

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Allocation stratégique des fonds de réserve
de la Caisse Marocaine de Retraite

Préparé par : *M.Said OUTLIOUA*

Sous la direction de : *Mme. Fatima BAKASS (INSEA)*
M. Jad OUALALOU (CMR)
Mlle. Hajar GADIH (CMR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

Mme. Fatima BAKASS (INSEA)
M. Abdellatif MECHRAFI (INSEA)
M. Jad OUALALOU (CMR)

Juin 2014

Résumé

La CMR est une caisse de retraite qui fonctionne par un régime en répartition. En termes plus concis, les cotisants actuels paient les retraités actuels. Cette opération peut générer des fonds, appelés fonds de réserve, dans le cas où les cotisations dépassent les prestations. La présente étude se focalise sur l'étude des modèles d'allocation d'actifs ainsi que leur application dans le cadre de la gestion des fonds de réserve de la CMR. D'autre part, ce sujet fait encore l'actualité dans le monde académique de recherche.

Cette étude s'intéresse à la recherche d'un portefeuille optimal moyennant trois modèles d'allocation d'actifs, à savoir la LDI, Leibowitz et Kim/Santomero. Chaque modèle adopte une philosophie d'analyse différente mais le but est essentiellement le même : trouver la composition optimale d'un portefeuille permettant de générer la meilleure performance possible sous un niveau de risque donné. Pour cette raison, nous avons eu recours à des données non réelles représentant l'actif, le passif et les fonds de réserve de la CMR et ce pour des raisons de confidentialité des données réelles surtout qu'il s'agit des données projetées dans le futur.

Le premier résultat auquel nous avons abouti est que pour le cas de la CMR, l'utilisation du modèle de Leibowitz sera plus intéressante que le modèle de LDI. En effet, les deux modèles ont pratiquement le même niveau de risque (2,4%) mais Leibowitz présente un niveau de rentabilité plus élevé (5,5% contre 5% pour LDI). Cependant, ce dernier modèle présente l'inconvénient de ne pouvoir être investi que sur deux classes d'actifs (les obligations et les actions), représentant ainsi un grand inconvénient dans le cas où les deux autres classes d'actifs, le non coté et l'immobilier deviennent plus rentables. Le troisième modèle, Kim et Santomero, se distingue des deux autres modèles par son rendement élevé (8,3%) accompagné, en contrepartie, d'un niveau de risque (volatilité) élevé avoisinant 7,6%. Or, la composition optimale du portefeuille résultant par le modèle Kim et Santomero ne respecte pas les contraintes réglementaires imposées par la loi à la CMR. Après, l'introduction de ces contraintes dans notre modèle, nous aboutissons à un rendement annuel de 6,8% pour une volatilité de 4,6%. Dans ce sens, ce modèle serait plus avantageux pour la CMR si les contraintes réglementaires qui lui sont imposées étaient plus allégées.

MOTS-CLES :

CMR, Allocation d'actifs, Régime de retraite, Répartition, Réserves, Liability Driven Investment, Leibowitz, Kim et Santomero.

Remerciements

Qu'il me soit permis, au terme de ce travail, d'exprimer ma profonde gratitude et vifs remerciements envers toutes les personnes dont l'intervention au cours de ce projet a favorisé son aboutissement.

Ainsi, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à la Professeure **Fatima BAKASS** pour avoir accepté d'assurer l'encadrement de ce projet de fin d'étude. Ses critiques et éclaircissements durant la période de travail, ainsi que ses orientations et ses précieux conseils m'ont permis de réaliser cette étude dans de très bonnes conditions. Je n'oublie pas également de la remercier, encore une fois, pour sa disponibilité et ses efforts inconditionnels, notamment lors des dernières étapes de la rédaction du rapport.

Mes vifs remerciements s'adressent également à M. **Mohammed Jabir KHAMLICHI**, le Chef de Pôle Gestion du Portefeuille de la CMR, pour sa disponibilité, ses pertinentes questions permettant de revoir les points non maîtrisés lors de l'étude des modèles d'allocation d'actifs ainsi que pour les multiples réunions qu'il organise à chaque fois pour s'assurer du bon déroulement de stage. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

J'adresse également mes chaleureux remerciements à mes encadrants M. **Jad OUALALOU** et Mlle **Hajar GADIH**. Qu'ils trouvent ici le témoignage de mon estime et de ma profonde reconnaissance pour leur disponibilité, leurs conseils et leurs orientations qu'ils ont su me prodiguer afin de m'accompagner et me soutenir tout au long de mon stage.

Je saisis également cette occasion pour exprimer ma gratitude et estime aux corps professoral et administratif de l'INSEA. Qu'ils trouvent ici le témoignage de mon respect le plus profond.

Table des matières

Résumé.....	3
Remerciements.....	4
Liste des abréviations.....	8
Liste des tableaux.....	9
Liste des figures	10
Introduction générale	11
Chapitre1 : Cadre général de l'étude.....	13
1. Système des Retraites	13
1.1. Bref aperçu historique	13
1.2. Classification des régimes de retraites	13
1.2.1 Classification selon le mode de gestion.....	13
1.2.2 Classification selon le mode de financement.....	14
1.3. Systèmes de retraite contemporains	14
2. Aperçu sur les principaux modèles d'allocation d'actifs.....	15
3. Situation du système des retraites au Maroc.....	16
4. Présentation de la Caisse Marocaine des Retraites	20
4.1. Introduction à la CMR	20
4.2. Situation Actuelle de la CMR	20
4.3. Situation des fonds de réserves	22
5. Question de recherche.....	23
Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude.....	24
1. Objectif de l'étude.....	24
2. Présentation des données	24
2.1. Analyse de l'actif	25
2.2. Analyse du passif	27
2.3. Analyse des fonds de réserves.....	28
2.4. Gestion Actif-Passif (ALM).....	29
3. Présentation des différentes classes d'actifs	30
3.1. Classe des obligations	31

3.2.	Classe des actions.....	31
3.3.	Classe non cotée	32
3.4.	Classe immobilière.....	32
4.	Modèles théoriques d'allocation d'actifs	33
4.1.	Récapitulatif des modèles d'allocation	33
4.2.	Modèle de Markowitz (1952).....	35
4.3.	Liability Driven Investment	36
4.4.	Modèle de Leibowitz (1992).....	37
4.5.	Modèle de Kim et Santomero (1988).....	38
5.	Méthodologie de l'étude	38
6.	Préparation et traitement des outils de l'étude.....	39
6.1.	Introduction	39
6.2.	Préparation de la courbe des taux.....	40
6.3.	Modélisation des classes d'actifs	41
6.3.1.	Analyse du marché boursier.....	41
6.3.2.	Analyse du marché obligataire.....	44
6.3.3.	L'immobilier et non coté	49
	Chapitre 3 : Liability Driven Investment	51
1.	Présentation du modèle	51
1.1.	Première étape : Définition de la structure du portefeuille LHP.....	52
1.1.1.	Détermination de la sensibilité du passif	52
1.1.2.	Détermination de la sensibilité de l'actif	52
1.1.3.	Choix d'une mesure d'adossement entre l'actif et le passif	53
1.1.4.	Formulation du problème.....	54
1.2.	Deuxième étape : Définition de la structure du portefeuille PSP.....	54
1.2.1.	Détermination des inputs du modèle :	55
1.2.2.	Détermination des paramètres clés du modèle :	55
1.2.3.	Formulation du problème d'optimisation	55
2.	Implémentation du modèle aux données de la CMR.....	55
3.	Résultats et analyses	59
	Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz	64

1.	Présentation du modèle	64
1.1.	Modélisation des contraintes	64
1.2.	Détermination du portefeuille optimal vérifiant les deux contraintes :.....	66
1.3.	Limites du modèle	67
2.	Implémentation du modèle aux données de la CMR.....	67
2.1.	Choix du logiciel	67
2.2.	Données de base	68
2.3.	Tracé des deux contraintes	69
3.	Résultats et analyses	72
	Chapitre 5 : Modèle de Kim et Santomero	75
1.	Présentation du modèle	75
2.	Implémentation du modèle aux données de la CMR.....	76
3.	Résultats et analyses	78
	Comparaison entre les modèles et conclusions.....	81
	Bibliographie.....	84
	Annexe I : Un Exemple numérique illustratif de la méthode du bootstraping	85
	Annexe II : La courbe des taux zéro-coupons du marché marocain au 31/12/2013....	87
	Annexe III : Code MATLAB du modèle Leibowitz.....	88

Liste des abréviations

CMR: Caisse Marocaine des Retraites

RCAR : Régime Collectif d'Allocation des Retraites

CNSS : Caisse Nationale de Sécurité Sociale

CIMR : Caisse Interprofessionnelle Marocaine des Retraites

LDI : Liability Driven Investment

LHP : Liability Hedging Portfolio

PSP : Performance Seeking Portfolio

ALM : Asset Liability Management (Gestion Actif-Passif)

MASI : Moroccan All Shares Index

MBI : Moroccan Bonds Index

Liste des tableaux

Tableau 1: Evolution du nombre des affiliés par caisse de retraite au Maroc	17
Tableau 2: Comparaison de l'évolution du rapport démographique au Maroc	21
Tableau 3: Portefeuille d'investissement de la CMR (2012).....	22
Tableau 4 : Données (non réelles) relatives à l'actif et au passif de la CMR, 2014-2036	25
Tableau 5: Présentation des principaux modèles d'allocation d'actifs étudiés.....	34
Tableau 6: Rendement moyen annuel de cours de l'indice MASI	42
Tableau 7 : Volatilités annuelles de l'indice MASI entre 2002 et 2014	44
Tableau 8: Rendement moyen annuel de cours de l'indice MBI entre 2002 et 2014..	45
Tableau 9 : Volatilités annuelles de l'indice MBI entre 2002 et 2014	47
Tableau 10 : Stratification de l'indice du marché obligataire MBI	48
Tableau 11 : Valeurs des rendements et volatilités pour obligations de différentes maturités.....	48
Tableau 12 : Matrice de corrélation entre les rendements des obligations de différentes maturités.....	49
Tableau 13 : Rentabilité et volatilité des classes d'actifs Non coté et Immobilier	49
Tableau 14 : Matrice de corrélation entre les classes d'actifs	50
Tableau 15 : Rendements et volatilités des obligations de différentes maturités	56
Tableau 16 : Calcul des sensibilités de l'actif et du passif	57
Tableau 17 : Vecteur du produit des écarts de sensibilités et les volatilités	58
Tableau 18 : Poids des obligations de différentes maturités dans LHP et LDI	59
Tableau 19 : Valeurs des données saisies sur Matlab	68
Tableau 20 : Composition du portefeuille optimal selon le modèle de Leibowitz, données CMR.....	74
Tableau 21 : Flux actualisés de l'actif et du passif entre 2014 et 2032.....	76
Tableau 22 : Rappel des rendements et volatilités des différentes classes d'actifs	77
Tableau 23 : Matrice de covariance entre les différentes classes d'actifs	78
Tableau 24 : Vecteur des poids résultats du programme d'optimisation.....	79
Tableau 25 : Composition (%) optimale du portefeuille selon le modèle Kim et Santomero, données CMR	79
Tableau 26 : Poids optimaux des classes d'actifs après l'implémentation des contraintes réglementaires	80
Tableau 27 : Exemple illustratif de la méthode bootstrapping	85

Liste des figures

Figure 1: Evolution de la structure par âge de la population du Maroc.....	19
Figure 2 : Evolution des cotisations de la CMR entre 2014 et 2036	26
Figure 3: Evolution des flux générés par le portefeuille de la CMR entre 2014 et 2036	26
Figure 4 : L'évolution de l'actif de la CMR entre 2014 et 2036.....	27
Figure 5 : Evolution du passif de la CMR entre 2014 et 2036	28
Figure 6 : Evolution des fonds de réserve de la CMR entre 2014 et 2036	29
Figure 7 : Evolution du gap financier de la CMR entre 2014 et 2036.....	30
Figure 8: Cours hebdomadaires (en MAD) de clôture de l'indice MASI entre 10/05/2002 et 02/05/201	42
Figure 9 : Moyennes annuelles de la performance de MASI.....	43
Figure 10 : Evolution de l'indice MBI entre 2002 et 2014.....	45
Figure 11 : Evolution de la performance moyenne de l'indice MBI entre 2002 et 2014	46
Figure 12 : Poids des obligations de différentes maturités (exprimées en ans) dans le portefeuille obligataire LHP	60
Figure 13 : Page Excel fournissant les résultats du portefeuille PSP	61
Figure 14 : Poids des différentes classes d'actifs dans PSP et LDI.....	61
Figure 15 : Composition finale du portefeuille LDI.....	62
Figure 16 : Tracé de la contrainte sur l'actif	70
Figure 17 : Tracé de la fonction déterminant de l'équation à l'inconnue σ_o	71
Figure 18: Tracé de la contrainte sur le surplus	72
Figure 19 : Détermination des coordonnées ($\sigma_{Pf}; R_{Pf}$) du point optimal	73

Introduction générale

Le système marocain de retraite est composé d'un régime de base, géré selon le statut professionnel de l'assuré par la CMR, CNSS ou RCAR, d'un régime complémentaire (assuré par la CIMR) et des régimes spéciaux comme c'est le cas de l'ONCF, l'OCP et l'ONEE qui gèrent elles-mêmes leur système de retraite.

Depuis quelques années, le système marocain des retraites connaît une réelle crise. D'ailleurs, selon des chiffres de HCP, dans son rapport final relatif à la soutenabilité des systèmes de retraite (Décembre 2012), 3,9 actifs cotisent pour un seul retraité en 2009 contre 5,8 en 1993 et 15 en 1980. En outre, la situation financière des différentes caisses de retraite est contrariée à cause notamment de la transition démographique due au changement dans la pyramide des âges, prévu par des projections démographiques effectuées par le HCP, qui va dans le sens d'un vieillissement de la population et la CMR n'en fait pas l'exception. Dans ce sens, une étude menée par la Cour des Comptes datant de Juillet 2013 affirme que si aucune mesure n'est prise, les fonds de réserves de la CMR sont menacés par l'épuisement en 2021. De même, la CNSS atteindra une situation similaire en 2037 et la RCAR en 2049. Il s'avère donc nécessaire de penser sérieusement à une réforme consciencieuse permettant de sortir de cette crise.

La plupart des réformes proposées jusqu'à présent, notamment celle de la Cour des Comptes dans l'étude citée ci-dessus¹, ne se concentrent que rarement sur la nécessité de bien gérer les fonds de réserve. Une bonne gestion de ces fonds correspond à un investissement, sur des actifs, qui garantit un gain maximal sous un niveau de risque acceptable.

C'est dans ce sens que s'inscrit la présente étude qui vise à chercher la meilleure allocation possible de ces réserves moyennant des modèles statistiques théoriques développés dans le cadre de la théorie moderne de gestion des portefeuilles dont la recherche publiée par Markowitz en 1952, intitulée « Selective Portfolio », est un travail pionnier.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du cadre général de l'étude. Nous présentons un aperçu sur le fonctionnement du système des retraites et ses différentes classifications. Puis, nous allons analyser la situation de système des retraites au Maroc, et notamment la CMR. Ensuite, nous allons exposer un ensemble des modèles d'allocation d'actifs tout en comparant entre eux.

¹ Les propositions de cette réforme sont détaillées dans la page 19

Durant le deuxième chapitre, l'intérêt est porté sur la présentation des données utilisées durant cette étude. Ainsi, une analyse sera consacrée à l'analyse de l'actif, du passif et des fonds de réserves. Cette analyse sera poursuivie par l'introduction de l'analyse actif-passif (ALM) qui représente le cadre dans lequel doivent fonctionner les modèles d'allocation d'actifs. Ensuite, nous allons présenter avec plus de détails les trois modèles choisies pour cette étude, à savoir LDI, Leibowitz et Kim/Santomero. Finalement, nous analysons l'ensemble des marchés représentant les classes d'actifs qui seront utilisées durant cette étude. Cette analyse nous permettra de calculer les caractéristiques de tendance centrale (notamment la rentabilité et la volatilité) qui seront exploitées lors de l'application des modèles. En même temps, nous allons étudier la corrélation les rendements de ces différents marchés.

Ensuite, les trois derniers chapitres seront consacrés chacun à un des trois modèles. Chaque chapitre s'appuie sur la même méthode de raisonnement. Dans un premier temps, nous présentons la théorie du modèle et l'ensemble des données dont il aura besoin lors de sa mise en œuvre. Ensuite, nous traitons les données avec le logiciel adéquat pour chaque modèle. Finalement, les résultats numériques obtenus par chaque méthode seront commentés et analysés.

Chapitre1 : Cadre général de l'étude

Le présent chapitre est dédié à une brève présentation des systèmes de retraite de manière générale, suivie d'une introduction aux spécificités des régimes de retraite au Maroc. Il fournit également une analyse de la situation de ces régimes notamment sur le plan des contraintes identifiées ainsi que la question de recherche de cette étude.

1. *Système des Retraites*

1.1. *Bref aperçu historique*

Le système des retraites n'a réellement été bien développé qu'au cours du XX^{ème} siècle. Sa première apparition date d'un peu plus tôt en 1873, en Allemagne, dans le cadre de ce qu'on appelait « l'assurance vieillesse ». Celle-ci permettait aux cotisants de toucher une prime lors de leur vieillesse en fonction des salaires qu'ils touchaient lors de la période d'activité. Ensuite, le système s'est propagé pour couvrir la majorité des pays de l'Europe de l'ouest.

La raison d'être de ce système a été expliquée par le chancelier allemand Bismarck. Selon lui, « les prestations de retraite octroyées par la sécurité sociale sont la contrepartie octroyée par la collectivité, de la création de richesse dont celle-ci est redevable au travailleur. » (Devolder, 2012, p6). Selon le même auteur, un autre modèle de base qui a influencé le développement des systèmes de pension est le modèle de Beveridge. Ce dernier stipule que les pensions de retraite ne doivent exister que pour assurer des conditions adéquates de vie pour les individus lorsqu'ils atteignent l'âge d'inactivité professionnelle. Ce modèle repose donc sur un principe d'entraide essayant d'uniformiser les prestations entre tous les retraités, ce qui le rend largement moins généreux.

1.2. *Classification des régimes de retraites*

Le fonctionnement des régimes de retraites diffère selon deux critères : le mode de gestion et le mode de financement (Devolder, 2012).

1.2.1 *Classification selon le mode de gestion*

Le mode de gestion concerne la manière de constitution des prestations de retraite.

- *Régime à prestations définies (Define dBenefits)* : les prestations qui seront reçues à la retraite sont définies en avance, il s'agit donc de les financer. Le

plus grand avantage de ce régime est sa transparence puisque tous les retraités savent exactement ce qu'ils toucheront une fois retraités. Cependant, le coût de financement (les cotisations) n'est pas totalement connu et peut dissimuler des surprises.

- *Régime à contributions définies (Defined Contributions)* : pour ce régime, c'est plutôt les cotisations qui sont définies à l'avance. Il s'agit donc d'épargner pour alimenter des réserves permettant de définir les prestations qui seront versées de telle manière à ce que le système garde sa stabilité financière.

1.2.2 Classification selon le mode de financement

Le mode de financement dépend de la manière avec laquelle le gestionnaire des fonds des retraites organise le financement de son régime. Ainsi, on trouve des régimes dans lesquels chaque personne cotise pour elle-même, et d'autres où les retraités actuels perçoivent des prestations qui sont payées par les cotisants actuels.

- *Régime par répartition* : ce mode de financement est purement mutuel. Il est largement utilisé pour financer le premier pilier de la retraite (pilier obligatoire). Son principe est le suivant : les actifs actuels paient les retraités actuels. Ceci dit, l'équilibre d'un tel régime dépend, en grande partie, du nombre des cotisants et retraités. Ainsi, une bonne projection démographique sur le futur permet d'anticiper les éventuelles crises d'un tel système.
- *Régime par capitalisation* : dans ce régime, chaque employé actif cotise pour lui-même. Sa prestation dépendra donc des montants versés ainsi que de la durée de cotisation. En d'autres termes, chacun paye sa propre retraite. Le premier avantage apparent de ce régime est son indépendance de l'évolution démographique de la population, mais aussi sa justesse sociale puisque chacun reçoit selon ses contributions. Cependant, ce régime peut être sévèrement victime de sa dépendance à l'inflation.

1.3. Systèmes de retraite contemporains

Un régime de pensions de retraites contemporain doit prendre en considération trois piliers, chacun de nature différente au niveau du système de fonctionnement. Le premier pilier est un régime de base obligatoire constitué par répartition. Ce pilier permet de constituer un premier niveau de la retraite. Le second pilier est un régime complémentaire (obligatoire ou facultatif selon la caisse) organisé au sein d'un secteur d'activité. Le troisième pilier est purement facultatif et il est constitué individuellement permettant d'augmenter la prime de retraite selon les conditions privilégiées par chaque cotisant. (Devolder, 2012, p4).

Il est à signaler que bon nombre des systèmes modernes des retraites se basent sur un régime en répartition. Cela veut dire que le régime fonctionne d'une manière mutuelle dans le sens où les cotisants actuels paient pour les retraités. Cette opération est assurée par l'alimentation d'une réserve qui doit être ensuite bien investie pour générer de la performance et pouvoir payer les prestations durant n'importe quelle circonstance économique.

C'est dans ce sens que l'allocation d'actifs des fonds de réserve constitue une étape stratégique dans le processus de garantie de la stabilité financière des caisses de retraite et de l'atteinte des objectifs fixés par celles-ci. En effet, la caisse des retraites est censée assurer des prestations de retraites aux retraités tout au long de leur vie et éventuellement à leurs ayants droits. C'est la raison pour laquelle certains pays ont même opté pour la création des institutions spécialisées dans l'allocation des fonds de réserve des caisses des retraites. Dans ce sens, nous prenons l'exemple de la France qui a créé le Fonds de réserve pour les retraites (FRR) qui est un établissement public ayant pour mission de « *gérer les sommes qui lui sont affectées, afin de constituer des réserves destinées à contribuer à la pérennité des régimes de retraite éligibles.*² »

2. Aperçu sur les principaux modèles d'allocation d'actifs

Une allocation stratégique d'actifs est une gestion à long terme visant à définir une politique monétaire d'investissement de long terme. Ainsi, la tâche à assurer est de bien ajuster cette politique en fonction des marchés et de l'évolution du passif. Ceci dit, une allocation stratégique permet d'investir au mieux possible l'ensemble des fonds disponibles.

Deux grandes familles de modèles permettent de déterminer une allocation stratégique optimale.

