et première année de développement. Nous détaillerons par la suite les résultats obtenus par différentes méthodes sur la branche « Véhicules à usage de tourisme – Corporel » à titre illustratif.

Nous commençons par noter que la taille du triangle de paiements étudiée est de $n + 1$ années. Les données utilisées sont donc annuelles et les notations utilisées sont les suivantes :

- $Y_{i,j}$: Les paiements non cumulés pour la $j^{\text{ème}}$ année de développement des sinistres survenus l'année i ;

- $C_{i,j}$: Les paiements cumulés pour la $j^{\text{ème}}$ année de développement des sinistres survenus l'année i au sens où :

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} + Y_{i,j+1} \quad \forall j \geq 0 \text{ et } C_{i,0} = Y_{i,0}$$

- $C_{i,n}$: Le paiement cumulé final pour l'année de survenance i après $n + 1$ années de développement. Il sera estimé par les méthodes que nous allons présenter ultérieurement.

Nous présentons dans la table suivante le triangle des règlements cumulés utilisé :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2010	1 000 000	4 309 273	8 528 711	14 489 309	19 179 011	22 560 042	25 089 817	26 223 517	26 974 476	27 543 519
2011	778 867	3 653 988	8 348 563	13 372 098	18 401 288	22 448 268	24 522 565	25 693 575	26 485 535	
2012	829 690	3 324 209	7 405 010	13 174 472	18 637 294	21 853 255	23 740 985	25 055 110		
2013	781 237	3 143 574	7 790 619	15 160 460	19 977 520	22 402 175	24 121 850			
2014	907 016	3 790 703	10 493 149	16 432 155	20 818 086	23 096 731				
2015	708 122	3 994 932	9 660 055	16 632 182	19 945 638					
2016	873 185	4 180 187	11 433 279	16 571 586						
2017	1 050 310	6 083 732	13 587 988							
2018	1 486 670	6 118 195								
2019	1 602 623									

TAB. 3.1 : Triangle des règlements cumulés.

3.1.1 Méthodes déterministes

3.1.1.1 Méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder est de loin la plus couramment utilisée par les compagnies d'assurance du fait notamment de sa facilité d'implémentation et d'exécution, et de son côté intuitif. Elle s'applique aux montants cumulés $C_{i,j}$ et suppose que la cadence des paiements dépend de l'année de développement des sinistres. Cela revient à écrire :

$$C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j} \quad \text{pour } j = 0, \dots, n - 1$$

Où : f_j est le facteur de développement de l'année de développement j à $j + 1$. Ainsi, il est possible d'estimer les paiements futurs. Le montant des provisions correspondant à la somme des paiements futurs en est alors déduit.

Hypothèses :

La méthode de Chain Ladder repose sur deux hypothèses indispensables sur les données contenues dans les triangles, à savoir :

- (H1) : Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des années de survenance sont indépendants ;
- (H2) : Les années de développement sont des variables explicatives du comportement des paiements futurs.

Méthode :

Sous ces hypothèses, les facteurs de développement sont estimés par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \quad \text{pour } j = 0, \dots, n-1$$

Les facteurs de développement permettent de compléter le triangle inférieur, et par conséquent pouvoir estimer les charges ultimes par exercice de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,j+1} &= \hat{f}_j * \hat{C}_{i,j} && \text{pour } i + j > n \\ &= C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^j \hat{f}_k \end{aligned}$$

Connaissant les charges futures, il est facile de déduire la provision de l'année de survénance i , notée \hat{R}_i :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Enfin, nous déterminons le montant total de la provision, notée \hat{R} en sommant les provisions de chaque année de survénance :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

Application :

Nous déterminons d'abord les facteurs de développement fournis par la méthode Chain Ladder. Le calcul des coefficients de développement donne :

	0	1	2	3	4
f_j	4.587	2.378	1.662	1.310	1.158
	5	6	7	8	9
f_j	1.092	1.049	1.030	1.021	

TAB. 3.2 : Coefficients de développement de la méthode Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder appliquée au triangle des paiements cumulés fournit donc les résultats suivants :

Chapitre 3. Valorisation des provisions techniques prudentielles - Non vie -

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2010	1 000 000	4 309 273	8 528 711	14 489 309	19 179 011	22 560 042	25 089 817	26 223 517	26 974 476	27 543 519
2011	778 867	3 653 988	8 348 563	13 372 098	18 401 288	22 448 268	24 522 565	25 693 575	26 485 535	27 044 263
2012	829 690	3 324 209	7 405 010	13 174 472	18 637 294	21 853 255	23 740 985	25 055 110	25 799 720	26 343 981
2013	781 237	3 143 574	7 790 619	15 160 460	19 977 520	22 402 175	24 121 850	25 311 884	26 064 125	26 613 964
2014	907 016	3 790 703	10 493 149	16 432 155	20 818 086	23 096 731	25 221 427	26 465 707	27 252 239	27 827 142
2015	708 122	3 994 932	9 660 055	16 632 182	19 945 638	23 100 994	25 226 081	26 470 592	27 257 269	27 832 277
2016	873 185	4 180 187	11 433 279	16 571 586	21 713 856	25 148 939	27 462 420	28 817 258	29 673 676	30 299 660
2017	1 050 310	6 083 732	13 587 988	22 589 717	29 599 451	34 282 018	37 435 662	39 282 523	40 449 956	41 303 273
2018	1 486 670	6 118 195	14 550 671	24 190 155	31 696 516	36 710 834	40 087 907	42 065 615	43 315 759	44 229 531
2019	1 602 623	7 350 992	17 482 586	29 064 397	38 083 265	44 107 953	48 165 496	50 541 706	52 043 750	53 141 644

TAB. 3.3 : Triangle projeté par la méthode Chain Ladder

Aussi nous obtenons le tableau récapitulatif ci-dessous :

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2010	27 543 519	0
2011	27 044 263	558 728
2012	26 343 981	1 288 871
2013	26 613 964	2 492 114
2014	27 827 142	4 730 411
2015	27 832 277	7 886 639
2016	30 299 660	13 728 074
2017	41 303 273	27 715 285
2018	44 229 531	38 111 336
2019	53 141 644	51 539 021
TOTAL	332 179 254	148 050 479

TAB. 3.4 : Provisions estimées par la méthode de Chain Ladder

La provision à l'ultime est donc **148 050 479 MAD**. Le résultat obtenu dans cette partie sera utilisé comme référence pour les autres méthodes.

Test des hypothèses :

Nous testons les hypothèses de la méthode, à savoir l'indépendance des années de survenance et la non-corrélation des facteurs de développement successifs. L'hypothèse **(H1)** se vérifie par un test de non-effet calendaire. Quant à l'hypothèse **(H2)**, elle se vérifie graphiquement : les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ pour chaque année j doivent ainsi faire apparaître une droite passant par l'origine. Ces deux hypothèses sont bien vérifiées dans notre cas. **Les graphiques sont présentés en ANNEXE.**

Critiques :

La simplicité et la popularité de la méthode ainsi que l'absence de données complexes nécessaires à sa mise en œuvre sont des avantages certains de la méthode Chain Ladder.

Cependant, cette méthode suppose aussi des hypothèses fortes, pas toujours réalisées en pratique :

- **(H1)** : Il s'agit d'une hypothèse forte qui suppose en particulier une stabilité des années calendaires, ne prend pas en compte une évolution potentielle du déroulement des règlements de sinistres dans le temps ou une modification de la jurisprudence.
- **(H2)** : Cette hypothèse suppose que la seule explication de l'évolution du montant des sinistres au cours des années de développement est justement la durée de ce développement. Cela implique une non-corrélation des facteurs de développement successifs.

Un autre inconvénient de cette méthode est qu'elle ne fait aucune hypothèse sur la loi suivie par les coûts et les fréquences des sinistres, et donc, comme toutes les méthodes déterministes, elle ne permet pas d'évaluer la précision de l'estimation obtenue.

3.1.1.2 Méthode London Chain

Cette méthode est moins utilisée, mais permet d'étudier les résultats obtenus lorsqu'on ne se contraint plus à avoir une relation linéaire entre $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ comme la méthode de Chain Ladder. En effet, cette méthode suppose qu'il existe **une fonction affine** entre les paiements cumulés de deux années de développement successives, telle que :

$$\begin{cases} C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j} + \alpha_j & \text{pour } j < n-1 \\ C_{i,n} = f_{n-1} * C_{i,n-1} & \text{pour } j = n-1 \end{cases}$$

Par la méthode des moindres carrés, nous cherchons à résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{f}_j, \hat{\alpha}_j) = \underset{j=0, \dots, n-1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - \alpha_j - f_j C_{i,j})^2 \right\}$$

Ainsi, nous trouvons :

$$\hat{f}_j = \frac{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - (\bar{C}_j)^2} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{f}_j \bar{C}_j$$

Avec :

$$\bar{C}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \quad \text{et} \quad \bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}$$

Si l'hypothèse **(H2)** de la méthode de Chain Ladder est vérifiée (ce qui est notre cas), à savoir les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ pour chaque année j sensiblement alignés, ils le seront aussi par une droite non contrainte à l'origine.

Application :

Nous estimons les paramètres de notre modèle avec la méthode de moindres carrés ordinaire qui nous donne les résultats suivants :

Chapitre 3. Valorisation des provisions techniques prudentielles - Non vie -

	0	1	2	3	4
f_j	3.848	1.995	0.833	0.570	0.332
α_j	691 104	1 556 113	7 540 7780	11 006 638	16 016 206
	5	6	7	8	9
f_j	1.559	0.863	0.923	1.021	
α_j	-1 0421 768	4 550 399	2 779 842	0	

TAB. 3.5 : Coefficients de la méthode London Chain

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus par la méthode de London Chain. De même que pour la méthode de Chain Ladder, une fois après avoir estimé les paramètres, nous complétons la partie inférieure du triangle des paiements cumulés puis nous en déduisons la provision totale à constituer. Le montant total des réserves estimé par la méthode London-Chain est **91 316 840 MAD** .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2010	1 000 000	4 309 273	8 528 711	14 489 309	19 179 011	22 560 042	25 089 817	26 223 517	26 974 476	27 543 519
2011	778 867	3 653 988	8 348 563	13 372 098	18 401 288	22 448 268	24 522 565	25 693 575	26 485 535	27 044 263
2012	829 690	3 324 209	7 405 010	13 174 472	18 637 294	21 853 255	23 740 985	25 055 110	25 896 467	26 442 769
2013	781 237	3 143 574	7 790 619	15 160 460	19 977 520	22 402 175	24 121 850	25 373 162	26 189 912	26 742 404
2014	907 016	3 790 703	10 493 149	16 432 155	20 818 086	23 096 731	25 586 066	26 637 121	27 356 080	27 933 173
2015	708 122	3 994 932	9 660 055	16 632 182	19 945 638	22 652 767	24 893 926	26 039 643	26 804 828	27 370 293
2016	873 185	4 180 187	11 433 279	16 571 586	20 459 947	22 823 895	25 160 714	26 269 943	27 017 310	27 587 257
2017	1 050 310	6 083 732	13 587 988	18 863 530	21 767 393	23 258 924	25 838 926	26 855 398	27 557 469	28 138 810
2018	1 486 670	6 118 195	13 761 851	19 008 409	21 850 039	23 286 423	25 881 797	26 892 405	27 591 613	28 173 675
2019	1 602 623	6 857 533	15 236 824	20 237 490	22 551 173	23 519 713	26 245 496	27 206 362	27 881 280	28 469 452

TAB. 3.6 : Triangle projeté par la méthode de London Chain

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2010	27 543 519	0
2011	27 044 263	558 728
2012	26 442 769	1 387 659
2013	26 742 404	2 620 554
2014	27 933 173	4 836 442
2015	27 370 293	7 424 655
2016	27 587 257	11 015 671
2017	28 138 810	14 550 822
2018	28 173 675	22 055 480
2019	28 469 452	26 866 829
TOTAL	275 445 615	91 316 840

TAB. 3.7 : Provisions estimées par la méthode de London Chain

Après avoir utilisé les estimateurs de cette méthode, les résultats de la provision finale à constituer montre un écart très important avec la valeur estimée par la méthode Chain Ladder.

3.1.1.3 Méthode de DeVyllder

D'après la méthode de DeVyllder, les paiements effectués pour l'année de survenance i et de développement j représentent une part du paiement cumulé final de l'année de survenance i :

$$Y_{i,j} = r_j * p_i$$

Où : r_j représente la part de p_i payée dans l'année de développement j .

Cette méthode est donc basée sur les paiements non cumulés, contrairement aux méthodes présentées jusque-là. La méthode permet donc de déterminer r_j et p_i . Ceux-ci sont estimés par la méthode des moindres carrés qui minimise les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs observées :

$$\operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (Y_{i,j} - p_i r_j)^2 \right\}$$

La solution est donnée par le système d'équation :

$$\begin{cases} \hat{p}_i = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{r}_j Y_{i,j}}{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{r}_j^2} \\ \hat{r}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{p}_i Y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{p}_i^2} \\ \sum_{j=0}^n \hat{r}_j = 1 \end{cases}$$

Les équations de \hat{p}_i et \hat{r}_j dépendent l'une de l'autre, une solution est alors obtenue par itération. Nous posons :

$$\begin{cases} \hat{r}_j^{(0)} = \frac{1}{n} \\ \hat{p}_i^{(n+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{r}_j^{(n)} Y_{i,j}}{\sum_{j=0}^{n-i} \left(\hat{r}_j^{(n)} \right)^2} \\ \hat{r}_j^{(n+1)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{p}_i^{(n)} Y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} \left(\hat{p}_i^{(n)} \right)^2} \end{cases}$$

La provision totale est estimée par

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n \hat{Y}_{i,j}$$

En général, une dizaine d'itérations suffisent pour obtenir un écart très faible entre deux itérations successives. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'est pas contrainte par des hypothèses comme celle de Chain Ladder.

Application :

Le tableau suivant présente les paramètres estimés à partir du triangle des règlements décumulés :

Chapitre 3. Valorisation des provisions techniques prudentielles - Non vie -

	0	1	2	3	4
p_i	33 046 862	32 483 549	32 275 200	34 197 558	34 961 777
r_j	0.02466	0.08915	0.15542	0.17647	0.13661
	5	6	7	8	9
p_i	34 828 850	36 808 812	50 162 768	52 543 122	64 972 588
r_j	0.09130	0.062113	0.03698	0.02354	0.01722

TAB. 3.8 : Paramètres estimés par la méthode de DeVlyder

Le triangle des règlements cumulés obtenu par conséquent est le suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2010	815 130	3 761 283	8 897 607	14 729 409	19 244 098	22 261 558	24 314 210	25 536 174	26 314 030	26 883 073
2011	801 235	3 697 169	8 745 939	14 478 333	18 916 065	21 882 090	23 899 753	25 100 888	25 865 484	26 424 827
2012	796 096	3 673 455	8 689 843	14 385 469	18 794 738	21 741 739	23 746 460	24 939 891	25 699 584	26 255 339
2013	843 513	3 892 252	9 207 422	15 242 289	19 914 180	23 036 709	25 160 834	26 425 347	27 230 288	27 819 145
2014	862 363	3 979 233	9 413 182	15 582 911	20 359 206	23 551 514	25 723 107	27 015 879	27 838 808	28 440 825
2015	859 084	3 964 103	9 377 393	15 523 663	20 281 798	23 461 969	25 625 306	26 913 163	27 732 963	28 332 691
2016	907 922	4 189 456	9 910 482	16 406 158	21 434 785	24 795 743	27 082 062	28 443 131	29 309 536	29 943 357
2017	1 237 309	5 709 359	13 505 929	22 358 187	29 211 161	33 791 450	36 907 228	38 762 082	39 942 811	40 806 578
2018	1 296 022	5 980 283	14 146 820	23 419 141	30 597 307	35 394 942	38 658 572	40 601 444	41 838 202	42 742 956
2019	1 602 606	7 394 963	17 493 356	28 959 113	37 835 327	43 767 879	47 803 544	50 206 017	51 735 340	52 854 121

TAB. 3.9 : Triangle projeté par la méthode de DeVlyder.

Nous déterminons ainsi la provision ultime et par année de survenance :

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2010	27 543 519	0
2011	27 017 515	559 343
2012	26 249 864	1 315 448
2013	27 184 612	2 658 312
2014	28 899 705	4 889 311
2015	29 441 209	8 050 892
2016	31 466 154	13 537 199
2017	41 180 951	27 300 649
2018	42 933 604	36 762 674
2019	52 854 121	51 251 515
TOTAL	334 771 254	146 325 343

TAB. 3.10 : Provisions estimées par la méthode de DeVlyder

La provision estimée par la méthode DeVlyder est de **146 325 343 MAD**, elle est certainement proche de celle déterminée par la méthode Chain Ladder.

Comparaison des résultats

Dans le tableau qui suit nous comparons les résultats obtenus par les différentes méthodes à celle de Chain Ladder :

	CL	LC	DeVylder
Provisions	148 050 479	91 316 840	146 325 343
Écart	-	-38%	-1.16%

TAB. 3.11 : Récapitulatif des résultats des méthodes déterministes et écarts relatifs

La méthode de London Chain s'écarte fortement des autres. Rappelons que cette méthode suppose que les paiements cumulés d'une année de développement à l'autre forment une droite non contrainte à passer par l'origine. Graphiquement, nous observons que cette droite s'éloigne fortement de la droite contrainte par l'origine de Chain Ladder sur certaines années de développement, d'où le résultat observé.