La première famille s'appuie sur la théorie moderne du portefeuille et sur la simulation de scénarios déterministes. La deuxième famille regroupe les méthodes utilisant des simulations stochastiques des flux financiers.

Nous allons présenter avec plus de détails les différents modèles de chaque famille. La première famille regroupe les modèles classiques et déterministes. Ainsi, on y trouve notamment le modèle de Markowitz (1952) qui est le plus répandu et qui permet de trouver l'allocation optimale sur les différentes classes d'actifs en

² Selon le site : www.fondsdereserve.fr/fr/strategie

déterminant un seuil de rentabilité donné (ou alternativement, un plafonnement du risque).

Ce modèle est le noyau de nombreux développements sur la théorie de portefeuille, notamment la MEDAF et l'APT. Toujours au sein de la même famille, d'autres modèles ont été développés et concernent en particulier les obligations qui constituent la plus grande part du portefeuille du fait de leur caractère sûr. Ces modèles sont des modèles d'adossement et d'immunisation du portefeuille qui se basent sur le concept de la duration et les modèles de simulation de scénarios déterministes qui se basent sur le concept du surplus.

La deuxième famille comporte des modèles qui se basent sur les techniques de simulation stochastique afin de modéliser l'évolution des différentes variables financières, notamment les variables de marché, les variables démographiques, les actifs financiers et le passif. La limite de ces modèles réside dans leur faible capacité de modélisation des variables financières sur le long terme. D'où le passage vers les modèles stochastiques.

En fonction de sa réalité économique, chaque pays adopte un modèle qui répond à ses besoins aussi bien sur le court que sur le long terme.

Pour le cas du Maroc par exemple, on constate une « *faiblesse persistante des cotisations et celle du rendement des fonds de ce régime* » (Le Matin, 08 Janvier 2014). En effet, tout le problème réside dans le choix d'un modèle adéquat au marché monétaire marocain et aux circonstances dans lesquelles est mise la caisse des retraites en question. Ainsi, au sein du même environnement économique, chaque caisse peut se voir utiliser un modèle bien déterminé pour l'allocation de ses fonds de réserves.

3. Situation du système des retraites au Maroc

Le fonctionnement des systèmes de retraite au Maroc est assuré par un régime de répartition, faisant preuve d'une solidarité intergénérationnelle. Dans les secteurs public et privé, les employés bénéficient systématiquement de la couverture sociale et de la retraite, exceptés certains cas où des entreprises s'obstinent de déclarer tous leurs employés, afin que celles-ci ne soient pas obligées à augmenter les salaires pour couvrir les cotisations que leurs employés devront payer.

D'autre part, nous signalons que les systèmes de retraite se composent, en général, de trois piliers. La majorité des systèmes de retraites au Maroc sont actuellement menacés par les évolutions démographiques et économiques. Ces évolutions sont

Chapitre1 : Cadre général de l'étude

notamment dues à l'augmentation de l'espérance de vie grâce aux progrès parcourus dans le domaine de la santé au niveau national ce qui risque d'augmenter le taux de chômage. Ceci aura des conséquences immédiates sur les caisses de retraites puisqu'elles seront privées d'un flux considérable de cotisations.

Le système des retraites au Maroc est constitué de deux régimes : un régime de base et un régime complémentaire.

Le régime de base est assuré par les régimes suivants :

- La Caisse Marocaines des Retraites (CMR) pour les personnes civiles exerçant dans le secteur public et militaires (1930) ;
- La Caisses Nationale de Sécurité Sociale (CNSS) pour les personnes civiles exerçant dans le secteur privé (1959);
- Régime Collectif d'Allocation de Retraite (RCAR) pour les agents contractuels du secteur public (1977).

Le régime complémentaire est assuré la Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite (CIMR) créé en1949.

Il est à noter que certaines institutions comme l'ONCF, l'OCP et l'ONEE gèrent elles-mêmes leur système de retraite.

Le tableau ci-dessous nous donne une idée sur l'importance de chaque caisse de retraite au niveau des effectifs de cotisants et de retraités qu'elle gère.

Tableau 1:Evolution du nombre des affiliés par caisse de retraite au Maroc

Années	CNSS		CIMR		CMR		RCAR		Total	
	Cotisants	Retraités	Cotisants	Retraités	Cotisants	Retraités	Cotisants	Retraités	Cotisants	Retraités
2000	1 257 920	234 722	218 372	71 024	463 723	120 789	137 698	28 500	1 859 341	384 011
2001	1 291 679	242 485	222 459	76 118	474 767	129 627	145 503	29 760	1 911 949	401 872
2002	1 344 866	262 452	226 622	81 577	485 767	137 901	155 393	41 774	1 986 026	442 127
2003	1 414 675	275 716	229 861	88 954	581 818	147 181	141 152	44 504	2 137 645	467 401
2004	1 496 000	289 909	232 326	96 330	681 445	152 343	136 589	53 613	2 314 034	495 865
2005	1 596 547	301 295	233 552	101 922	558 849	187 039	128 980	56 299	2 284 376	544 633
2006	1 657 874	309 902	236 473	107 554	562 996	206 138	124 362	57 130	2 345 232	573 170
2007	1 738 567	325 827	240 952	114 603	584 428	210 937	135 463	61 416	2 458 458	598 180
2008	1 884 008	344 103	247 311	118 106	586 876	215 737	129 720	96 784	2 600 604	656 624
2009	1 966 789	361 671	258 558	123 209	588 487	220 536	119 473	98 370	2 674 749	680 577

Source : HCP, 2012

Le tableau 1 permet de faire un certain nombre de constats. Nous remarquons qu'entre 2000 et 2009, le nombre des cotisants a augmenté de 143% alors que le nombre des

Chapitre1 : Cadre général de l'étude

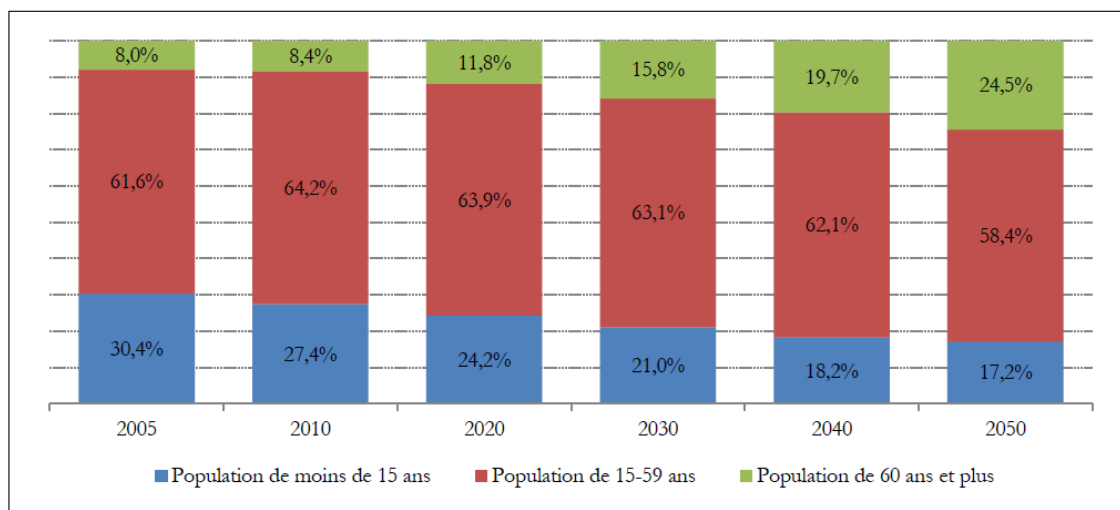
retraités a évolué de 177%. Il est donc clair que la cadence n'est pas la même et que cette situation est nuisible à l'ensemble des caisses de retraites marocaines.

Ainsi, la CNSS est nettement la caisse qui bénéficie du plus grand nombre de cotisants. Ceci est principalement expliqué par le nombre important des actifs occupés exerçant dans le secteur privé. Cependant, le nombre de retraités gérés par la CNSS n'est pas très supérieur par rapport à la CMR étant donné que cette dernière est le plus ancien gestionnaire de fonds de retraite. La CMR gère à peu près un tiers du nombre total des retraités au Maroc. L'enjeu est donc énorme pour cette caisse. Globalement, on peut également déduire de ces chiffres qu'entre 2000 et 2009, le nombre des retraités, toutes caisses comprises, a augmenté de 77,22% contre une augmentation de seulement 43,85% pour les cotisants durant la même période. La cadence d'augmentation des deux populations est donc clairement différente. Ceci peut en conséquence nuire à la stabilité du système de gestion des retraites.

D'autre part, selon des chiffres de HCP, dans son rapport final relatif à la soutenabilité des systèmes de retraite et datant de Décembre 2012, près de 4 actifs cotisent pour un seul retraité en 2009 contre 5,8 en 1993 et 15 en 1980. En outre, selon le tableau ci-dessus, on a environ 2,7 millions de cotisants (HCP, 2012). Or, ceci ne représente que 27% de la population active occupée. Pour illustrer avec pertinence la faiblesse de ce chiffre, une comparaison avec d'autres pays fera l'affaire. Dans les pays à économies de transition (notamment les pays de l'Europe de l'Est et la Chine), ce pourcentage est de 60% alors que dans les pays de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique), ce chiffre voisine les 80% !

La situation financière de ces caisses peut encore être plus contrariée à cause de la transition démographique due au changement dans la pyramide des âges prévue par des projections démographiques effectuées par HCP. La figure 1 illustre l'évolution de la population marocaine par âge entre 2005 et 2050.

Figure 1: Evolution de la structure par âge de la population du Maroc



Source : HCP, 2012

Cette figure met en évidence la croissance de la population qui représentera les retraités et en contrepartie la décroissance de la population active. Nous constatons que la population ayant moins de 15 ans, et qui va constituer la population active dans le futur proche, passera de 30,4% de la population en 2005 à seulement 17,2% en 2050. En contrepartie, la population des retraités ne cesse d'augmenter. Celle-ci passera de 8% en 2005 de la population globale à 24,5% en 2050.

Cette donnée est très nuisible aux engagements que subiront les caisses de retraite. Selon ce même rapport du HCP, l'excédent financier global qui représentait en 2005, un pourcentage de 0,95% du PIB, ne représente plus en 2009 que 0,33% du PIB.

C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, il s'avère nécessaire de penser à une réforme consciencieuse permettant de sortir de cette crise.

Dans ce sens, une sérieuse réforme a été proposée par la Cour des Comptes dans un rapport publié en Juillet 2013. Il s'agit d'une réforme en deux phases : une réforme paramétrique et une réforme systémique. La réforme paramétrique vise à agir sur les principaux paramètres des caisses vise d'améliorer les règles de gestion et d'élargir la couverture de la retraite. La réforme systémique propose de corriger sur le long terme les déséquilibres financiers et démographiques pour que la réforme soit plus profonde.

Or, il faut avouer que la mise en œuvre d'une réforme capable de résoudre les problèmes actuels reste une tâche délicate. En effet, les variables mises en jeu ne sont pas facilement nombrables sans oublier les corrélations compliquées entre elles.

Cependant, il semble que le débat actuel, concernant la réforme des retraites, néglige un volet très important à savoir la gestion des fonds de réserve. Pourtant, selon une

simple simulation qu'un point de plus dans le taux de rendement peut augmenter la durée de vie d'un régime de retraite en plusieurs années (Les Inspiration ECO, 12 Mai 2013). Selon la même source, la CMR dispose de près de 70 milliards de dirhams comme fonds de réserves, ce qui constitue une bonne somme qui nécessite une meilleure gestion.

La présente recherche va s'atteler à proposer à la CMR, notre organisme d'accueil, un modèle de gestion de ses réserves à travers des modèles statistiques performants. Mais avant, analysons la situation de ladite Caisse.

4. Présentation de la Caisse Marocaine des Retraites

4.1. Introduction à la CMR

La Caisse Marocaine des Retraites (CMR) est un établissement public et autonome permettant de gérer deux régimes de retraite; à savoir le régime des pensions publiques et le régime des pensions militaires. L'enjeu pour cette institution est clairement énorme vu l'importance démographique que représentent ces deux populations. C'est dans ce sens qu'il est indispensable pour la CMR de bien gérer les fonds dont elle dispose, de manière à ce qu'elle couvre tous ses engagements et à chercher ensuite à créer de la performance. Pour atteindre cet objectif, il s'avère nécessaire d'identifier les sources du financement de la CMR ainsi que ses engagements financiers. Cette quête nous mène à définir le régime avec lequel fonctionne cette caisse des retraites.

On rappelle que la CMR a adopté un régime par répartition. En termes plus clairs, les employés actuels (cotisants) paient pour les retraités actuels (prestataires). Une fois que tous les allocataires ont reçu leurs prestations, le reste des fonds est placé dans une réserve. Cette même réserve nous servira pour payer les retraités dans les périodes où les fonds récoltés chez les cotisants sont insuffisants pour honorer tous les engagements encourus. D'où l'idée stratégique de bien allouer les fonds de réserve.

4.2. Situation Actuelle de la CMR

La situation actuelle des caisses de retraite au Maroc est critique. Le taux de couverture des employés actifs ne dépasse pas 21% alors que la population des retraites est d'environ 3 millions (HCP, 2012). Il est donc indispensable d'agir de telle sorte à augmenter ce taux. Parmi les dispositions qui peuvent être prises, on peut citer la nécessité de s'introduire dans des domaines de production dans lesquels ce taux est encore inférieur. On évoque principalement les populations ayant un niveau

Chapitre1 : Cadre général de l'étude

d'instruction bas et qui ne sont pas prêts à voir leurs revenus diminués afin de cotiser pour la retraite. Dans ce sens, des petites formations peuvent être dispensés gratuitement en faveur de cette population cible.

D'autre part, le rapport démographique de dépendance (cotisants/retraités) ne cesse de diminuer. Le tableau 2 illustre cette dépréciation pour les différentes caisses de retraite.

Tableau 2: Comparaison de l'évolution du rapport démographique au Maroc

	1994	Dernière donnée
CMR	7,5	4,5 (2007)
CNSS	8,7	7,7(2003)
RCAR	9,2	3,64(2005)
CIMR	4,2	2,5(2003)

Source : www.hcp.ma

Ce tableau, qui décrit l'évolution décroissante du rapport démographique entre les différentes caisses de retraite, montre que les charges financières augmentent au fur et à mesure que les années se succèdent. Ceci menace la stabilité financière de ces caisses.

Une autre cause de cette situation déplorable est l'anomalie de la gestion des flux financiers. En effet, avant la réforme de 1997 qui a donné l'autonomie juridique et financière à la CMR, l'Etat ne versait pas sa contribution et se charge de payer lui-même les prestations aux retraités. D'autre part, ce n'est qu'en cette année citée que la CMR a commencé la constitution des fonds de réserve, ce qui a conduit au fait qu'il faut encore du temps avant d'atteindre une situation optimale.

D'autre part, on note que le régime de répartition est très généreux. Dans certains cas, le taux de remplacement peut atteindre 100% selon la caisse. Certaines caisses prennent le meilleur salaire de carrière comme salaire de base, même si quelques fois ce salaire n'est touché que durant la dernière année d'activité. Dans ce cas, le retraité touchera des prestations supérieures à ses cotisations, notamment s'il vit longtemps. Ceci est clairement une injustice vis-à-vis de la génération actuelle cotisante qui doit payer cette différence.

Si les régimes de répartition ont des avantages sociaux et permettent de consolider l'entraide entre les générations, ils ont en même temps fait preuve d'une défaillance lors des circonstances économiques et démographiques défavorables.

Concernant la réserve, qui constitue notre principale préoccupation, on ne peut pas nier son impact positif sur la génération des revenus et ce malgré le fait qu'elle soit encore assez récente puisqu'elle n'a été mise en place que depuis 17 ans.

4.3. *Situation des fonds de réserves*

Pour le cas de la CMR, le premier déficit a été vécu durant le quatrième trimestre de 2012 et l'épuisement des réserves est prévu pour 2021, si la situation de statu quo est maintenue. (Cour des comptes, 2013).

Il est à signaler que la CMR, la CNSS et la RCAR sont tenus, par la force de la loi, de confier la gestion de leurs fonds de réserves à la Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG). Cette opération est assurée par des comités mixtes permettant le suivi et l'exécution des placements.

Le tableau 3 résume la nature des placements actuels pour la CMR ainsi que le pourcentage attribué pour chaque placement.

Tableau 3: Portefeuille d'investissement de la CMR (2012)

Nature de placement	% dans le portefeuille des fonds de réserves
Valeurs de l'Etat ou celles bénéficiant de sa garantie	50
Actions	30
Obligations inscrites à la cote de la Bourse de Casablanca, billets de trésorerie....	15
Biens immobiliers	5
Total	100%

Source : La Vie Eco, 15 Mai 2012

Une première lecture du tableau montre que la moitié du portefeuille est investie en faveur de l'Etat afin de financer le Trésor. Ce taux était de 80% comme exigence minimale de la valeur totale du portefeuille. D'autre part, ce n'est qu'en 2010 que l'Etat a donné le feu vert à la CMR pour pouvoir investir jusqu'à 30% du portefeuille dans les actions. Ces chiffres posent la question de l'indépendance effective de la CMR vis-à-vis de la gestion de ses fonds de réserves.

Entre 2003 et 2012, le taux de rendement moyen de ces placements atteint à peine 5,1% (Les Inspiration ECO, 12 Mai 2013). Un chiffre qui laisse à désirer.

5. Question de recherche

La gestion du portefeuille des fonds de réserve de la CMR est d'une importance capitale. Il suffit de rappeler que les plus-values générées par celle-ci ont permis à la CMR de résister et de pouvoir honorer ses engagements jusqu'à présent malgré un climat économique en crise. La question de recherche qui sera traitée dans ce travail sera celle de savoir quelle allocation optimale à adopter pour l'investissement dans diverses classes d'actifs. Cette allocation doit générer des gains permettant d'aller au-delà de la couverture des charges pour couvrir des éventuelles charges imprévisibles liées aux conditions du marché économique.

La première difficulté est le choix des modèles les plus adéquats aux conditions du marché marocain ainsi qu'à la nature des classes d'actifs dont la CMR peut investir. Eventuellement, il est possible d'adresser des recommandations concernant l'abandon d'investir dans certaines classes d'actifs ou la nécessité d'ajouter une nouvelle classe d'actifs permettant de générer des gains plus importants avec moins de risque. La deuxième difficulté qui s'annonce est de bien projeter les différents paramètres et variables qui entrent en équation, notamment la population active et retraitée, les taux techniques et les prix des actifs.

Après la résolution de ces difficultés, une simulation des scénarios sera établie afin de choisir le modèle le plus adéquat compte tenues des données numériques.

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

Ce chapitre a pour objectif de présenter les différentes données dont nous aurons besoin durant cette étude ainsi que les différentes classes d'actifs dans lesquelles investit la CMR. Ensuite, nous présenterons les trois modèles sélectionnés pour effectuer notre étude. Puis, nous clarifions la méthodologie qui sera poursuivie durant notre travail. Finalement, nous allons étudier les différents marchés représentant les classes d'actifs et nous explicitons certains la corrélation entre ces différents marchés. Ceci nous permettra de préparer une bonne base de données que nous pourrions par la suite utiliser lors de la mise en œuvre des trois modèles.

1. Objectif de l'étude

Chaque caisse des retraites dispose d'un actif, composé de l'ensemble des cotisations versées par ses adhérents, ainsi que d'un passif représentant l'ensemble de ses engagements et notamment les prestations des retraités. Cette étude vise à construire un portefeuille optimal, à partir du surplus (i.e. la valeur du marché de l'actif de laquelle on retranche la valeur actuelle du passif) que dégage la caisse, permettant à la fois d'honorer les engagements futures ainsi que de générer de la performance.

La construction de ce portefeuille se basera sur différents modèles qui seront exposés en détails en temps opportun. Chaque modèle a sa propre philosophie de raisonnement mais le but est essentiellement le même ; à savoir augmenter le niveau de rentabilité sans trop exposer le portefeuille à des risques majeurs.

2. Présentation des données

Lors de notre étude, nous entendons par l'actif la somme des cotisations et des cash-flows générés par le portefeuille d'investissement. Le passif représente l'ensemble des engagements de la caisse.

Notons que l'ensemble des données que nous utiliserons sont des projections dans le futur. Il s'agit d'un travail très laborieux qui nécessite la prise en considération de plusieurs paramètres financiers, démographiques et économiques.

Dans ce sens, l'ensemble des données qui seront utilisées sont le résultat du travail des experts de la CMR. C'est la raison pour laquelle, toutes ces données sont exprimées à titre indicatif et ne représentent pas les vraies valeurs vu leur caractère confidentiel. Cependant, cette modification a été faite de telle manière à ce qu'elle ne

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

nuit pas aux résultats de notre étude. Le tableau 4 illustre les données fournies par la CMR.

Tableau 4 : Données (non réelles) relatives à l'actif et au passif de la CMR, 2014-2036

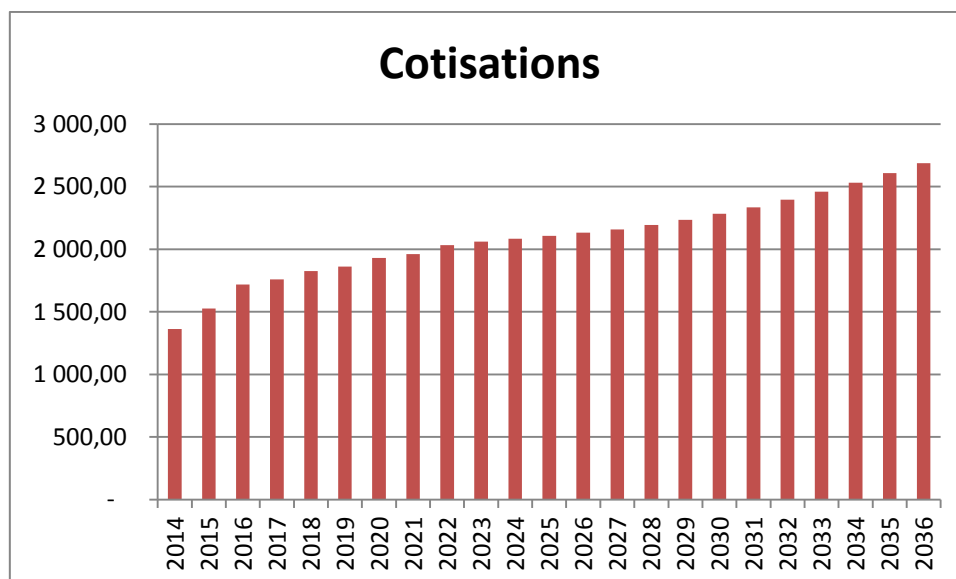
Date	Actif		Passif
	Cotisations	Cash-Flows Portefeuille	Engagements
2014	1 362,06	1 016,97	1 329,46
2015	1 526,38	1 477,67	1 478,49
2016	1 718,46	447,45	1 485,45
2017	1 759,74	761,53	1 649,85
2018	1 826,07	546,22	1 660,00
2019	1 861,62	764,10	1 860,11
2020	1 930,02	1 356,44	1 871,16
2021	1 961,79	684,86	2 106,94
2022	2 032,70	1 000,00	2 116,43
2023	2 059,77	868,30	2 391,39
2024	2 084,49	110,12	2 675,87
2025	2 107,69	130,48	2 969,65
2026	2 133,00	16,31	3 248,65
2027	2 158,90	4,75	3 523,36
2028	2 194,53	4,16	3 751,42
2029	2 234,28	4,16	3 965,26
2030	2 281,96	87,67	4 146,01
2031	2 335,34	0,02	4 311,00
2032	2 396,30	0,02	4 449,78
2033	2 460,40	0,02	4 588,50
2034	2 531,41	0,02	4 708,96
2035	2 608,10	0,02	4 813,17
2036	2 688,36	7,08	4 902,90

Source : Caisse Marocaine des Retraites

2.1. Analyse de l'actif

Nous commençons tout d'abord par l'analyse des deux compartiments de l'actif. La progression des cotisations au fil des prochaines années est décrite sur la figure 2.

Figure 2 : Evolution des cotisations de la CMR entre 2014 et 2036

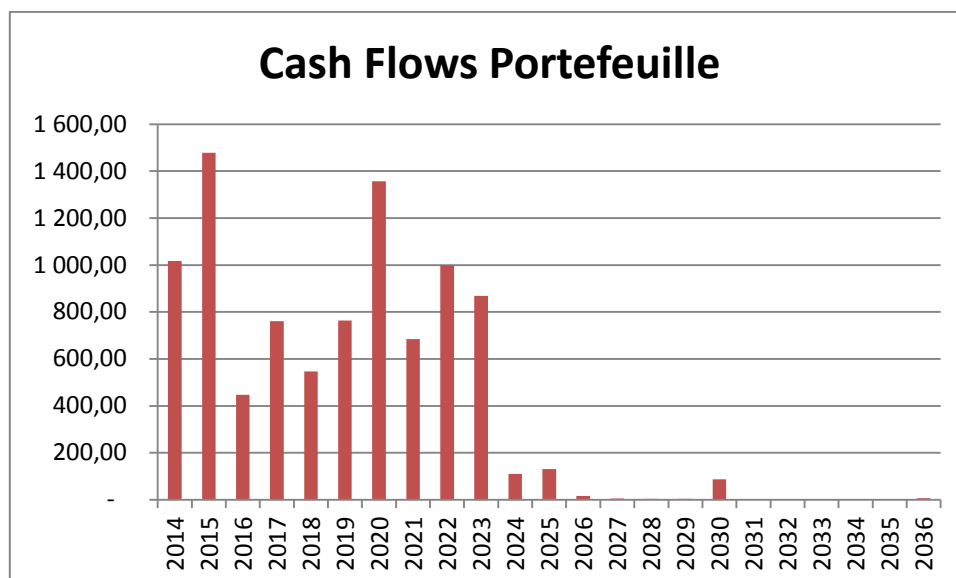


Source : Adapté des données de la CMR

La figure 2 montre que les cotisations des adhérents à la CMR sont en augmentation avec un taux de croissance annuel moyen de 3,18%.

Nous passons maintenant aux flux générés par le portefeuille de la CMR. Ces flux peuvent être modélisés dans le graphique suivant :

Figure 3: Evolution des flux générés par le portefeuille de la CMR entre 2014 et 2036



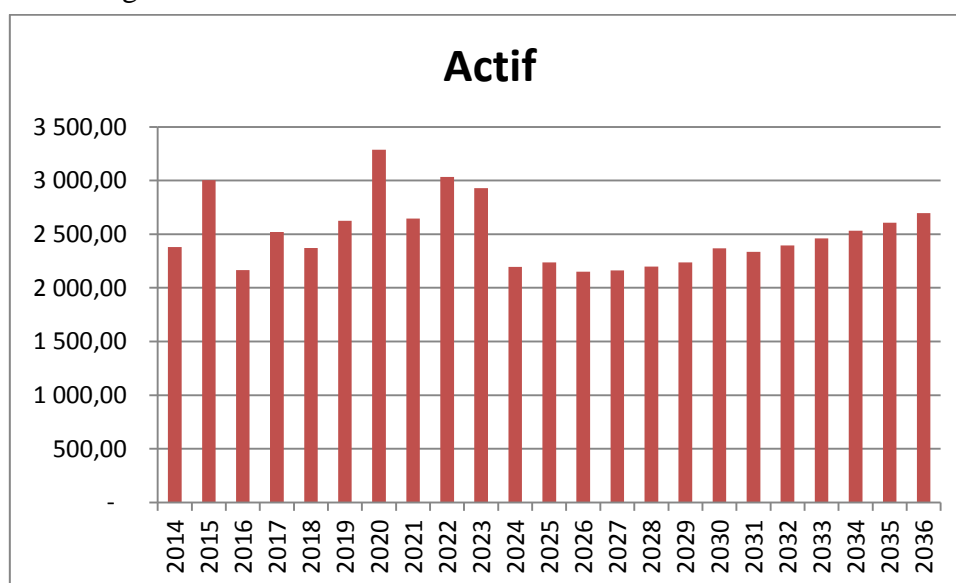
Source : Adapté des données de la CMR

La graphique 3 montre qu'à partir de l'année 2026, les flux générés par le portefeuille atteindront des niveaux très bas. En termes plus explicites, ce portefeuille permettra sans doute de faire face aux engagements de courte durée. Cependant, pour ce qui est

des engagements futurs, notamment à partir de l'année 2026, il va falloir penser à agir autrement. Il faut notamment penser à se baser sur de nouveaux modèles permettant de bien allouer les fonds sur le long terme.

Nous rassemblons maintenant l'ensemble des cotisations ainsi que les flux générés par le portefeuille pour pouvoir se donner une idée sur l'évolution globale du passif. La figure 4 montre l'évolution de l'actif dans les vingt-deux prochaines années.

Figure 4 : L'évolution de l'actif de la CMR entre 2014 et 2036



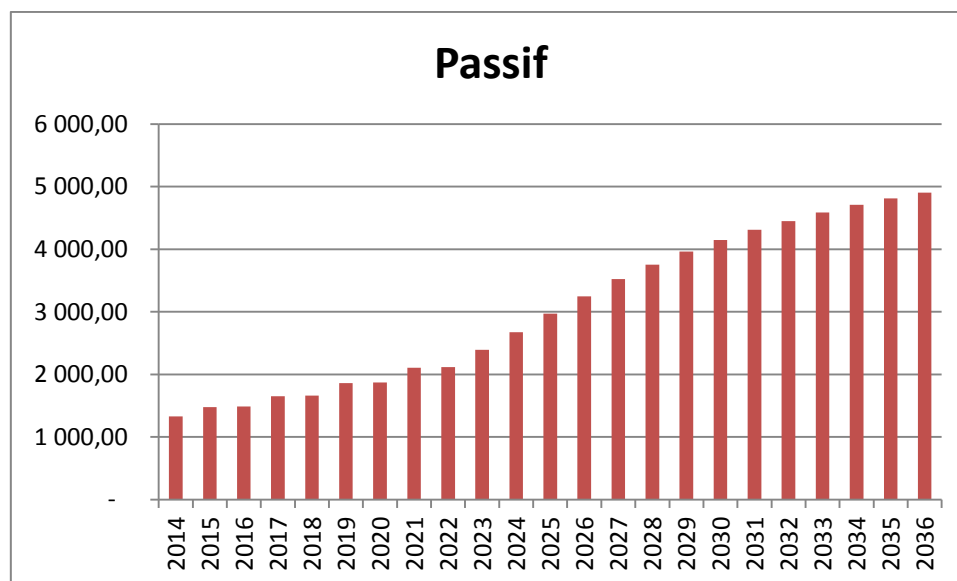
Source : Adapté des données de la CMR

Nous constatons sur le graphique ci-dessous l'évolution globale de l'actif n'est pas en constante augmentation. Le taux de croissance annuel moyen calculé sur la base de ces données est de 0,57%. C'est un taux faible qui laisse à désirer.

2.2. Analyse du passif

Nous nous intéressons actuellement à l'analyse de l'évolution du passif durant la même période. La figure 5 illustre cette évolution.

Figure 5 : Evolution du passif de la CMR entre 2014 et 2036



Source : Adapté des données de la CMR

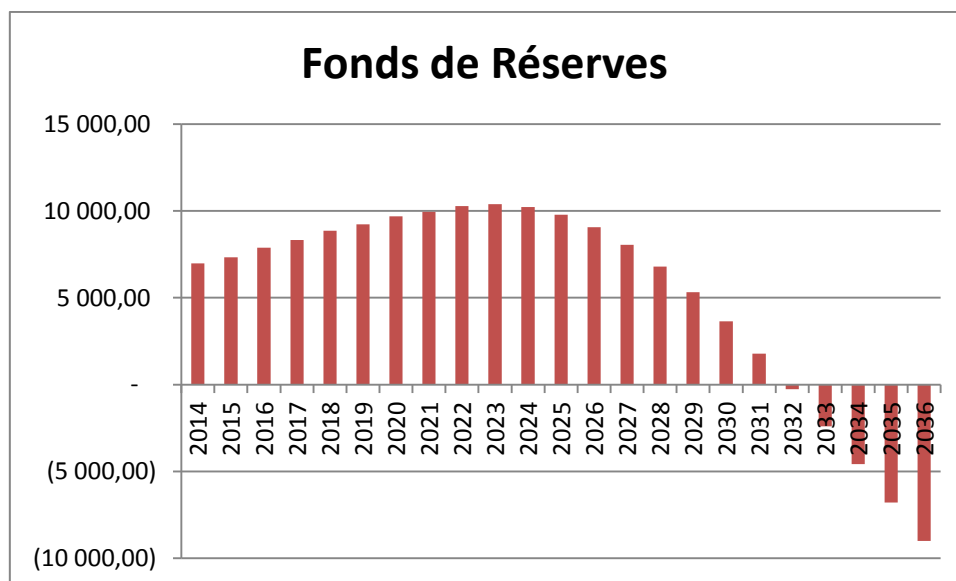
Nous remarquons sur la figure 3 que les engagements sont en nette progression. Le taux de croissance annuel moyen correspondant à 6,11%.

La situation est donc épouvantable et ne doit pas être laissée comme telle. C'est dans ce sens qu'il est nécessaire de bien gérer les réserves afin de compenser l'éventuel écart qui aura entre les engagements et l'actif.

2.3. Analyse des fonds de réserves

Les fonds de réserve servent à se couvrir contre des frais non prévus ou des dépenses inhabituelles. La figure 6 montre l'évolution de ces fonds, qui sont présentés à titre indicatif vu leur caractère confidentiel, calculés et projetés par les experts de la CMR.

Figure 6 : Evolution des fonds de réserve de la CMR entre 2014 et 2036



Source : Adapté des données de la CMR

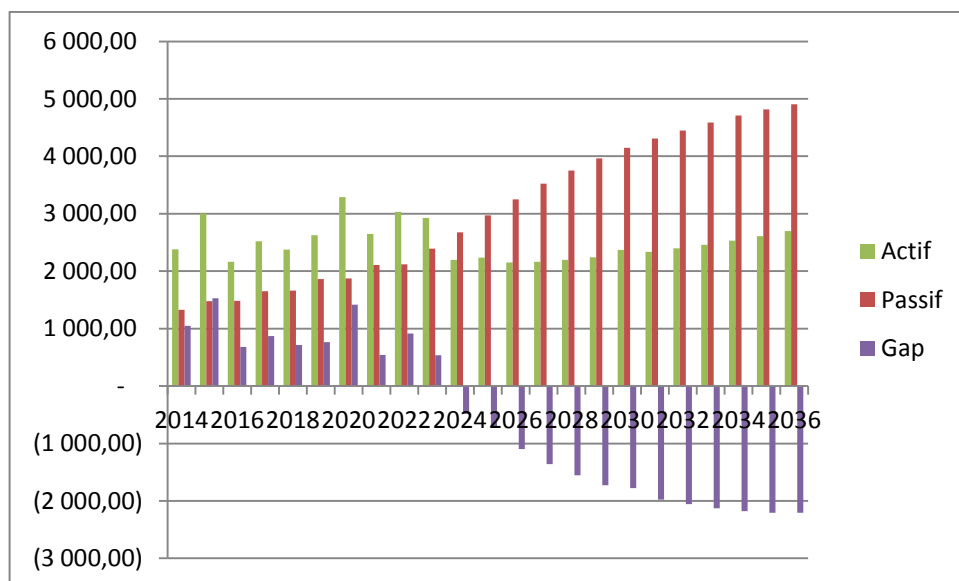
Ce graphique montre qu'à partir de l'année 2032, les fonds de réserve seront négatifs. Cette information est alarmante et nécessite des actions dans les plus brefs délais. C'est dans ce sens qu'il est très intéressant à ce que la gestion de l'actif prend en considération l'évolution des engagements futurs afin de pouvoir être solvable et d'éviter de tomber dans des situations délicates.

2.4. Gestion Actif-Passif (ALM)

La gestion actif-passif, aussi désignée par son acronyme anglais ALM (Asset Liability Management), est une pratique financière qui consiste à garder l'équilibre entre les ressources et les emplois lors des investissements, tout en ayant un niveau de rentabilité à satisfaire sous un cadre réglementaire dépendant de chaque pays.

Dans ce sens, nous allons mettre l'actif et le passif, côte à côte, sur un même graphique afin d'avoir une idée sur l'évolution des excédents financiers de la CMR selon les projections. Pour cette fin, nous allons calculer le gap (actif-passif) pour chaque année. La figure 7 illustre cette analyse.

Figure 7 : Evolution du gap financier de la CMR entre 2014 et 2036



Source : Adapté des données de la CMR

A partir du graphique ci-dessus, nous constatons que le gap deviendra négatif dès 2023. En actualisant l'ensemble de l'actif ainsi que l'ensemble du passif et en rapportant le premier au second, nous trouvons un ratio de financement égal à 99%. Ceci veut dire que l'ensemble de l'actif sert à peine à couvrir les engagements avec un léger déficit de 1%

Ainsi, la question d'optimisation des fonds de réserve s'impose. En termes plus concis, il est primordial de rentabiliser les flux afin de sortir de cette situation précaire et c'est l'objet de notre étude qui, moyennant des modèles théoriques d'allocation des fonds, essaiera de trouver une meilleure allocation des fonds de réserve de la CMR sous les contraintes réglementaires qui lui sont imposées.

3. Présentation des différentes classes d'actifs

Avant d'étudier les différents modèles d'allocation d'actifs, il s'avère nécessaire de bien étudier les différentes classes d'actifs dans lesquelles la CMR investit.

Une classe d'actifs peut être définie comme un ensemble de biens ayant les mêmes caractéristiques et qui se comportent de la même manière sur le marché financier. En outre, ces biens doivent être échangeables sur un marché organisé et peuvent générer des biens. Ainsi, la raison principale de l'acquisition des actifs est la génération de la performance.

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

Cette partie sera consacrée à la présentation de certaines classes d'actifs ainsi qu'une analyse des risques associés à chacune et dans le cas échéant, comment se couvrir contre ces risques.

3.1. Classe des obligations

Une obligation peut être définie comme un titre de dette, émis par l'Etat ou par une société. Elle permet à son émetteur de bénéficier d'une liquidité en temps réel contre des versements périodiques. Elle est caractérisée par les caractéristiques suivantes:

- Montant emprunté
- Taux d'emprunt
- Coupons (versement intermédiaire)
- Maturité (échéance)

Autrement, en termes plus simples, une obligation est une sorte de droit de réception de flux financiers déterminés à des échéances futures fixées.

Il existe trois types d'obligations :

- Obligations à zéro coupon (un seul versement à l'échéance)
- Obligations à taux fixe (les coupons sont de nature déterministe dans ce cas)
- Obligations à taux variable (les coupons sont liés des variables aléatoires)

Les obligations représentent la plus grande part du portefeuille de la CMR avec un minimum réglementaire de 60% de la valeur totale du portefeuille. La principale raison étant que c'est la classe d'actifs la moins risquée.

3.2. Classe des actions

Une action est un titre représentant une part du capital social d'une entreprise cotée en bourse. Cette classe d'actifs peut être risquée dans le cas d'une bourse très volatile et qui connaît beaucoup de spéculations. Cependant, dans le cas du Maroc, le volume d'échanges en bourse n'étant pas très important, il n'est donc guère très risqué d'investir en bourse.

Cependant, il y a comme même une limite réglementaire plafonnée dans 25% de la valeur totale du portefeuille. La principale raison est bien évidemment d'éviter les actifs trop risqués étant donné qu'on a des engagements à honorer à moyen et à long terme.

3.3. Classe non cotée

Il s'agit d'acquérir une part du capital d'une société non cotée en bourse. Cet investissement dépend donc fortement de la nature de la société dont il est question. L'investissement n'étant pas sûr, le règlement a limité à la CMR de ne pas dépasser 5% de la valeur totale du portefeuille d'investissement.

Les principaux risques encourus concernant ce genre d'investissement est le manque de transparence vis-à-vis de la politique de la société et de ses visions futures. Ainsi, il est très difficile de prévoir quand est-ce qu'on censé de vendre ses parts et quand les garder. Il existe également des risques de liquidité. En effet, dans ce genre d'investissement, on ne peut pas vendre ses parts quand on veut car il faut suivre les périodes listées par la société durant lesquelles il est possible de vendre ses parts. Un autre risque est lié au problème de la non-déclaration de tous les gains générés par l'entreprise pour que les hauts-dirigeants s'emparent des bénéfices. Il est donc évident que cette classe est assez risquée.

3.4. Classe immobilière

Il est possible d'investir directement dans l'immobilier et dans des secteurs connexes tels que les habitations, le conseil ou l'urbanisme. Dans les pays étrangers tels que les Etats-Unis, le secteur immobilier réjouit d'une très grande importance puisque le logement constitue une garantie pour la plupart des crédits accordés par les banques. Ce fut le cas avant l'arrivée de la crise financière 2009 où ce marché s'est effondré avant de se rétablir en temps actuel.

Concernant la CMR, la réglementation ne lui accorde pas le droit de dépasser 5% de la valeur totale du portefeuille d'investissement sur la classe non coté. La principale raison de cette limitation est la lourdeur des risques associés à cette classe d'actifs. Tout d'abord, il y a le risque des catastrophes naturelles qui peut détruite les bâtiments. D'autres risques peuvent être encourus également par ce secteur comme le risque de liquidité (il n'est pas facile de vendre rapidement des bâtiments chers), les risques associés à la structure du marché de l'immobilier et les risques associés à l'offre et à la demande.

Pour conclure ce chapitre, nous rappelons que les règles de placement sont pour l'instant très exigeantes puisqu'elles limitent la diversification des placements amenant à borner les gains. La raison est certainement la limitation des pertes, mais il peut être plus judicieux de consacrer une partie du portefeuille pour des placements relativement risqués à haut revenus. La principale raison de la nécessité

d'investissements à haut revenu c'est que le système des retraites est purement social. Ainsi, les cotisants vont bénéficier des retraites pouvant dépasser l'ensemble de leurs cotisations, si jamais ils vivent longtemps. Ceci dit, tout le problème réside dans le besoin de rendre la réserve rentable via des placements stratégiques dans différentes classes actifs risquées et non risquées, notamment les obligations, les actions, l'immobilier et le non coté.

4. Modèles théoriques d'allocation d'actifs

Il existe plusieurs modèles permettant de bien gérer les fonds en les répartissant sur les classes d'actifs disponibles afin de constituer un portefeuille, dit optimal, permettant de dégager une rentabilité maximale.

4.1. Récapitulatif des modèles d'allocation

Durant la phase de recherche, une panoplie des modèles a été explorée afin de choisir les modèles qui paraissent les plus exploitables (au niveau des données éventuellement disponibles) et les plus intéressants pour le cas de la CMR.

Le tableau 5 récapitule certains des modèles étudiés lors de cette phase.

Pour cette étude, les modèles retenus pour la constitution d'un portefeuille optimal sont le Modèle de Leibowitz, le Modèle de Kim et Santomero et le modèle LDI (Liability Driven Investment).

La principale raison du choix de chacun de ces modèles est leur utilité pratique, la disponibilité des données nécessaires lors de l'implémentation de chaque modèle et finalement leur potentiel de fournir des bons résultats compte tenu de leur manière d'analyser les données.

Notons que le modèle LDI exige l'utilisation du modèle de Markowitz. C'est pour cette raison que ce dernier modèle sera également présenté avec plus de détails.

Nous allons, à présent, présenter la philosophie générale de chacun de ces modèles. Les détails techniques feront l'objet de trois chapitres indépendants, un chapitre pour chaque modèle, qui seront entièrement consacrés à leur mise en application.

Tableau 5: Présentation des principaux modèles d'allocation d'actifs étudiés

Modèle	Principe	Limites
Markowitz	Diversification des fonds afin de réduire le risque et augmenter la rentabilité	Ce modèle ne tient pas compte des engagements (le passif)
Adossement par la duration	L'idée de base de ce modèle est que la valeur actuelle de l'actif doit suivre à tout moment celle du passif.	Le portefeuille a besoin d'un rebalancement permanent afin d'égaliser les flux de l'actif à ceux du passif
Sharpe et Tint	Modèle se basant sur la notion du surplus en essayant de maximiser son rendement à travers l'approche classique moyenne/variance.	Le modèle suppose que tous les rendements sont normalement distribués.
Kim et Santomero	Modèle de surplus qui a pour but de minimiser le risque de perte du surplus (mesuré par la variance de la rentabilité du surplus) sous des contraintes sur la rentabilité et sur les poids des actifs et du passif.	Les techniques de Roy ont permis de dépasser certaines limites de ce modèle en permettant ainsi d'introduire une relation entre la solvabilité et l'allocation optimale d'actifs.
Leibowitz	C'est également un modèle qui se base sur la maximisation du surplus, mais défini de façon différente par rapport au modèle de Sharpe et Tint. Cette maximisation est sujette à des contraintes sur l'actif et sur le surplus.	Ce modèle se base sur une hypothèse forte selon laquelle les rentabilités suivent une loi normale
Les modèles stochastiques	Les modèles stochastiques se basent sur des techniques de simulation stochastique (notamment Monte Carlo) afin de modéliser l'évolution de l'actif et du passif ainsi que les variables du marché et les variables démographiques.	L'implémentation sur l'ordinateur demeure très lente à cause des calculs sur lesquels ces modèles se basent.
Liability Driven Investing	Ce modèle vise à générer de la performance, une fois que les engagements sont honorés. Pour cette raison, ce modèle se base sur deux portefeuilles : un portefeuille de couverture et un autre de recherche de performance.	La détermination du portefeuille de couverture, qui est entièrement consacré aux obligations, nécessite une connaissance bien détaillée du marché obligataire (afin de déterminer les rendements des obligations pour chaque maturité ainsi que leurs volatilités).