Nous constatons que le résultat fourni par la méthode de DeVylder est très proche de celui obtenu par la méthode de Chain Ladder. Ainsi, pour aller au bout de notre analyse, nous préconisons d'utiliser soit les résultats de la méthode Chain Ladder, soit ceux issus de la méthode de DeVylder. Nous écartons ainsi les résultats de projection obtenus par London Chain.

3.1.2 Méthodes stochastiques

3.1.2.1 Mack

La version stochastique de la méthode de Chain Ladder a été introduite par **Mack (1993)**. Il s'agit d'un modèle non paramétrique comme le modèle de Chain Ladder, c'est-à-dire qu'il ne suppose aucune distribution des montants cumulés. Par son extension du modèle de Chain Ladder, Mack propose une estimation de l'erreur de provisionnement à l'ultime. L'impact d'une variation du montant des provisions sur le bilan est important, il est donc essentiel de pouvoir quantifier cette possible variation.

Hypothèses :

Cette méthode repose sur trois hypothèses : les deux premières sont celles introduites par la méthode de Chain Ladder et la dernière concerne la variabilité des données du triangle. Réintroduisons les notations pour tenir compte du fait que ce modèle est à présent stochastique. La méthode déterministe de Chain Ladder devient :

$$\mathbb{E}[C_{i,j}] = f_j * \mathbb{E}[C_{i,j}] \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

- **(H1)** : Les années de survenance sont indépendantes : $(C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ indépendant de $(C_{i',j})_{j=1,\dots,n}$ pour $i \neq i'$
- Les $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ constituent une chaîne de Markov, et il existe f_0, \dots, f_{n-1} et $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ tels que :

- (H2) : $\mathbb{E}[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = f_j * C_{i,j} \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$
- (H3) : $Var[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = \sigma_j^2 * C_{i,j}$

Sous les deux premières hypothèses, le modèle de Mack fournit les mêmes estimations des facteurs de développement que le modèle de Chain Ladder. De plus, cette estimation et l'estimation de la provision \hat{R}_i sont sans biais.

Nous avons vérifié la deuxième hypothèse lors de l'introduction de la méthode de Chain Ladder. Il reste à vérifier la première et troisième hypothèses. Pour (H1), nous avons effectué le test d'indépendance. Quant à (H3), elle peut être visualiser : les points de coordonnées $(C_{i,j}, D_{i,j})$ ne doivent présenter aucune "structure", où :

$$D_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Les résultats sont présentés en ANNEXE.

Méthode :

Ces hypothèses permettent l'estimation de l'erreur de prévision que nous mesurons par l'erreur quadratique moyenne (**mean squared error of prediction - MSEP**) :

$$\begin{aligned} msep(\hat{R}_i) &= \mathbb{E}[(R_i - \hat{R}_i)^2 | \mathcal{D}] \\ &= \mathbb{E}[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | \mathcal{D}] \end{aligned}$$

Puisque :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{et} \quad \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$

Formule que nous décomposons alors sous la forme :

$$msep(\hat{R}_i) = \underbrace{Var[C_{i,n} | \mathcal{D}]}_{\text{Erreur de processus}} + \underbrace{[\mathbb{E}[(C_{i,n} | \mathcal{D}) - \hat{C}_{i,n}]^2]}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Mack propose alors une estimation de l'erreur quadratique moyenne pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} m\hat{sep}(\hat{R}_i) &= \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \right) \\ &= \underbrace{\hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\hat{C}_{i,j}}}_{\text{Erreur de processus}} + \underbrace{\hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}}}_{\text{Erreur d'estimation}} \end{aligned}$$

Avec : $\hat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$.

Nous décomposons alors l'estimateur en une erreur de processus et une erreur d'estimation des paramètres. L'erreur de processus est la variabilité autour de la moyenne et l'erreur d'estimation provient du fait que nous estimons les facteurs de développement mais que nous ne connaissons pas leur valeur réelle.

Nous définissons par $\hat{\sigma}_j^2$ la variabilité du triangle par année de développement j :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 \quad \text{pour } j \leq n-2$$

Pour $j = n-1$, nous disposons d'une seule observation, ainsi $\hat{\sigma}_{n-1}^2$ doit être estimé d'une autre façon. Mack propose une extrapolation qui amène à :

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \right)$$

Pour estimer l'erreur de prédiction totale des provisions $msep(\hat{R}) = msep(\sum_{i=1}^n \hat{R}_i)$, nous ne pouvons pas simplement sommer les $msep(R_i)$ relatifs à chaque année de survénance du fait que celles-ci sont estimées à l'aide des mêmes facteurs de développement. Il faut donc tenir compte d'une corrélation entre elles. Mack estime alors l'erreur quadratique moyenne des provisions totales par :

$$m\hat{s}ep(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left(m\hat{s}ep(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{h=0}^{n-j-1} \hat{C}_{h,n}} \right)$$

Nous disposons à présent d'un prédicteur de R_i (\hat{R}_i) et de l'écart-type de celui-ci ($se(\hat{R}_i) = \sqrt{msep(\hat{R}_i)}$).

Application :

Nous appliquons la méthode de Mack au triangle déjà introduit. Les résultats qui ont été obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Année	\hat{R}_i	$\hat{S}EP_i$	$\hat{S}EP_i / \hat{R}_i$	Intervalle de confiance à 95%			
				Normale		Log-Normale	
				Borne Inf	Borne Sup	Borne Inf	Borne Sup
2010	0	0		0	0	0	0
2011	558 728	17 281	3.09%	524 859	592 598	525 621	593 354
2012	1 288 871	51 865	4.02%	1 187 217	1 390 525	1 190 197	1 393 469
2013	2 492 114	163 407	6.56%	2 171 843	2 812 385	2 187 174	2 827 413
2014	4 730 411	453 514	9.59%	3 841 540	5 619 281	3 903 843	5 679 784
2015	7 886 639	1 254 583	15.91%	5 427 702	10 345 577	5 713 521	10 617 612
2016	13 728 074	2 261 448	16.47%	9 295 717	18 160 431	9 829 088	18 667 141
2017	27 715 285	4 520 910	16.31%	18 854 464	36 576 106	19 910 390	37 579 782
2018	38 111 336	6 482 575	17.01%	25 405 723	50 816 949	26 983 989	52 313 683
2019	51 539 021	9 759 116	18.93%	32 411 506	70 666 537	35 053 042	73 155 620
TOTAL	148 050 479	14 601 053	9.86%	119 432 942	176 668 017	121 496 490	178 670 242

TAB. 3.12 : Erreur quadratique et intervalle de confiance du modèle de Mack

Nous constatons que la part due à l'erreur de processus croît avec les années de survénance. Pour les années de survénance les plus récentes il y a un plus grand nombre de paiements futurs incertains. Rappelons que le modèle de Mack est la méthode

stochastique relative à la méthode de Chain Ladder. Les provisions obtenues sont donc identiques. Nous remarquons aussi que la variance de l'estimation représente **9.86%** du montant total des provisions.

En supposant la loi suivie par les provisions, il nous est possible de déterminer des quantiles. Deux lois sont couramment utilisées en assurance non-vie : la loi **Normale** et la **Log-Normale**. Cependant l'utilisation de la loi Normale est critiquée du fait qu'elle peut prendre des valeurs négatives, ce qui n'est pas le cas des provisions.

Critiques :

La méthode de Mack fait partie des méthodes stochastiques les plus connues. Elle repose sur la méthode déterministe de Chain Ladder, et permet, comme toutes les méthodes stochastiques, une mesure d'estimation de l'incertitude qui réside dans l'évaluation des provisions. Or, ce modèle est jumelé uniquement au modèle de Chain Ladder, ce qui constitue un inconvénient majeur, si nous souhaitons appliquer un autre modèle.

3.1.2.2 Bootstrap

Dans cette section nous appliquerons la méthode de ré-échantillonnage du bootstrap afin d'étudier la distribution suivie par l'estimation du montant des provisions.

Nous utilisons les résidus calculés à partir des incréments de paiements observés, afin que l'hypothèse d'indépendance demeure vérifiée.

Méthode :

Nous exposons les étapes de la méthode Bootstrap :

1. Sur base de la méthode de Chain Ladder, nous estimons les facteurs de développement \hat{f}_j ;
2. Nous complétons le triangle inférieur à partir des facteurs de Chain Ladder ;
3. Nous calculons le triangle des incréments : $Y_{i,0} = C_{i,0}$ et pour tout $j \in 1, \dots, n$:
$$Y_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$$
 ;
4. Nous recalculons le triangle supérieur *théorique* à rebours à partir des facteurs de développement en partant des dernières observations (situées sur la diagonale : $C_{i,n-i}$). Nous obtenons les paiements cumulés estimés $\hat{C}_{i,j}$ du triangle supérieur ;
5. Cela nous permet de calculer les incréments estimés $\mu_{i,j}$ pour la partie supérieure du triangle ;
6. Nous calculons les résidus de Pearson du triangle supérieur : $r_{i,j} = \frac{Z_{i,j} - \mu_{i,j}}{\sqrt{Var(\mu_{i,j})}}$ où $Var(\mu_{i,j})$ est la fonction variance de la distribution. Nous supposons usuellement une distribution de poisson, donc $Var(\mu_{i,j}) = \mu_{i,j}$;
7. Pour pouvoir comparer les résultats avec d'autres méthodes analytiques, il est nécessaire d'appliquer un ajustement permettant de corriger le biais à chacun des résidus de Pearson tels que :

$$r_{i,j} = \sqrt{\frac{N}{N-P}} r_{i,j}$$

Avec $N = \frac{n(n+1)}{2}$ le nombre de données et $P = 2n-1$ le nombre de degrés de libertés ;

8. Nous procédons à un ré-échantillonnage avec remise des résidus : ainsi nous obtenons des résidus de Pearson après ré-échantillonnage $r_{i,j}^*$;
9. Enfin, nous obtenons les incréments :

$$Y_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{Var(\mu_{i,j})} + \mu_{i,j}$$

Nous en déterminons alors un triangle des règlements issus du Bootstrap et ainsi le montant des provisions issues de ce triangle de bootstrap par la méthode de Chain Ladder ;

10. Répétition de l'étape 8 et de l'étape 9, N fois.

Ainsi, pour un nombre d'observations N de \hat{R} issues de l'échantillonnage suffisamment grand, nous pouvons déterminer sa distribution empirique, sa moyenne, sa variance, etc.

Application :

C'est à partir de la matrice des résidus suivante que nous appliquons la méthode de Bootstrap :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2010	230	236	-556	-21	9	180	363	-109	-38	0
2011	-51	-36	-251	-444	253	692	9	-43	40	
2012	49	-260	-519	15	580	164	-108	155		
2013	-30	-376	-235	806	174	-421	-271			
2014	91	-90	750	-63	-192	-609				
2015	-177	197	193	455	-802					
2016	-52	20	759	-705						
2017	-216	331	-163							
2018	163	-87								
2019	0									

TAB. 3.13 : Matrice des résidus de Bootstrap

En répétant 10 000 fois les simulations, nous obtenons le graphique suivant donne la distribution des provisions sous une représentation de densité :

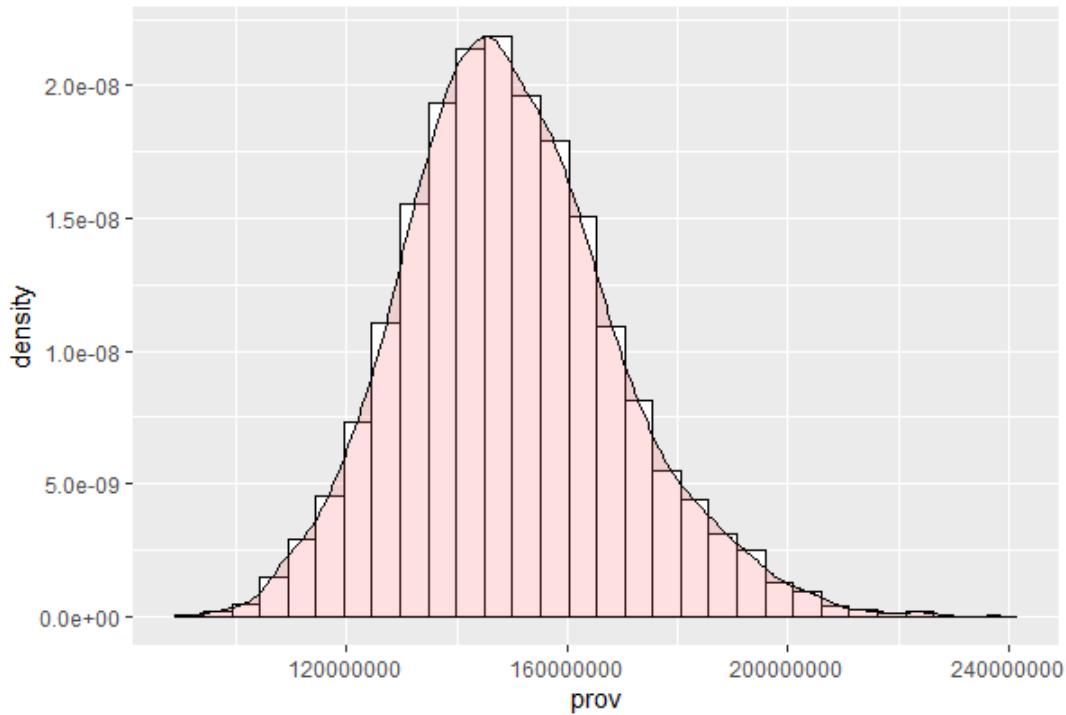


FIG. 3.1 : Distribution des provisions suite à 10 000 simulations

À partir des 10 000 triangles simulés, nous déterminons la distribution des montants de provisions de manière détaillée et nous obtenons les résultats suivants :

Année de Survenance	Moyenne	Écart-type
2010	0	0
2011	562 558	267 716
2012	1 294 210	350 587
2013	2 496 926	449 569
2014	4 736 016	626 127
2015	7 893 632	889 932
2016	13 741 377	1 494 469
2017	27 757 405	3 175 773
2018	38 272 664	6 086 677
2019	52 807 895	16 379 080
TOTAL	149 562 683	19 416 066

TAB. 3.14 : Résultats du Bootstrap pour 10 000 simulations

À partir de la distribution prédictive, nous déterminons les quantiles suivants :

	Moyenne	1er centile	99ème centile	5ème centile	95ème centile
\hat{R}_i	149 562 683	108 750 305	200 959 109	119 709 242	184 486 788

TAB. 3.15 : Quantiles de la distribution des provisions

Critiques :

Si les triangles des incréments de paiement $\mu_{i,j}$ présentent des valeurs négatives, la méthode n'est pas utilisable telle quelle. En outre, le fait de ré-échantillonner tout le triangle supérieur n'est pas forcément très réaliste du fait que les résidus $r_{0,n}$ et $r_{n,0}$ sont par construction nuls. Il faut les exclure pour pouvoir supposer l'indépendance des résidus. Nous ne fabriquons donc pas de nouveaux scénarios originaux mais une permutation de scénarios historiques uniquement.

Comparaison des résultats

En appliquant les deux méthodes stochastiques, nous obtenons les résultats suivants :

	Mack	Bootstrap
Moyenne	148 050 479	149 562 683
Écart-type	14 601 053	19 416 066

TAB. 3.16 : Récapitulatif des résultats des méthodes stochastiques

Nous notons une différence de moins de 1% du montant de la provision mais de 32.98% de la volatilité de l'estimation à l'ultime. La méthode de Mack possède tout de même le grand avantage de s'épargner les simulations et de fournir un résultat analytique immédiat. Cependant, cette dernière ne fournit que les moments d'ordre un et deux si nous ne supposons pas une loi de distribution des provisions. La méthode du bootstrap a l'avantage de fournir une distribution empirique du montant des provisions à l'ultime.

Pour le calcul des meilleurs estimations, nous remarquons ainsi une différence minimale entre les différentes méthodes déterministes retenues et stochastiques quant au montant de la provision à retenir. C'est pour cette raison que nous optons pour la méthode de Chain Ladder, elle est après tout la méthode préconisée par le projet de circulaire SBR.

3.2 La meilleure estimation des primes

La meilleure estimation des engagements pour primes ME_{primes} représente l'engagement de l'assureur lié aux sinistres non survenus à la date de l'évaluation. Le calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes est effectué selon la formule suivante :

$$ME_{primes} = RSC * (PPNA + PF) * \sum_k \frac{cad_k}{(1 + taux_{zc_k})^i - PF^-}$$

Où :

RSC : Ratio de sinistralité combiné, il se calcule comme suit :

$$RSC = \frac{\sum_{3 \text{ derniers ex surv}} CU}{\sum_{3 \text{ derniers ex surv}} PA} + \frac{\sum_{3 \text{ derniers ex clos}} FG}{\sum_{3 \text{ derniers ex clos}} PE}$$

CU : Charge ultime ;

FG : Frais de gestion ;

PA : Primes acquises ;

PE : Primes émises ;

PPNA : Provision pour primes non acquises à la date d'évaluation ;

PF : Primes futures à la date d'inventaire ;

cad_k : Cadence de liquidation de l'année de projection *k* ;

(-) : nettes des frais d'acquisition.

Pour le traitement de cette partie, nous disposons de la base de données ci-dessous résumant les primes acquises, émises et les provisions pour primes non acquises :

Année de Survenance	Primes Acquises	Primes Émises	PPNA
2010	60 818 793	62 735 017	21 893 047
2011	69 390 741	69 048 920	22 137 064
2012	78 457 132	78 166 517	24 524 072
2013	85 273 184	84 443 695	30 655 944
2014	98 993 686	95 755 987	28 462 222
2015	100 750 140	96 857 636	28 730 127
2016	103 046 267	101 987 637	32 868 289
2017	110 482 073	107 507 144	33 644 974
2018	112 692 006	113 053 081	35 526 252
2019	117 026 194	118 682 403	37 046 935

TAB. 3.17 : Historique des PA, PE et PPNA

3.3 La meilleure estimation des frais de gestion

Selon la dernière version du rapport **Spécifications techniques - SBR** publiée par l'ACAPS le 01/10/2020, la meilleure estimation des frais de gestion des opérations d'assurance non vie hors rentes correspond à la somme actualisée des flux de frais de gestion futurs liés aux contrats.