Source : Adapté par l'auteur

4.2. *Modèle de Markowitz (1952)*

Développé par Markowitz en 1952, ce modèle est un classique pour l'allocation d'actifs le plus répandu. Il se base sur le principe qu'un portefeuille doit être diversifié entre plusieurs classes d'actifs afin de réduire le risque total. C'est aussi un modèle de gestion à long terme qui constitue le noyau dur de la théorie classique de gestion du portefeuille. Plus tard, ce modèle sera amélioré par le MEDAF (Modèles d'évaluation des actifs financiers) et puis l'APT (Arbitrage Pricing Theory).

L'objectif de ce modèle est de trouver les proportions à investir dans chaque classe d'actifs pour maximiser la rentabilité, sous contrainte d'un niveau de risque minimum et d'un ensemble d'autres contraintes qui dépendent du contexte de la mise en application du modèle. Cet objectif peut être également être exprimé autrement : on fixe un niveau de rentabilité donné et on cherche à minimiser le risque.

Le modèle suppose que le risque du portefeuille peut être modélisé par la variance. Cette dernière constitue avec l'espérance de rentabilité les principaux concepts utilisés.

Le modèle repose sur les inputs suivants :

- Le seuil de volatilité (risque du portefeuille à ne pas dépasser) ou la rentabilité visée à atteindre (dans le problème équivalent)
- le nombre de classes d'actifs ciblées
- des contraintes dépendant du contexte économique du portefeuille (notamment les contraintes réglementaires)

La formulation mathématique du modèle est la suivante :

	$\text{Max } E(r_p)$
s/c	$\left\{ \begin{array}{l} w_i \geq 0 \\ \sum w_i = 1 \\ \sigma^2(r_p) \leq \bar{\sigma}^2 \\ \text{Contraintes réglementaires} \end{array} \right.$

Ou (problème équivalent)

	$\text{Min } \sigma^2(r_p)$
s/c	$\left\{ \begin{array}{l} w_i \geq 0 \\ \sum w_i = 1 \\ E(r_p) \geq \bar{r} \\ \text{Contraintes réglementaires} \end{array} \right.$

Les limites du modèle sont :

- l'utilisation de la variance comme mesure de risque du portefeuille est défaillante. En effet, cette statistique est une mesure de dispersion qui ne tient pas compte de dessus ou de dessous de l'espérance.
- la non prise en compte du passif.

4.3. Liability Driven Investment

L'investissement guidé par le passif (ou Liability Driven Investment en anglais) est un modèle d'allocation d'actifs dont le but est double. Son premier objectif est de couvrir les engagements et le second est de générer la performance. C'est pour cette raison que ce modèle construit deux portefeuilles indépendants:

- Un portefeuille d'adossement (Liability Hedging Portfolio « LHP ») qui permet d'assurer la couverture du passif. Ce portefeuille, appelé également le portefeuille obligataire, est uniquement consacré aux obligations. Ainsi, chercher une allocation optimale dans ce portefeuille revient à chercher une allocation des fonds entre les obligations de différentes maturités.
- Un portefeuille de recherche de performance (Performance Seeking Portfolio « PSP ») qui permet de générer de la performance. Ce portefeuille est entièrement investi dans les autres classes d'actifs qui sont plus risquées et plus rentables, notamment les actions, l'immobilier et le non coté.

Dans notre étude, le portefeuille LHP représentera 80% du portefeuille global car le principal objectif de la CMR est avant tout d'honorer ses engagements envers ses assurés. Le reste, soit 20% du portefeuille global, sera donc consacré au portefeuille PSP.

La construction du portefeuille LHP passe par les étapes suivantes :

- Détermination de la sensibilité du passif
- Détermination de la sensibilité de l'actif
- Choix d'une mesure d'adossement entre l'actif et le passif.
- Formulation du problème

D'autre part, la construction du portefeuille PSP, assurée par le fameux modèle de Markowitz (1952), passe par les étapes suivantes :

- Détermination des inputs du modèle
- Détermination des paramètres clés du modèle
- Formulation du problème d'optimisation

Le détail de toutes ces étapes fera l'objet d'un chapitre indépendant entièrement consacré à la LDI et à son application pratique.

4.4. Modèle de Leibowitz (1992)

Ce modèle s'applique uniquement sur un portefeuille composé d'actions et d'obligations. Il permet de déterminer la part optimale des actions dans le portefeuille (et donc systématiquement celle des obligations), ainsi que la duration des obligations permettant de maximiser la rentabilité du surplus. Cette maximisation est sujette à des contraintes sur l'actif et sur le passif. Notons que nous entendons par le surplus la différence entre l'actif et le passif.

La rentabilité du surplus utilisée dans ce modèle est calculée comme suit :

$$R_s = \frac{S_1 - S_0}{P_0}$$

Avec : $S_1 - S_0$: La différence entre le surplus final et le surplus initial
 P_0 : La valeur initiale du passif

Le modèle consiste tout d'abord à déterminer le plan de projection, à savoir notamment le nombre d'années de projection. Ensuite, nous calculons le surplus associé à chaque année. Rappelons que ce modèle est basé sur le principe selon lequel afin de bien gérer un portefeuille d'une caisse de prévoyance ou de retraite, il faut tenir compte non seulement de l'actif mais également du passif.

Ainsi, le modèle cherche à maximiser la rentabilité du surplus en prenant en considération deux contraintes : une contrainte de rentabilité minimale du surplus et une autre de rentabilité minimale de l'actif.

Ensuite, nous pourrons alors déterminer la part optimale α^* des actions dans le portefeuille (et part suite celle des obligations), ainsi que la duration de la composante obligataire D_o^* permettant de maximiser la rentabilité du surplus (et part suite celle du portefeuille). Les formules de la détermination de ces paramètres seront explicitées dans le chapitre 4 entièrement consacré à ce modèle.

L'ensemble des portefeuilles optimaux selon le modèle de Leibowitz seront l'intersection entre la partie supérieure de la droite (représentant la contrainte sur l'actif) et l'intérieur de l'œuf de Leibowitz (représentant la contrainte sur le surplus).

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

Le portefeuille ayant la rentabilité la plus élevée correspondra à l'intersection entre la droite et l'œuf de Leibowitz. Les coordonnées de ce point $(R_{pf}^*, \sigma_{pf}^*)$ permettront d'achever le but de ce modèle, à savoir la détermination de α^* et σ_0^* (qui nous donnera D_0^*).

Le modèle de Leibowitz est sujet à certaines limites à cause des hypothèses fortes sur lesquelles il est basé, notamment :

- Les obligations de toute maturité fournissent le même rendement ;
- La volatilité de la composante obligataire σ_0 est proportionnelle à sa durée ;
- Le rendement des obligations et des actions suit une loi normale.

4.5. Modèle de Kim et Santomero (1988)

Le modèle de Kim et Santomero est appliqué un modèle d'allocations d'actifs appliqué pour l'ensemble des classes d'actifs. Ce modèle se base également, à l'instar du modèle de Leibowitz, sur la notion de rentabilité de surplus. Cependant cette

dernière est définie autrement : $R_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$

Avec S_1 : surplus à la fin de la période et S_0 : surplus au début de la projection.

Rappelons que nous entendons par le surplus, la différence entre l'actif et le passif.

Notre but est de chercher à maximiser cette rentabilité sous contrainte d'un niveau de risque maximal à ne pas dépasser (déterminé par la volatilité de la rentabilité du surplus).

Pratiquement, nous cherchons à maximiser la rentabilité de surplus exprimée, autrement comme le suppose le modèle, par :

$$R_S = w_A R_A + w_P R_P$$

Avec : $w_A = \sum_i \frac{A_0^i}{S_0}$; $w_P = -\frac{P_0}{S_0}$ et tel que $w_A + w_P = 1$

5. Méthodologie de l'étude

La méthodologie proposée pour mener cette étude est la suivante :

- Dans un premier temps, nous allons calculer certains paramètres jugés nécessaires pour l'application de chacun des trois modèles. Ainsi, une étude sera menée au niveau des marchés représentant les différentes classes d'actifs afin d'en déduire

la rentabilité et la volatilité moyennes annuelles de chacun de ces marchés. Signalons que les données sur la classe immobilière et non cotée seront fournies par la CMR à cause de la carence des données au niveau de ces deux marchés. Ensuite, nous analyserons la corrélation entre ces marchés;

- Après, c'est le passage en action. Chaque modèle exploitera les données préparées selon sa propre philosophie afin de pouvoir construire le portefeuille optimal. Ainsi, chacun des trois modèles fournira sa rentabilité et sa volatilité (son degré d'exposition au risque), ce qui permettra de pouvoir réaliser une comparaison sensée.
- Finalement, nous allons analyser et comparer les résultats obtenus afin de pouvoir formuler des recommandations pour la CMR.

6. Préparation et traitement des outils de l'étude

6.1. Introduction

La modélisation de l'actif s'appuie en grande partie sur les générateurs de scénarios économiques (GSE).

Un scénario économique peut être défini comme « *une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt* » (Planchet, Théron et Kamega, 2009). L'utilité d'un générateur de scénarios économiques réside dans sa puissance à estimer la valeur future des actifs gérés ainsi que celle du passif.

La construction d'un GSE se fait par plusieurs modèles, qu'on peut classer selon deux grandes catégories (Armel, 2010):

- *Les modèles composites* : ce sont des modèles qui traitent chaque classe d'actifs comme un cas à part, ce qui permettra par la suite de les rassembler afin de déduire une projection globale de l'ensemble de l'actif. Ainsi, on utilise souvent le modèle de Black et Scholes pour modéliser les actions et l'immobilier, et le modèle de Vasicek pour le taux d'intérêt et l'inflation.
- *Les modèles intégrés* : ces modèles permettent de modéliser l'ensemble des classes d'actifs en une seule fois de manière à ce que les prix de celles-ci soient expliqués par une variable appelée variable de référence. Un exemple classique de ces modèles est celui de Wilkie où le prix des actions et de l'immobilier ainsi que le taux d'intérêt sont décrits par l'inflation.

Il est évident que les modèles intégrés adoptent une approche plus globale et permettent ainsi de modéliser l'actif de manière plus simple mais moins concise, puisqu'ils ne tiennent pas en compte les spécificités de chaque classe d'actif.

C'est pour cette raison que nous allons adopter l'approche des modèles composites durant la modélisation de l'actif, étant donné que chaque marché d'actifs sera représenté par un indice correspondant.

6.2. Préparation de la courbe des taux

La courbe des taux est une courbe qui représente le taux d'intérêt associé à chaque maturité, à une date donnée. En pratique, il existe plusieurs courbes des taux, que nous pouvons distinguer en deux grandes familles (Théron, 2013) :

- Courbes de marché : ces courbes sont « *construites directement à partir des cotations du marché* », comme exemple la courbe de rendement des obligations
- Courbes implicites : ces courbes sont « *construites indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations* », comme c'est le cas de la courbe de taux zéro-coupon.

Pour le cas de notre étude, nous sommes plutôt intéressés par des obligations zéro-coupons. Ainsi, nous sommes obligés de construire une courbe de taux zéro-coupon à partir d'une courbe du marché. La méthode qui nous permettra d'effectuer ce processus est le bootstrapping.

La courbe zéro-coupon sera modélisée lors de l'actualisation des flux de l'actif et du passif et cette opération est d'un intérêt capital lors de l'implémentation des modèles.

Méthode bootstrapping :

Le principe de bootstrapping est que le prix théorique d'une obligation est égal à la somme des flux actualisés au taux zéro-coupon. Ceci nous permet ainsi d'extraire la valeur de ce taux.

Ainsi, pour le cas d'une obligation ayant une maturité inférieure à un an, nous pouvons facilement extraire la valeur de taux zéro coupon $R(0,1)$ (i.e. taux zéro-coupon pour une obligation de maturité d'un an).

Pour le cas d'une obligation ayant une maturité allant de 1 an à 2 ans, nous supposons que nous avons une obligation versant un coupon puis un coupon et remboursement lors de sa maturité. Le premier flux peut être facilement actualisé grâce au taux zéro-coupon que nous avons déjà calculé grâce à l'obligation ayant une maturité inférieure

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

à un an. Ensuite, l'actualisation du dernier flux nous permettra de déterminer la valeur de taux zéro-coupon correspondant à la maturité de cette dernière obligation.

Pour le cas d'une obligation à maturité entre 2 ans et 3 ans, nous refaisons la même procédure dans le dernier cas et ainsi de suite pour les autres maturités.

Un exemple numérique et illustratif est dans l'annexe I.

6.3. Modélisation des classes d'actifs

Rappelons que notre objectif étant de chercher l'allocation optimale des fonds de la caisse des retraites entre les différentes classes d'actifs, et non pas une allocation intra-actifs, le procédé de modélisation d'actifs se basera donc sur des indices globaux permettant de mesurer la performance du marché que chacun représente. Ainsi, les indices qui sont retenus pour cette fin sont les suivants :

- Pour le marché des actions : Moroccan All Shares Index (MASI)
- Pour le marché obligataire : Moroccan Bonds Index (MBI)
- Pour l'immobilier et le non coté, des données représentatives sont fournies par la CMR.

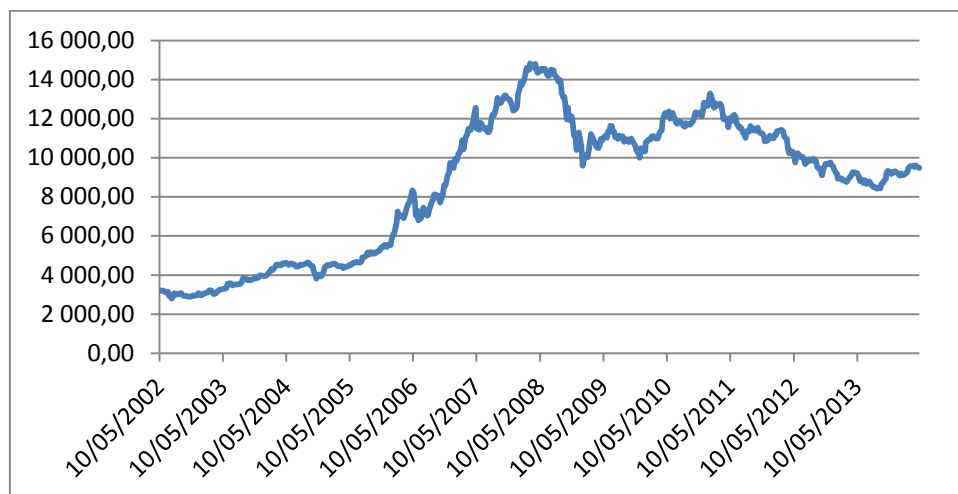
6.3.1. Analyse du marché boursier

Ce marché est représenté par l'indice MASI qui est un indice principal de la bourse de Casablanca. Il est composé de toutes les valeurs cotées et permet de donner une idée sur la santé financière du marché boursier marocain. C'est dans ce sens qu'il est intéressant de bien analyser sa performance dans le passé afin de pouvoir prendre des décisions stratégiques au niveau de l'allocation d'actifs.

La base de données utilisée dans ce sens contient le cours journalier de l'indice MASI de 10/05/2002 jusqu'au 06/05/2014. Afin d'harmoniser l'analyse de l'indice MASI avec celle de l'indice MBI (voir chapitre suivant), ces données ont été transformées en données hebdomadaires. Ensuite, la mission fondamentale sera de calculer la performance hebdomadaire de l'indice pour ensuite en déduire une moyenne annuelle de sa rentabilité ainsi que sa volatilité.

Le graphe suivant montre l'attitude de cours MASI depuis sa création en 10/05/2002 jusqu'au 02/05/2014.

Figure 8: Cours hebdomadaires (en MAD) de clôture de l'indice MASI, du 10/05/2002 et 02/05/201



Source : Site web de la Bourse de Casablanca

Ce graphe montre que ce cours a passé d'environ 4 grades phases. La première phase date depuis sa création jusqu'à mi-Mai 2008 qui est marquée par une hausse progressive des cours puisque l'index est encore nouveau. Ensuite, vient une période de déclin qui s'allonge jusqu'à Mai 2009, ce qui est principalement dû aux effets de la crise financière internationale sur le marché boursier marocain. Entre Mai 2009 et Mai 2011, les cours ont l'air de suivre une tendance d'alternation entre la hausse et la baisse ce qui est plutôt normal pour un marché boursier. Finalement, depuis Mai 2011, les cours ont plutôt l'air d'une chute progressive.

Le rendement annuel de l'indice MASI calculé est synthétisé dans le tableau 6.

Tableau 6: Rendement moyen annuel de cours de l'indice MASI

Année	Rendement annuel moyen
2002	-4,66%
2003	27,40%
2004	14,42%
2005	20,78%
2006	56,79%
2007	30,01%
2008	-12,65%
2009	-3,46%
2010	19,96%
2011	-13,11%
2012	-15,37%
2013	-1,54%
2014	2,99%

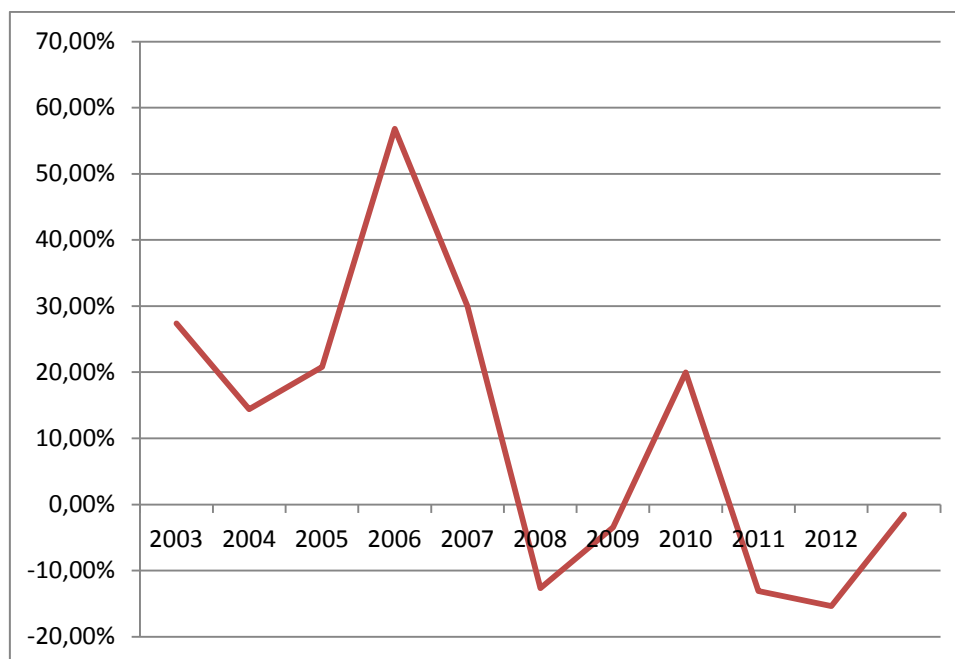
Source : Elaboré par l'auteur

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

Nous remarquons que ce rendement est très volatile, ce qui est normal pour un marché boursier. Notons cependant que la moyenne représentant l'année 2014 n'est pas très significative étant donné que l'année est encore en cours.

Une représentation graphique de ces moyennes nous permettra de voir en mieux l'allure générale de la performance annuelle de l'indice boursier (figure 9).

Figure 9 : Moyennes annuelles de la performance de MASI



Source : Elaboré par l'auteur

Ces moyennes nous permettent de calculer la performance moyenne de l'indice MASI durant la période 2002-2014 : $\mu = 11,20\%$

De même, une étude similaire est faite sur la volatilité des rendements.

La procédure de son calcul est simple : la première tâche consiste à calculer l'écart-type hebdomadaire pour chaque année. Ceci nous permettra de déterminer la variance, qui n'est autre que l'écart-type multiplié par lui-même. Ensuite, cette variance est annualisée – en la multipliant par le nombre de semaines de chaque année (52 ou 53 selon l'année) – et finalement nous déduisons l'écart-type annualisé pour chaque année, qui est illustré dans le tableau 7.

Tableau 7 : Volatilités annuelles de l'indice MASI entre 2002 et 2014

Année	Volatilité annuelle
2002	12,35%
2003	12,75%
2004	14,97%
2005	9,64%
2006	23,74%
2007	16,38%
2008	17,80%
2009	16,62%
2010	10,74%
2011	11,39%
2012	11,85%
2013	8,84%
2014	3,29%

Source : Elaboré par l'auteur

Ce tableau nous permettra donc de déduire la volatilité annuelle moyenne de l'indice MASI durant la période 2002-2014 : $\sigma = 14,07\%$

En guise de conclusion, l'étude de l'indice MASI nous a permis d'en déduire le rendement moyen annuel ainsi que la volatilité annuelle moyenne associés au marché boursier marocain qui sont rappelés ci-dessous :

$$\begin{cases} \mu = 11,20\% \\ \sigma = 14,07\% \end{cases}$$

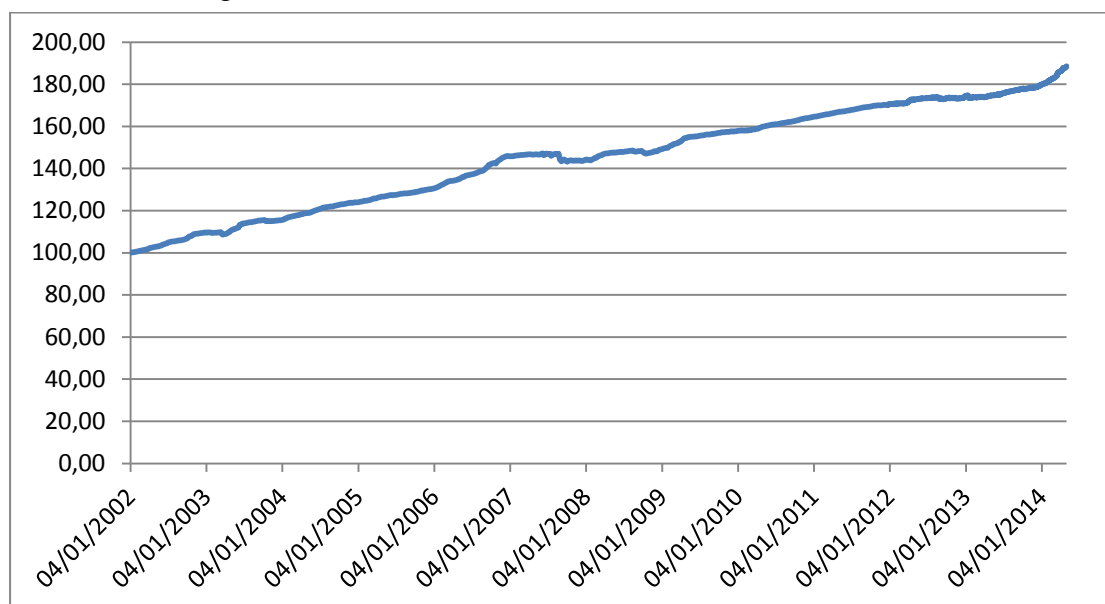
6.3.2. Analyse du marché obligataire

Ce marché est représenté par l'indice MBI est un indice qui reflète la performance et la santé financière du marché obligataire marocain. Cet indice est publié par BMCE Capital. Il est stratifié en quatre sous indices, chacun correspondant aux cours, moyen, long et très long terme. En outre, il existe un indice MBI Global permettant de donner une vue globale sur le marché obligataire en tenant compte de tous ces termes.

La base de données utilisée représente les variations hebdomadaires du cours de l'indice MBI entre 10/05/2002 jusqu'au 02/05/2014. Ensuite, la mission fondamentale sera de calculer la performance hebdomadaire de l'indice pour ensuite en déduire une moyenne annuelle de sa rentabilité ainsi que sa volatilité.

La figure 10 illustre l'évolution de MBI Global depuis 10/05/2002 jusqu'à 02/05/2014.

Figure 10 : Evolution de l'indice MBI entre 2002 et 2014



Source : Elaboré par l'auteur à partir des données de la CMR

En observant l'allure de cette courbe, nous remarquons que le cours avance lentement mais sûrement et c'est ce qui caractérise les marchés obligataires.

En utilisant la même analyse que celle adoptée pour l'indice MASI, nous retrouvons le rendement moyen annuel de l'indice MBI entre 2002 et 2014 illustré dans le tableau 8.

Tableau 8: Rendement moyen annuel de cours de l'indice MBI entre 2002 et 2014

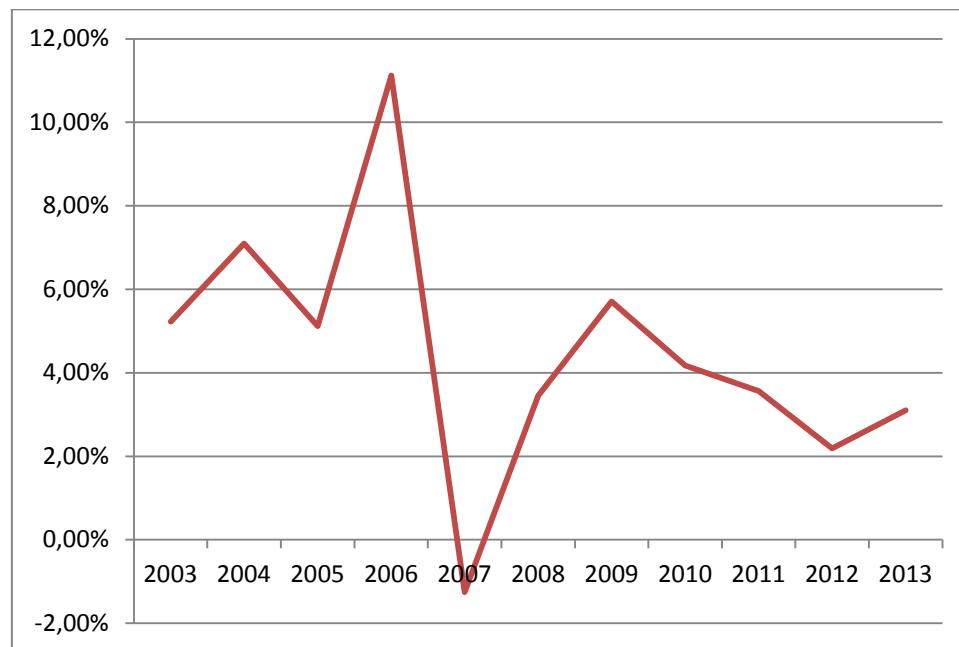
Année	Moyenne annuelle
2002	6,32%
2003	5,23%
2004	7,09%
2005	5,12%
2006	11,12%
2007	-1,26%
2008	3,46%
2009	5,71%
2010	4,17%
2011	3,56%
2012	2,19%
2013	3,10%
2014	4,82%

Source :Elaboré par l'auteur

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

Afin de pouvoir mieux observer la tendance de cette rentabilité, nous traçons ces données sur un graphique qui nous permettra de mieux expliciter ces chiffres. Ce tracé est illustré dans la figure 11.

Figure 11 : Evolution de la performance moyenne de l'indice MBI entre 2002 et 2014



Source : Elaboré par l'auteur

Si on exclut l'année 2007, durant laquelle la performance a été négative (-1,26%), le rendement moyen reste en général assez intéressant pour les investisseurs voulant éviter le risque.

Un simple calcul de la moyenne de ces performances permet de donner une rentabilité moyenne durant cette période : $\mu = 4,5\%$

A présent, l'intérêt est tourné vers le calcul de la volatilité. La même procédure, suivie pour la même fin dans le cas de l'indice MASI, sera réutilisée dans ce cas. Ainsi, nous aurons les volatilités annuelles représentées dans le tableau 9.

Tableau 9 : Volatilités annuelles de l'indice MBI entre 2002 et 2014

Année	volatilité annuelle
2002	0,99%
2003	2,07%
2004	0,65%
2005	0,45%
2006	1,31%
2007	2,60%
2008	1,19%
2009	0,87%
2010	0,48%
2011	0,24%
2012	0,88%
2013	0,94%
2014	0,75%

Source : Elaboré par l'auteur

La moyenne de ces écart-types permet de déduire la volatilité moyenne annuelle entre la période 2002-2014 : $\sigma = 1,062\%$

Ainsi, l'étude de l'indice du marché obligataire MBI permet de trouver les paramètres qui nous seront utiles lors de l'application des modèles de l'allocation d'actifs. Il s'agit en particulier du rendement moyen annuel et de la volatilité moyenne annuelle, de cet indice, qui sont rappelés ci-dessous.

$$\begin{cases} \mu = 4,5\% \\ \sigma = 1,062\% \end{cases}$$

Détermination des rendements des obligations de différentes maturités :

Pour cette raison, on réutilise l'indice MBI, sauf que cette fois on utilise des indices spécifiques pour chaque ensemble de maturités. En effet, l'indice MBI est stratifié en quatre catégories ; à savoir MBI pour le court terme, MBI pour le moyen terme, MBI pour le moyen long terme et finalement MBI pour le long terme.

Le tableau suivant synthétise les maturités auxquelles correspondent chacun des MBI que nous venons de mentionner :

Tableau 10 : Stratification de l'indice du marché obligataire MBI

Stratification de l'indice MBI	L'ensemble des maturités correspondantes
MBI court terme	Moins de 364 jours inclus
MBI moyen terme	Entre 365 et 5 ans inclus
MBI moyen long terme	Entre 5 et 10 ans inclus
MBI long terme	Supérieur à 10 ans

Source : Article publié sur wikipedia.org

Le but de ce chapitre est de déterminer la rentabilité annuelle moyenne des obligations de différentes maturités, ainsi que leurs volatilités et la matrice de corrélation associée à ces rendements.

Pour ceci, la même démarche adoptée durant l'analyse de l'indice MBI global sera adoptée pour chacun de ces quatre indices. Ainsi, nous aurons pour chaque période, une rentabilité et une volatilité correspondante. Ensuite, la matrice de corrélation entre ces rendements sera établie.

La première tâche est donc de déterminer le rendement ainsi que la volatilité des obligations pour chaque ensemble de maturités correspondantes à chacun des quatre indices MBI mentionnés ci-dessus.

Comme nous venons de mentionner, en adoptant exactement le même raisonnement utilisé lors de l'analyse de l'indice MBI Global et en l'appliquant à chacun de ces indices, qui représentent les différentes maturités, nous aboutirons à calculer le rendement et la volatilité correspondante à chaque ensemble de maturités. Le tableau 11 résume le calcul de ces paramètres.

Tableau 11 : Valeurs des rendements et volatilités pour obligations de différentes maturités

	Rentabilité annuelle moyenne	Volatilité annuelle moyenne
MBI court terme	3,62%	0,11%
MBI moyen terme	3,79%	0,60%
MBI moyen long terme	3,57%	1,30%
MBI long terme	2,82%	2,16%

Source : Elaboré par l'auteur

Ce tableau synthétique montre que la rentabilité d'une obligation devient plus intéressante lorsqu'elle a une grande maturité. Cependant, nous constatons un résultat

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

assez surprenant dans le cas du long terme où la rentabilité des obligations devienne petite.

La matrice de corrélation entre les rentabilités des différentes maturités est ensuite calculée à l'aide de l'Utilitaire d'analyse d'Excel. Elle est donnée par le tableau 12.

Tableau 12 : Matrice de corrélation entre les rendements des obligations de différentes maturités

	MBI CT	MBI MT	MBI MLT	MBI LT
MBI CT	1,00	0,55	0,17	0,26
MBI MT	0,55	1,00	0,52	0,37
MBI MLT	0,17	0,52	1,00	0,29
MBI LT	0,26	0,37	0,29	1,00

Source : Elaboré par l'auteur

Cette matrice montre la corrélation parfaite entre le rendement des obligations de différentes maturités. Cette corrélation baisse dans le cas où la différence des maturités augmente.

6.3.3. L'immobilier et non coté

Pour ces deux classes d'actifs, une sévère carence, au niveau des indices et des données permettant une bonne analyse de chacun d'eux afin de pouvoir déterminer leur rendement ainsi que leur volatilité, a été constatée. Cependant, les données qui seront exigées afin de poursuivre l'étude ont été gracieusement offertes par la CMR pour ne pas limiter l'allocation d'actifs aux deux classes d'actifs dont l'analyse a été achevée, à savoir les obligations et les actions.

Le tableau suivant résume la valeur des paramètres permettant la poursuite de l'étude.

Tableau 13 : Rentabilité et volatilité des classes d'actifs Non coté et Immobilier

Classes d'actifs	Rentabilités attendues	Volatilité (Ecart type)
Non coté	15%	25%
Immobilier	7%	14%

Source : Caisse Marocaine des Retraites

Chapitre 2 : Données et méthodologie de l'étude

A présent, la valeur des paramètres définissant chaque classe d'actif sont toutes disponibles. Tout l'intérêt se porte actuellement sur la construction de la matrice de corrélation entre ces différentes classes d'actifs.

Corrélation entre les différentes classes d'actifs :

La matrice de corrélation (et implicitement la matrice de covariance) s'obtient facilement avec le logiciel SPSS que nous appliquons sur les rendements des différentes classes d'actifs.

Cependant, comme mentionné ci-dessus, certains rendements ne peuvent être obtenus, notamment ceux de l'immobilier et de non coté. Dans ce sens, la corrélation dans laquelle intervient l'une de ces deux classes est une donnée qui a été calculée par la CMR selon ses propres méthodes.

Le tableau suivant donne la matrice de corrélation entre les différentes classes d'actifs :

Tableau 14 : Matrice de corrélation entre les classes d'actifs

	Actions	Non coté	Obligations	Immobilier
Actions	100%	75%	4,7%	20%
Non coté	75%	100%	0%	50%
Obligations	4,7%	0%	100%	0%
Immobilier	20%	50%	0%	100%

Source : Caisse Marocaine des Retraites

Nous remarquons que la corrélation entre le marché des obligations et le non coté est carrément nulle. La même remarque peut être faite entre le marché de l'immobilier et les obligations. Ces fortes hypothèses peuvent avoir des conséquences un peu lourdes sur nos résultats.

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Dans ce chapitre, nous allons chercher la composition optimale de portefeuille de la CMR moyennant le modèle de la LDI.

1. Présentation du modèle

Ce chapitre est entièrement consacré à l'application du modèle LDI afin de construire un portefeuille optimal selon la philosophie de ce modèle. On rappelle que la LDI est un modèle qui se base sur la construction de deux portefeuilles ; un portefeuille de couverture LHP et un autre portefeuille de génération de performance PSP.

Avant de passer en détails sur la manière avec laquelle ce modèle définit une allocation optimale, il s'avère nécessaire de définir certaines notions qui doivent être assimilées afin de bien comprendre le raisonnement suivi lors de l'élaboration de ce modèle. Ces principales notions sont explicitées ci-dessous :

- Sensibilité (S) : « variation du cours (exprimée en pourcentage) d'une obligation, générée par une variation de son taux de rendement actuariel » (J-R.SULZER). Mathématiquement parlant, il s'agit de la dérivée du cours de l'obligation par rapport à une variation du taux. Cette quantité sera ensuite rapportée au cours de l'obligation afin de l'exprimer en pourcentage.
- Tracking Error (TE) : c'est une « mesure du risque relatif pris par un fonds par rapport à son indice de référence. Elle est donnée par l'écart type annualisé des performances relatives d'un fonds par rapport à son indice de référence. » (cf. sicavonline.fr). Cette statistique d'adossement permet de préciser la différence entre le revenu d'un portefeuille et le revenu correspondant à une référence.

La LDI est une approche d'investissement permettant de bien gérer et suivre à la fois l'actif et le passif. Ce modèle vise à générer de la performance, une fois que les engagements sont honorés.

Ainsi, la mise en œuvre de ce modèle passe par deux grandes étapes : la première est de construire un portefeuille optimal composé des obligations de différentes maturités (portefeuille LHP) et la seconde étape est de construire le portefeuille qui permet de générer de la performance en investissant sur des actifs plus rentables mais plus risqués (portefeuille PSP). Afin de ne pas mettre sous risque beaucoup de fonds, c'est le portefeuille obligataire qui prend la plus grande part du poids dans le portefeuille global. Rappelons que le portefeuille LHP représente 80% du portefeuille global pour

les raisons déjà citées lors de la première présentation de ce modèle durant le chapitre 2.

1.1. Première étape : Définition de la structure du portefeuille LHP

Cette étape est clairement très importante car c'est ce portefeuille qui constitue la majeure partie du portefeuille global. Il est donc nécessaire de bien s'assurer que les flux générés par l'actif suivront ceux du passif.

Afin de constituer ce portefeuille, on suit les étapes suivantes :

1.1.1. Détermination de la sensibilité du passif

Cette étape consiste à déterminer la sensibilité du passif, qui est considéré comme une succession d'obligations zéro-coupon de maturité τ_i (exprimée en année).

Avant de pouvoir déterminer la sensibilité du passif selon chaque pilier de risque i , il s'avère tout d'abord nécessaire de déterminer la valeur actuelle du passif, notée L . Celle-ci est calculée comme suit :

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+R_i)^{\tau_i}}$$

Avec :

N : Le nombre des flux (le nombre d'années de projection)

C_i : La valeur du passif à la $i^{\text{ème}}$ année. En d'autres termes, c'est la valeur de l'échéancier de maturité τ_i

R_i : Le taux actuariel du zéro-coupon de maturité τ_i

Ainsi, la sensibilité du passif (qui est assimilé à une obligation zéro-coupon de maturité τ_i) est calculée comme suit :

$$S_i^{\text{Passif}} = \frac{\tau_i C_i}{L (1+R_i)^{\tau_i+1}}$$

avec $i=1 \dots N$

1.1.2. Détermination de la sensibilité de l'actif

De la même manière, nous calculons la sensibilité de l'actif. Sauf que pour cette fois-ci, il faut tout d'abord calculer la valeur actualisée de l'ensemble des flux de l'actif, notée P .

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Celle-ci est calculée comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+R_i)^{\tau_i}}$$

Avec :

N : Le nombre des flux

C_i : La valeur de l'actif à la $i^{\text{ème}}$ année

R_i : Le taux actuariel du zéro-coupon de maturité τ_i

La sensibilité de cette obligation est ensuite calculée comme suit :

$$S_i^{Actif} = \frac{\tau_i C_i}{P (1+R_i)^{\tau_i+1}}$$

avec $i=1 \dots N$

1.1.3. Choix d'une mesure d'adossement entre l'actif et le passif

Afin de pouvoir mesurer l'écart d'adossement entre l'actif et le passif, il est très nécessaire de choisir une mesure permettant d'atteindre cette fin. Cette mesure est le « Tracking Error » calculé comme suit :

$$TE_{Adossement} = \sqrt{A^t * M * A}$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{20} \end{pmatrix} * G = \begin{pmatrix} \sigma_1 (S_1^{Passif} - S_1^{Actif}) \\ \sigma_2 (S_2^{Passif} - S_2^{Actif}) \\ \dots \\ \sigma_{20} (S_{20}^{Passif} - S_{20}^{Actif}) \end{pmatrix}$$

G : Vecteur des écarts de sensibilités entre l'actif et le passif

$$G = \begin{pmatrix} S_1^{Passif} - S_1^{Actif} \\ S_2^{Passif} - S_2^{Actif} \\ \dots \\ S_{20}^{Passif} - S_{20}^{Actif} \end{pmatrix}$$

A^t : la matrice transposée de A

M : la matrice des corrélations entre les maturités des obligations

$$M = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Notons que σ_i représente la volatilité du passif de la $i^{\text{ème}}$ année qui est supposé être assimilé à une obligation zéro-coupon de maturité τ_i .

1.1.4. Formulation du problème

Le portefeuille LHP sera ainsi défini comme l'allocation qui minimise la mesure d'adossement (Tracking Error) sous les contraintes suivantes :

- Les écarts actif-passif en termes de sensibilité ne doivent pas dépasser un seuil donné, qu'on note \bar{S}
- La Tracking Error ne doit pas dépasser un seuil, qu'on note \overline{TE}

Le problème sera ainsi formulé comme suit :

	$\text{Min } TE_{\text{Adossement}}$
sous contraintes :	$\left S_i^{\text{Passif}} - S_i^{\text{Actif}} \right \leq \bar{S}$
	$TE_{\text{Adossement}} \leq \overline{TE}$
	$\sum X_i \leq 1$
	$X_i \geq 0$

La résolution de ce problème permet de déterminer la composition du portefeuille LHP constitué des obligations de différentes maturités.

Le rendement du portefeuille constitué est donné par la relation suivante :

$$R_{LHP} = \sum X_i R_i$$

Avec X_i : Le poids accordé à l'obligation τ_i de maturité et de rendement R_i

1.2. Deuxième étape : Définition de la structure du portefeuille PSP

On rappelle que ce portefeuille a pour objectif de créer de la performance une fois que la couverture du passif est assurée.

La méthode qui sera utilisée dans ce portefeuille est le fameux modèle de Markowitz (1952) qui passe par les étapes suivantes :

1.2.1. Détermination des inputs du modèle :

Les rendements des différentes classes d'actifs (Actions, Obligations, Immobilier et le Non coté) ;

Les volatilités des différentes classes d'actifs ;

La matrice de covariance entre les rendements des classes d'actifs.

1.2.2. Détermination des paramètres clés du modèle :

Le rendement du portefeuille : $R_p = \sum X_i R_i$ où R_i correspond au rendement de l'actif i

La volatilité du portefeuille : $\sigma_p = \sqrt{V(R_p)} = \sqrt{\sum \sum X_i X_j \text{cov}(R_i, R_j)}$

1.2.3. Formulation du problème d'optimisation

	$\text{Min } V(R_p)$
sous contraintes	$E(R_p) \geq R_{\min}$ $\sum X_i \leq 1$ $X_i \geq 0$ $\text{corr}(R_{LHP,t}, R_{PSP,t}) \approx 0$

La résolution de ce problème permet de déterminer la composition optimale du portefeuille PSP.

Finalement, la rentabilité finale du portefeuille sera définie comme suit :

$$R_{LDI} = 0,8 * R_{LHP} + 0,2 * R_{PSP}$$

x représente le poids affecté au portefeuille LHP par rapport au portefeuille global.

2. Implémentation du modèle aux données de la CMR

L'intérêt est à l'heure actuelle concentré sur la mise en application de ce modèle sur la base des données fournie par la CMR.

L'horizon de projection est fixé à 15 ans, et afin de rendre les calculs plus fluides, nous nous plaçons à la fin de l'année la plus proche de notre étude soit le 31/12/2013.

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Ainsi, notre plan de projection est compris entre le 31/12/2013 jusqu'au 31/12/2028.

Les taux de projection qui seront utilisés durant l'étude sont ceux correspondant à la courbe de taux zéro-coupon de 31/12/2013.

Les rendements et les volatilités des obligations de différentes maturités ont déjà été calculés lors de l'analyse des quatre indices MBI. Nous récapitulons dans le tableau 15 l'ensemble de ces résultats dont nous aurons besoin lors de cette étude.

Tableau 15 : Rendements et volatilités des obligations de différentes maturités

Maturité (années)	Rendements	Volatilités
1	3,623%	0,017%
2	3,790%	0,090%
3	3,790%	0,090%
4	3,790%	0,090%
5	3,790%	0,090%
6	3,570%	0,193%
7	3,570%	0,193%
8	3,570%	0,193%
9	3,570%	0,193%
10	3,570%	0,193%
11	2,816%	0,333%
12	2,816%	0,333%
13	2,816%	0,333%
14	2,816%	0,333%
15	2,816%	0,333%

Source : Elaboré par l'auteur

La première étape consiste tout d'abord à actualiser l'ensemble des flux de l'actif et du passif (ces flux sont actualisés par la courbe des taux zéro-coupons illustrée dans l'annexe II). Ce calcul permettra ensuite de calculer la sensibilité de l'actif et du passif de chaque année. Le tableau 16 résume les résultats obtenus.