Ainsi, les frais de gestion futurs sont estimés en multipliant, la somme de la meilleure estimation des engagements par le taux de frais de gestion moyen. Dans le cas de nos données, nous estimons le taux de frais de gestion moyen d'une valeur de 0.22%.

Récapitulatif des résultats

Pour le calcul des meilleurs estimations, nous rappelons que nous avons décidé de les valoriser suivant la méthode de Chain Ladder. Nous présentons ainsi le tableau des résultats :

$ME_{sinistres}$	ME_{primes}	$MEFG$
121 328 272	36 496 748	348 846

TAB. 3.18 : Valorisation des différentes meilleurs estimations non-vie

La meilleure estimation non vie de notre branche est donc égale à :

$$\begin{aligned}
 ME_{NonVie} &= ME_{sinistres} + ME_{Primes} + MEFG \\
 &= 121\ 328\ 272 + 36\ 496\ 748 + 348\ 846 \\
 ME_{NonVie} &= 158\ 173\ 866\ MAD
 \end{aligned}$$

Il nous reste alors à calculer le CSR_{NonVie} afin de pouvoir estimer la marge de risque.

Chapitre 4

Valorisation des provisions techniques prudentielles - Vie -

Dans cette partie, nous procéderons à la valorisation des provisions techniques prudentielles sous la SBR pour un produit d'assurance Décès Emprunteur. Nous allons tout d'abord discerner les spécificités de ce produit, ensuite nous énumérerons les notations et hypothèses adoptées dans cette étude. Puis, nous présenterons la démarche de tarification du produit Décès Emprunteur. Ultérieurement, nous exposerons de manière exhaustive les différentes composantes des provisions techniques prudentielles vie. En définitive, nous calculerons la meilleure estimation vie tout en étudiant sa sensibilité aux variables remboursement anticipé et résiliation.

4.1 Tarification en assurance décès emprunteur

La SBR adopte un raisonnement en termes de flux. Étant donné que nous ne disposons pas des flux des primes, nous allons dans cette partie présenter les notions théoriques préalables à la tarification.

Nous considérons dans ce mémoire uniquement des primes mensuelles. Le paiement d'une prime unique est possible dans la réalité, mais ce cas est assez rare. En assurance emprunteur, nous pouvons choisir entre deux méthodes de calcul des primes périodiques : en fonction du **capital initial** (montant du capital emprunté) ou du **capital restant dû**. Dans le premier cas, cela implique que la prime payée est constante pendant toute la durée de paiement des primes par l'assuré. Dans le second cas, la prime payée suit la décroissance du capital restant dû au cours du temps.

Effectivement, il est plus prudent pour un assureur de tarifier ces contrats à l'aide de primes qui ne sont pas constantes et qui suivent le risque encouru par l'assureur. Cela justifie notre choix de tarifier notre portefeuille en fonction du capital restant dû.

4.1.1 Notations et hypothèses

Notations :

CI	: Montant du capital initial emprunté ;
CRD_k	: Capital restant dû après k mois écoulés après la souscription du contrat ;
k	: Année d'avancement dans le prêt
n	: Durée du prêt en mois ;
x	: Âge de l'assuré en années ;
t	: Mois de projection ;
${}_k p_x$: Probabilité pour une tête d'âge x d'être en vie à l'âge $x + k$;
${}_k q_x$: Probabilité pour une tête d'âge x de décéder à l'âge $x + k$;
v	: Facteur d'actualisation tel que $(v = \frac{1}{1+i})$;
i	: Taux technique utilisé pour la tarification fixé à 2.5% ;
t_m	: Taux d'intérêt mensuel ;
t_c	: Taux d'acquisition fixé à 4% de le prime ;
t_a	: Taux de remboursement anticipé ;
t_r	: Taux de résiliation ;
$Pmens'_k$: Prime mensuelle pure fonction du capital restant dû ;
$Pmens''_k$: Prime mensuelle commerciale fonction du capital restant dû ;
$Pmens^1_k$: Prime mensuelle pure fonction du capital initial ;
$Pmens^2_k$: Prime mensuelle commerciale fonction du capital initial ;
PU'	: Prime unique pure ;
PU''	: Prime commerciale unique.

Nous définissons ainsi le capital restant dû après p mois écoulés de la manière suivante :

$$CRD_p = CI * \frac{(1 + t_m)^n - (1 + t_m)^p}{(1 + t_m)^n - 1} \quad \text{pour } p \leq 12n$$

Hypothèses :

Nous prenons les hypothèses suivantes pour le calcul des primes pures :

1. Les primes sont **mensuelles** et sont versées en début de période par l'assuré ;
2. La durée de paiement des primes est égale à la durée du prêt, autrement dit il n'y a pas de différé. Ce cas est en effet assez peu fréquent et ne sera donc pas traité. ;
3. Les prêts sont amortissables par annuités constantes ;
4. Les décès surviennent **en milieu de période** ;
5. La table de mortalité retenue dans le modèle est la table **TD88-90** .

Quant à la projection des flux, étant donné le nombre très élevé de contrats, la méthode d'agrégation en **Model Point** regroupe judicieusement les contrats présentant les mêmes caractéristiques. En effet, chaque classe regroupe les assurés ayant un comportement particulier et commun à sa population. Chaque Model Point agrège, pour chaque catégorie et pour chaque année de souscription les assurés ayant le même âge. Ainsi pour chaque Model Point, le capital initial retenu est le capital initial de la population à laquelle il réfère, la même approche est appliquée à la durée et au taux du prêt.

Par la suite, nous procéderons à la projection de l'effectif de la population constituant chaque Model Point en tenant compte des mêmes hypothèses démographiques de la tarification selon la relation suivante :

$$NB\left(x+k+\frac{t}{12}, k+\frac{t}{12}\right) = NB\left(x+k+\frac{t-1}{12}, k+\frac{t-1}{12}\right) \left(1 - \frac{t}{12} t_{a_k}(x)\right) \left(1 - \frac{t}{12} t_{r_k}(x)\right) \left(1 - \frac{1}{12} q_{x+k+\frac{t}{12}}\right)$$

Où :

$NB(x, a)$: Nombre de contrat d'âge x et d'ancienneté a ;

t : Le mois de projection ;

k : L'ancienneté à la date d'évaluation des engagements.

4.1.2 Calcul de la prime unique

Principe :

Dans la tarification en prime unique, une seule prime est payée par l'assuré à la souscription du contrat, servant ainsi à couvrir le risque sur toute la durée du contrat d'assurance.

Formule de tarification :

La prime d'un contrat d'assurance vie classique est déterminée en écrivant que les valeurs actuelles probables des engagements de l'assuré et de l'assureur sont égales à la date de souscription du contrat :

$$VAP_{(Assureur)_{t=0}} = VAP_{(Assuré)_{t=0}}$$

Ainsi, la prime pure payée par l'assuré suivra la décroissance du capital restant dû sur la durée de l'emprunt et sera déterminée comme :

$$PU' = \sum_{k=0}^{12n-1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x * \frac{1}{12} q_{x+\frac{k}{12}}$$

À partir de la prime unique obtenue, nous calculons la prime commerciale unique comme suit :

$$PU'' = \frac{PU'}{1 - t_c}$$

4.1.3 Calcul des primes mensuelles selon le capital initial

Principe :

Cette méthode permet de déterminer le taux de prime qui permettra le calcul du montant à payer à chaque échéance. Le taux de prime dans ce cas est constant dans le temps et permet d'égaliser l'engagement de l'assureur et celui de l'assuré.

Formule de tarification :

En se basant sur l'égalité suivante :

$$VAP_{(Assureur)_{t=0}} = VAP_{(Assuré)_{t=0}}$$

Nous obtenons la prime mensuelle payée par l'assuré :

$$taux_{P,CI} = \frac{\sum_{k=0}^{12n-1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x * \frac{1}{12} q_{x+\frac{k}{12}}}{CI \sum_{k=0}^{12n-1} v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x}$$

Où : $taux_{P,CI}$ représente le taux de prime tarifé sur le capital initial. Ainsi, nous déduisons la prime mensuelle :

$$Pmens^1 = taux_{P,CI} CI$$

À partir de la prime mensuelle obtenue, nous calculons la prime mensuelle commerciale comme suit :

$$Pmens^2 = \frac{Pmens^1}{1 - t_c}$$

4.1.4 Calcul des primes mensuelles selon le capital restant dû

Principe :

Dans la tarification sur capital restant dû, la prime payée par l'assuré décroît pendant toute la durée du prêt en suivant l'évolution du CRD au cours du temps. Nous cherchons donc à calculer un taux de prime qui sera appliqué au CRD de début d'année, afin d'obtenir le montant de la prime payée par l'assuré. Ce taux est fonction de l'âge atteint au cours du temps.

Formule de tarification :

En se basant sur la même formule d'équivalence :

$$VAP_{(Assureur)_{t=0}} = VAP_{(Assuré)_{t=0}}$$

Ainsi, la prime mensuelle payée par l'assuré suivra la décroissance du capital restant dû sur la durée de l'emprunt et sera déterminée comme :

$$taux_{P,CRD} = \frac{\sum_{k=0}^{12n-1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x * \frac{1}{12} q_{x+\frac{k}{12}}}{\sum_{k=0}^{12n-1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x}$$

Où : $taux_{P,CRD}$ représente le taux de prime tarifé sur le capital restant dû. Ainsi, la prime pure mensuelle est :

$$Pmens_k^1 = taux_{P,CRD} CRD_k$$

À partir de la prime mensuelle obtenue, nous calculons la prime mensuelle commerciale comme suit :

$$Pmens_k^2 = \frac{Pmens_k^1}{1 - t_c}$$

4.2 Calcul des provisions techniques prudentielles

L'article 12 du projet de circulaire précise que les provisions techniques prudentielles sont évaluées comme suit :

$$PT_{Prudentielles} = ME_{Engagements} + ME_{Frais} + MR$$

- **La meilleure estimation des engagements** $ME_{Engagements}$: correspond à la valeur probabilisée et actualisée des flux de trésorerie futurs afférents aux engagements de l'entreprise d'assurance au titre des contrats souscrits ;
- **La meilleure estimation des frais de gestion** ME_{Frais} : correspond à la valeur probabilisée et actualisée du montant relatif à la gestion des contrats ;
- **La marge de risque** MR : correspond au coût d'immobilisation du capital de solvabilité requis afférent aux engagements garantis.

4.2.1 La meilleure estimation des engagements

Pour les opérations d'assurance vie, décès et capitalisation, la formule de calcul de la meilleure estimation des engagements tel que définie dans le projet de circulaire se présente comme suit :

$$ME_{engagements} = MEGP + BDF$$

- **Les bénéfices des discrétionnaires futurs** BDF : sont l'équivalent de la provision pour participation aux bénéfices ;

- **La meilleure estimation des garanties probabilisées MEGP** : est calculée tête par tête, en actualisant les flux de trésorerie futurs probabilisés correspondant à la différence entre les décaissements (règlements de toutes les prestations : décès, rachat, résiliation....) et les encaissements futurs (correspondant aux engagements des assurés, primes et cotisations).

La meilleure estimation des garanties probabilisées MEGP :

Dans le calcul des flux utilisés pour déterminer la MEGP, nous supposons que l'assuré paie des primes mensuelles en fonction du capital restant dû, et rembourse son prêt à échéances mensuelles. Les encaissements correspondent aux flux de primes payées par l'assuré, alors que les décaissements renvoient aux flux de décès. Les notations sont celles utilisées dans la partie de tarification :

- **Capital Restant Dû :**

$$CRD_{12k+t} = CI \frac{(1+t_m)^n - (1+t_m)^{12k+t}}{(1+t_m)^n - 1} \quad \text{pour } t \leq n - 12k$$

- **Flux de décès :**

$$FluxDécès_{12k+t} = \begin{cases} CRD_{12k+t} * \frac{t}{12} p_{x+k} * \frac{1}{12} q_{x+k+\frac{t}{12}} \left(1 - \frac{t}{12} t_{a_k}(x)\right) \left(1 - \frac{t}{12} t_{r_k}(x)\right) & \text{si } t \leq n - 12k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Flux de primes :**

$$FluxPrimes_{12k+t} = \begin{cases} Pmens_{12k+t} * \frac{t}{12} p_{x+k} * \left(1 - \frac{t}{12} t_{a_k}(x)\right) \left(1 - \frac{t}{12} t_{r_k}(x)\right) & \text{si } t \leq n - 12k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les taux de remboursement anticipé (resp. résiliation) sont ajustés par une courbe de tendance polynomiale d'ordre p (cet ordre est obtenu par l'optimisation du critère AIC pour chaque âge x). Les paramètres de la courbe d'ajustement permettront de prévoir le taux de remboursement anticipé (resp. résiliation) mensuel nécessaire pour les calculs des flux.

La valorisation des flux pour un contrat d'ancienneté k à la date d'évaluation des engagements se présente comme suit :

$$Flux_k = \sum_{t=0} (FluxDécès_{12k+t} - FluxPrimes_{12k+t})$$

La valeur de la MEGP se présente comme suit :

$$MEGP = \sum_{k=1} \frac{Flux_k}{(1+taux_{zc_k})^k}$$

Les bénéfices discrétionnaires futurs BDF :

La participation aux bénéfices en matière d'assurance vie désigne une participation aux résultats d'une compagnie d'assurance, au bénéfice de ses souscripteurs. La gestion des

fonds récoltés par les assureurs génère des profits appelés **bénéfices discrétionnaires**. L'assureur a l'obligation d'en redistribuer une partie. Le contrat d'assurance peut contenir une clause détaillant les modalités de cette participation. Ce montant est également précisé lors de la publication du taux de rendement annuel.

$$BDF = PPB + TPB_{moyen} (x\% * Valeur - MEGP - MEFG - PPB)$$

Avec :

PPB : Provisions pour participation aux bénéfices comptable ;

$MEFG$: Meilleure estimation des frais de gestion ;

$x\%$: Un pourcentage de l'actif relatif au produit ;

TPB_{moyen} : Le taux de participation aux bénéfices moyen servi aux assurés :

$$TPB_{moyen} = \frac{PPB_N + PPB_{N-1} + PPB_{N-2}}{RT_N + RT_{N-1} + RT_{N-2}}$$

Dans le cadre du produit étudié, l'assurance décès emprunteur, la meilleure estimation des engagements est réduite au calcul de la meilleure estimation des garanties probabilisées, puisque nous notons **l'absence d'interaction entre le passif et l'actif en assurance emprunteur**.

4.2.2 La meilleure estimation des frais de gestion

La meilleure estimation des frais de gestion est la valeur probabilisée et actualisée du montant relatif à la gestion des contrats et est déterminée par :

$$MEFG = \sum_{k=1}^h \frac{NB \text{ contrats restants}_k * FG_{unitaire}}{(1 + \text{taux}_{ZC_k})^k}$$

Avec :

$FG_{unitaire}$: Frais de gestion unitaire de chaque contrat ;

taux_{ZC_k} : le taux zéro coupon ;

h : horizon de projection.

4.2.3 Présentation des résultats

La meilleure estimation des garanties probabilisées MEGP :

Afin de calculer la valeur de la MEGP, il est nécessaire de projeter tous les flux du passif, à savoir les primes et les flux décès. Nous avons modélisé ces flux avec et sans la comptabilisation des phénomènes de remboursement anticipé et résiliation.

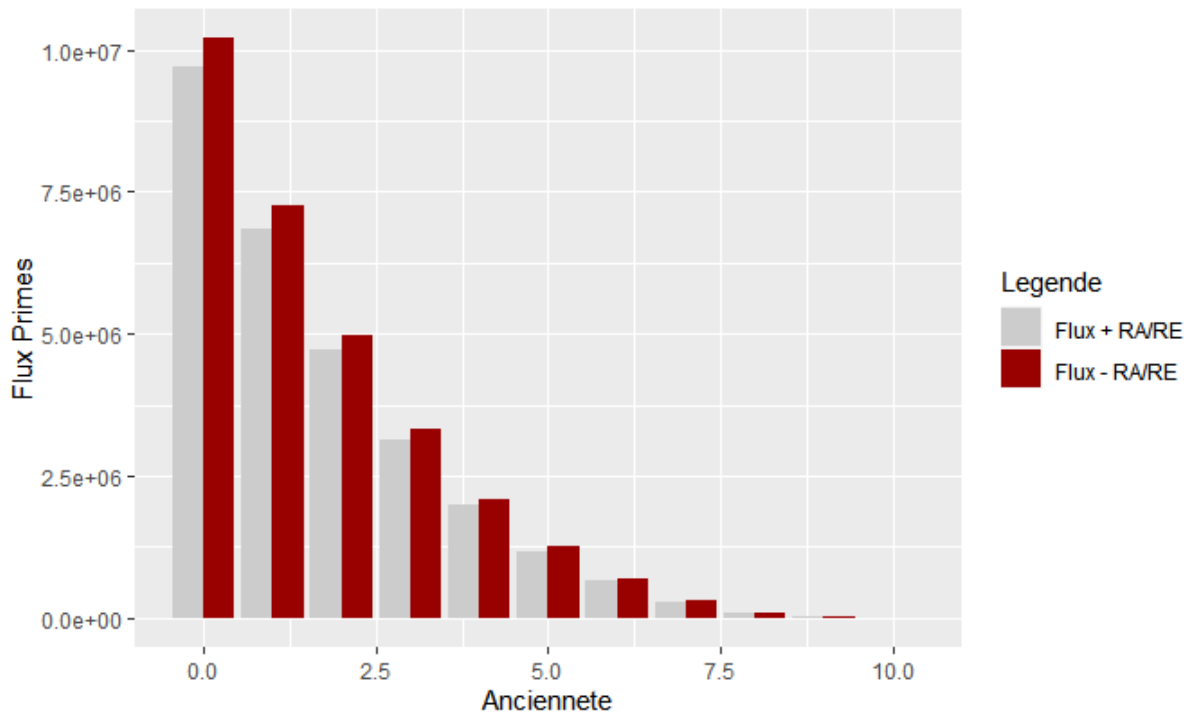


FIG. 4.1 : Projection des flux primes

Nous constatons qu'au fil de temps les flux primes des contrats enregistrent une baisse significative, cela revient au nombre d'assurés qui quittent le portefeuille année après année. Aussi, nous pouvons remarquer que les taux de résiliation et du remboursement anticipé créent un poids non négligeable au niveau des montants des flux de prime.