Tableau 16 : Calcul des sensibilités de l'actif et du passif

	Actif Actualisé	Passif Actualisé	Sensibilité Actif	Sensibilité Passif
2014	2287,98	1278,58	0,09	0,07
2015	2754,91	1355,87	0,22	0,15
2016	1892,88	1298,19	0,23	0,21
2017	2092,73	1369,42	0,34	0,29
2018	1863,58	1304,04	0,37	0,35
2019	1947,68	1379,78	0,47	0,44
2020	2294,24	1306,24	0,64	0,49
2021	1732,83	1379,47	0,55	0,59
2022	1855,49	1294,89	0,67	0,62
2023	1667,66	1362,00	0,66	0,72
2024	1176,27	1434,21	0,52	0,84
2025	1127,70	1496,25	0,54	0,95
2026	1016,78	1536,85	0,53	1,06
2027	959,83	1563,02	0,53	1,16
2028	913,41	1558,46	0,54	1,24

Source : Elaboré par l'auteur à partir des données de la CMR

A présent, nous avons intérêt à calculer la mesure d'adossement Tracking Error définie comme suit $TE_{Adossement} = \sqrt{A^t * M * A}$

Nous nous intéressons maintenant à calculer les matrices A et M qui sont déjà définies lors de la présentation du modèle.

Le vecteur A est le produit des écarts des sensibilités entre le passif et l'actif, pour chaque année, pondérés par la volatilité correspondante à chaque année.

Ainsi, par exemple, pour la première année, la valeur de premier élément de vecteur A est :

$$A_1 = \sigma_1 * (S_1^{Passif} - S_1^{Actif})$$

L'application numérique donne :

$$A_1 = 0,017\% * (0,069097909 - 0,092802579)$$

$$A_1 = -3,97153 * 10^{-6}$$

En répétant cette opération sur l'ensemble des années de projection, nous obtenons le vecteur A suivant :

Tableau 17 : Vecteur du produit des écarts de sensibilités et les volatilités

La i ^{ème} année	A
1	-3,97153E-06
2	-6,86722E-05
3	-1,76969E-05
4	-3,8704E-05
5	-2,27161E-05
6	-5,08973E-05
7	-0,000300436
8	6,50774E-05
9	-9,05184E-05
10	0,00011338
11	0,001070815
12	0,001376249
13	0,001774251
14	0,002079925
15	0,002307415

Source : Elaboré par l'auteur

Passons maintenant au calcul de la matrice M, qui est la matrice de corrélation entre les différentes maturités.

Rappelons que nous avons stratifié les maturités en quatre strates, à savoir le court, le moyen, le moyen long et le long terme (cf. chapitre 2). Ainsi, la corrélation entre les maturités appartenant à des strates différentes s'obtient facilement. Pour les maturités appartenant à la même strate, nous supposons qu'elles sont parfaitement corrélées (corrélation=1). Dans ce sens, à titre d'exemple, la corrélation entre le rendement de l'obligation de maturité 2 ans et une autre de rendement 4 ans est égale à 1. En effet, toutes ces deux obligations appartiennent à la même strate, dans le cas échéant, la strate de moyen terme.

Tous les éléments nécessitant le calcul de la TE sont à présent calculés.

Nous prenons les seuils suivants :

$$\begin{cases} \text{Seuil de sensibilité } \bar{S} = 11\% \\ \text{Seuil de Tracking Error } \overline{TE} = 0,0001\% \end{cases}$$

3. Résultats et analyses

Nous lançons le programme d'optimisation sous Solveur Excel, on obtient les résultats suivants :

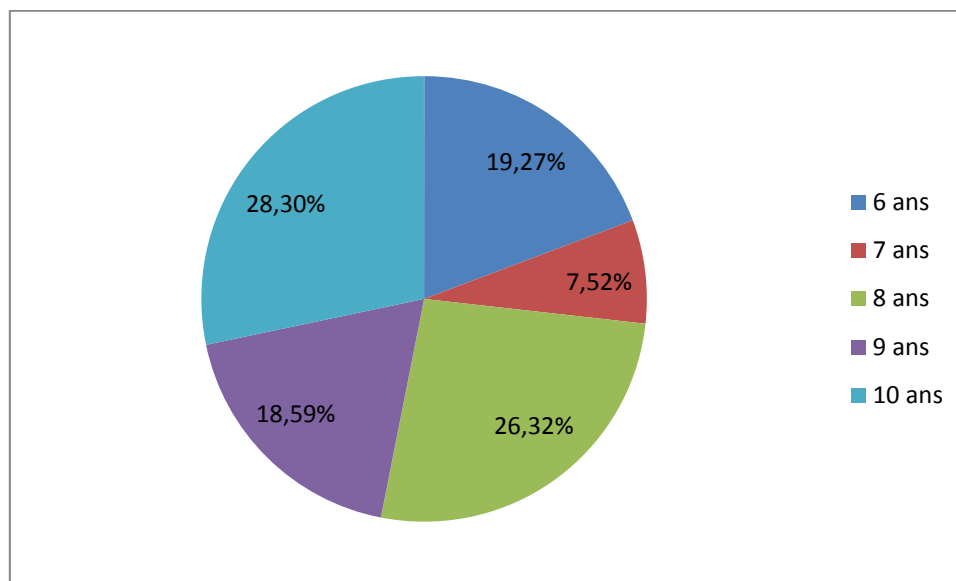
Tableau 18 : Poids des obligations de différentes maturités dans LHP et LDI

Maturité des obligations (années)	Poids dans le portefeuille LHP	Poids dans le portefeuille global LDI
1	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%
4	0,00%	0,00%
5	0,00%	0,00%
6	19,27%	19,27%
7	7,52%	7,52%
8	26,32%	26,32%
9	18,59%	18,59%
10	28,30%	28,30%
11	0,00%	0,00%
12	0,00%	0,00%
13	0,00%	0,00%
14	0,00%	0,00%
15	0,00%	0,00%
Total	100,00%	80,00%

Source : Elaboré par l'auteur

Ce résultat peut être récapitulé sous forme du diagramme suivant (figure 12) :

Figure 12 : Poids des obligations de différentes maturités (exprimées en ans) dans le portefeuille obligataire LHP



Source : Elaboré par l'auteur

Nous constatons que nous n'avons pas intérêt à investir dans les obligations ayant des maturités inférieures à 5 ans. Ceci est expliqué par le fait que durant les premières années, la situation de la caisse n'est pas très précaire et ne nécessite donc pas d'être couverte. Par contre, à partir de la 6^{ème} année, nous avons intérêt à investir dans pour couvrir les engagements. Cependant, nous remarquons qu'à partir des obligations de maturité 11 ans, nous arrêtons d'investir. La cause est certainement due à l'observation que nous avons déjà faite lors de l'analyse du marché obligataire stratifié. En effet, nous avons remarqué que dans le cas du long terme, la moyenne des rendements des obligations est basse par rapport aux autres maturités avec un niveau de volatilité plus grand. Dans ce sens, si nous considérons cette remarque, les résultats obtenus ci-dessus deviennent logiques.

Selon ces résultats, nous calculons le rendement et la volatilité du portefeuille LHP :

$$\begin{cases} R_{LHP} = 3,57\% \\ \sigma_{LHP} = 0,19\% \end{cases}$$

Ceci veut dire que seul ce portefeuille va rapporter un bénéfice de 3,57% par an avec une très faible volatilité de 0,19%. Résultat logique que nous avons prévu puisque ce portefeuille n'est investi que dans des obligations ayant un caractère sûr et moins volatile.

On passe maintenant à la deuxième étape qui est la création du portefeuille LSP.

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Ce portefeuille, qui représente 20% de l'ensemble de portefeuille global, est investi dans l'ensemble des classes d'actifs. Le modèle que nous lui appliquons est Markowitz.

Nous cherchons donc à maximiser la rentabilité de ce portefeuille sous un niveau de risque donné.

Le Solveur Excel donne les résultats suivants :

Figure 13 : Page Excel fournissant les résultats du portefeuille PSP

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Portefeuille PSP													
2					Poids dans PSP	Poids dans LHP								
3		Rendements	Volatilité		Poids	20%			Matrice de corrélation					
4	Obligations	4,50%	1,02%		0,00%	0,00%			Obligations	Actions	Immobilier	Non coté		
5	Actions	11,60%	14,07%		65,81%	13,16%			Obligations	100,00%	7,70%	0,00%	0,00%	
6	Immobilier	7%	10%		29,19%	5,84%			Actions	7,70%	100,00%	20,00%	75,00%	
7	Non coté	15%	18%		5,00%	1,00%			Immobilier	0,00%	20,00%	100,00%	50,00%	
8					100%	20,00%			Non coté	0,00%	75,00%	50,00%	100,00%	
9														
10	Matrice de covariance													
11		Obligations	Actions	Immobilier	Non coté									
12	Obligations	0,010%	0,011%	0,000%	0,000%									
13	Actions	0,011%	1,980%	0,281%	1,899%									
14	Immobilier	0,000%	0,281%	1,000%	0,900%									
15	Non coté	0,000%	1,899%	0,900%	3,240%									
16														
17														
18							Rentabilité P	10,43%						
19							Variance PF	1,21%						
20							Volatilité PF	11,00%		Volatilité m	11%			
21														
22														

Source : Elaboré par l'auteur

Nous récapitulons l'allocation optimale donnée par cette optimisation (figure 14).

Figure 14 : Poids des différentes classes d'actifs dans PSP et LDI

	Poids dans le portefeuille PSP	Poids dans le portefeuille LDI
Obligations	0,00%	0,00%
Actions	65,81%	13,16%
Immobilier	29,19%	5,84%
Non coté	5,00%	1,00%
Total	100,00%	20,00%

Source : Elaboré par l'auteur

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Nous remarquons que dans ce portefeuille, nous n'avons pas intérêt à investir dans les obligations. En effet, il s'agit d'un portefeuille de génération de performance et qui ne tient pas compte du passif. Ainsi, ce portefeuille est entièrement consacré aux actifs risqués à rendements élevés.

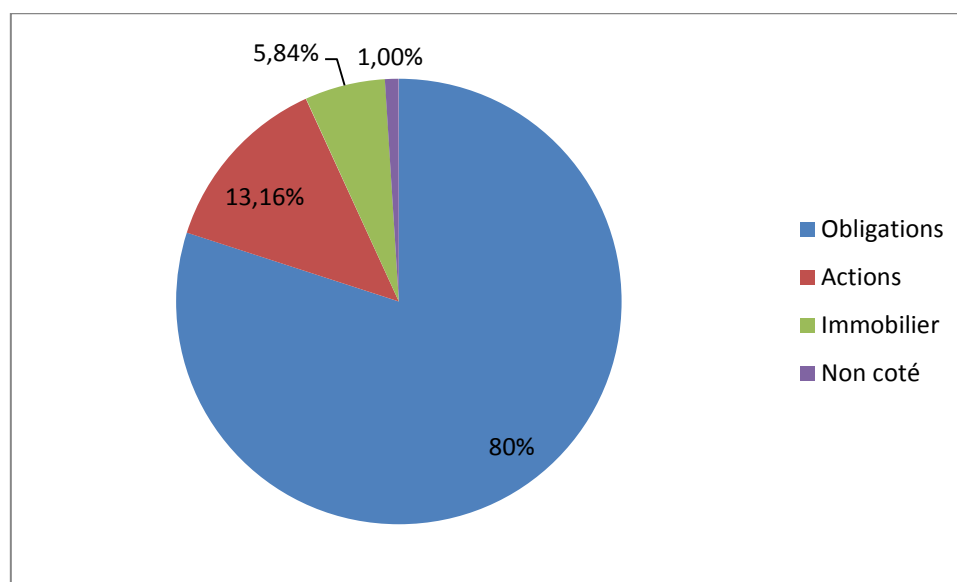
La performance ainsi que la volatilité de ce portefeuille sont les suivantes :

$$\begin{cases} R_{PSP} = 10,43\% \\ \sigma_{PSP} = 11\% \end{cases}$$

Nous remarquons dans ce portefeuille que la rentabilité est nettement plus élevée par rapport à celle de portefeuille LHP. En effet, le portefeuille PSP est un portefeuille qui est supposé générer une bonne performance malgré son caractère volatile. Notons que la volatilité de ce portefeuille est de 11% ce qui est énorme. Cependant, nous rappelons que le portefeuille PSP ne constitue que 20% du portefeuille global. Ainsi, cette volatilité sera réduite au niveau du portefeuille global.

Ainsi, la composition finale de portefeuille LDI est comme suit :

Figure 15 : Composition (%) du portefeuille optimal selon le modèle LDI, données CMR



Source : Elaboré par l'auteur

Nous pouvons maintenant calculer le rendement du portefeuille global LDI ainsi que sa volatilité. Nous rappelons que le portefeuille obligataire de couverture LHP constitue 80% de l'ensemble du portefeuille LDI. Le reste, soit 20%, est consacré au portefeuille de génération de performance PSP.

Chapitre 3 : Liability Driven Investment

Voici donc les résultats finaux :

$$\begin{cases} R_{LDI} = 0,8 * R_{LHP} + 0,2 * R_{PSP} \\ \sigma_{LDI} = 0,8 * \sigma_{LHP} + 0,2 * \sigma_{PSP} \end{cases}$$

L'application numérique de ces formules nous donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} R_{LDI} = 4,94\% \\ \sigma_{LDI} = 2,35\% \end{cases}$$

Nous constatons donc que ce portefeuille nous permet d'obtenir un niveau de rentabilité de presque 5% avec un niveau de risque assez bas. Nous sommes donc dans le cadre d'un investissement sûr et pas très volatile. Ceci tolérera de placer les fonds sans trop se soucier de faire des mauvaises performances. En contrepartie, les performances générées ne seront pas très considérables.

Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz

Dans ce chapitre, nous nous attelons à chercher l'allocation optimale du portefeuille de la CMR en recourant au modèle de Leibowitz.

1. Présentation du modèle

Le modèle de Leibowitz est un modèle basé sur la notion du surplus. Il s'applique sur des actifs réels et des actifs de taux. Ce modèle consiste tout d'abord à déterminer le plan de projection, à savoir notamment le nombre d'années de projection. On rappelle que ce modèle est basé sur le principe selon laquelle la bonne gestion du portefeuille d'une caisse de prévoyance ou de retraite, il faut tenir en compte non seulement de l'actif mais il faut également entrer le passif en jeu.

La première étape de la mise en œuvre de ce modèle est la détermination de deux contraintes : une contrainte de rentabilité minimale du surplus et une autre de rentabilité minimale de l'actif. Les deux contraintes seront ensuite tracées sur le plan (σ_{pf}, R_{pf}) . Ce tracé nous permettra d'obtenir les valeurs optimales de σ_{pf} et de R_{pf} .

Le but de modèle consistera donc à trouver la part optimale α^* des actions dans le portefeuille (et part suite celle des obligations), ainsi que la duration de la composante obligataire D_o^* permettant de maximiser la rentabilité du surplus (et part suite celle du portefeuille). Nous signalons que ce modèle suppose que $\sigma_0 = D_o^* \sigma_{taux,lan}$. Ainsi, la tâche sera donc de déterminer la volatilité optimale de la composante obligataire σ_0^* .

Chacune des deux contraintes susmentionnées sera représentée par une probabilité d'insuffisance mettant en jeu des grandeurs (notamment des rentabilités) exprimées en valeur actuelle de marché.

1.1. Modélisation des contraintes

A présent, nous allons focaliser les deux contraintes que nous avons citées ci-dessus (une sur l'actif et l'autre sur le surplus).

Nous allons tout d'abord modéliser la contrainte sur l'actif. Cette contrainte est traduite par l'inéquation suivante : $p(R_{pf} < u) < p'$

Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz

Avec :

$R_{pf} = \alpha R_A + (1-\alpha)R_O$ est la rentabilité du portefeuille où R_A et R_O représentent respectivement la rentabilité des actions et celle des obligations et α la part des actions dans le portefeuille ;

u 'représente la rentabilité minimale espérée du portefeuille fixée selon l'organisme;

p 'est appelée « probabilité d'insuffisance » qui dépend de la tolérance au risque de l'organisme.

En revenant à la contrainte sur l'actif, celle-ci veut dire que la probabilité pour que la rentabilité du portefeuille soit inférieure à un certain seuil u ne doit pas dépasser une probabilité donnée p .

Graphiquement, sur la plan (risque, probabilité), cette contrainte est modélisée par la droite de l'équation suivante : $\overline{R_{pf}} = u + \sigma_{pf} q_p^{N(0,1)}$

Avec : σ_{pf} représente la probabilité du portefeuille et $q_p^{N(0,1)}$ le quantile probabilité p de la loi normale $N(0,1)$.

Nous allons maintenant passer à la modélisation de la contrainte sur le surplus.

D'une manière analogue à la contrainte sur l'actif, on traduit la contrainte associée au surplus par l'inéquation suivante : $p(R_s < u) < p$

Avec R_s : la rentabilité du surplus et u et p sont définies par rapport à R_s de manière similaire que u et p ont été définis pour R_{pf} lors de la contrainte sur l'actif.

De même, par analogie, sur la plan (risque, probabilité), cette contrainte est modélisée par la droite de l'équation suivante : $R_s = u + \sigma_s q_p^{N(0,1)}$

Afin de pouvoir modéliser les deux contraintes sur le même espace l'espace (risque, probabilité), il faut apporter des modifications à cette dernière équation. Pour cela, on suit la procédure suivante :

La rentabilité du surplus R_s qui est définie au début de la présentation de ce modèle, peut également être écrite sous la forme : $R_s = rfR_{pf} - R_p$

Avec rf : le ratio de financement initial (valeur de marché initiale de l'actif rapporté à la valeur actuelle initiale du passif).

La volatilité de la rentabilité du surplus est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_s^2 = rf^2 \sigma_{pf}^2 + \sigma_p^2 - 2rf \sigma_p \text{corr}(R_{pf}, R_p)$$

En substituant R_S et σ_s dans l'équation qui modélise la contrainte sur le surplus (

$\overline{R_S} = u + \sigma_s q_p^{N(0,1)}$), on trouve la nouvelle équation suivante :

$$[rf^2(1-\alpha)^2\sigma_0^2 + [2rf^2\alpha(1-\alpha)\sigma_A \text{corr}(R_A, R_0) - 2rf(1-\alpha)\sigma_p]\sigma_0 - \left[\left(\frac{rf(\alpha\overline{R_A} + (1-\alpha)\overline{R_0}) - \overline{R_p} - u}{q_p^{N(0,1)}} \right)^2 - \sigma_p^2 - rf^2\alpha^2\sigma_A^2 + 2rf\alpha\sigma_A\sigma_p \text{corr}(R_A, R_0) \right] = 0$$

Cette équation peut être vue comme une équation de 2nd degré en σ_0 . Les seules inconnues qui figurent pour l'instant sont α (la part des actions dans le portefeuille) et σ_0 (la volatilité de la composante obligataire du portefeuille). Ainsi, pour un α donné, on pourra déterminer la solution σ_0 correspondante.

La condition de la positivité sur le discriminant permet de déterminer l'ensemble des valeurs α qui permettront à leur tour de déterminer une valeur de σ_0 pour chaque α . Grâce à ces valeurs, on pourra calculer à chaque fois pour chaque couple (α, σ_0) le couple $(\overline{R_{pf}}, \sigma_{pf})$ correspondant. L'ensemble des couples $(\overline{R_{pf}}, \sigma_{pf})$ ainsi constitué illustre la représentation graphique de la contrainte sur le surplus, qui est aussi connu sous le nom de « l'œuf de Leibowitz ».

Afin de pouvoir calculer à chaque fois le couple (R_{pf}, σ_{pf}) , ci-dessous leurs expressions :

$$\begin{cases} R_{pf} = \alpha R_A + (1-\alpha)R_0 \\ \sigma_{pf}^2 = \alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_0 \text{corr}(R_A, R_0) \end{cases}$$

1.2. Détermination du portefeuille optimal vérifiant les deux contraintes :

L'ensemble des portefeuilles optimaux selon le modèle de Leibowitz seront l'intersection entre la partie supérieure de la droite (représentant la contrainte sur l'actif) et l'intérieur de l'œuf de Leibowitz (représentant la contrainte sur le surplus).

Le portefeuille ayant la rentabilité la plus élevée correspondra à l'intersection entre la droite et l'œuf de Leibowitz. Les coordonnées de ce point $(R_{pf}^*, \sigma_{pf}^*)$ permettront

d'achever le but de ce modèle, à savoir la détermination de α^* et σ_0^* (qui nous donnera D_0^*).

$$\begin{cases} \alpha^* = \frac{\overline{R_{pf}^*} - \overline{R_o}}{\overline{R_A} - \overline{R_o}} \\ \sigma_0^* = \frac{\sqrt{(\sigma_{pf}^*)^2 + (\alpha^*)^2 \sigma_A^2 (\text{corr}^2(R_A, R_0) - 1) - \alpha^* \sigma_A \text{corr}(R_A, R_0)}}{1 - \alpha^*} \end{cases}$$

1.3. Limites du modèle

Le modèle de Leibowitz est sujet à certaines limites à cause des hypothèses fortes sur lesquelles il est basé, notamment :

- Les obligations de toute maturité fournissent le même rendement ;
- La volatilité de la composante obligataire σ_0 est proportionnelle à sa durée ;
- Le rendement des obligations et des actions suit une loi normale.

2. Implémentation du modèle aux données de la CMR

2.1. Choix du logiciel

Le modèle de Leibowitz nécessite des calculs très sophistiqués, notamment lors du calcul de déterminant de l'équation de second de degré à inconnue σ_0 (volatilité des obligations). En effet, ce déterminant sera de degré 4 et nécessite un travail très laborieux pour donner sa formule simplifiée et pour chercher les valeurs de α qui vont le rendre positif. D'autre part, α prendra plusieurs valeurs et chaque valeur va générer une valeur pour le couple $(\sigma_{Portefeuille}; R_{Portefeuille})$ et nous serons très intéressés à automatiser cette opération par une boucle finie dans un langage de programmation adapté.

C'est pour ces raisons que nous avons opté pour *Matlab*. Ce logiciel est très réputé par sa force au niveau de calcul numérique, de manipulation des matrices et d'affichage des courbes. D'autre part, ce logiciel nous permettra de générer des nouveaux résultats, sans trop de complications, en cas où nous changeons la valeur d'un des paramètres d'entrée.

2.2. Données de base

Nous aurons besoin d'introduire certaines données sur Matlab. Celles-ci sont regroupées dans le tableau 19.

Ci-dessous, des explications de certaines variables calculées par nos soins :

- Le ratio de financement est calculé comme suit : $rf = \text{actif initial} / \text{passif initial}$;
- Toutes les données concernant les actions et les obligations ont été calculées durant le chapitre 2 ;
- R_p : variation relative du passif actualisé. Elle est calculée comme suit :

$$R_p = \frac{\text{Valeur du passif actualisé à la date de projection} - \text{Valeur du passif actualisé à la date initiale}}{\text{Valeur du passif actualisé à la date initiale}}$$

- u : niveau de rentabilité minimal fixé arbitrairement à 4,5% ;
- q : quantile correspondant à la probabilité de risque acceptée lors de la contrainte sur le surplus. Cette probabilité est prise arbitrairement égale à 2,5%, ce qui correspond à un quantile de 1,96 ;
- qq : quantile correspondant à la probabilité de risque acceptée lors de la contrainte sur l'actif. Cette probabilité est prise arbitrairement égale à 7,5%, ce qui correspond à un quantile de 1,43.

Tableau 19 : Valeurs des données saisies sur Matlab

Notation du paramètre sur Matlab	Signification	Valeur affectée
rf	ratio de financement	178,95%
Corr	Coefficient de corrélation entre le marché obligataire et le marché des actions	4,55%
vola	Volatilité de rendement des actions	14,07%
volp	Volatilité des provisions	2,00%
Ra	Rentabilité des actions	11,20%
Ro	Rentabilité des obligations	4,50%
Rp	Variation relative du passif actualisé	5,00%
u	Rentabilité minimale espérée	4,50%
q	Quantile correspondant au degré de risque (utilisé lors de la contrainte sur le surplus)	1,96
qq	Quantile correspondant au degré de risque (utilisé lors de la contrainte sur l'actif)	1,43

Source : Elaboré par l'auteur

Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz

Nous rappelons que notre analyse est menée sur le plan suivant

$$(\sigma_{Portefeuille}; R_{Portefeuille})$$

2.3. Tracé des deux contraintes

Nous allons maintenant modéliser les deux contraintes sur un seul graphique afin de déterminer la composition optimale du portefeuille selon le modèle de Leibowitz.

Pour cette raison, nous aurons recours au logiciel MATLAB (le code qui illustre toutes les étapes qui seront explicitées ci-dessous est représenté dans l'annexe III). Pour cela, nous allons tout d'abord modéliser les contraintes afin de tracer le graphique permettant de déduire le point d'intersection entre les deux tracés représentant les des deux contraintes.

Nous allons tout d'abord modéliser la contrainte sur l'actif. Cette contrainte est facilement modélisable. Elle est formulée sous forme de l'équation suivante :

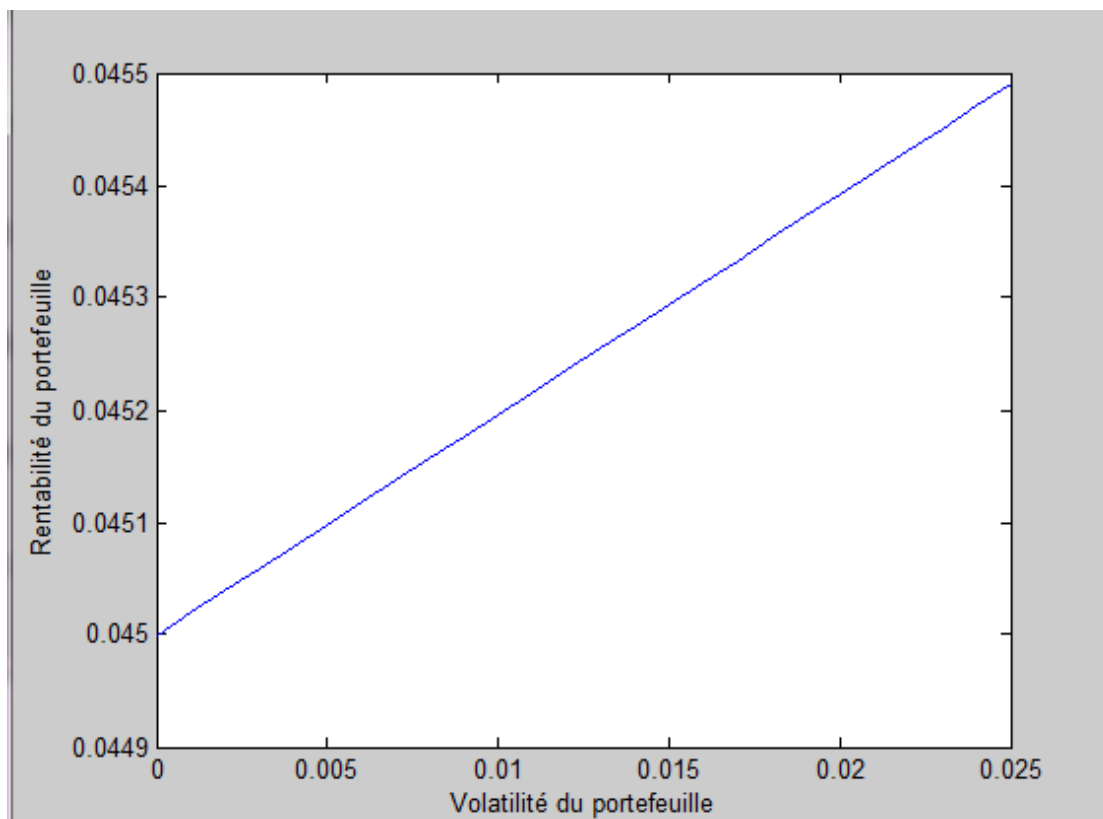
$$\overline{R}_{pf} = u + \sigma_{pf} q_p^{N(0,1)}$$

Prenons les valeurs suivantes pour les paramètres de seuils :

$u=4,5$ et $q_p^{N(0,1)}=1,43$ correspondant à une probabilité de risque tolérée de 7%

En traçant cette équation, nous obtenons la droite suivante qui modélise la contrainte sur l'actif (figure 16).

Figure 16 : Tracé de la contrainte sur l'actif



Source : Elaboré par l'auteur

A présent, nous allons modéliser l'autre contrainte, à savoir la contrainte sur le surplus.

Rappelons que l'équation modélisant cette contrainte est la suivante :

$$\overline{R}_s = u + \sigma_s q_p^{N(0,1)}$$

En remplaçant les valeurs de R_s et σ_s dans cette équation, nous obtenons une équation de second degré dont l'inconnu est σ_o . Cette équation a été formulée lors de la présentation du modèle.

La tâche actuelle consiste donc à déterminer l'ensemble des valeurs α qui permettent de donner un discriminant positif pour cette équation pour qu'elle aie des solutions réelles.

Pour atteindre cet objectif, nous procédons comme suit :

Nous calculons le déterminant de cette équation. Ce déterminant sera une fonction de quatrième degré avec l'inconnue α .

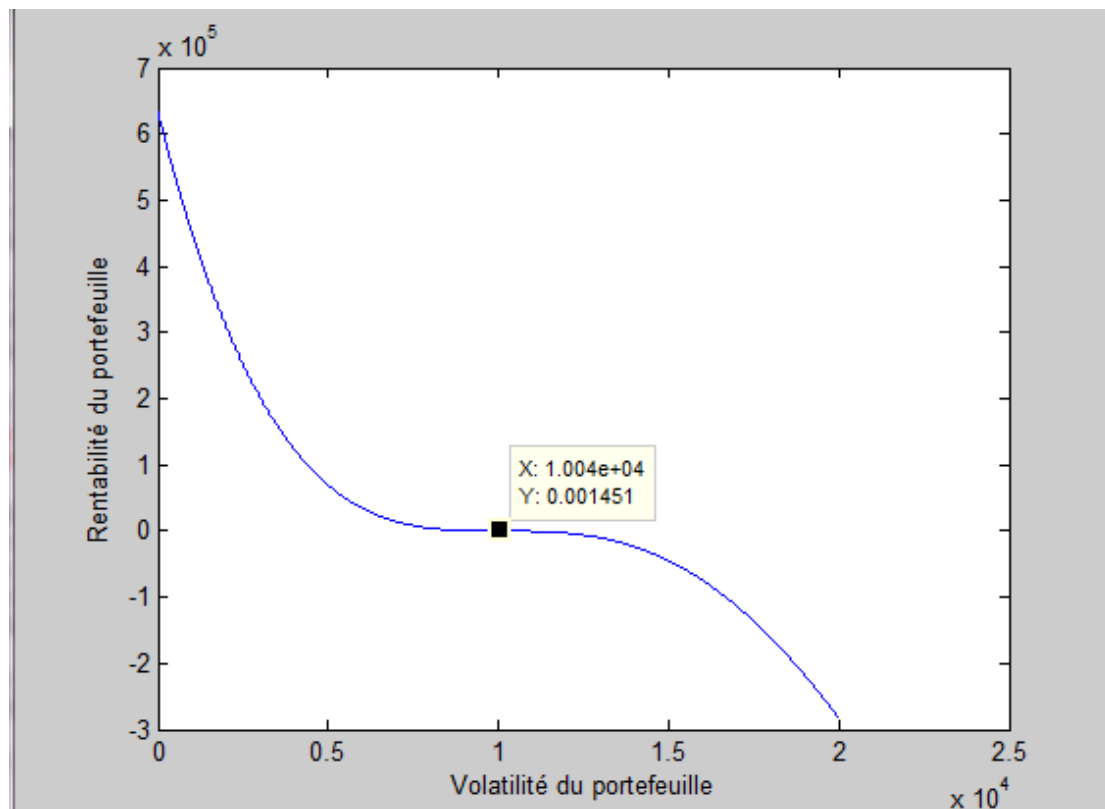
Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz

Avec l'aide de Matlab, et après toute simplification faite, nous trouvons que le déterminant s'écrit sous la forme suivante :

$$0.0016 \alpha^4 - 0.4583 \alpha^3 + 1.1022 \alpha^2 - 0.8360 \alpha + 0.1905$$

Traçons donc cette fonction pour vérifier pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle positive. Son traçage est illustré sur la figure 17.

Figure 17 : Tracé de la fonction déterminant de l'équation à l'inconnue σ_o



Source : Elaboré par l'auteur

Sur ce graphique, nous déduisons que l'intervalle des valeurs α permettant de rendre la fonction positive est $[0 ; 10^4]$. Or, α est comprise entre 0 et 1. Donc, nous nous limitons à l'intervalle $[0;1]$ pour α .

Ainsi, pour chaque valeur de α , l'équation de second degré qui permet déterminer les valeurs de σ_o aura des solutions différentes.

Pour changer à chaque fois la valeur de α , nous choisissons un pas de 0,001 afin d'avoir un grand nombre de valeurs pour σ_o afin de rendre le traçage de la courbe modélisant cette contrainte soit très précise.

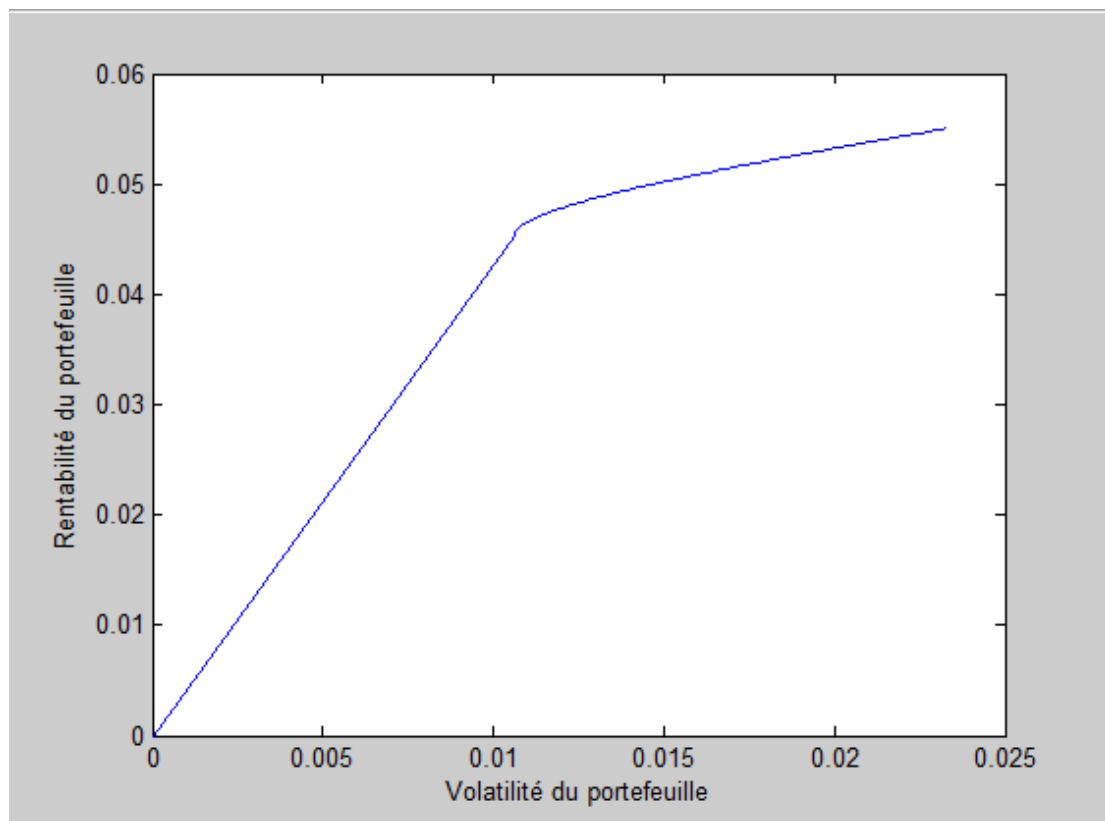
Pour chaque couple (α, σ_o) nous utilisons les deux relations ci-dessous pour calculer le couple (R_{pf}, σ_{pf}^2) correspondant.

$$\begin{cases} \overline{R_{pf}} = \alpha R_A + (1-\alpha)R_o \\ \sigma_{pf}^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_o^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A \sigma_o \text{corr}(R_A, R_o) \end{cases}$$

Par la suite, nous traçons la courbe obtenue par ces différentes valeurs de (R_{pf}, σ_{pf}^2) .

La courbe obtenue est illustrée dans la figure 18.

Figure 18: Tracé de la contrainte sur le surplus

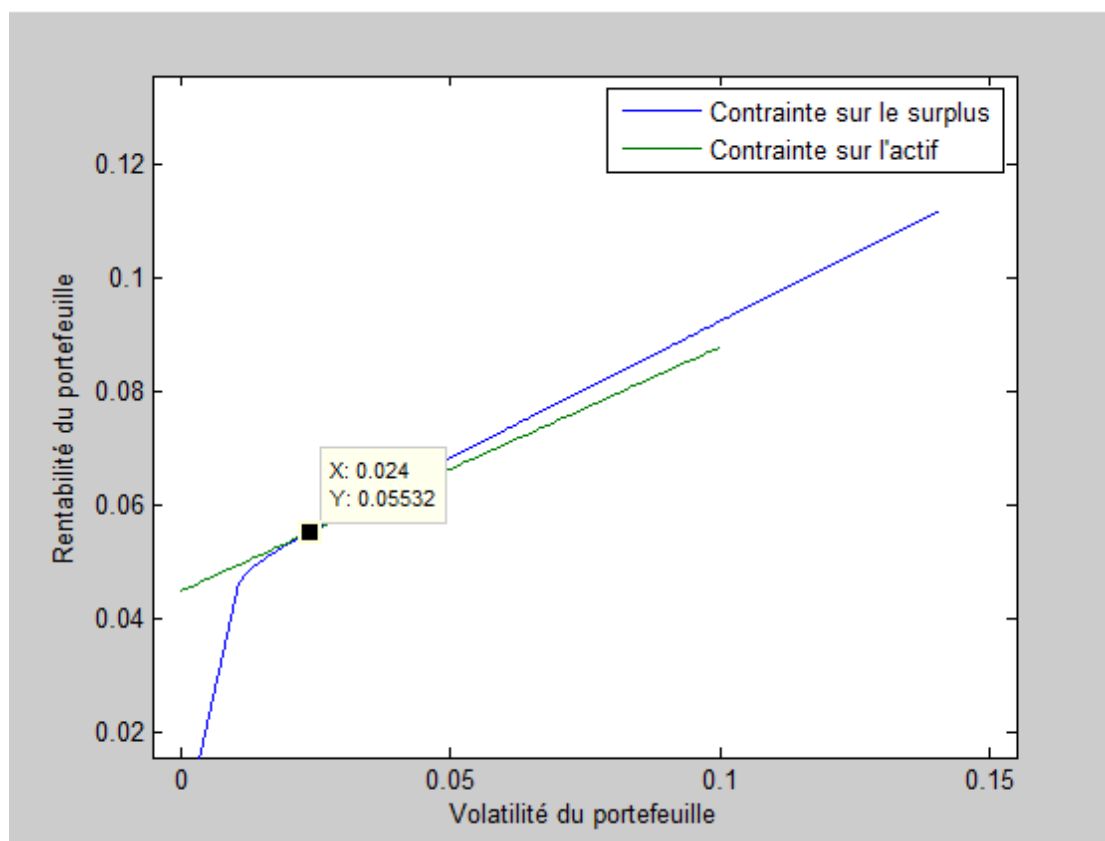


Source : Elaboré par l'auteur

3. Résultats et analyses

A l'heure actuelle, nous pouvons rassembler les deux courbes sur le même graphique afin de déterminer le point d'intersection qui nous permettra de définir la rentabilité et la volatilité optimales du portefeuille (figure 19).

Figure 19 : Détermination des coordonnées (σ_{Pf}, R_{Pf}) du point optimal



Source : Elaboré par l'auteur

Le point optimal a donc les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} \text{Rendement du portefeuille } R_{pf} = 5,5\% \\ \text{Volatilité du portefeuille } \sigma_{pf} = 2,4\% \end{cases}$$

Nous constatons qu'avec un rendement annuel moyen de 5,5% (R_{pf}) et une volatilité de 1,258%, nous sommes plutôt dans le cadre d'un investissement plutôt sûr et moins volatile. Ce qui est totalement attendu parce que nous avons fixé un niveau de risque à ne pas dépasser de 2,5% (ce qui correspond au quantile 1,96 utilisé lors de la contrainte sur le surplus).

Ces résultats nous permettent de calculer les différents autres paramètres, notamment la part des actions dans le portefeuille ainsi que la volatilité de la composante obligataire :

$$\begin{cases} \text{Part optimale des actions } \alpha = 14,93\% \\ \text{Volatilité optimale des obligations } \sigma_o = 1,258\% \end{cases}$$

La durée des obligations peut également être calculée, dont la formule est la suivante :

Chapitre 4 : Modèle de Leibowitz

$$Duration = \frac{\sigma_o}{\sigma_{\text{taux 1an}}} (\text{ans})$$

$$Duration = \frac{1,258\%}{0,11\%} = 11,46 \text{ ans}$$

Selon les résultats de l'application du modèle de Leibowitz, la composition optimale du portefeuille sera donc la suivante (tableau 20).

Tableau 20 : Composition du portefeuille optimal selon le modèle de Leibowitz, données CMR

Classe d'actifs	Poids
Actifs de taux (Obligations)	85,07%
Actifs réels (Actions)	14,93%
Total	100%

Source : Elaboré par l'auteur

Comme attendu, avec un niveau de risque fixé de 2,5%, le portefeuille obtenu est très concentré sur les actifs de taux (85%) qui sont, de leur nature, moins volatiles que les actifs réels, qui représentent 15% du portefeuille optimal.

L'avantage de ce modèle c'est qu'il permet de construire un portefeuille à la fois sûr et tolérant de générer un gain assez important.

Nous signalons que ce gain peut en effet augmenter si l'organisme est un peu plus tolérant au risque.

Chapitre 5 : Modèle de Kim et Santomero

Dans ce chapitre, nous allons chercher à identifier le portefeuille optimal de la CMR moyennant le modèle de Kim et Santomero.

1. Présentation du modèle

Le modèle de Kim et Santomero est appliqué le plus souvent pour le cas des portefeuilles composés de plusieurs classes d'actifs. Ce modèle a pour but de minimiser le risque de perte du surplus (mesuré par la variance de la rentabilité du surplus) sous contraintes de rentabilité et de poids des actifs et de passif.

Avant d'exposer les différentes étapes permettant la mise en œuvre de ce modèle, on définit les principaux paramètres du modèle :

- Nous entendons par le début de la période le 31/12/2013, soit notre date de début de projection. Nous entendons par la fin de la période, la dernière date de projection, soit le 31/12/2032
- $S_1 = Actif_1 - Passif_1$: Surplus en fin de période ($Actif_1$: l'actif en fin de période et $Passif_1$: passif en fin de période)
- S_0 : Surplus en début de période
- P_0 : Passif au début de la période
- R_s : rentabilité de surplus
- R_p : Variation relative du passif actualisé
- w_A est le poids de l'actif dans l'ensemble du portefeuille et w_p le poids du passif. Ils sont calculés selon les formules suivantes :

$$w_A = \sum_i \frac{A_0^i}{S_0} \qquad w_p = -\frac{P_0}{S_0}$$

L'application du modèle de Kim et Santomero suppose le suivi des étapes suivantes :

- Détermination du plan de projection.
- Evaluation de l'actif et le passif et introduction d'une projection des deux selon le plan déjà déterminé.
- Calcul de la variation relative du passif actualisé R_p
- Calcul de la rentabilité de surplus selon la formule suivante :

$$R_s = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

- Calcul de la volatilité du surplus
- Maximisation de la rentabilité du surplus

•
$$R_s = w_A R_A + w_p R_p$$

sous la contrainte suivante :
$$w_a + w_p = 1$$

- Déduction de la rentabilité du portefeuille et de sa variance
- Déduction de l'allocation optimale du portefeuille

2. Implémentation du modèle aux données de la CMR

Nous avons choisis un plan de projection s'étalant sur 19 ans, soit entre le 31/12/2013 et 31/12/2032.