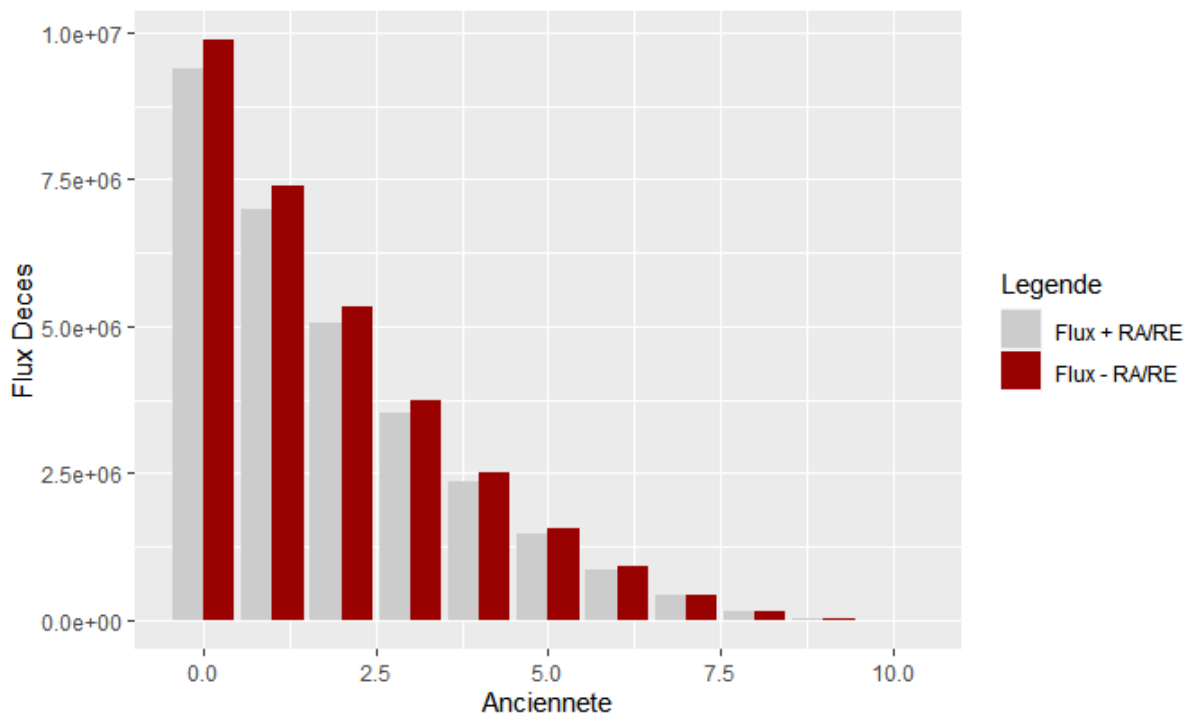


FIG. 4.2 : Projection des flux décès

Nous notons que les flux décès ont enregistré une décroissance ordinaire, ce qui est logique puisque les assurés quittent le portefeuille année après année et cela est dû aux décès. Similairement au premier cas, les taux de résiliation et du remboursement anticipé ont un impact sur les montants des flux.

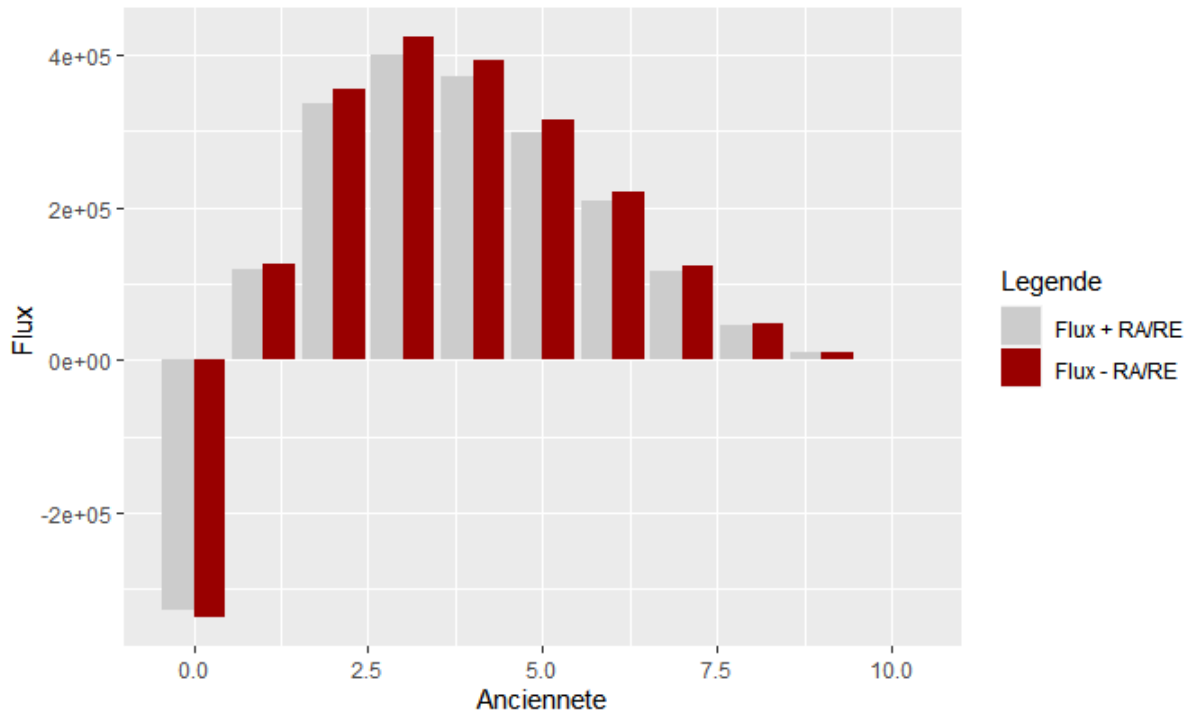


FIG. 4.3 : Projection des flux

D'après l'illustration graphique des flux, nous remarquons que la différence entre les flux sortants et les flux entrants a enregistré une valeur négative dans la première année ce qui signifie que les encaissements sont largement supérieures aux décaissements. Plus nous avançons dans le temps, plus les encaissements diminuent et les décaissements augmentent. Le tableau ci-dessous donne un aperçu des résultats globaux selon le scénario central :

Ancienneté	Flux Primes	Flux Décès	MEGP
1	6 860 348	6 979 396	116 355
2	4 706 395	5 041 476	319 757
3	3 132 591	3 532 526	372 228
4	1 982 267	2 353 414	336 556
5	1 183 417	1 481 143	262 749
6	646 288	853 973	178 166
7	294 660	410 632	96 603
8	98 899	145 346	37 522
9	17 512	27 272	7 637

TAB. 4.1 : Détail de la projection des flux selon le scénario central

La meilleure estimation des garanties probabilisés tenant compte du phénomène de remboursement anticipé et résiliation s'élève à : **1 727 574 MAD** (ce montant représente la somme de la dernière colonne du tableau précédent), alors que si nous ne tenons pas compte du phénomène de remboursement anticipé et résiliation la *MEGP* atteint : **1 828 448 MAD**. Ce qui prouve l'importance des remboursements anticipés et des résiliations.

La meilleure estimation des frais de gestion :

Pour pouvoir valoriser la MEFG, nous commençons d'abord par projeter le nombre de contrats dans notre portefeuille. Nous adoptons ainsi la relation émise auparavant et nous obtenons le graphe suivant :

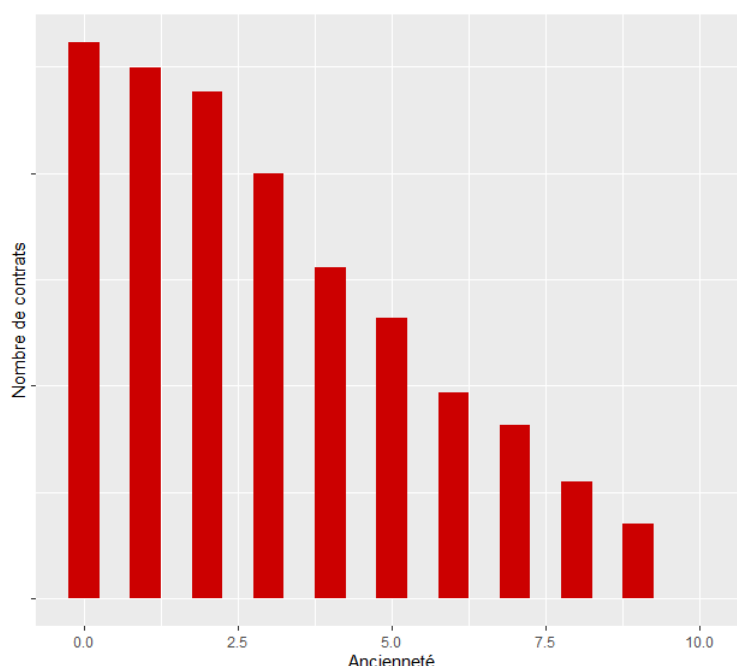


FIG. 4.4 : Projection des nombres de contrats du portefeuille

Le tableau ci-dessous donne un aperçu des résultats globaux selon le scénario central :

Ancienneté	MEFG
1	11 365
2	9 298
3	7 055
4	5 807
5	4 152
6	3 382
7	2 222
8	1 377
9	560

TAB. 4.2 : Détail de la projection des flux de frais de gestion

La meilleure estimation des frais de gestion tenant compte du phénomène de remboursement anticipé et résiliation s'élève à : **45 218 MAD** (ce montant représente la somme de la colonne MEFG du tableau précédent), ce montant représente la provision que la compagnie d'assurance doit garder pour gérer les frais de contrats futurs.

Récapitulatif

La meilleure estimation vie de notre produit décès emprunteur est donc égale à :

$$\begin{aligned}ME_{vie} &= MEGP + BDF + MEFG \\ &= 1\,727\,574 + 0 + 45\,218 \\ ME_{vie} &= 1\,772\,792 \text{ MAD}\end{aligned}$$

Il nous reste donc à comptabiliser la marge de risque suite à notre calcul de la CSR_{vie} dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Capital de Solvabilité Requis et Marge de Risque

Toujours en se reposant sur la directive de la Solvabilité Basée sur les Risques (SBR), et après avoir évalué les meilleures estimations vie et non vie, nous passerons au calcul des derniers indicateurs quantitatifs du 1^{er} pilier de la norme : le Capital de Solvabilité Requis (CSR) et la Marge de Risque (MR). Le plan que nous adopterons est le suivant : D'abord, nous allons définir le concept du CSR et ses différentes approches de calcul. Ensuite, nous calculerons le CSR de souscription vie, ce qui va nous conduire à la valorisation de la marge de risque vie. Le CSR marché lui aussi va être estimé, cependant nous devons modéliser certains chocs (actions, taux) pour effectuer une étude plus complète. De même, Merz & Wütrich et la méthode Log-Normale simplifiée nous permettront de modéliser le risque de provisions et le risque de primes respectivement. Par conséquent, nous pourrons valoriser le CSR non-vie, et par extension la MR non-vie. Finalement, nous serons capable de calculer le CSR global de la compagnie d'assurance.

5.1 Définition et approches de calcul du CSR

Le CSR reflète le niveau du capital nécessaire pour que l'assureur puisse tenir tous ses engagements sur une période de temps et avec le niveau de confiance prédéfinis. Le CSR doit ainsi tenir compte de tous les risques significatifs et quantifiables. Et si au cours de la période prédéfinie le CSR vient à s'user, grâce à l'existence de la marge de risque l'assureur pourra encore céder son portefeuille à un autre assureur. Les paramètres et les hypothèses utilisées dans le calcul du CSR sont choisis pour refléter la Value at Risk (VaR) calibrée au niveau de confiance de 99,5% sur un an.

Pour le calcul du capital de solvabilité requis (CSR), nous adoptons deux approches de calcul différentes :

Approche par facteur :

Le CSR est calculée à partir d'une formule mathématique et se compose du CSR de base (BCSR) et la charge de capital pour le risque opérationnel (CSR_{op}) :

$$CSR = BCSR + CSR_{op} - \max(0, Adj)$$

Le BCSR comprend 5 grandes catégories de risques. Dans chacun de ces modules, les risques sont subdivisés en sous-catégories. Les charges de capital sont calculées pour chaque sous-module, puis agrégées selon l'approche suivante :

- Tous les risques appartenant à la même catégorie sont combinés à l'aide de matrices de corrélation pour aboutir à la charge du risque du marché.
- Ensuite, les principales catégories de risques sont combinées à l'aide d'une matrice de corrélation pour arriver au BCSR.

Approche par scénario :

Cette approche consiste à simuler des chocs sur les flux de l'assureur afin de savoir quels en seraient les impacts. Ces chocs sont des variations brutales dans la perspective de mesurer les risques relatifs au portefeuille. Les scénarios de choc reflétant la perte maximale sont construits à partir du scénario central, et ce en appliquant des coefficients de choc.

Le CSR représente ainsi le capital nécessaire à l'absorption des chocs provoqués par les risques majeurs. Les compagnies d'assurances doivent dès lors prouver que leur niveau de fonds propres peut couvrir ses risques.

5.2 Souscription Vie

5.2.1 CSR Souscription vie

Il s'agit des risques spécifiques résultant de la souscription des contrats d'assurance vie. Notamment, ces risques proviennent des sinistres couverts, mais aussi des processus

inhérents à l'existence même de tel contrats.

Ainsi, ce risque peut être subdivisé en risques biométriques (mortalité, longévité, invalidité), le risque de rachat, le risque de dépense et le risque de catastrophe.

CSR Mortalité :

Principe :

En se conformant au produit traité dans notre travail, le risque auquel la compagnie est exposée, est le risque de mortalité, et non de longévité. Cette exigence de capital relative au risque de mortalité, correspond à la perte maximale de fonds propres qui résultent de l'application **des coefficients à la hausse** aux taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques prudentielles.

Pratique :

Nous appliquons la théorie de la SBR en nous inspirant du pourcentage utilisé par la directive SII puisque le régulateur marocain n'a pas encore fixé le taux de choc correspondant à chaque risque. Alors, le taux de choc retenu est 15% et le nouveau taux de mortalité est comme suit :

$$q_{\text{après choc}} = q_{\text{avant choc}} * (1 + 15\%)$$

Le tableau ci-dessous résume les résultats :

	Résultats
$ME_{\text{Après choc}}$	1 998 201
ME_{Central}	1 772 729
$CSR_{\text{Mortalité}}$	225 472

TAB. 5.1 : Résultats avant et après choc du risque de mortalité

Par conséquent, le capital requis pour le risque de mortalité est assez considérable et équivaut à :

$$CSR_{\text{Mortalité}} = 225\ 472\ MAD$$

CSR Rachat :

Principe :

Le risque de rachat est un risque relatif à la perte maximale de fonds propres qui résulterait de l'application de coefficients à la baisse ou à la hausse, aux tables de rachats en montant et en nombre utilisées pour le calcul des provisions techniques prudentielles.

Autrement dit, le CSR Rachat est égale à la plus élevée des exigences de capital suivantes :

- Baisse soudaine permanente de $\alpha\%$ des taux de rachat en montant et $\beta\%$ en nombre.
- Hausse soudaine permanente de $\alpha\%$ des taux de rachat en montant et $\beta\%$ en nombre.

Pratique :

En réalité, et puisque l'ACAPS n'exige encore pas des valeurs pour les coefficients α et β , nous adoptons à titre illustratif – en suivant la directive Solvabilité II - $\alpha = \beta = 50\%$. Nous calculons le CSR relatif au sous-module du risque de rachat ainsi :

$$\begin{cases} CSR_{Rachat} = ME_{Après\ choc} - ME_{Central} \\ CSR_{Rachat} = \max(CSR_{Rachat,hausse}; CSR_{Rachat,baisse}; 0) \end{cases}$$

	Scénario Hausse	Scénario Baisse
$ME_{Après\ choc}$	1 633 183	1 956 516
$ME_{Central}$	1 772 729	1 772 729
CSR_{Rachat}	-139 546	183 787

TAB. 5.2 : Résultats avant et après choc du risque de rachat

Le capital requis pour le risque des rachats en appliquant un choc à la hausse, et à la baisse est donc :

$$CSR_{Rachat} = 183\ 787\ MAD$$

CSR dépense ou de frais de gestion :

Principe :

Le risque de dépenses désigne la perte de fonds propres résultant de l'application à la hausse de $X\%$ aux montants de frais de gestion retenus dans la détermination de la meilleure estimation des frais de gestion.

Pratique :

A cet égard, le risque de dépenses s'applique sur les frais de gestion en mettant en place les modifications suivantes inspirées des taux de choc adoptées dans la réglementation européenne SII :

- Augmentation de 10% des frais
- Majoration des frais de gestion de 1% par an

De la même que le CSR_{Rachat} , nous calculons le $CSR_{Dépense}$ mais ce dernier est basé sur la différence des meilleures estimations des frais de gestion MEFG :

$$CSR_{Dépense} = ME_{AprèsChoc} - ME_{Central}$$

De ce fait, nous obtenons les résultats suivants :

	Résultats
$ME_{Après\ Choc}$	1 778 794
$ME_{Central}$	1 772 729
$CSR_{Dépense}$	6 065

TAB. 5.3 : Résultats avant et après choc du risque de dépense

Associé à une augmentation éventuelle des frais de gestion des contrats d'assurance, le capital requis pour le risque de dépenses est de :

$$CSR_{Dépense} = 6\,065\,MAD$$

Ainsi, une hausse de 10% des dépenses futures par rapport aux anticipations de la meilleure estimation n'augmente que très sensiblement ce dernier.

CSR Catastrophe :

Principe :

Le risque de catastrophe en vie exprime le fait qu'il peut y avoir très ponctuellement une forte augmentation des décès pour une raison précise comme une épidémie, un tremblement de terre sans que cela ne constitue une dérive à long terme.

L'exigence de capital relative au risque de catastrophe en vie correspond à l'application d'un coefficient de $X\%$ aux montants des capitaux sous risque au titre des garanties en cas de décès nets de réassurance.

Pratique :

En suivant toujours la Solvabilité 2, en pratique, le choc catastrophe est une hausse de la mortalité des assurés de 0,15%. Ainsi, suivant la même logique que les risques précédents, nous aboutissons aux résultats suivants :

	Résultats
$ME_{Après\ choc}$	1 801 587
$ME_{Central}$	1 772 729
$CSR_{Catastrophe}$	28 858

TAB. 5.4 : Résultats avant et après choc du risque de catastrophe

La valeur du capital requis lié à ce risque est de :

$$CSR_{Catastrophe} = 28\,858\,MAD$$

CSR Vie :

Pour conclure, le CSR relatif au risque de souscription en vie se calcule en additionnant les quatres composantes du CSR calculées ci-dessus. D'une façon plus explicite :

$$CSR_{Vie} = \sqrt{\sum_{r,z} Corr_{r,z} CSR_r CSR_z} \quad \text{Avec : } r, z \in \{Mortalité, Rachat, Dépenses, Catastrophe\}$$

Avec la matrice de corrélation est la matrice d'identité, c'est-à-dire :

Coeff. de corrélation	Mortalité	Rachat	Dépense	Catastrophe
Mortalité	1	0	0	0
Rachat	0	1	0	0
Dépense	0	0	1	0
Catastrophe	0	0	0	1

TAB. 5.5 : Matrice de corrélation des risques de souscription vie

Après avoir quantifié l'exigence en fonds propre au profil de chaque risque, le Capital de Solvabilité Requis exigé afin que l'assureur puisse honorer ces engagements même en présence de ce risque figure dans le tableau suivant :

	Résultats
<i>CSR_{Mortalité}</i>	225 472
<i>CSR_{Rachat}</i>	183 787
<i>CSR_{Dépense}</i>	6 065
<i>CSR_{Catastrophe}</i>	28 858
<i>CSR_{Vie}</i>	292 377

TAB. 5.6 : Récapitulation des résultats du CSR_{Vie}

La valeur du capital requis lié à la souscription vie est donc de :

$$CSR_{Vie} = 292\ 377 \text{ MAD}$$

5.2.2 Marge de Risque Vie

La marge de risque correspond au coût d'immobilisation du capital de solvabilité requis afférent aux engagements garantis. Elle est calculée, séparément pour les engagements des opérations d'assurances vie et rentes découlant des opérations non vie ainsi que pour les engagements des opérations non vie, et ce, conformément à la relation suivante :

$$MR = \alpha \sum_{k \geq 0} \frac{CSR_k}{(1 + \text{taux}_{ZC_{k+1}})^{k+1}}$$

Où :

- $\alpha = 6\%$: représente le taux du coût du capital ;
- CSR_k : représente le capital de solvabilité requis projeté à la date k compte non tenu des exigences de capitaux relatives aux risques opérationnel, de marché, de concentration et de contrepartie. Il est calculé comme suit : $CSR_k = \frac{ME_{engagements}^k}{ME_{engagements}^0} CSR_{Vie}$;
- $ME_{engagements}^k$: correspond à la meilleure estimation des engagements projetée à la date k ;
- CSR_0 : représente le capital de solvabilité requis à la date d'inventaire compte non tenu des exigences de capitaux relatives aux risques opérationnel, de marché, de concentration et de contrepartie.

Ainsi, après la projection de la CSR_{vie} , nous obtenons :

$$MR_{Vie} = 61\,525 \text{ MAD}$$

5.3 CSR marché

L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des variations des variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt.

Nous tenons à souligner que les données chiffrées suivantes de l'actif ont été modifiées afin de préserver le caractère confidentiel des données et servent uniquement le but d'exposer la méthode de calcul proposée par la SBR.

CSR actions :

Ce module vise à quantifier l'impact d'une baisse soudaine des marchés actions sur la valeur du bilan de l'assureur. Il est décomposé en quatre types d'actions (Action cotée stratégique, Action cotée non stratégique, Action non cotée stratégique et Action non cotée non stratégique). Nous cherchons ainsi à calculer le taux de choc à appliquer aux actions cotées grâce au modèle de Black & Scholes.

Aspect théorique

Il existe plusieurs modèles dans la littérature qui décrivent la dynamique d'un actif risqué de type action. L'un des modèles les plus utilisés dans la pratique est le modèle Black & Scholes [1973]. Dans ce qui suit, nous allons exposer ce modèle pour modéliser ce type d'actif et nous détaillerons le calibrage du modèle choisi pour le prix des actions. Black & Scholes supposent que le cours d'une action peut être représenté par un mouvement brownien géométrique (**loi log normale**).

Soit S_t le cours de l'action, son équation de diffusion donnée par $B\&S$ est la suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t)$$

Avec :

μ : Rendement attendu de l'action ;

σ : Volatilité de l'action ;

B_t : Un mouvement brownien ;

La solution de cette équation s'écrit :

$$S_t = S_0 * \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

Et sa discrétisation exacte prend la forme suivante :

$$S_{t+1} = S_t * \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma (B_{t+1} - B_t) \right)$$

Puisque B_t est un mouvement brownien, alors l'accroissement $B_{t+1} - B_t$ suit une loi normale centrée réduite.

D'autre part, la formule ci-dessous représente le rendement logarithmique d'actions entre deux dates successives $t + 1$ et t qui suit une loi normale de moyenne μ et de variance $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$:

$$R_t = \ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma (B_{t+1} - B_t)$$

Ainsi, la paramétrisation se fait par la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R(t) \quad \text{Moyenne empirique de l'historique} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^2 \quad \text{Variance empirique de l'historique} \end{array} \right.$$

Aspect pratique

Nous appliquons ci-après le modèle Black & Scholes à l'indice MASI. Nous disposons, pour notre étude, de 156 observations pour la période qui s'étale entre Janvier 2007 et Décembre 2019, tout en considérant **le mois** comme unité de temps.

Nous montrons ci-dessous les deux courbes représentant l'évolution du cours du MASI et ses rendements durant la période d'étude :

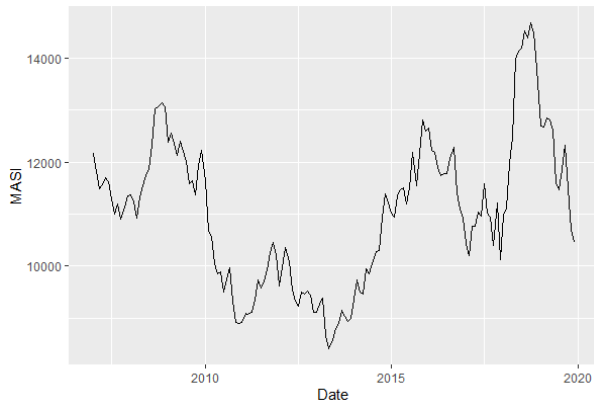


FIG. 5.1 : Évolution du cours MASI

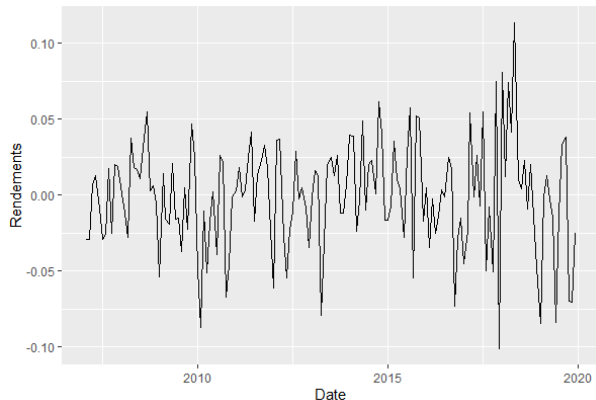


FIG. 5.2 : Évolution des rendements MASI

Avant d'entamer notre modélisation, il faut tester l'hypothèse fondamentale du modèle Black & Scholes qui est la normalité des rendements logarithmiques du cours de l'indice. Pour tester cette hypothèse nous nous servons du test de Shapiro-Wilk qui prend comme **hypothèse nulle le fait que l'échantillon suit une loi normale**. Le résultat du test sous R est le suivant :

Shapiro-Wilk normality test

```
data: Rendements
W = 0.99075255, p-value = 0.4089663
```

Listing 6 : Test de normalité des rendements de MASI

Nous remarquons que la valeur de $p - value$ est très grande. Ainsi, nous pouvons se permettre d'accepter l'hypothèse de normalité des rendements logarithmique, ceci est confirmé graphiquement avec l'histogramme des rendements et le QQ-plot ci-dessous :

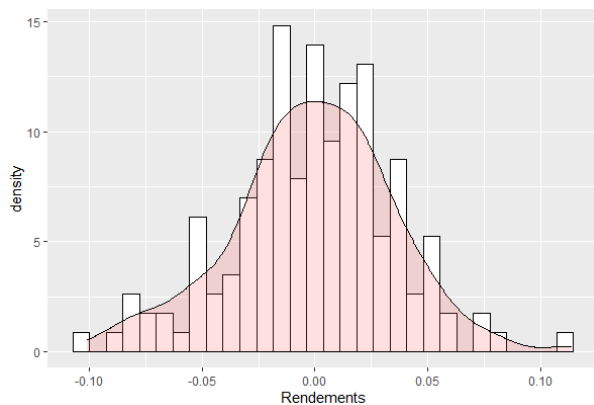


FIG. 5.3 : Histogramme des rendements

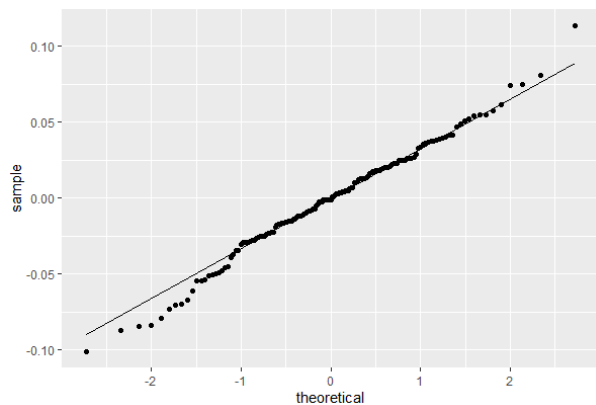


FIG. 5.4 : QQ-plot des rendements MASI

Ainsi nous pouvons conclure que la modélisation des cours mensuels de l'indice MASI par le modèle Black-Scholes est permise.

D'après la représentation graphique des rendements de MASI, nous remarquons aussi que la série se caractérise par une volatilité plus ou moins de 12%, et elle semble stationnaire, toutefois il est nécessaire de vérifier sa stationnarité par le test de Dickey-Fuller :