La première étape consiste à actualiser l'ensemble des flux de l'actif et du passif par la courbe des taux zéro-coupon fixée le 31/12/2013 (voir annexe II). Nous obtenons le tableau suivant :

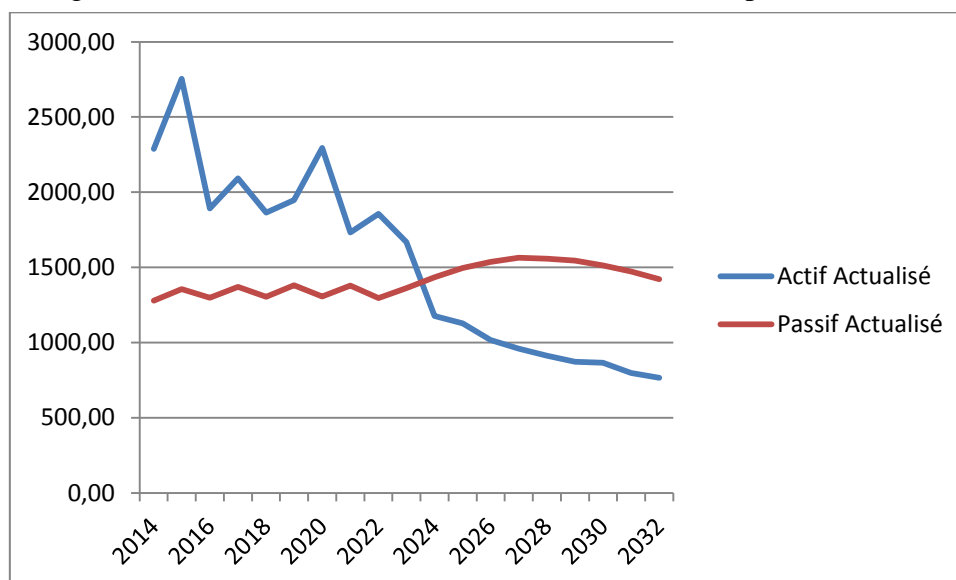
Tableau 21 : Flux actualisés de l'actif et du passif entre 2014 et 2032

Date	Actif Actualisé	Passif Actualisé
2014	2287,98	1278,58
2015	2754,91	1355,87
2016	1892,88	1298,19
2017	2092,73	1369,42
2018	1863,58	1304,04
2019	1947,68	1379,78
2020	2294,24	1306,24
2021	1732,83	1379,47
2022	1855,49	1294,89
2023	1667,66	1362,00
2024	1176,27	1434,21
2025	1127,70	1496,25
2026	1016,78	1536,85
2027	959,83	1563,02
2028	913,41	1558,46
2029	871,80	1544,34
2030	864,53	1512,63
2031	797,52	1472,20
2032	765,37	1421,23

Source : Elaboré par l'auteur

Afin de pouvoir mieux commenter l'évolution des flux de l'actif et du passif, nous allons transformer ce tableau en un graphique (figure 20).

Figure 20 : Evolution des flux de l'actif actualisé et du passif actualisé



Source : Adapté par l'auteur

Nous remarquons à travers ce graphique que le flux de l'actif actualisé a une tendance à baisser à travers le temps. En parallèle, le passif actualisé est en légère hausse. Remarquons qu'à partir de l'année 2024, les engagements vont dépasser l'actif.

Le surplus initial (actif actualisé-passif actualisé en 2014) calculé donne la valeur suivante :

$$S_0 = 1009,4$$

Les différentes données concernant chaque classe d'actif sont récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau 22 : Rappel des rendements et volatilités des différentes classes d'actifs

	Rendements	Volatilité
Obligations	4,50%	1,02%
Actions	11,60%	14,07%
Immobilier	7%	10%
Non coté	15%	25%

Source : Récapitulation des résultats précédents de l'étude

La matrice de covariance entre ces différentes classes d'actifs est fournie par le tableau 23.

Tableau 23 : Matrice de covariance entre les différentes classes d'actifs

	Obligations	Actions	Immobilier	Non coté
Obligations	1,04E-04	1,11E-04	0,00E+00	0,00E+00
Actions	1,11E-04	1,98E-02	3,94E-03	2,64E-02
Immobilier	0,00E+00	3,94E-03	1,96E-02	1,75E-02
Non Coté	0,00E+00	2,64E-02	1,75E-02	6,25E-02

Source : Récapitulation des résultats précédents de l'étude

Notre but est de maximiser la rentabilité du surplus définie comme suit :

$$R_S = w'_A R_A + w_p R_p$$

W_A est le vecteur des poids des classes d'actifs et W_p est le poids constant affecté au

passif calculé comme suit :

$$w_p = -\frac{P_0}{S_0}$$

L'application numérique nous donne la valeur suivante :

$$w_p = 6,52\%$$

Nous rappelons que la volatilité du surplus est calculée comme suit :

$\sigma_{\text{Surplus}} = X'CX$ où X est le vecteur contenant les poids des classes d'actifs ainsi que du passif (w_p) et C la matrice de covariance entre les différentes classes d'actifs. Cette maximisation est contrainte à un seuil de volatilité de surplus à ne pas dépasser, choisi arbitrairement à 3%.

A présent, nous avons tous les paramètres qui vont nous permettre de lancer notre programme d'optimisation, moyennant Solveur Excel.

3. Résultats et analyses

Nous utilisons le Solveur d'Excel afin de trouver la composition optimale du portefeuille. Nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 24 : Vecteur des poids résultats du programme d'optimisation

Classes d'actifs	Poids
Obligations	94,2%
Actions	110,2%
Immobilier	16,9%
Non coté	5,4%
Passif	-126,7%
Total	100%

Source : Elaboré par l'auteur

Or, nous avons besoin de constituer un portefeuille composé uniquement des classes d'actifs. Nous allons donc rapporter ces poids à un portefeuille ne contenant pas le passif. En d'autres termes, nous allons rapporter le poids de chaque classe d'actif à la somme des poids de l'ensemble des classes d'actifs.

Par exemple, pour la classe des obligations, ce poids est :

$$\text{Poids optimal de la classe des obligations : } \frac{94,2}{(94,2 + 110,2 + 16,9 + 5,4)} \% = 41,6 \%$$

Nous refaisons cette opération par l'ensemble des autres classes d'actifs et nous obtenons le tableau suivant :

Tableau 25 : Composition (%) optimale du portefeuille selon le modèle Kim et Santomero, données CMR

Classes d'actifs	Poids
Obligations	41,6%
Actions	48,6%
Immobilier	7,4%
Non coté	2,4%
Total	100,00%

Source : Elaboré par l'auteur

La rentabilité et la volatilité du portefeuille obtenues avec cette allocation sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rentabilité du portefeuille } R_{PF} = 8,39\% \\ \text{Volatilité du portefeuille } \sigma_{PF} = 7,64\% \end{array} \right.$$

Nous constatons que ce modèle fournit des résultats plus intéressants au niveau de la rentabilité. Cependant, il construit un portefeuille très volatile.

Contrairement aux autres modèles, la composition de ce portefeuille ne satisfait pas les contraintes réglementaires imposées à la CMR.

Toutefois, selon la réglementation, CMR doit investir au moins 60% de ses allocations dans les obligations. D'autre part, il ne faut pas que la part consacrée aux actions et le non coté dépasse 30%, sachant que le non coté ne doit en aucun cas dépasser 5%. Finalement, la part globale du portefeuille allouée à l'immobilier ne doit pas dépasser 5%.

En ajoutant ces contraintes à notre programme d'optimisation, nous obtenons les nouveaux résultats selon le modèle Kim et Santomero illustrés sur le tableau 26.

Tableau 26 : Poids optimaux des classes d'actifs après l'implémentation des contraintes réglementaires

Classes d'actifs	Poids
Obligations	66%
Actions	25%
Immobilier	5%
Non coté	4%
Total	100%

Source : Elaboré par l'auteur

Avec ces nouveaux résultats, nous obtenons la rentabilité et la volatilité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rentabilité du portefeuille } R_{PF} = 6,82\% \\ \text{Volatilité du portefeuille } \sigma_{PF} = 4,65\% \end{array} \right.$$

Comme nous l'avions attendu, nous remarquons que la volatilité a baissé de près de 3% parce que c'est la raison de l'introduction des contraintes réglementaires. En parallèle, nous remarquons que cette baisse de volatilité a un prix, en l'occurrence, nous constatons que le niveau de rentabilité a baissé de 1,57%

Nous remarquons donc qu'en implémentant ces contraintes, nous perdons en terme de rentabilité. Il serait donc bien avantageux pour la CMR que les contraintes réglementaires soient un peu allégées par rapport à la situation actuelle afin de générer une performance plus intéressante.

Comparaison entre les modèles et conclusions

Les modèles d'allocation d'actifs constituent véritablement un vaste domaine de recherche. Ils font de plus en plus le débat que ce soit au niveau des caisses de retraites ou au niveau des autres institutions financières.

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la recherche d'une allocation optimale des fonds de réserve de la CMR entre les différentes classes d'actifs en tenant compte de ses engagements. L'objectif de cette allocation est de déterminer une politique d'investissement permettant de réaliser une meilleure performance.

Dans un premier temps, nous avons étudié une panoplie de modèles. Puis, nous avons choisis parmi eux trois modèles, permettant la constitution d'un portefeuille optimal. Le choix de ces trois modèles n'est pas hasardeux puisque nous nous sommes focalisés sur la recherche des modèles permettant à la fois d'exploiter les données dont nous disposons et permettant d'espérer de bons résultats. Ensuite, nous avons préparé l'ensemble des données dont nous avons besoin durant cette étude, notamment l'étude des marchés représentant les différentes classes d'actifs et la corrélation entre elles. Puis, nous avons appliqué numériquement ces modèles.

Le premier modèle, à savoir la LDI, se base sur la construction de deux portefeuilles indépendants. Le premier, appelé portefeuille de couverture des engagements (LHP, son acronyme anglais), est entièrement consacré aux obligations connues pour leur caractère sûr et moins volatile. Le second portefeuille, appelé portefeuille de recherche de performance (PSP), est un portefeuille plus volatile qui se détache des engagements et dont l'unique objectif est de maximiser la rentabilité. Ce modèle permet de construire un portefeuille global avec un rendement avoisinant les 5% pour une volatilité de 2,35%. Ce modèle permet ainsi de générer une bonne performance avec un niveau de risque relativement bas. En outre, la composition finale du portefeuille générée par ce modèle respecte parfaitement les contraintes réglementaires imposées à la CMR.

Le second modèle abordé par notre étude est le modèle de Leibowitz. Ce modèle qui ne s'investit que sur les obligations et les actions a pour objectif d'augmenter la rentabilité du surplus. En d'autres termes, ce modèle essaie de maximiser la rentabilité du portefeuille moyennant la maximisation de la rentabilité du surplus. Pour ce faire, il propose de tracer deux contraintes, une sur le surplus et l'autre sur l'actif, sur un même plan (σ_{pf}, R_{pf}) . Ensuite, nous pourrions déterminer graphiquement le point d'intersection qui nous donnera le point optimal correspondant à la performance

optimale d'investissement, moyennant le logiciel MATLAB vu la complexité des équations qui figurent lors de la détermination de la contrainte sur le surplus. Ce modèle nous a donné un portefeuille avec un rendement de 5,5% et avec un niveau de risque de 2,4%. En comparant ce modèle avec la LDI, nous remarquons que Leibowitz permet de générer une performance meilleure avec un niveau de risque quasiment similaire. Dans ce sens, ce modèle se présente clairement plus avantageux. Cependant, le modèle de Leibowitz ne permet d'investir que sur deux actifs : les obligations et les actions. Cette contrainte peut s'avérer très nuisible dans le cas où les autres actifs (l'immobilier et le non coté) présentent des bonnes opportunités d'investissement. Une autre limite de ce modèle c'est qu'il s'appuie sur une hypothèse forte selon laquelle tous les rendements intégrés dans l'étude sont normalement distribués.

Le troisième modèle appliqué durant notre étude est le modèle de Kim et Santomero. Ce modèle, à l'instar du modèle de Leibowitz, se base sur le principe de maximisation du surplus. Cependant, ce modèle définit la rentabilité du surplus avec une nouvelle approche : la rentabilité du surplus représente la différence entre le surplus final et le surplus initial rapportée à la valeur du surplus initial (et non à la valeur initiale du passif, dans le cas de Leibowitz). En outre, ce modèle introduit une nouvelle méthode de raisonnement, à savoir l'introduction d'un poids négatif, représentant le passif, dans le portefeuille d'investissement. Cette mesure a été prise afin de prendre en considération les engagements lors des choix stratégiques d'investissement.

L'application de ce modèle a donné un portefeuille de rendement de 8,29%. Un rendement largement supérieur à tous les rendements fournis par les deux modèles précédents. Cependant, cette allocation présente une volatilité de 7,64% qui est presque le triple de la volatilité des autres modèles. Le portefeuille obtenu est donc le plus performant mais également le plus volatil. Cependant, nous signalons que les résultats de ce modèle ne respectent pas les contraintes réglementaires imposées à la CMR. En effet, nous avons obtenu selon ce modèle qu'il faut allouer presque 49% du portefeuille aux actions, ce qui n'est pas légalement possible pour la CMR (la classe des actions ne doit pas dépasser les 25%). Ainsi, nous avons introduit sur le modèle les contraintes réglementaires sur les poids des actifs et nous avons obtenu un nouveau portefeuille avec un rendement de 6,82% et une volatilité de 4,65%. Ces nouveaux résultats montrent que le nouveau rendement reste très intéressant par rapport aux autres modèles malgré que le nouveau niveau de risque reste assez élevé.

Ce modèle peut représenter de réels atouts pour la CMR surtout dans le premier cas, où les contraintes réglementaires n'ont pas été prises en considération. Dans ce sens, s'il y a une recommandation à faire, celle de la nécessité d'alléger les contraintes

exigées de la CMR afin de lui permettre d'investir plus librement et de réaliser des performances plus intéressantes.

Afin de bien profiter des rendements proposés par ces modèles, la CMR doit disposer d'assez de fonds de réserves et pour une longue durée. Or, d'après l'analyse des fonds de réserves que nous avons abordés lors de la présentation des données (cf. chapitre2), nous remarquons que ceux-ci ne cessent de baisser selon les projections effectuées sur la période étalant de 2014 à 2036. En d'autres termes, ces modèles n'auront d'impact positif sur la CMR que si celle-ci s'engage à s'offrir suffisamment de fonds pour l'investissement et ceci ne peut se faire sans une réforme touchant les fonds de réserves.

Cette étude pourra s'étendre sur d'autres issues permettant d'aboutir à d'autres résultats intéressants. Ainsi, il est possible d'intégrer une autre classe d'actifs dans l'étude en analysant sa performance, sa volatilité et sa corrélation avec les autres actifs. Ensuite, la comparaison des nouveaux résultats des modèles avec les résultats actuels de notre étude permettra de vérifier si l'introduction de cette nouvelle classe d'actif est rentable ou pas. Cette opération peut également s'étendre sur plusieurs classes d'actifs en même temps. La seule contrainte qui pourra se présenter est l'éventuelle carence au niveau des données disponibles sur ces nouvelles classes d'actifs.

Bibliographie

- Armel, K., *Structure de dépendance de générateurs de scénarios économiques*, Mémoire d'actuariat, 2010
- Bedoui, R., *Recherche d'une allocation stratégique optimale dans le cadre de la gestion actif-passif : Application sur un fonds de retraite*, Mémoire de fin d'études, Lyon, 2007
- Bourlès, F., *Mathématiques pour la finance*, Ecole Centrale Marseille, Marseille, 2012
- Cour des Comptes, *Rapport sur le système de retraite au Maroc*, Rabat, 2013
- Devolder, P., *Cours de prévoyance et assurances de groupe*, INSEA, Rabat, 2012
- Faleh, A., *Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite*, Thèse de doctorat, Lyon, 2011
- HCP, *Rapport final relatif à la soutenabilité des systèmes de retraite*, Rabat, 2012
- La Vie Eco, *Les réserves de la CNSS sont les moins rémunérées parmi celles des caisses de retraite*, Casablanca, 15 Mai 2012
- Le Matin, *Système de retraite : Une nouvelle réforme s'impose d'urgence*, Casablanca, 08 Janvier 2014
- Les Inspiration ECO, *Comment les caisses gèrent leurs réserves*, Casablanca, 12 Mai 2013
- Moukhaiber, M., *Gestion Actif-Passif pour un portefeuille de produits d'épargne : Application par immunisation et par allocation d'actifs*, Mémoire de fin d'études, Lyon, 2013
- Planchet, F., P. Thérond et A. Kamega, *Scénarios Economiques en Assurance-Modélisation et Simulation*, Economica, 2009
- Thérond, P., *Génération de scénarios économiques : Modélisation des taux d'intérêt*, Lyon, 2013

Annexe I : Un Exemple numérique illustratif de la méthode du bootstrapping

Cet exemple est inspiré d'un exemple de livre de Théron « Génération de scénarios économiques : Modélisation des taux d'intérêt », Lyon 2013.

On considère un marché contenant les obligations suivantes :

Tableau 27 : Exemple illustratif de la méthode bootstrapping

Valeur nominale	Maturité (en années)	Coupon annuel	Prix théorique
100	0.5	0%	94.4
100	1	0%	90.0
100	1.5	8%	98.0
100	2	12%	99.0

Source : Adapté de Théron, 2013

On cherche à déterminer les taux zéro-coupon correspondant à ce marché.

✓ Détermination du taux zéro coupon $R(0, \frac{1}{2})$:

$$100 = 94.4 * (1 + R(0, \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}$$

$$R(0, \frac{1}{2}) = (\frac{100}{94.4})^2 - 1$$

$$R(0, \frac{1}{2}) = 0.1103$$

✓ Détermination du taux zéro coupon $R(0, 1)$:

D'une manière identique et par des calculs similaires, on retrouve :

$$R(0,1) = 0.1111$$

✓ Détermination du taux zéro coupon $R(0, \frac{3}{2})$:

$$98 = \frac{8}{(1+0,1103)^{\frac{1}{2}}} + \frac{108}{(1+R(0, \frac{3}{2}))^{\frac{3}{2}}}$$

$$R(0, \frac{3}{2}) = 0.1258$$

✓ Détermination du taux zéro coupon $R(0, 2)$:

$$99 = \frac{12}{(1+0,1111)^1} + \frac{112}{(1+R(0,2))^2}$$

$$R(0,2) = 0.1269$$

Ainsi, on obtient des taux zéro-coupon correspondant à chacun des maturités $\frac{1}{2}$ an, 1 an, $\frac{3}{2}$ ans et 2 ans.

Supposons maintenant qu'on veut le taux zéro-coupon d'une maturité qui ne correspond à aucune des maturités calculées ($\frac{3}{4}$ ans par exemple).

Ce problème est résolu par l'interpolation linéaire. Ainsi, d'une manière générale,

lorsqu'on cherche le taux zéro-coupon correspondant à une maturité t entre t_1 et t_2 (étant donné qu'on possède les taux zéro-coupons correspondants à ces deux maturités). Le taux zéro-coupon $R(0,t)$ correspondant à cette maturité est calculé par l'interpolation linéaire comme suit :

$$R(0,t) = \frac{(t_2-t)R(0,t_1) + (t-t_1)R(0,t_2)}{t_2-t_1}$$

Ainsi, on peut linéariser la courbe des taux zéro-coupons.

Annexe II : La courbe des taux zéro-coupons du marché marocain au 31/12/2013

Courbe zéro-coupons 31/12/2013	
Maturité (années)	Taux
1	3,98%
2	4,42%
3	4,59%
4	4,77%
5	4,95%
6	5,10%
7	5,27%
8	5,44%
9	5,61%
10	5,79%
11	5,83%
12	5,88%
13	5,93%
14	5,98%
15	6,03%
16	6,07%
17	6,11%
18	6,15%
19	6,19%
20	6,23%
21	6,26%
22	6,28%
23	6,31%
24	6,33%
25	6,36%
26	6,37%
27	6,39%
28	6,41%
29	6,42%
30	6,44%

Annexe III : Code MATLAB du modèle Leibowitz

```
%Saisie des données
rf=178.95/100;
vola=14.07/100;
volp=16,7/100;
volo=1.06/100;
ra=11.20/100;
ro=4.50/100;
rp=11,16/100;
corr=4.55/100;
u=5/100;
q=1.96;

%Traitement des données

%I. CONTRAINTE SUR LE SURPLUS

%calcul de déterminant
%calcul de b²
-2*rf^2*vola*ro;%val1
2*rf*(volp+rf*vola*corr);%val2
-2*rf*volp;%val3
symsx;
f=inline('-0.0406*x^2+57.3050*x-57.2640','x');
b2=f(x)^2;
simple(b2);%on aura l'expression simplifiée de b² : VAL I
%calcul de a*c
rf^2*volo^2/(q^2);%val1
rf^4*volo^2*volp^2*vola^2;%val2
2*rf^3*vola*volp*volo^2*corr;%val3
symsx;
g=inline('val1*((1-x)^2*(178.95/100*(x*11.20/100+(1-x)*4.50/100)-rp-8/100)-val2*x^2*(1-x)^2+val3*x*(1-x)^2','x');
ac=g(x)
simple(ans)%on aura l'expression simplifiée de a*c : VAL II
b2-4*ac; %VALIII
h=inline('VALIII','x');
h(x)%le déterminant
simple(ans) %l'expression simplifiée du déterminant
%Recherche des solutions (alpha) positives
% on plote la fonction de déterminant
x = -100:0.01:100;
%la fonction plot exige des valeurs réelles et n'accepte pas à ce qu'on lui
%affecte des variables déclarées. Dans notre cas, voici le résultat:
plot((23755863758421268696367*x.^4)/14411518807585587200000000-
(82564321493059050820921309*x.^3)/180143985094819840000000000+
(397108758996293258215771311*x.^2)/360287970189639680000000000-
(75299531244065793656722467*x)/90071992547409920000000000+
5361263282672087240461/28147497671065600000000)
%On retrouve graphiquement les valeurs optimales de alpha
%On les injecte dans l'équation afin de retrouver les volo
%l'équation est sous forme de ax²+bx+c=0
alpha=0:0.001:1;
a=rf.^2*(1-alpha).^2;
a=a';%valeur de a
I=ones(1001,1);%pour le cas de alpha=0:0.01:1
b=2*rf.^2*alpha*(I-alpha)*vola*corr-2*rf*(I-alpha)*volp; %val de b
c=((rf*(alpha*ra+(I-alpha)*ro)-rp-u)/q).^2-volp.^2-
rf.^2*alpha.^2*vola.^2+2*rf*alpha*vola*volp*corr; %val de c
x = -100:0.0001:100;
%Calcul de Rpf et vol(Pf)
for i=1:length(z)-1
Rpf(i)=x(i)*ra+(1-x(i))*ro;
Volpf(i)=realsqrt(x(i).^2*vola.^2+(1-x(i)).^2*volo.^2+2*x(i)*(1-
x(i))*vola*volo*corr);
end
```



```
plot(Volpf,Rpf)%Tracé de la contrainte sur le surplus

%II. CONTRAINTE SUR L'ACTIF
qq=1.43;%quantile correspondant à la contrainte sur l'actif
xx=0:0.001:0.1;
yy=u+qq*xx;
plot(xx,yy);

%III. Tracé des deux contraintes sur le même graphique
plot(Volpf,Rpf)
holdall
plot(xx,yy)
```