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: Rendements
Dickey-Fuller = -3.7514858, Lag order = 5, p-value = 0.02324319
alternative hypothesis: stationary
```

Listing 7 : Test de stationnarité des rendements

Avec une p-value de 0.02324, qui est inférieur à 5%, **l'hypothèse alternative est acceptée**. Notre série est donc une série stationnaire au seuil de 5%.

Ensuite, pour générer des scénarios sur un horizon d'un an de l'indice de MASI, nous commencerons par estimer les paramètres μ et σ à partir des données historiques retenues. Pour l'indice MASI nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = -0.034\% \\ \hat{\sigma} = 3.59\% \end{cases}$$

Une fois l'estimation des paramètres du modèle Black & Scholes associé à notre indice MASI est faite, nous pouvons passer à la simulation des trajectoires de notre indice. Nous prenons comme valeur initiale du cours celle côté en décembre 2019.

Pour parvenir à déterminer le taux de baisse approprié pour choquer la valeur de nos actions, nous effectuerons 100 000 simulations.

Et comme déjà précisé dans le résumé de l'approche, nous calculerons ce taux comme étant le taux de baisse constaté entre la valeur initiale de l'indice MASI (sa valeur en décembre 2019) et la 500^{ème} plus petite valeur finale de cet indice parmi les 100 000 valeurs obtenus.

Nous obtenons la représentation graphique ci-après où nous n'avons gardé que 5000 simulations du cours MASI pour une meilleure lisibilité :

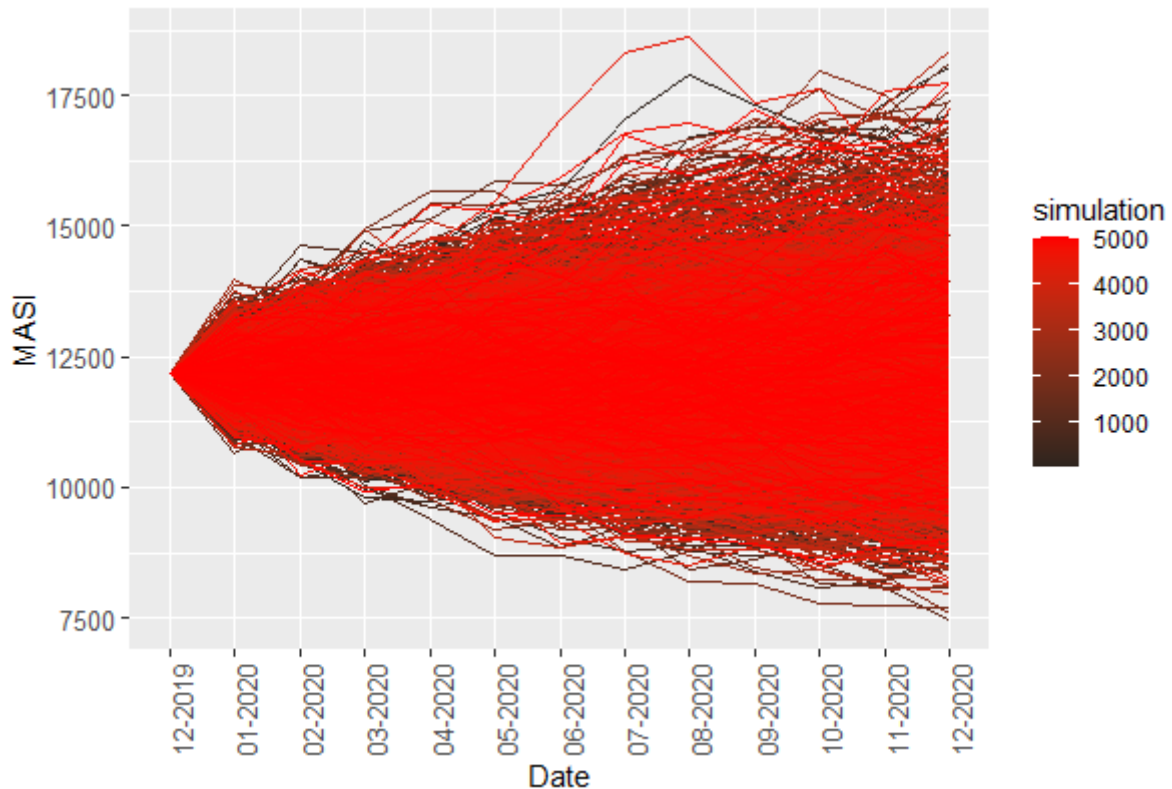


FIG. 5.5 : 5000 simulations du cours de l'indice MASI

Le cours de l'indice MASI en décembre 2019 est 12171.9. Après chaque trajectoire simulée, nous avons gardé la valeur finale de l'indice MASI obtenu dans un vecteur de taille 100 000, une fois le vecteur tout rempli, nous avons trié ce dernier. La 500^{ème} plus petite valeur finale de l'indice de MASI constaté est 8 666.4. Ce qui représente un taux de baisse de :

$$\frac{12\,171.9 - 8\,666.4}{12\,171.9} = 0.2879$$

Ainsi :

$$t_{Action} \simeq 28.8\%$$

C'est donc ce taux de baisse que nous allons appliquer à la valeur de marché de notre portefeuille d'actions pour calculer le CSR_{Action} . Enfin, nous nous retrouvons avec la valeur suivante :

$$CSR_{Action} = VM_{Action} * t_{Action}$$

$$CSR_{Action} = 3\,713\,267\,MAD$$

CSR taux :

Principe :

L'exigence de capital pour le risque de taux est défini comme la plus élevée des exigences de capital suivantes :

- L'exigence de capital pour risque de hausse des taux d'intérêt ;
- L'exigence de capital pour risque de baisse des taux d'intérêt.

L'exigence de capital relative à la hausse ou à la baisse des taux d'intérêt est obtenue en mesurant la perte des fonds propres résultante.

Pour déterminer les chocs à appliquer sur la courbe des taux zéro-coupon, nous adopterons les modèles stochastiques de **Vašíček** et **CIR** déjà développés de manière exhaustive dans le chapitre 2.

Il convient après d'effectuer des simulations en générant 100 000 trajectoires de notre taux d'intérêt (TMP) sur un horizon d'un an. Encore une fois, nous prendrons parmi les 100 000 valeurs finales de nos simulations la 500^{ème} plus grande valeur comme étant la représentation du risque à la hausse du taux d'intérêt, et la 500^{ème} plus petite valeur comme étant la représentation du risque à la baisse du taux d'intérêt.

Pratique :

Pareillement au travail fait pour les actions, nous allons prendre parmi les 100 000 valeurs finales du TMP la 500^{ème} plus grande valeur finale comme la situation traduisant le risque à la hausse du taux d'intérêt et la 500^{ème} plus petite valeur finale comme la situation traduisant le risque à la baisse du taux d'intérêt. Nous obtenons la représentation graphique ci-après où nous n'avons gardé que 500 simulations du TMP selon les deux modèles pour une meilleure lisibilité :

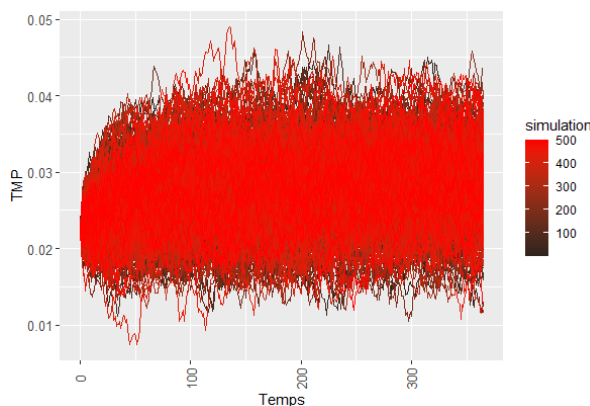


FIG. 5.6 : Simulations Vašíček

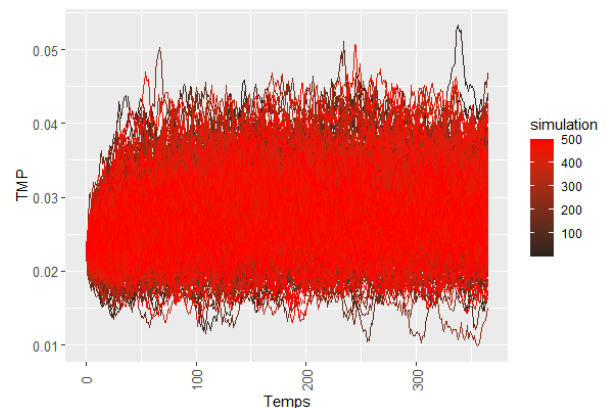


FIG. 5.7 : Simulations CIR

Le tableau suivant présente le calcul de ces chocs pour les maturités allant de 1 an à 15 ans :

Maturité	Taux ZC	Modèle de Vašíček				Modèle de CIR			
		Taux hausse	C. hausse	Taux baisse	C. baisse	Taux hausse	C. hausse	Taux baisse	C. baisse
1	2.32%	4.16%	79.56%	1.61%	-30.56%	4.38%	89.20%	1.71%	-26.14%
2	2.37%	4.21%	77.84%	1.68%	-28.77%	4.46%	88.34%	1.76%	-25.75%
3	2.37%	4.26%	79.37%	1.76%	-25.76%	4.54%	90.99%	1.81%	-24.00%
4	2.38%	4.31%	81.00%	1.84%	-22.76%	4.61%	93.81%	1.85%	-22.16%
5	2.40%	4.36%	81.62%	1.91%	-20.25%	4.69%	95.62%	1.90%	-20.73%
6	2.44%	4.40%	80.70%	1.99%	-18.50%	4.77%	95.81%	1.95%	-19.96%
7	2.50%	4.45%	78.00%	2.06%	-17.67%	4.85%	94.11%	2.00%	-19.98%
8	2.56%	4.50%	75.37%	2.13%	-16.94%	4.94%	92.49%	2.05%	-20.00%
9	2.66%	4.54%	70.82%	2.20%	-17.26%	5.02%	88.77%	2.10%	-20.91%
10	2.72%	4.59%	68.88%	2.27%	-16.46%	5.10%	87.91%	2.15%	-20.66%
11	2.76%	4.63%	68.06%	2.34%	-15.18%	5.19%	88.33%	2.21%	-19.88%
12	2.83%	4.67%	65.11%	2.40%	-15.07%	5.28%	86.39%	2.26%	-20.12%
13	2.91%	4.72%	62.23%	2.47%	-15.03%	5.37%	84.50%	2.32%	-20.35%
14	2.99%	4.76%	59.40%	2.54%	-15.06%	5.45%	82.67%	2.37%	-20.59%
15	3.07%	4.80%	56.48%	2.60%	-15.25%	5.54%	80.72%	2.43%	-20.90%

TAB. 5.7 : Chocs à appliquer selon les modèles de Vašíček et CIR

Nous remarquons que le modèle de Vašíček tend à sous-estimer les chocs hausses par rapport au modèle de CIR. Quant aux chocs baisses, le modèle de CIR propose des chocs qui stagnent à partir de la maturité 5 autour de -20% contrairement au modèle de Vašíček où les chocs se stabilisent plus tardivement aux alentours de -15%.

Les chocs à appliquer dans le cadre de la réforme européenne SII ressemblent plus ou moins aux chocs proposés par le modèle de Vašíček, surtout à la hausse des taux d'intérêt. Par conséquent, nous retenons cette fois-là ce modèle stochastique pour calculer notre CSR_{taux} .

$$\begin{cases} CSR_{taux} = ME_{Après\ choc} - ME_{Central} \\ CSR_{taux} = \max(CSR_{taux,hausse}; CSR_{taux,baisse}; 0) \end{cases}$$

	Scénario Hausse	Scénario Baisse
$ME_{Après\ choc}$	1 645 786	1 809 294
$ME_{Central}$	1 772 729	1 772 729
CSR_{taux}	-126 943	36 565

TAB. 5.8 : Résultats avant et après choc du risque de taux

Le capital requis pour le risque des taux en appliquant un choc à la hausse, et à la baisse est donc :

$$CSR_{taux} = 36\,565\,MAD$$

CSR Immobilier :

Pour la SBR, le choc à appliquer à la valeur de marchés des actifs immobiliers n'a toujours pas été fixé. Par contre, pour la SII, le choc est fixé à 25%.

$$CSR_{Immobilier} = VM_{Immobilier} * t_{Immobilier}$$

$$CSR_{Immobilier} = 2\,539\,967\,MAD$$

CSR Marché :

Pour calculer le CSR relatif au risque de marché, la matrice de corrélation à utiliser est encore une fois la matrice d'identité. La valeur du capital requis lié au risque de marché est donc de :

$$CSR_{Marché} = \sqrt{CSR_{Actions}^2 + CSR_{Immobilier}^2 + CSR_{taux}^2}$$

$$CSR_{Marché} = 4\,499\,013\,MAD$$

5.4 Souscription Non Vie

5.4.1 CSR Souscription Non Vie

CSR Provisions :

Le risque de provisions représente le risque que peut entraîner une mauvaise évaluation des provisions techniques pour un assureur. La volatilité des réserves utilisée dans le calcul de l'exigence de capital de la formule standard doit représenter l'erreur de prédiction à un an.

Dans cette partie nous nous intéressons au modèle développé par Merz & Wüthrich en 2008 qui fournit une formule fermée permettant d'estimer le risque de réserve à un horizon un an.

Aspect théorique

Le risque de provisionnement à un an est un risque portant sur la ré-estimation de la provision de la charge à l'ultime de l'assureur entre deux années calendaires. Afin d'estimer ce risque, il faut s'intéresser alors à une nouvelle notion qui est le *CDR (Claims Development Result)* qui fait référence à la différence entre les estimations de charge à l'ultime faites entre l'année calendaire n et $n + 1$.

Le CDR réel est défini par :

$$CDR_i(n+1) = \mathbb{E}[C_{i,n}|D_n] - \mathbb{E}[C_{i,n}|D_{n+1}]$$

Le CDR réel n'est en réalité jamais *observé* dans les comptes de l'assureur. Pour connaître sa valeur, nous devrions connaître la charge à l'ultime. Nous savons seulement en donner une estimation. Dans ce sens, cette estimation appelée le CDR observable est définie :

$$C\hat{D}R_i(n+1) = \hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1}$$

Avec :

$\hat{C}_{i,n}^n$: estimation l'année n des paiements cumulés à l'ultime ;

$\hat{C}_{i,n}^{n+1}$: estimation l'année $n+1$ des paiements cumulés à l'ultime.

En 2008, Merz et Wüthrich publient un article permettant l'analyse de l'erreur de prédiction du CDR suivant deux points de vue :

- **Prospective** : pour l'année calendaire n , nous prédisons le CDR de l'année $(n, n+1]$. Le CDR prédit est 0, nous voulons connaître la distribution du CDR autour de cette valeur.
- **Rétrospective** : au temps $n+1$, nous avons observé le CDR de l'année $(n, n+1]$. Nous nous intéressons à connaître la qualité de la prédiction que nous avons fournie en n .

Nous illustrons ci-dessous l'information disponible D pour chacune des deux années n et $n+1$:

1. Pour une année n , nous disposons de l'information disponible en date n , c'est-à-dire :
 $D_n = C_{i,j} : i+j \leq n$.
2. Pour une année $n+1$, nous disposons de l'information disponible en date $n+1$ c'est-à-dire : $D_{n+1} = C_{i,j} : i+j \leq n+1$.

Merz et Wüthrich se placent sous les hypothèses du modèle de Mack. Ainsi, sous ces hypothèses, nous sommes capable de prédire les paiements à l'ultime notés connaissant l'information passée au temps n :

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|D_n) = C_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} f_j$$

et au temps $n+1$:

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|D_{n+1}) = C_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i}^{n-1} f_j$$

Les facteurs f_j ne sont pas connus, cependant Mack a démontré que les estimateurs fournis par Chain-Ladder sont sans biais et non corrélés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_j^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \\ \hat{f}_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons une estimation sans biais des montants de sinistres à l'ultime calculés en n et $n + 1$:

$$\begin{cases} \hat{C}_{i,n}^n = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i}^n \cdots \hat{f}_{n-1}^n \\ \hat{C}_{i,n}^{n+1} = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i+1}^{n+1} \cdots \hat{f}_{n-1}^{n+1} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse **(H2)**, nous remarquons que la variable aléatoire $\mathbb{E}(C_{i,n}|D_n)$ est une martingale, nous en déduisons immédiatement que le $CRD_i(n + 1)$ conditionnellement à D_n est centré, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}(CRD_i(n + 1)|D_n) = 0$$

En date $t = n$, la meilleure estimation du $CRD_i(n + 1)$ est 0. Cependant, il est important de connaître et mesurer de combien la réalisation du CDR à la fin de l'année calendaire aura dévié de 0 (**vision prospective**).

Dans notre étude, nous nous intéressons à la **vision prospective** de l'erreur. Cette vision est intéressante dans le cadre de la solvabilité dans la mesure où la compagnie d'assurance doit détenir un niveau de capital suffisant pour faire face aux fluctuations du CDR observable autour de 0. L'exigence de fonds propres doit permettre de couvrir les réalisations du CDR dans 99,5% des cas. Nous nous intéresserons donc principalement à cette erreur de prédiction dans le cadre de ce mémoire.

Nous définissons alors l'erreur de prédiction dans ce cadre pour chaque année de survenance i par :

$$\begin{aligned} MSEPC_{\hat{D}R_i(n+1)|D_n}(0) &= \mathbb{E} \left(\left(C\hat{D}R_i(n + 1) - 0 \right)^2 | D_n \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(C\hat{D}R_i(n + 1) \right)^2 | D_n \right) \end{aligned}$$

La méthode de M&W permet ainsi d'obtenir une estimation des deux premiers moments de $C\hat{D}R_i(n + 1)/D_n$:

- **La moyenne de la distribution de $C\hat{D}R_i(n + 1)/D_n$** est donnée par u_{biais} qui est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{biais}^2 &= \hat{\mathbb{E}}_{D_n} \left[\left(\mathbb{E} \left[\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n + 1)/D_n \right] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=2}^n \left(\hat{C}_{i,n}^n \right)^2 \hat{\Delta}_{i,n}^n + 2 \sum_{i>k>1} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n \hat{\Lambda}_{k,n}^n \end{aligned}$$

Où :

$$\hat{\Delta}_{i,n}^n = \frac{\left(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n / \hat{f}_{n-i+1}^n \right)^2}{S_{n-i+1}^n} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\left(\hat{\sigma}_j^n / \hat{f}_j^n \right)^2}{S_j^n}$$

Et :

$$\hat{\Lambda}_{k,n}^n = \frac{C_{k,n-k+1}}{S_{n-k+1}^n} \frac{\left(\hat{\sigma}_{n-k+1}^n / \hat{f}_{n-k+1}^n \right)^2}{S_{n-k+1}^n} + \sum_{j=n-k+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\left(\hat{\sigma}_j^n / \hat{f}_j^n \right)^2}{S_j^n}$$

Où S_j^n et S_j^{n+1} sont définis respectivement par :

$$\begin{cases} S_j^n = \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \\ S_j^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1-j} C_{i,j} \end{cases}$$

- La variance de la distribution de $C\hat{D}R_i(n+1)/D_n$ est donnée par :

$$\hat{V}ar \left(\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n+1)/D_n \right) = \sum_{i=2}^n \left(\hat{C}_{i,n}^n \right)^2 \hat{\Gamma}_{i,n}^n + 2 \sum_{i>k>1} \hat{\gamma}_{i,n}^n$$

Où :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{i,n}^n &= Var(CDR(n+1)/D_n) \\ &= \left[\left(\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n / \hat{f}_{n-i+1}^n)^2}{C_{i,n-i+1}^n} \right] * \prod_{l=n-i+2}^{n-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^n / \hat{f}_l^n)^2}{S_l^n} \right) \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{i,n}^n &= Cov(C\hat{D}R_i(n+1), C\hat{D}R_k(n+1)/D_n) \\ &= \hat{C}_{i,J}^n \hat{C}_{k,J}^n * \left[\left(\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n / \hat{f}_{n-i+1}^n)^2}{C_{i,n-i+1}^n} \right] * \prod_{l=n-i+2}^{n-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^n / \hat{f}_l^n)^2}{S_l^n} \right) \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons à partir de l'estimation de ces premiers moments, l'erreur de prédiction du CDR par 0 pour toutes années de survénances :

$$\begin{aligned} M\hat{S}EP_{\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i^2(n+1)/D_n \right) \right] \\ &= u_{biais}^2 + \hat{V}ar \left(\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n+1)/D_n \right) \end{aligned}$$

Ainsi pour chaque année de survénance i , nous donnons la formule fermée de l'erreur de prédiction dans le modèle de M&W :

$$M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) = \left(\hat{C}_{i,n}^n \right)^2 \left(\hat{\Delta}_{i,n}^n + \hat{\Gamma}_{i,n}^n \right)$$

Afin d'obtenir une approximation de la formule fermée de M&W, il est indispensable d'introduire une nouvelle hypothèse aux hypothèses déjà présentées au début de cette partie :

$$\frac{(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n / \hat{f}_{n-i+1}^n)^2}{C_{i,n-i+1}^n} \ll 1$$

Puisque les termes $\frac{(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n/\hat{f}_{n-i+1}^n)^2}{C_{i,n-i+1}^n}$ sont considérés comme des constantes positives, nous obtenons une approximation pour la quantité $\hat{\Gamma}_{i,n}^n$:

$$\hat{\Gamma}_{i,n}^n \approx \frac{\left(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n/\hat{f}_{n-i+1}^n\right)^2}{C_{i,n-i+1}^n} + \sum_{l=n-i+2}^{n-1} \frac{\left(\hat{\sigma}_l^n/\hat{f}_l^n\right)^2}{C_{l-i+1,j}} \left(\frac{C_{n-l+1,l}}{S_l^{n+1}}\right)^2$$

Nous obtenons alors la formule approximée suivante :

$$M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) = \left(\hat{C}_{i,n}^n\right)^2 \left(\hat{\Delta}_{i,n}^n + \hat{\Gamma}_{i,n}^n\right)$$

Finalement, pour toutes années de survenance agrégées, nous obtenons :

$$M\hat{S}EP_{\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) = \sum_{i=2}^n M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) + 2 \sum_{k>i>1} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n \left[\hat{\Delta}_{i,n}^n + \hat{\phi}_{i,n}^n\right]$$

Où :

$$\hat{\phi}_{i,n}^n = \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}}\right)^2 \frac{\left(\hat{\sigma}_j^n/\hat{f}_j^n\right)^2}{C_{n-j+1,j}} + \frac{\left(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n/\hat{f}_{n-i+1}^n\right)^2}{S_{i,n-i+1}^{n+1}}$$

Et :

$$\hat{\Delta}_{i,n}^n = \frac{C_{k,n-k+1}}{S_{n-k+1}^{n+1}} \frac{\left(\hat{\sigma}_{n-k+1}^n/\hat{f}_{n-k+1}^n\right)^2}{S_{n-k+1}^{n+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}}\right)^2 \frac{\left(\hat{\sigma}_j^n/\hat{f}_j^n\right)^2}{C_{n-j+1,j}}$$

En simplifiant, nous obtenons l'approximation de la formule fermée de M&W :

$$M\hat{S}EP_{\sum_{i=2}^n C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) = \sum_{i=2}^n M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(n+1)/D_n}(0) + 2 \sum_{k>i>1} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n \left[\frac{\left(\hat{\sigma}_{n-i+1}^n/\hat{f}_{n-i+1}^n\right)^2}{S_{n-i+1}^{n+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}} \frac{\left(\hat{\sigma}_j^n/\hat{f}_j^n\right)^2}{C_{n-j+1,j}} \right]$$

Aspect pratique :

Nous appliquons ce modèle sur les données de la branche « Véhicules à usage de tourisme – Corporel ». Les hypothèses de M&W sont les mêmes que celle de Mack. Les hypothèses sont ainsi vérifiées (Voir ANNEXE).

Nous vérifions tout de même l'hypothèse d'approximation. Pour tout $j \in [0, \dots, 8]$, nous calculons les rapports $\frac{(\hat{\sigma}_j^n/\hat{f}_j^n)^2}{C_{n-j,j}^n}$, les résultats se présentent comme ce qui suit :

	0	1	2	3	4
f_j	4.587	2.378	1.662	1.310	1.158
σ_j^2	430 352	295 365	236 621	88 187	39 200
$(\sigma_j/f_j)^2/C_{n-j,j}$	$1.28 * 10^{-2}$	$8.54 * 10^{-3}$	$6.30 * 10^{-3}$	$3.10 * 10^{-3}$	$1.47 * 10^{-3}$
	5	6	7	8	9
f_j	1.092	1.049	1.030	1.021	
σ_j^2	5 013	677	62	6	
$(\sigma_j/f_j)^2/C_{n-j,j}$	$1.82 * 10^{-4}$	$2.55 * 10^{-5}$	$2.34 * 10^{-6}$	$2.06 * 10^{-7}$	

TAB. 5.9 : Détail des valeurs des rapports de l'hypothèse d'approximation

Nous remarquons que tous les rapports calculés sont largement inférieurs à 1, **nous validons** ainsi l'hypothèse permettant l'approximation.

La racine de l'erreur commise à 1 an (M&W approché et exacte) et à l'ultime (Mack) sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Année	SEP Mack (Ultime)	M&W 1 an	
		SEP Approchée	SEP Exacte
2010	0	0	0
2011	17 281	17 281	28 288
2012	51 865	49 723	49 723
2013	163 407	155 902	155 902
2014	453 514	423 550	423 551
2015	1 256 029	1 173 765	1 173 770
2016	2 261 448	1 852 633	1 852 673
2017	4 520 910	3 647 627	3 647 817
2018	6 482 575	4 539 348	4 539 948
2019	9 759 116	6 688 066	6 689 536
TOTAL	14 601 053	10 681 319	10 682 759

TAB. 5.10 : Récapitulation des résultats de Merz et Wütrich

L'erreur commise à un an dans les deux cas approchée et exacte peut être considérée comme légèrement inférieure à celle réalisée à l'ultime. Nous pouvons même constater que la différence entre SEP approchée et SEP exacte est assez négligeable. Nous adoptons désormais SEP approchée dans le reste de nos calculs.

Ainsi, l'application du résultat exact de M&W obtenue ci-dessus nous permet de déterminer l'indicateur de la volatilité des sinistres à un an dans le cadre de nos données :

$$\begin{aligned} \sigma_{provisions} &= \frac{\sqrt{M\hat{S}EP_{\sum_{i=2}^n C\hat{R}D_{i(n+1)/D_n}(0)}}}{RES} \\ &= 0.072146 \\ \sigma_{provisions} &\simeq 7.21\% \end{aligned}$$

Notons que : $RES = \sum_{i=0}^n (\hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i})$

Ainsi, nous pouvons maintenant appliquer le choc afin de calculer le $CSR_{Provisions}$:

$$\begin{aligned} CSR_{Provisions} &= 3\sigma_{provisions} V_{provisions} \\ &= 3\sigma_{provisions} ME_{Sinistres} \\ &= 3 * 7.21\% * 121\ 328\ 272 \\ CSR_{Provisions} &= 26\ 260\ 048\ MAD \end{aligned}$$

CSR Primes :

Le risque de prime représente le risque de sous-tarification, c'est à dire le risque que les engagements pris envers les assurés aient été sous-évalués lors de la tarification des différents produits. A posteriori, cela induirait que la prime demandée aux assurés sera inférieure à la somme des prestations futures que l'assureur devra leur payer à la suite des éventuels sinistres futurs.

Afin de calculer le CSR relatif à ce risque, il est indispensable d'estimer les écarts type liés au risque de prime, et pour cela nous disposons de plusieurs méthodes (**méthode Log-Normale, Log-Normale simplifiée, méthode des moindres carrés, méthode « Swiss Solvency Test »...**). Nous détaillerons dans ce qui suit la méthode **Log-Normale simplifiée**.

Aspect théorique

Notations et définitions :

- T : Nombre d'année d'historique ($5 \leq T \leq 20$);
- t : Indexation des années de survenance telles que $t = 1, \dots, T$;
- X_t : Primes acquises par l'exposition par année de survenance t ;
- Y_t : Charge de sinistralité après la première année de développement par année de survenance t ;
- β : Loss ratio attendu (S/P);
- σ^2 : Constante de proportionnalité de la variance de la charge de sinistralité.

La distribution de Y_t est définie par la dynamique suivante :

$$Y_t \sim \beta X_t + \sigma \sqrt{X_t} \epsilon_t$$

À partir de cette distribution, nous déduisons l'espérance et la variance de Y_t :

$$\mathbb{E}(Y_t) = \beta X_t \text{ et } Var(Y_t) = \sigma^2 X_t$$

Hypothèses :

- La charge de sinistralité est proportionnelle au montant de primes acquises : $\mathbb{E}(Y_t) = \beta X_t$;
- Le loss ratio attendu est constant : β constant;

- La variance de Y_t est proportionnelle à la prime reçue : $Var(Y_t) = \sigma^2 X_t$;
- La distribution de Y_t suit une loi Log-Normale de moyenne μ_t et de variance w_t^2 : $Y_t \sim LN(\mu_t, w_t^2)$;
- La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.

Expression de l'espérance et la variance de la distribution de Y_t :

L'espérance et la variance des variables aléatoires Y_t sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Y_t) = \exp\{\mu_t + 0.5w_t^2\} \\ Var(Y_t) = (\exp(w_t^2) - 1) \exp(2\mu_t + w_t^2) = (\exp(w_t^2) - 1) (\beta X_t)^2 = \sigma^2 X_t \end{cases}$$

Il est alors possible d'isoler les paramètres μ_t et w_t^2 de la loi de Y_t :

$$\begin{cases} \mu_t = \ln(\beta X_t) - 0.5w_t^2 \\ w_t^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\beta^2 X_t}\right) \end{cases}$$

Fonction du critère d'estimation :

La fonction de vraisemblance est donnée par (avec f la fonction de densité de la loi Log-Normale) :

$$\begin{aligned} L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \beta) &= \prod_{t=1}^T f(y_t, \sigma, \beta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_t w_t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2w_t^2}\right\} \end{aligned}$$

La fonction de log-vraisemblance est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \ln(L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \beta)) &= \ln\left(\prod_{t=1}^T \frac{1}{y_t w_t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2w_t^2}\right\}\right) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(-\ln(y_t \sqrt{2\pi}) - \ln(w_t) - \frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2w_t^2}\right) \end{aligned}$$

Les paramètres σ et β sont donc calculés en maximisant la fonction de log-vraisemblance ci-dessous (les parties de l'équation ne dépendant pas de σ et β peuvent être supprimées) :

$$\ln(L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \beta)) = \sum_{t=1}^T \left(-\ln(w_t) - \frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2w_t^2}\right)$$

Volatilité de l'erreur de tarification :

La volatilité de l'erreur de tarification est calculée par :

$$\sigma_{prime} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{V_{prime}}}$$

Aspect pratique

Cette méthode suppose que les charges suivent une distribution log-normale. En utilisant le test de Shapiro-Wilk, nous obtenons le résultat R suivant :

```
Shapiro-Wilk normality test

data:  log(table$Charge.ultime)
W = 0.86051, p-value = 0.153
```

Listing 8 : Test de normalité du log des charges ultimes

Nous remarquons clairement que la $p - value$ est supérieure à 5%, ce qui nous pousse à accepter l'hypothèse de la normalité.

Nous passerons ensuite au calcul des paramètres σ et β de la fonction de vraisemblance après son optimisation, ce qui donne :

```
Call:
mle2(minuslogl = écart, start = list(beta = beta1, sigma = sigma1),
      method = "Nelder-Mead", control = list(maxit = 5000,
      trace = TRUE))

Coefficients:
      beta      sigma
0.3545558 614.0058320
```

```
Log-likelihood: 12.16
```

Listing 9 : Estimation des paramètres σ et β

Cela nous permet d'estimer enfin la volatilité du risque de prime qui est de :

$$\sigma_{primes} = 6.34\%$$

Ainsi, nous pouvons maintenant appliquer le choc afin de calculer le CSR_{Primes} :

$$\begin{aligned} CSR_{Primes} &= 3\sigma_{Primes}V_{Primes} \\ &= 3 * 6.34\% * 93\,693\,021,44 \\ CSR_{Primes} &= 17\,820\,413\,MAD \end{aligned}$$

CSR Non Vie :

Le CSR relatif au risque de souscription non-vie se calcule selon la formule suivante :

$$CSR_{NonVie} = \sqrt{\sum_{r,z} Corr_{r,z} CSR_r CSR_z} \quad \text{Avec : } r, z \in \{Primes, Provisions, Catastrophe\}$$

Nous supposons que $CSR_{Catastrophe_{NonVie}} = 0$ et que la matrice de corrélation entre les risques est la suivante :

Coeff. de corrélation	Primes	Provisions	Catastrophe
Primes	1	0.5	0.25
Provisions	0.5	1	0.25
Catastrophe	0.25	0.25	1

TAB. 5.11 : Matrice de corrélation des risques de souscription non vie

Finalement, nous trouvons :

$$CSR_{NonVie} = \sqrt{CSR_{Primes}^2 + 2 * 0.5 * CSR_{Primes} * CSR_{Provisions} + CSR_{Provisions}^2}$$

$$CSR_{NonVie} = 38\ 407\ 319\ MAD$$

5.4.2 Marge de risque Non Vie

La relation de calcul de la marge de risque pour la souscription non vie est la même que celle du cas de la souscription vie tout en se basant cette fois-ci sur le capital de solvabilité requis non vie. Après projections du CSR_{NonVie} , nous trouvons :

$$MR_{NonVie} = 15\ 375\ 208\ MAD$$

5.5 CSR

CSR de base (BCSR) :

Tout ce qui précède nous amène au calcul du CSR de base dont la relation principale est la suivante :

$$BCSR = \sqrt{\sum_{r,z} Corr_{r,z} CSR_r CSR_z}$$

Avec : $r, z \in \{Marché, Vie, Non Vie, Concentration, Contrepartie\}$

Nous supposons que $CSR_{Concentration} = CSR_{Contrepartie} = 0$ et que la matrice de corrélation entre les risques est :

Coeff. de corrélation	Marché	Concentration	Contrepartie	Vie	Non Vie
Marché	1	0	0.25	0.25	0.25
Concentration	0	1	0	0	0
Contrepartie	0.25	0	1	0.25	0.5
Vie	0.25	0	0.25	1	0
Non Vie	0.25	0	0.5	0	1

TAB. 5.12 : Matrice de corrélation des risques du CSR de base

Par conséquent, la valeur du CSR de base s'élève à :

$$BCSR = \sqrt{CSR_{Marché}^2 + CSR_{Vie}^2 + CSR_{NonVie}^2 + 2 * 0.25 * CSR_{Marché} (CSR_{Vie} + CSR_{NonVie})}$$

$$BCSR = 39\ 780\ 699\ MAD$$

CSR opérationnel :

Selon la SBR, l'exigence de capital relative au risque opérationnel correspond à 30% du capital de solvabilité requis de base.

$$CSR_{op} = 30\% * BSCR$$

$$CSR_{op} = 11\ 934\ 210\ MAD$$

CSR :

La sommation de ces deux montants nous fournit la valeur finale du CSR que la compagnie d'assurance devrait faire preuve de respecter :

$$CSR = BSCR + CSR_{op}$$

$$= 39\ 780\ 698,88 + 11\ 934\ 209,66$$

$$CSR = 51\ 714\ 909\ MAD$$

En suivant la méthode standard , nous retrouvons une valeur du CSR égale à 51 741 909 DHS . Ceci signifie que la compagnie devrait viser à avoir des fonds propres de ce montant pour pouvoir honorer ses engagements dans l'année à venir sans risque de ruine avec une probabilité de 99,5%.

Conclusion générale

L'Autorité de Contrôle du secteur des assurances et de la prévoyance sociale (ACAPS) vise à travers la nouvelle réforme SBR à imposer des exigences qui tiennent compte de la nature, de la taille et de la complexité du secteur des assurances, ce cadre réglementaire est un atout considérable pour le secteur d'assurance au Maroc de par son ambition qui incitera les entreprises d'assurance à améliorer leurs connaissances en matière de gestion de risque et ses directives qui permettront d'améliorer leur productivité et leur compétitivité.

Il fut donc important de tester l'impact de la nouvelle réforme sur les compagnies d'assurance. Nous avons focalisé notre étude sur son premier pilier qui expose les exigences quantitatives qui doivent être mises en vigueur. L'étude réalisée ici s'est fixé comme objectif l'évaluation de ces exigences pour un produit d'assurance vie et une garantie d'assurance non vie. Nous avons adopté une démarche méthodique en passant par des étapes clés.

En premier lieu, nous avons procédé à la construction de la courbe des taux réglementaire qui servira à l'actualisation des flux futurs dans le cadre de l'évaluation des engagements. Nous avons ainsi pu construire la courbe empirique et avons enrichi notre étude par une modélisation théorique de notre taux d'actualisation qui nous servira à évaluer le risque de taux un peu plus tard.

En second lieu, nous avons valorisé les engagements pour un produit d'assurance vie : *Décès Emprunteur*, et en non vie, nous avons opté pour la branche *Véhicules à usage de tourisme – Corporel*. L'étude de ces produits exige l'évaluation des meilleures estimations en faisant appel aux méthodes de provisionnement pour la branche non vie et en se basant sur nos connaissances techniques et actuarielles cultivées grâce au cours d'Assurance Vie.

Effectivement, pour le calcul de la meilleure estimation non vie, nous avons exposé en détail cinq méthodes de provisionnement de sinistres et les différentes options qui peuvent être utilisées avec une approche à la fois déterministe et stochastique. La méthode Chain Ladder, bien que simple et classique, a été mise en avant suite à notre analyse. Ensuite, en ce qui concerne le produit Décès Emprunteur, nous avons projeté les flux du passif pour enfin calculer les provisions techniques prudentielles et avons pu testé la sensibilité de la meilleure estimation des engagements aux phénomènes du remboursement anticipé et de la résiliation.

Enfin, nous nous sommes servis de ces résultats pour pouvoir déterminer le capital de solvabilité requis, ainsi que la marge de risque. Il est irréfutable que la circulaire émise est l'un des projets les plus ambitieux de l'ACAPS. Néanmoins, cette dernière présente toujours quelques lacunes, notamment par rapport aux taux de choc à appliquer, ce qui nous a poussé à les estimer selon des modélisations stochastiques pour certains à adopter les taux appliqués par la Solvabilité II. Ce travail peut donc être le point de départ d'une évaluation plus scrupuleuse des exigences quantitatives sous la SBR en attendant l'aboutissement de l'étude d'impacts quantitatives 2 (EIQ2).

Bibliographie

- Solvabilité basée sur les risques (SBR) : Spécifications techniques de la seconde étude d'impacts quantitative (EIQ2), ACAPS, *Version 01/10/2020*
- Étude comparative de la nouvelle norme marocaine Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) et la norme Solvabilité II, AYOLA Komi Maza-Balo T, *Octobre 2020*
- IFRS 17: Enjeux et application à un contrat décès emprunteur, Salma KADIM & Abdoulaye KONE, *Septembre 2020*
- Évaluation de l'incertitude dans le provisionnement d'une société d'assurance non-vie monobranche, Christine BUI, *2016*

Webographie

- <https://www.actuarialab.net/>
- <http://www.ressources-actuarielles.net/>
- <https://www.institutdesactuaire.com/>
- <http://www.bkam.ma/>

Cours

- F. Marri, ASSURANCE VIE, INSEA, *2020*

Annexes

Annexe A

Courbes ZC

Maturité	Taux ZC Marché	Taux ZC Vašíček	Taux ZC CIR
1	2.32%	2.33%	2.31%
2	2.37%	2.40%	2.37%
3	2.37%	2.47%	2.42%
4	2.38%	2.54%	2.48%
5	2.40%	2.61%	2.53%
6	2.44%	2.67%	2.59%
7	2.50%	2.74%	2.65%
8	2.56%	2.80%	2.70%
9	2.66%	2.87%	2.76%
10	2.72%	2.93%	2.82%
11	2.76%	2.99%	2.88%
12	2.83%	3.05%	2.94%
13	2.91%	3.11%	3.00%
14	2.99%	3.17%	3.07%
15	3.07%	3.23%	3.13%
16	3.16%	3.28%	3.20%
17	3.24%	3.34%	3.26%
18	3.30%	3.39%	3.33%
19	3.38%	3.45%	3.39%
20	3.45%	3.50%	3.46%
21	3.54%	3.56%	3.53%
22	3.63%	3.61%	3.60%
23	3.72%	3.66%	3.67%
24	3.82%	3.71%	3.75%
25	3.92%	3.76%	3.82%
26	4.03%	3.81%	3.89%
27	4.14%	3.86%	3.97%
28	4.25%	3.91%	4.04%
29	4.37%	3.95%	4.12%
30	4.50%	4.00%	4.20%

TAB. A.1 : Détail de l'estimation de la courbe zéro-coupon

Annexe B

Hypothèses de Chain-Ladder

(H1) : Pour vérifier l'hypothèse (H1), nous allons comparer f_{ij} à $\bar{f}_{.j}$. Nous obtenons ainsi les figures suivantes :

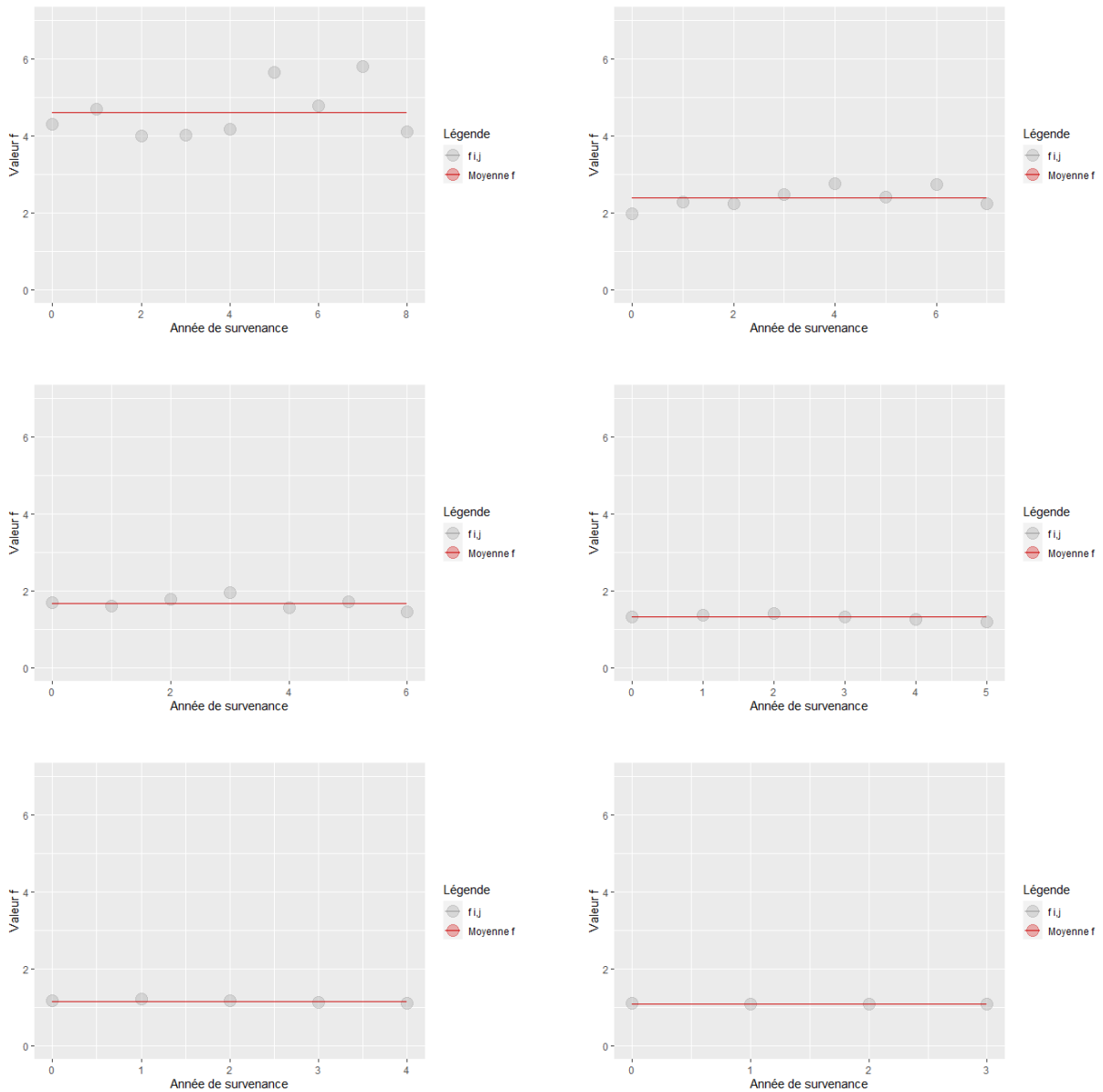


FIG. B.2 : Vérification de l'hypothèse (H1) de Chain-Ladder

Annexe B. Hypothèses de Chain-Ladder

D'après ces figures, nous constatons que les f_{ij} à $\bar{f}_{.j}$ ne sont pas complètement confondus surtout pour $j = 0$, cependant l'écart entre l'évolution des deux par année de développement est assez négligeable. Nous pouvons conclure la stabilité des facteurs de développement et par conséquent l'hypothèse **(H1)** de Chain Ladder est vérifiée.

(H2) : Cette hypothèse porte sur la linéarité entre les paiements cumulés. Il s'agit donc de vérifier si les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine. Pour cela, nous avons tracé les figures suivantes :

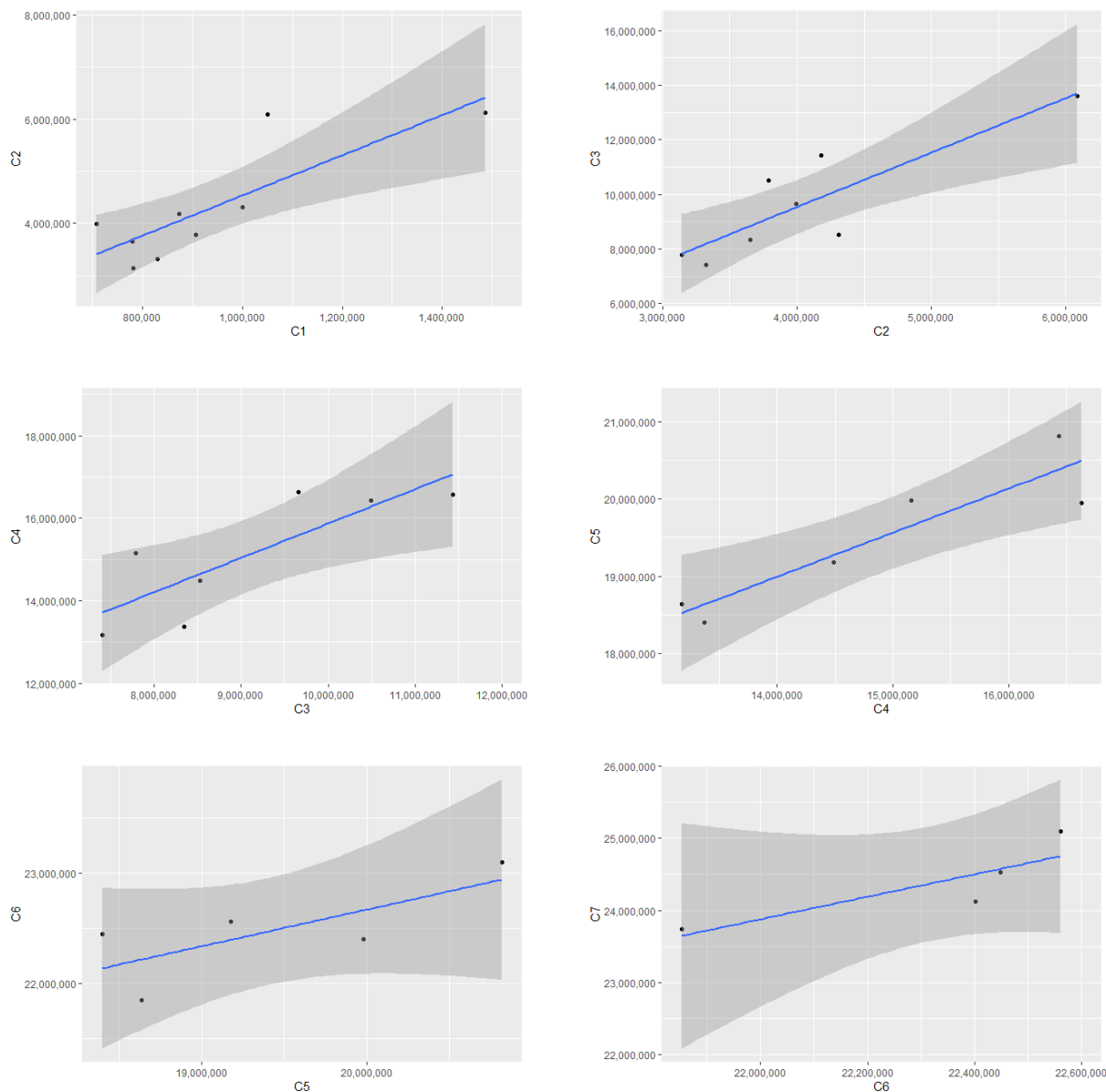


FIG. B.4 : Vérification de l'hypothèse (H2) de Chain-Ladder

À partir de ces graphes, nous constatons que les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont presque alignés sur une même droite et c'est seulement pour les premières années de développement que certains points se détachent de la droite de régression. De ce qui précède, nous concluons que l'hypothèse H2 de Chain Ladder est presque vérifiée.

Annexe C

Hypothèses de Mack

(H1) : Pour vérifier l'hypothèse d'indépendance des paiements cumulés (H1), nous allons utiliser un test d'indépendance en comparant les facteurs de développement individuels à la médiane par année de survenance.

La première étape consiste à déterminer les facteurs de développement individuels :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2010	4.309	1.979	1.699	1.324	1.176	1.112	1.045	1.029	1.021
2011	4.691	2.285	1.602	1.376	1.220	1.092	1.048	1.031	
2012	4.007	2.228	1.779	1.415	1.173	1.086	1.055		
2013	4.024	2.478	1.946	1.318	1.121	1.077			
2014	4.179	2.768	1.566	1.267	1.109				
2015	5.642	2.418	1.722	1.199					
2016	4.787	2.735	1.449						
2017	5.792	2.233							
2018	4.115								

TAB. C.1 : Triangle des facteurs de développement individuels

Nous remplaçons dans l'étape suivante par 1 tous les facteurs de développement individuels supérieurs ou égaux à la médiane et par 0 sinon. Nous obtenons donc le triangle suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2010	1	0	1	1	1	1	0	0	1
2011	1	0	0	1	1	1	1	1	
2012	0	0	1	1	1	0	1		
2013	0	1	1	0	0	0			
2014	0	1	0	0	0				
2015	1	1	1	0					
2016	1	1	0						
2017	1	0							
2018	0								

TAB. C.2 : Triangle des valeurs affectées aux facteurs de développement individuels

Pour chaque année de développement j , nous considérons les variables suivantes :

- β_j : Nombre d occurrence de 0 pour l'année j ;
- γ_j : Nombre d occurrence de 1 pour l'année j ;
- θ_j : Le minimum entre β_j et γ_j ;

D'après Mack, θ_j suit asymptotiquement une loi binomiale de paramètres $B(n_j = \beta_j + \gamma_j, p = \frac{1}{2})$. Nous notons : $m_j = \frac{n_j - 1}{2}$.

L'espérance et la variance de cette variable s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[\theta_j] = \frac{n_j}{2} - \left(\frac{(n_j - 1)!}{m_j!(n_j - 1 - m_j)!} \right) * \frac{n_j}{2^{n_j}} \\ \text{Var}[\theta_j] = \frac{n_j(n_j - 1)}{4} - \left(\frac{(n_j - 1)!}{m_j!(n_j - 1 - m_j)!} \right) * \frac{n_j(n_j - 1)}{2^{n_j}} + \mathbb{E}[\theta_j] + \mathbb{E}[\theta_j]^2 \end{array} \right.$$

La statistique de test est donc défini par :

$$t = \frac{\sum_j \theta_j - \mathbb{E}[\sum_j \theta_j]}{\sqrt{\text{Var}[\sum_j \theta_j]}}$$

Sous l'hypothèse **(H0)**, nous donnons : $\mathbb{E}[\sum_j \theta_j] = \sum_j \mathbb{E}[\theta_j]$ et $\text{Var}[\sum_j \theta_j] = \sum_j \text{Var}[\theta_j]$.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

j	β_j	γ_j	θ_j	n_j	m_j	$E(\theta_j)$	$\text{Var}(\theta_j)$
0	4	5	4	9	4	3.27	22.12
1	4	4	4	8	3.5	2.84	16.73
2	3	4	3	7	3	2.41	12.13
3	3	3	3	6	2.5	1.98	8.31
4	2	3	2	5	2	1.56	5.25
5	2	2	2	4	1.5	1.15	2.93
6	1	2	1	3	1	0.75	1.31
7	1	1	1	2	0.5	0.36	0.36

TAB. C.3 : Résultats du test d'indépendance

La statistique calculée est donc

$$t = \frac{(20 - 14.32)}{\sqrt{69.15}} = 0.68 < 1,96$$

Nous acceptons ainsi l'hypothèse d'indépendance (H0).

(H2) : Cette hypothèse est la même que celle validée précédemment dans le cas de Chain Ladder. Elle suppose la linéarité des règlements cumulés par année de survenance.

(H3) : Elle s'interprète graphiquement par le fait que pour une année de déroulement j données la représentation des points $(C_{i,j}; D_{i,j})$ doit être non structurée.

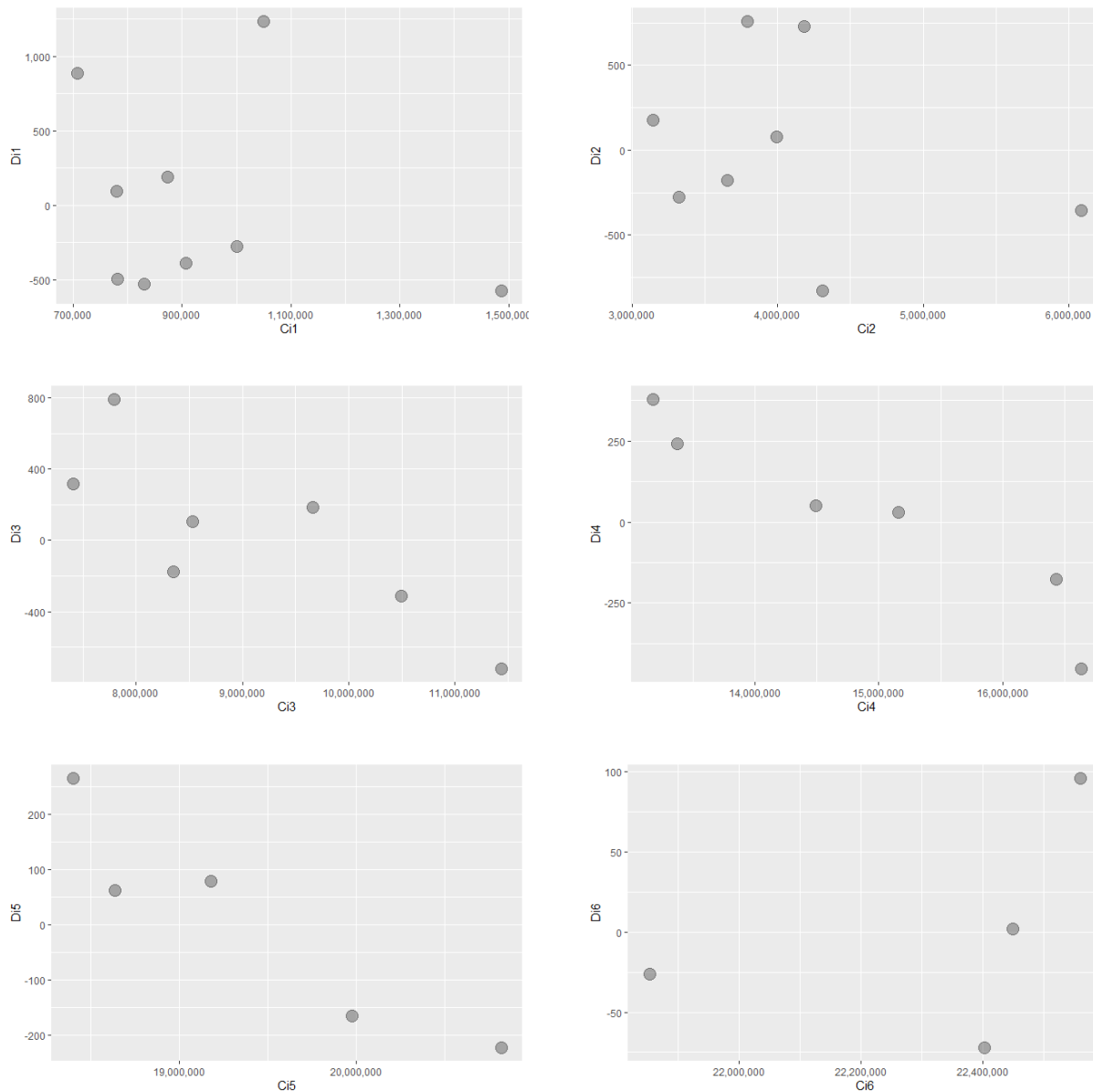


FIG. C.2 : Vérification de l'hypothèse (H3) de Mack

Des graphes ci-dessus, nous constatons qu'aucune tendance n'est observée et ce pour toutes les années de développement. L'hypothèse est clairement vérifiée.

